

через ось вращения и, следовательно, через центр инерции. Соответствующая компонента обобщенного импульса есть момент количества движения относительно оси; мы будем обозначать этот момент через  $\kappa$ . Изменяя  $\kappa$ , мы получим различные линейные серии конфигураций равновесия.

В случае вращающейся жидкой массы число обобщенных координат бесконечно велико, все же в некоторых отношениях теория остается неизменной. Предположим на мгновение, что жидкость покрывает твердое вращающееся ядро. Если ядро вынуждено вращаться с постоянной угловой скоростью или (что по существу сводится к тому же) если оно обладает очень большой массой, то мы имеем первую форму задачи; если же, наоборот, ядро свободно, то имеет место вторая форма. Различие между обеими формами исчезает, если мы ограничимся такими возмущениями, которые не оказывают влияния на момент инерции системы относительно оси вращения.

Вторая форма задачи для нашей точки зрения важнее. Мы придем к случаю однородной вращающейся жидкой массы, если примем, что ядро становится бесконечно малым. Для этого случая решение задачи о тносительного равновесия отчасти известно. Прежде всего мы имеем линейную серию эллипсоидов Маклорена, в которой  $\frac{a}{R}$  возрастает от 1 до  $\infty$ , когда  $\kappa$  изменяется от 0 до  $\infty$  (§ 374). Далее мы имеем две<sup>1)</sup> серии эллипсоидов Якоби, в которых  $\frac{a}{b}$  изменяется в одном случае от 1 до  $\infty$ , а в другом от 1 до 0, когда  $\kappa$  изменяется от  $0,304 M^{3/2} R^{1/2}$  до  $\infty$ ;  $a$  и  $b$  обозначают здесь обе экваториальные полуоси (§ 375). Если  $\kappa = 0,304 M^{3/2} R^{1/2}$ , то имеет место форма бифуркации и вместе с тем изменение характера устойчивости.

**§ 379.** В качестве простого приложения предшествующей теории исследуем вековую устойчивость эллипсоида Маклорена для таких эллипсоидальных возмущений, при которых ось вращения остается главной осью<sup>2)</sup>.

Пусть  $\omega$  будет угловая скорость в состоянии равновесия и  $\kappa$  — момент количества движения.

Если обозначить через  $I$  момент инерции возмущенной системы, то в случае, когда система вращается как твердое тело, угловая скорость будет равна  $\frac{\kappa}{I}$ . Отсюда следует

$$V + K = V + \frac{1}{2} I \left( \frac{\kappa}{I} \right)^2 = V + \frac{1}{2} \frac{\kappa^2}{I}, \quad (1)$$

<sup>1)</sup> Обе серии содержат одинаковую последовательность геометрических форм; однако, с рассматриваемой здесь точки зрения их следует считать аналитически различными.

<sup>2)</sup> Poincaré, см. выше. Более аналитическое исследование находится у Bassett, On the Stability of Maclaurin's Liquid Spheroid, Proc. Camb. Phil. Soc., VIII, 23 (1892).

и условие для векторной устойчивости заключается в том, что это выражение должно быть минимумом. Мы будем предполагать для определенности, что нулевое значение  $V$  соответствует состоянию бесконечной протяженности. При всякой другой конфигурации значение  $V$  будет отрицательным.

В наших прежних обозначениях имеем

$$I = \frac{1}{5} M(a^3 + b^3), \quad (2)$$

где  $c$  — ось вращения. Так как  $abc = R^3$ , то мы можем положить

$$V + \frac{5}{2} \cdot \frac{x^3}{M(a^3 + b^3)} = f(a, b), \quad (3)$$

где  $f(a, b)$  — симметрическая функция обеих независимых переменных  $a, b$ . Если мы рассмотрим поверхность, ордината которой есть  $f(a, b)$ , причем  $a, b$  должны рассматриваться как прямоугольные координаты точки на горизонтальной плоскости, то фигуры относительного равновесия будут соответствовать точкам стационарной высоты, и для векторной устойчивости, кроме того, высота должна быть минимумом.

Для  $a = \infty$  или  $b = \infty$  будет  $f(a, b) = 0$ . Для  $a = 0$  имеем  $V = 0$  и  $f(a, b)$  пропорционально  $\frac{1}{b^2}$ ; аналогичный результат имеет место для  $b = 0$ . Если одновременно  $a = 0, b = 0$ , то  $f(a, b) = \infty$ . Известно, что для любого значения  $x$  всегда существует одна и только одна возможная форма эллипсоида Маклорена. Отсюда, если рассмотрим пересечение названной поверхности с плоскостью симметрии ( $a = b$ ), то заметим, что ордината будет изменяться от  $\infty$  до 0 и будет иметь в этом интервале одно и только одно стационарное значение. Это значение, очевидно, отрицательное и представляет собою минимум<sup>1)</sup>.

Поэтому высота в этой точке не может быть максимумом. Более того, так как существует предел для отрицательных значений  $V$  (который соответствует тому моменту, когда эллипсоид обращается в шар), то на поверхности всегда существует, по крайней мере одна, конечная точка с минимальной (и притом отрицательной) высотой.

На основании таблиц на стр. 892 получается, что для  $x < 0,304 M^{3/2} R^{1/2}$  существует одна и только одна форма эллипсоидального равновесия, и эта форма есть эллипсоид вращения. Предшествующие рассуждения показывают, что она соответствует точке минимальной высоты и для симметрических эллипсоидальных возмущений векторным образом устойчива.

Если  $x > 0,304 M^{3/2} R^{1/2}$ , то имеются три точки стационарной высоты: одна соответствует эллипсоиду Маклорена и лежит в плоскости симметрии, а две другие соответствуют формам Якоби и расположены симметрично по обе стороны этой плоскости. Из топографических соображений тотчас же видим, что высота обеих последних точек должна быть минимумом, а в первой точке не может быть ни максимума, ни минимума. Всякое другое расположение обусловило бы наличие дополнительных точек стационарной высоты.

Окончательный результат исследования можно высказать так: эллипсоид Маклорена при эллипсоидальных возмущениях оказывается векторным образом устойчивым или неустойчивым, смотря по тому, меньше эксцентриситет  $e$  или больше, чем 0,8127; таков именно эксцентриситет того эллипсоида вращения, с которого начинается

<sup>1)</sup> Оказывается, что эллипсоид Маклорена для деформаций, при которых поверхность его остается эллипсоидом вращения, всегда устойчив.

серия Якоби. Эллипсоиды Якоби все устойчивы по отношению к такого рода возмущениям<sup>1)</sup>.

Дальнейшее исследование устойчивости эллипсоида Маклорена завело бы нас слишком далеко. Пуанкаре показал, что в этом случае равновесие обладает нековой устойчивостью относительно всякого рода возмущений, пока  $e$  лежит ниже названного выше предела. Это устанавливается тем, что для эллипса вращения с меньшим эксцентриситетом не существует формы бифуркации.

Из рассмотрения „обмена устойчивостей“ следует, что серия Якоби вначале вполне устойчива.

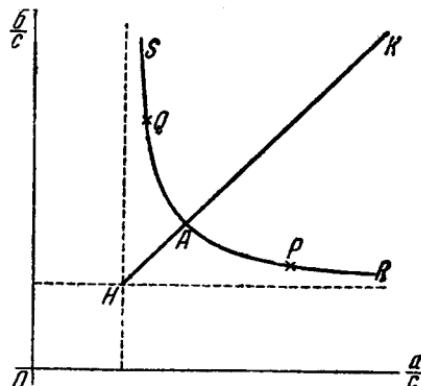
**§ 380.** Пуанкаре исследовал далее коэффициенты устойчивости рядов эллипсоидов Маклорена и Якоби при помощи функций Ламе, чтобы выяснить, какие члены представляют формы бифуркации. Он нашел, что существует бесконечно много форм такого рода, а следовательно, и бесконечно много других линейных серий фигур равновесия. В каждом случае оказывается возможным указать форму членов новой серии в окрестности точки бифуркации. Исследование этого вопроса было продолжено Дарвином<sup>2)</sup> и самим Пуанкаре в более поздней работе<sup>3)</sup>.

Наибольший интерес привлек к себе случай первой бифуркации, которая имеет место в серии эллипсоидов Якоби. По Дарвину критическим эллипсоидом оказывается

тот, для которого  $\frac{a}{R} = 1,8858$ ,  $\frac{b}{c}$

$\frac{b}{R} = 0,8150$ ,  $\frac{c}{R} = 0,6507$ . Начиная с этого места, эллипсоиды Якоби оказываются неустойчивыми.

На фиг. 91<sup>4)</sup>, где отношения  $\frac{a}{c}$  и  $\frac{b}{c}$  взяты в качестве координат, прямая  $NAK$  представляет серии эллипсоидов Маклорена, отвечающих различным значениям  $\kappa$ , тогда как ветви  $AR$  и  $AS$  представляют серии фигур Якоби. Точка  $H$  соответствует случаю шара, для которого  $\kappa = 0$ ; серия Маклорена от  $H$  до



Фиг. 91.

<sup>1)</sup> Этот результат, так же как и предшествующий, был высказан без доказательства Томсоном и Тэтом, *Natural Philosophy* (2 изд.), § 778.

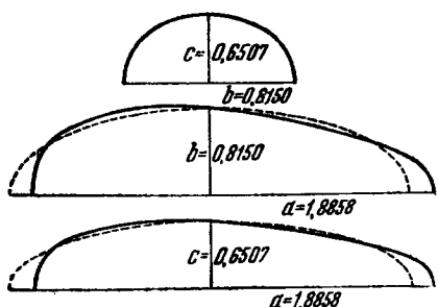
<sup>2)</sup> Darwin, On the Pear-shaped Figure of Equilibrium of a Rotating Mass of Liquid, *Phil. Trans.*, A, CXCVIII, 301 (1901) (*Papers*, III, 288).

<sup>3)</sup> Poincaré, Sur la stabilité des figures pyriformes affectées par une masse fluide en rotation, *Phil. Trans.* A, CXCVIII, 333 (1901).

<sup>4)</sup> Рисунок построен по таблицам на стр. 889, 892. Набросок находится в книге Пуанкаре.

А устойчива, а далее неустойчива. Точки  $P$ ,  $Q$  обозначают места, в которых эллипсоиды Якоби становятся неустойчивыми. В этих

точках ответвляются новые серии. Трудный вопрос об устойчивости этих последних серий был исследован Дарвином, Пуанкаре и Джинсом<sup>1</sup>). Последний из этих авторов пришел к определенному заключению, что эти серии вначале неустойчивы. Первые члены этих новых серий имеют „грушевидную“ форму, показанную на фиг. 92. Эти фигуры взяты из только что указанной работы Дарвина.



Фиг. 92

Соответствующая плоская задача была исследована Джинсом<sup>2</sup>) при помощи специального метода.

### Малые колебания.

**§ 381.** Малые колебания вращающихся эллипсоидальных масс были исследованы различными авторами.

Простейшие из всех возможных типов возмущений суть те, при которых поверхность жидкой массы остается эллипсоидом, и ось вращения является главной осью этого эллипсоида. В случае эллипсоида Маклорена существует два различных типа возмущений этого рода; при одном из них поверхность жидкой массы остается эллипсоидом вращения, в то время как при другом экваториальные оси становятся неравными, причем одна ось возрастает, а другая убывает, полярная же ось остается неизменной. Риман<sup>3</sup>) показал, что второй тип становится неустойчивым, когда эксцентриситет  $e$  меридионального сечения превосходит значение 0,9529. В этом исследовании не принимались во внимание силы трения, и критерий относится к „обыкновенной устойчивости“.

В § 379 мы видели, что равновесие становится практически неустойчивым, когда  $e$  превосходит значение 0,8127. Периоды обоих римановых типов колебаний (для  $e < 0,9529$ ) были вычислены Лявом<sup>4</sup>),

<sup>1)</sup> Poincaré, см. выше; Darwin, The Stability of the Pear-shaped Figure of Equilibrium, Phil. Trans. A, CC, 251 (1902) (Papers, III, 317); Jeans, см. выше, стр. 897.

<sup>2)</sup> Jeans, On the Equilibrium of Rotating Liquid Cylinders, Phil. Trans. A, CC, 67 (1902).

<sup>3)</sup> Riemann, Beitrag zu den Untersuchungen über die Bewegung eines flüssigen gleichartigen Ellipsoides, Gött. Abh., IX, 3 (1860) (Werke, стр. 192). См. также Basset, Hydrodynamics, § 367. Риман указывает также, что эллипсоиды Якоби устойчивы по отношению к эллипсоидальным возмущениям (в указанном выше ограниченном смысле).

<sup>4)</sup> Love, On the Oscillations of a Rotating Liquid Spheroid and the Genesis of the Moon, Phil. Mag. (5), XXVII, 254 (1889). Симметрическая форма может быть легко исследована посредством уравнения (23) § 384 этой книги.

который исследовал также колебания в двух измерениях (эллиптического типа) вращающегося эллиптического цилиндра<sup>1</sup>).

В более общей постановке проблема малых колебаний была исследована Пуанкаре<sup>2</sup>). Из § 207 получается, что уравнения малых движений относительно вращающихся осей могут быть написаны в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - 2\omega v &= -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + 2\omega u &= -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= -\frac{\partial \psi}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где

$$\psi = \frac{p}{\rho} + \Omega - \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) \quad (2)$$

и  $\Omega$  обозначает потенциал тяготения жидкой массы. Из этих уравнений и из уравнения непрерывности

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3)$$

следует

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta \psi + 4\omega^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0. \quad (4)$$

Если мы примем, что  $u$ ,  $v$ ,  $w$  пропорциональны  $e^{i\sigma t}$ , то будем иметь

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{i\sigma \frac{\partial \psi}{\partial x} + 2\omega \frac{\partial \psi}{\partial y}}{\sigma^2 - 4\omega^2}, \\ v &= \frac{-2\omega \frac{\partial \psi}{\partial x} + i\sigma \frac{\partial \psi}{\partial y}}{\sigma^2 - 4\omega^2}, \\ w &= \frac{i}{\sigma} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

и, следовательно, на основании уравнения (3) или непосредственно из уравнения (4) получим

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \left(1 - \frac{4\omega^2}{\sigma^2}\right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0. \quad (6)$$

Если положить

$$1 - \frac{4\omega^2}{\sigma^2} = \tau^2, \quad z = \tau z', \quad (7)$$

<sup>1)</sup> Love, On the Motion of a Liquid Elliptic Cylinder under its own Attraction, Quart. Journ. Math., XXIII, 153 (1888).

<sup>2)</sup> См. выше, стр. 897.

то уравнение (6) примет вид

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0. \quad (8)$$

Если уравнение невозмущенного эллипсоида имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (9)$$

то подходящими решениями уравнения (8) будут те, которые содержат эллипсоидальные функции, отвечающие поверхности

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{\tau^2}{\tau^2}, \quad (10)$$

которая получается из поверхности (9) при помощи однородной деформации<sup>1)</sup>.

На поверхности (9) мы должны иметь  $p = \text{const.}$  и, следовательно,

$$\psi = \Omega - \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2). \quad (11)$$

Потенциал  $\Omega$  возмущенной формы зависит от нормального к поверхности перемещения  $\zeta$ ; эта величина связана с  $\psi$  соотношением вида

$$lu + mv + nw = \frac{\partial \zeta}{\partial t} = i\sigma\zeta, \quad (12)$$

причем значения  $u$ ,  $v$ ,  $w$  на поверхности должны быть взяты из формул (5).

Ход вычислений при этом получается следующий. В предположении, что  $\zeta$  есть эллипсоидальная поверхностная гармоническая функция, относящаяся к поверхности (9), вычисляется значение  $\Omega$  на поверхности и подставляется в уравнение (11). Получающееся поверхностное значение  $\psi$  выражается затем через эллипсоидальные функции, относящиеся к вспомогательной поверхности (10); соответствующее выражение функции  $\psi$  для внутренних точек может быть тогда записано в пространственных эллипсоидальных гармонических функциях. Условие (12) дает затем уравнение для определения  $\sigma$ , и при этом оказывается, что это уравнение всегда алгебраическое.

В случае эллипсоида Маклорена ход вычислений несколько упрощается, так как входящие при этом гармонические функции принадлежат к виду, исследованному в §§ 104, 107. Эта задача исчерпывающим образом была разрешена Брианом<sup>2)</sup>, который, в частности,

<sup>1)</sup> Оказывается, что для некоторых форм свободных колебаний  $\tau$  получается мнимым, и потому поверхность (9) для этих случаев есть гиперболоид.

<sup>2)</sup> Br u a n, The Waves on a Rotating Liquid Spheroid of Finite Ellipticity, Phil. Trans. A, CLXXX, 187 (1888).

дополнил исследование Римана, показав, что будет иметь место „обыкновенная“ устойчивость равновесия, пока эксцентриситет меридиана будет меньше, чем 0,9529.

### Эллипсоиды Дирихле.

**§ 382.** Движение жидкой массы под действием взаимного притяжения ее частиц с меняющейся эллипсоидальной граничной поверхностью в первый раз было исследовано Дирихле<sup>1)</sup>. Положив в основу метод Лагранжа, изложенный в § 13, он подверг исследованию целый класс движений, при которых перемещения выражаются как линейные функции координат. Эти исследования на той же основе были продолжены Дедекином<sup>2)</sup> и Риманом<sup>3)</sup>. Позднее Гринхильль<sup>4)</sup> и другие авторы показали, что некоторые части этой проблемы с большим успехом могут быть исследованы при помощи метода Эйлера.

Рассмотрим прежде всего случай, когда эллипсоид не меняет направления осей и внутреннее движение является потенциальным. Этот случай интересен как пример конечных колебаний жидкой массы около сферической формы.

Выражение для потенциала скоростей было дано в § 110, а именно:

$$\varphi = -\frac{1}{2} \left( \frac{\dot{a}}{a} x^2 + \frac{\dot{b}}{b} y^2 + \frac{\dot{c}}{c} z^2 \right), \quad (1)$$

причем условие постоянства объема представляется в виде

$$\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c} = 0. \quad (2)$$

Давление на основании (4) § 20 определяется из уравнения

$$\frac{p}{\rho} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \Omega - \frac{1}{2} q^2 + F(t); \quad (3)$$

подставляя значение  $\Omega$  из § 373, получим

$$\frac{p}{\rho} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\ddot{a}}{a} x^2 + \frac{\ddot{b}}{b} y^2 + \frac{\ddot{c}}{c} z^2 \right) - \pi \rho (\alpha_0 x^2 + \beta_0 y^2 + \gamma_0 z^2) + F(t). \quad (4)$$

<sup>1)</sup> Dirichlet, Untersuchungen über ein Problem der Hydrodynamik, Gött., Abh., VIII, 3 (1860); Crelle, LVIII, 181 (Werke, II, 263). Эта работа появилась впервые после смерти автора и была издана и расширена Дедекином.

<sup>2)</sup> Dedeckind, Crelle, LVIII, 217 (1861).

<sup>3)</sup> Riemann, см. выше, стр. 904.

<sup>4)</sup> Greenhill, On the Rotation of a Liquid Ellipsoid about its Mean Axis, Proc. Camb. Phil. Soc., III, 233 (1879); On the general Motion of a Liquid Ellipsoid under the Gravitation of its own parts, Proc. Camb. Phil. Soc., IV, 4 (1880).

Условие, что давление всюду на ограничивающей поверхности

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (5)$$

должно быть одинаковым, приводится поэтому к виду

$$\left( \frac{\ddot{a}}{a} + 2\pi\varrho a_0 \right) a^2 = \left( \frac{\ddot{b}}{b} + 2\pi\varrho \beta_0 \right) b^2 = \left( \frac{\ddot{c}}{c} + 2\pi\varrho \gamma_0 \right) c^2. \quad (6)$$

Эти уравнения вместе с условием (2) определяют изменения величин  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Умножая три слагаемых в условии (2) на одинаковые величины (6), получим

$$\dot{a}\ddot{a} + \dot{b}\ddot{b} + \dot{c}\ddot{c} + 2\pi\varrho(a_0\dot{a}\dot{a} + \beta_0\dot{b}\dot{b} + \gamma_0\dot{c}\dot{c}) = 0. \quad (7)$$

Подставляя в это уравнение значения  $a_0$ ,  $\beta_0$ ,  $\gamma_0$  из § 373, можем написать интеграл его в виде

$$\dot{a}^2 + \dot{b}^2 + \dot{c}^2 - 4\pi\varrho abc \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\Delta} = \text{const.} \quad (8)$$

Уже было доказано (§ 373), что потенциальная энергия равна

$$V = \text{const.} - \frac{8}{15} \pi^2 \varrho^2 a^2 b^2 c^2 \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\Delta}; \quad (9)$$

из формулы же (1) легко получается, что кинетическая энергия будет равна

$$T = \frac{2}{15} \pi\varrho abc (\dot{a}^2 + \dot{b}^2 + \dot{c}^2). \quad (10)$$

Поэтому формула (8) есть не что иное, как уравнение энергии

$$T + V = \text{const.} \quad (11)$$

Если эллипсоид есть эллипсоид вращения ( $a = b$ ), то уравнение (8) вместе с равенством  $a^2 c = R^3$  достаточно для определения движения. В этом случае получаем

$$\frac{2}{15} \pi\varrho R^3 \left( 1 + \frac{R^3}{2c^3} \right) \dot{c}^2 + V = \text{const.} \quad (12)$$

Характер движения зависит от полной энергии. Если полная энергия меньше, чем потенциальная энергия в состоянии бесконечного рассеяния, то эллипсоид совершает правильные колебания между сплющенной и вытянутой формами с периодом, зависящим от амплитуды; если, наоборот, энергия превосходит это предельное значение, то колебания прекращаются, и эллипсоид стремится к одной из двух предельных форм, а именно: либо к бесконечной материальной линии

совпадающей с осью  $z$ , либо к безгранично распространенному во все стороны тонкому слою, совпадающему с плоскостью  $xy^1$ ).

Если в случае эллипсоида вращения наложить на потенциальное движение, определяемое формулой (1), равномерное вращение вокруг оси  $z$  с угловой скоростью  $\omega$ , то составляющие скорости, параллельные неподвижным осям, будут равны

$$u = \frac{\dot{a}}{a} x - \omega y, \quad v = \frac{\dot{a}}{a} y + \omega x, \quad w = \frac{\dot{c}}{c} z. \quad (13)$$

Уравнения Эйлера [§ 6 (2)] приводятся в этом случае к виду

$$\left. \begin{aligned} \frac{\ddot{a}}{a} x - \dot{\omega} y - 2 \frac{\dot{a}}{a} \omega y - \omega^2 x &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial \Omega}{\partial x}, \\ \frac{\ddot{a}}{a} y + \dot{\omega} x + 2 \frac{\dot{a}}{a} \omega x - \omega^2 y &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial \Omega}{\partial y}, \\ \frac{\ddot{c}}{c} z &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial \Omega}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Первые два уравнения после перекрестного дифференцирования дают

$$\frac{\dot{\omega}}{\omega} + 2 \frac{\dot{a}}{a} = 0 \quad (15)$$

или

$$\omega a^2 = \omega_0 a_0^2, \quad (16)$$

что и представляет собой выражение теоремы Гельмгольца о том, что „интенсивность“ вихря постоянна (§ 146). В силу соотношения (15) уравнения (14) имеют интеграл

$$\frac{p}{\rho} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\ddot{a}}{a} - \omega^2 \right) (x^2 + y^2) - \frac{1}{2} \frac{\ddot{c}}{c} z^2 - \Omega + \text{const.} \quad (17)$$

Если ввести для  $\Omega$  значение (4) из § 373, то найдем, что давление на поверхности

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (18)$$

будет постоянным при условии

$$\left( \frac{\ddot{a}}{a} + 2\pi\rho a_0 - \omega^2 \right) a^2 = \left( \frac{\ddot{c}}{c} + 2\pi\rho \gamma_0 \right) c^2. \quad (19)$$

В силу соотношения (15) и условия постоянства объема

$$2 \frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{c}}{c} = 0 \quad (20)$$

равенство (19) может быть написано в виде

$$2\dot{a}\ddot{a} + \dot{c}\ddot{c} + 2(\omega^2 a\dot{a} + \omega\dot{\omega}a^2) + 4\pi\rho a_0 \dot{a} + 2\pi\rho \gamma_0 \dot{c} = 0; \quad (21)$$

<sup>1)</sup> Dirichlet, см. выше, стр. 907. Когда амплитуда колебаний мала, то период должен совпадать с тем, который мы получим, если в формуле (10) § 262 положим  $n=2$ . Это было подтверждено Хиксоном. Proc. Camb Phil. Soc., IV, 309 (1883).

отсюда следует

$$2\dot{a}^2 + \dot{c}^2 + 2\omega^2 a^2 - 4\pi\rho a^2 c \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)^{1/2}} = \text{const.} \quad (22)$$

Последнее равенство опять можно рассматривать как уравнение энергии.

Если мы примем  $c$  за независимую переменную, то соотношение (22) можно написать в виде

$$\frac{2}{15} \pi \rho R^3 \left\{ \left( 1 + \frac{R^3}{2c^3} \right) c^2 + \frac{2\omega_0^2 a_0^4}{R^3} c \right\} + V = \text{const.} \quad (23)$$

При подходящих начальных условиях поверхность будет совершать правильные колебания между двумя крайними формами. Так как в случае вытянутого эллипсоида  $V$  возрастает вместе с  $c$ , то очевидно, что для вращающегося эллипсоида независимо от начальных условий существует предел возможного удлинения в направлении оси. Напротив, в экваториальной плоскости мы можем иметь неограниченное расширение<sup>1)</sup>.

Полагая

$$K = \frac{4}{15} \pi \rho a_0^2 a_0^4 c, \quad (24)$$

будем иметь условие относительного равновесия, выводя его из уравнения (22), в виде

$$\frac{d}{dc} (V + K) = 0, \quad (25)$$

в согласии с (2) § 378. Малые колебания (симметрического типа) около положения равновесия можно исследовать, полагая  $c = c_0 + c'$ , где  $c_0$  есть решение уравнения (25), и рассматривая  $c'$  как величину малую.

**§ 383.** Исследование движений жидкой массы, ограниченной поверхностью эллипсоида переменной формы, было проведено далее Риманом в названной выше работе. Эта проблема явилась с того времени предметом обширной литературы, которую мы отчасти приводим в примечании<sup>2)</sup>. Случай, когда эллипсоидальная граничная поверхность имеет неизменную форму, но вращается вокруг главной оси ( $Oz$ ), может быть исследован очень простым способом<sup>3)</sup>.

Если обозначить через  $u$ ,  $v$ ,  $w$  относительные скорости по отношению к системе осей ( $xy$ ), вращающейся в своей собственной плоскости с постоян-

1) Dirichlet, см. выше, стр. 907.

2) Brioschi. Développements relatifs au § 3 des Recherches de Dirichlet sur un problème d'Hydrodynamique, Crelle, LIX, 63 (1861); Lipschitz, Reduction der Bewegung eines flüssigen homogenen Ellipsoids auf das Variationsproblem eines einfachen Integrals..., Crelle, LXXVIII, 245 (1874); Greenhill, см. выше, стр. 907; Basset, On the Motion of a Liquid Ellipsoid under the Influence of its own Attraction, Proc. Lond. Math. Soc., XVII, 255 (1886) (Hydrodynamics, гл. XV); Tedone, Il moto di un ellissoide fluido secondo l'ipotesi di Dirichlet, Pisa, 1894; Stekloff, Problème du mouvement d'une masse fluide incompressible de la forme ellipsoïdale..., Ann. de l'école normale (3), XXVI (1909); Hargreaves, Camb. Trans., XXII, 61 (1914).

3) Greenhill, см. выше, стр. 907.

ной угловой скоростью  $\omega$ , то уравнения движения на основании § 207<sup>1)</sup> будут иметь вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{Du}{Dt} - 2\omega v - \omega^2 x &= -\frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial \Omega}{\partial x}, \\ \frac{Dv}{Dt} + 2\omega u - \omega^2 y &= -\frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial \Omega}{\partial y}, \\ \frac{Dw}{Dt} &= -\frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial \Omega}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Если вектор-вихрь  $\zeta$ , направление которого параллельно оси  $z$ , всюду в жидкости имеет постоянное значение, то проекции абсолютной скорости на мгновенные направления осей будут соответственно равны

$$\left. \begin{aligned} u - \omega y &= \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \left( \omega - \frac{1}{2} \zeta \right) y - \frac{1}{2} \zeta y, \\ v + \omega x &= \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \left( \omega - \frac{1}{2} \zeta \right) x + \frac{1}{2} \zeta x, \\ w &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

так как все условия, очевидно, будут выполнены, если на равномерное вращение с угловой скоростью  $\frac{1}{2} \zeta$  будет наложено безвихревое движение которое получится благодаря вращению твердой эллипсоидальной оболочки с угловой скоростью  $\omega - \frac{1}{2} \zeta$  (ср. § 110). Отсюда следуют равенства

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{2a^2}{a^2 + b^2} \left( \omega - \frac{1}{2} \zeta \right) y, \\ v &= -\frac{2b^2}{a^2 + b^2} \left( \omega - \frac{1}{2} \zeta \right) x, \\ w &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Подставляя эти выражения в уравнения (1) и интегрируя, получаем

$$\begin{aligned} \frac{p}{\varrho} &= \frac{2a^2b^2}{(a^2 + b^2)^2} \left( \omega - \frac{1}{2} \zeta \right)^2 (x^2 + y^2) + \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) - \\ &\quad - \frac{2(b^2x^2 + a^2y^2)}{a^2 + b^2} \omega \left( \omega - \frac{1}{2} \zeta \right) - \Omega + \text{const.} \end{aligned} \quad (4)$$

Отсюда условия на свободной поверхности будут иметь вид

$$\begin{aligned} &\left\{ \frac{2a^2b^2}{(a^2 + b^2)^2} \left( \omega - \frac{1}{2} \zeta \right)^2 + \frac{1}{2} \omega^2 - \frac{2b^2}{a^2 + b^2} \omega \left( \omega - \frac{1}{2} \zeta \right) - \pi \varrho a_0 \right\} a^2 = \\ &= \left\{ \frac{2a^2b^2}{(a^2 + b^2)^2} \left( \omega - \frac{1}{2} \zeta \right)^2 + \frac{1}{2} \omega^2 - \frac{2a^2}{a^2 + b^2} \omega \left( \omega - \frac{1}{2} \zeta \right) - \pi \varrho \beta_0 \right\} b^2 = \\ &\quad = -\pi \varrho \gamma_0 c^2. \end{aligned} \quad (5)$$

Это выражение содержит в себе ряд интересных случаев:

1. Полагая  $\omega = \frac{1}{2} \zeta$ , приходим к условиям для эллипсоида Якоби.
- [§ 374 (5)].

<sup>1)</sup> Можно было бы применить также уравнения § 12, если принять во внимание измененное значение  $u$ ,  $v$ ,  $w$ .

2. Полагая  $\omega = 0$ , что означает, что внешняя граница будет неизменной в пространстве, получаем

$$\left\{ \pi \rho a_0 - \frac{a^2 b^2}{2(a^2 + b^2)^2} \zeta^2 \right\} a^2 = \left\{ \pi \rho \beta_0 - \frac{a^2 b^2}{2(a^2 + b^2)^2} \zeta^2 \right\} b^2 = \pi \rho \gamma_0 c^2. \quad (6)$$

Эти условия равносильны соотношениям

$$(a_0 - \beta_0) a^2 b^2 + \gamma_0 c^2 (a^2 - b^2) = 0 \quad (7)$$

и

$$\frac{\zeta^2}{2\pi\rho} = \frac{(a^2 + b^2)^2}{a^2 b^2} \cdot \frac{a^2 a_0 - b^2 \beta_0}{a^2 - b^2}. \quad (8)$$

Из сравнения с § 375 становится ясным, что  $c$  должна быть наименьшей осью эллипсоида и что значение (8) величины  $\frac{\zeta^2}{2\pi\rho}$  положительно.

Траектории частиц определяются уравнениями

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x} = - \frac{a^2}{a^2 + b^2} \zeta y, \\ \dot{y} = \frac{b^2}{a^2 + b^2} \zeta x, \\ \dot{z} = 0, \end{array} \right\} \quad (9)$$

откуда следует

$$\left. \begin{array}{l} x = ka \cos(\sigma t + \varepsilon), \\ y = kb \sin(\sigma t + \varepsilon), \\ z = 0, \end{array} \right\} \quad (10)$$

где

$$\sigma = \frac{ab}{a^2 + b^2} \zeta, \quad (11)$$

и  $k, \varepsilon$  — произвольные постоянные.

Эти результаты принадлежат Дедекинду<sup>1)</sup>. Ляя заметил, что серии эллипсоидов Дедекинда и Якоби по своей внешней форме тождественны.

3. Пусть  $\zeta = 0$ , т. е. движение свободно от вихрей. Условия (5) приводятся тогда к виду

$$\left. \begin{array}{l} a_0 - \frac{(a^2 - b^2)(a^2 + 3b^2)}{(a^2 + b^2)^2} \frac{\omega^2}{2\pi\rho} \end{array} \right\} a^2 = \left. \begin{array}{l} \beta_0 - \frac{(b^2 - a^2)(3a^2 + b^2)}{(a^2 + b^2)^2} \frac{\omega^2}{2\pi\rho} \end{array} \right\} b^2 = \gamma_0 c^2. \quad (12)$$

Эти условия можно заменить соотношениями

$$a_0(3a^2 + b^2) + \beta_0(3b^2 + a^2); a^2 b^2 - \gamma_0(a^4 + 6a^2 b^2 + b^4) c^2 = 0 \quad (13)$$

и

$$\frac{\omega^2}{2\pi\rho} = \frac{(a^2 + b^2)^2}{a^4 + 6a^2 b^2 + b^4} \cdot \frac{a_0 a^2 - \beta_0 b^2}{a^2 - b^2}. \quad (14)$$

Уравнение (13) определяет  $c$  через  $a, b$ . Предположим, что  $a > b$ ; тогда легко видеть, что левая часть уравнения (13) при  $c = a$  отрицательна, а при  $c = b$  положительна. Поэтому между  $a$  и  $b$  имеется такое действительное значение  $c$ , для которого условие (13) будет выполняться; значение  $\omega$ , полученное из уравнения (14), на том же основании, как в § 375, будет в этом случае действительным.

<sup>1)</sup> Dedekind, см. выше, стр. 907. См. также Love, On Deaekind's Theorem..., Phil. Mag. (5) XXV, 40 (1888).

4. В случае эллиптического цилиндра, вращающегося вокруг своей оси, условия (5) на основании формул (19) § 373 приводятся к виду

$$\omega^2 + \frac{4a^2b^2}{(a^2+b^2)^2} \left(\omega - \frac{1}{2}\zeta\right)^2 = \frac{4\pi\rho ab}{(a+b)^2}. \quad (15)$$

Полагая  $\omega = \frac{1}{2}\zeta$ , получим случай (8) § 375.

Если  $\omega = 0$ , т. е. внешняя граница является установившейся, то будем иметь

$$\zeta^2 = 4\pi\rho \frac{(a^2+b^2)^2}{ab(a+b)^2}. \quad (16)$$

Когда  $\zeta = 0$ , т. е. когда движение свободно от вихрей, имеем

$$\omega^2 = 4\pi\rho \frac{ab(a^2+b^2)^2}{(a+b)^2(a^4+6a^2b^2+b^4)}. \quad (17)$$

**§ 384.** Колебания вращающейся эллипсоидальной жидкой массы, заключенной в твердую оболочку, были исследованы различными авторами<sup>2)</sup>. Мы будем следовать вначале (с некоторыми дополнениями) очень изящному способу Пуанкаре.

Предполагается, что центр масс и главные оси инерции оболочки и жидкости совпадают, а завихрение жидкости всюду одинаково.

Наложим на движение, определяемое формулами (13) § 146, при котором оболочка предполагается твердой, равномерное вращение ( $p, q, r$ ); тогда будем иметь при небольшом изменении обозначений

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{a}{c} q_1 z - \frac{a}{b} r_1 y + qz - ry, \\ v &= \frac{b}{a} r_1 x - \frac{b}{c} p_1 z + rx - pz, \\ w &= \frac{c}{b} p_1 y - \frac{c}{a} q_1 x + py - qx. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Компоненты вектора вихря будут поэтому равны

$$\left. \begin{aligned} \xi &= 2p + \left(\frac{c}{b} + \frac{b}{c}\right)p_1, \\ \eta &= 2q + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right)q_1, \\ \zeta &= 2r + \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right)r_1. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Кинетическая энергия всей системы будет равна

$$2T = Ap^2 + Bq^2 + C^2 + A_1p_1^2 + B_1q_1^2 + C_1r_1^2 + 2Fpp_1 + 2Gqq_1 + 2Hrr_1, \quad (3)$$

<sup>1)</sup> Greenhill, Proc. Camb. Phil. Soc., III, 233 (1879).

<sup>2)</sup> Greenhill, см. выше, стр. 27; Hough, The Oscillations of a Rotating Ellipsoidal Shell containing fluid, Phil. Trans. A, CLXXXVI, 469 (1895), Poincaré, Sur la précession des corps déformables, Bull. Astr., 1910; Basset, Quart. J. of Math., XLV, 223 (1914). Приложение к прецессионным задачам сделал, повидимому, впервые Кельвин (Papers, III, 322 и IV, 129); точное решение принадлежит Гафу и Пуанкаре.

где  $A, B, C$  — главные моменты инерции всей системы, в то время как  $A_1, B_1, C_1, F, G, H$  относятся только к жидкости; в частности, имеем

$$A_1 = \frac{b^2}{c^2} \sum (mz^2) + \frac{c^2}{b^2} \sum (my^2) = \frac{1}{5} \sum (m) (b^2 + c^2) \text{ и т. д.} \quad (4)$$

$$F = \frac{b}{c} \sum (mz^2) + \frac{c}{b} \sum (my^2) = \frac{2}{5} \sum (m) bc \text{ и т. д.} \quad (5)$$

Суммирование здесь распространяется на всю массу жидкости. Главные же моменты инерции оболочки равны

$$A_0 = A - A_1, \quad B_0 = B - B_1, \quad C_0 = C - C_1. \quad (6)$$

Главный момент количества движения системы относительно оси  $Ox$  равен

$$A_0 p + \sum m(yw - zv) = A_0 p + \left( p + \frac{c}{b} p_1 \right) \sum (my^2) + \left( p + \frac{b}{c} p_1 \right) \sum (mz^2) = \\ = Ap + Fp_1 = \frac{\partial T}{\partial p}. \quad (7)$$

Уравнения движения относительно подвижных осей имеют при этом вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial p} - r \frac{\partial T}{\partial q} + q \frac{\partial T}{\partial r} &= L, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q} - p \frac{\partial T}{\partial r} + r \frac{\partial T}{\partial p} &= M, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial r} - q \frac{\partial T}{\partial p} + p \frac{\partial T}{\partial q} &= N, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

где  $L, M, N$  — главные моменты внешних сил.

Уравнения Гельмгольца (4) § 146 в подвижных осях принимают вид

$$\frac{D\xi}{Dt} - r\eta + q\zeta = \xi \frac{\partial u}{\partial x} + \eta \frac{\partial u}{\partial y} + \zeta \frac{\partial u}{\partial z} \text{ и т. д.}; \quad (9)$$

отсюда после подстановки из формул (1) и (2) получаем

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{a}{c} q_1 \zeta - \frac{a}{b} r_1 \eta \text{ и т. д.}; \quad (10)$$

при этом мы смогли применить обозначение полной производной  $\left( \frac{d}{dt} \right)$ , так как, согласно предположению,  $\xi, \eta, \zeta$  суть функции только времени.

Теперь на основании формул (2) можем написать

$$\frac{1}{5} \sum (m) bc\xi = Fp + A_1 p_1 = \frac{\partial T}{\partial p_1}, \quad (11)$$

и уравнения Гельмгольца соответственно этому примут следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial p_1} - q_1 \frac{\partial T}{\partial r_1} + r_1 \frac{\partial T}{\partial q_1} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q_1} - r_1 \frac{\partial T}{\partial p_1} + p_1 \frac{\partial T}{\partial r_1} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial r_1} - p_1 \frac{\partial T}{\partial q_1} + q_1 \frac{\partial T}{\partial p_1} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Подставляя  $T$  из формулы (3) в уравнения (8) и (12), получаем следующие две системы уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} (Ap + Fp_1) - r (Bq + Gq_1) + q (Cr + Hr_1) &= L, \\ \frac{d}{dt} (Bq + Gq_1) - p (Cr + Hr_1) + r (Ap + Fp_1) &= M, \\ \frac{d}{dt} (Cr + Hr_1) - q (Ap + Fp_1) + p (Bq + Gq_1) &= N, \\ \frac{d}{dt} (Fp + A_1p_1) + r_1 (Gq + B_1q_1) - q_1 (Hr + C_1r_1) &= 0, \\ \frac{d}{dt} (Gq + B_1q_1) + p_1 (Hr + C_1r_1) - r_1 (Fp + A_1p_1) &= 0, \\ \frac{d}{dt} (Hr + C_1r_1) + q_1 (Fp + A_1p_1) - p_1 (Gq + B_1q_1) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} (Fp + A_1p_1) + r_1 (Gq + B_1q_1) - q_1 (Hr + C_1r_1) &= 0, \\ \frac{d}{dt} (Gq + B_1q_1) + p_1 (Hr + C_1r_1) - r_1 (Fp + A_1p_1) &= 0, \\ \frac{d}{dt} (Hr + C_1r_1) + q_1 (Fp + A_1p_1) - p_1 (Gq + B_1q_1) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Мы ограничимся теперь случаем симметрии относительно оси  $z$ <sup>1)</sup>; тогда будем иметь

$$a = b, \quad A = B, \quad A_1 = B_1, \quad C_1 = H, \quad F = G. \quad (15)$$

Если теперь главный момент внешних сил относительно оси симметрии будет равен нулю, то будут иметь место уравнения

$$C \frac{dr}{dt} + C_1 \frac{dr_1}{dt} + F (pq_1 - p_1q) = 0, \quad (16)$$

$$C_1 \left( \frac{dr}{dt} + \frac{dr_1}{dt} \right) + F (pq_1 - p_1q) = 0. \quad (17)$$

Отсюда получается  $\frac{dr}{dt} = 0$ , что динамически и непосредственно ясно. Следовательно, имеем

$$r = \text{const.} = \omega \quad (18)$$

и

$$C_1 \frac{dr}{dt} + F (pq_1 - p_1q) = 0. \quad (19)$$

Если имеет место небольшое возмущение из состояния установившегося движения, когда жидкость и твердое тело врачаются вместе как одно тело около оси симметрии, то  $p, q, p_1, q_1$  (вначале для всех случаев) будут малыми величинами. Если пренебречь их произведениями, то величина  $r_1$  на основании уравнения (19) будет постоянной и может считаться малой, так как можно принять, что при установившемся движении она исчезает. При этих упрощениях остальные уравнения системы (13) и (14) приводятся

1) Свободные колебания эллипса с тремя неравными осями были исследованы Гафом (см. выше), который, однако, предполагал отклонения от шаровой формы малыми.

к уравнениям

$$\left. \begin{array}{l} A \frac{dp}{dt} + F \frac{dp_1}{dt} + (C - A) \omega q - F \omega q_1 = L, \\ A \frac{dq}{dt} + F \frac{dq_1}{dt} - (C - A) \omega p + F \omega p_1 = M, \end{array} \right\} \quad (20)$$

$$\left. \begin{array}{l} F \frac{dp}{dt} + A_1 \frac{dp_1}{dt} - C_1 \omega q_1 = 0, \\ F \frac{dq}{dt} + A_1 \frac{dq_1}{dt} + C_1 \omega p_1 = 0. \end{array} \right\} \quad (21)$$

Для астрономических возмущающих сил можно считать типичными соотношения

$$L = \kappa \cos \sigma t, \quad M = \kappa \sin \sigma t. \quad (22)$$

Тогда, полагая

$$p + iq = \tilde{\omega}, \quad p_1 + iq_1 = \tilde{\omega}_1, \quad (23)$$

будем иметь

$$A \frac{d\tilde{\omega}}{dt} + F \frac{d\tilde{\omega}_1}{dt} - i(C - A) \omega \tilde{\omega} + iF \omega \tilde{\omega}_1 = \kappa e^{i\sigma t}, \quad (24)$$

$$F \frac{d\tilde{\omega}}{dt} + A_1 \frac{d\tilde{\omega}_1}{dt} + iC_1 \omega \tilde{\omega}_1 = 0. \quad (25)$$

Для вынужденных колебаний получаем, таким образом,

$$\tilde{\omega} = - \frac{A_1 \sigma + C_1 \omega}{\Delta(\sigma)} i \kappa e^{i\sigma t}, \quad (26)$$

$$\tilde{\omega}_1 = - \frac{F \sigma}{\Delta(\sigma)} i \kappa e^{i\sigma t}, \quad (27)$$

где

$$\Delta(\sigma) = \begin{vmatrix} A\sigma - (C - A)\omega & F(\sigma + \omega) \\ F\sigma & A_1\sigma + C_1\omega \end{vmatrix}. \quad (28)$$

Свободные колебания определяются уравнением

$$\Delta(\sigma) = 0. \quad (29)$$

Мы, главным образом, рассмотрим тот случай, когда отклонение полости от сферической формы мало. Если бы полость была в точности сферической, то на основании формул (4) и (5) мы имели бы

$$A_1 = C_1 = F \quad (30)$$

и потому

$$\Delta(\sigma) = C_1(\sigma + \omega) \{ A_0\sigma - (C_0 - A_0)\omega \}. \quad (31)$$

Отсюда для колебаний (по отношению к вращающимся осям) мы имели бы

$$\sigma = -\omega \text{ и } \sigma = \frac{C_0 - A_0}{A_0} \omega. \quad (32)$$

На основании уравнения (25) первый корень дает  $p = 0$ ,  $q = 0$  и соответствует незначительному постоянному перемещению в пространстве оси вихревого вектора жидкости. Второй корень соответствует свободной "эйлеровой нутации" оболочки, не зависящей в этом случае от наличия жидкости. Равным образом и вынужденные колебания оболочки также не зависят от жидкости.

В общем же случае формула (28) может быть приведена к виду

$$\Delta(\sigma) = A_1(\sigma + \omega) \{ A_0\sigma - (C - A)\omega \} + (A_1^2 - F^2)\sigma^2 + \\ + \{ (C_1 - A_1)A_0 + C_1A_1 - F^2 \} \omega\sigma - (C_1 - A_1)(C - A)\omega^2. \quad (33)$$

Положим

$$\varepsilon = \frac{C_1 - A_1}{A_1} = \frac{a^2 - c^2}{a^2 + c^2}. \quad (34)$$

Будем предполагать эту величину малой; в таком случае она будет совпадать с эллиптичностью полости согласно обычному определению. Из формул (4) и (5) следует также

$$\frac{C_1A_1 - F^2}{C_1A_1} = \varepsilon, \quad \frac{A_1^2 - F^2}{A_1^2} = \varepsilon^2. \quad (35)$$

В качестве первого приближения к свободным колебаниям имеем на основании уравнения (33)

$$\sigma = -\omega \quad \text{и} \quad \sigma = \frac{C - A}{A_0} \omega; \quad (36)$$

второй корень показывает, что период свободной эйлеровой нутации оказывается короче в отношении  $\frac{A_0}{A}$ , чем в том случае, когда вся масса представляет твердое тело, что и следовало ожидать. Приближение можно продолжить, что, однако, не представляет интереса. Влияние малой эллиптичности во всех случаях оказывается незначительным.

Дело меняется в случае вынужденных колебаний, в особенности при большом периоде. Если бы распределение возмущающих сил в пространстве было неизменным, то угловая скорость по отношению к движущимся осям была бы равна  $-\omega$ . Подставляя  $\sigma = -\omega$  в формулы (26) и (28), получаем

$$p + iq = \tilde{\omega} = \frac{\varkappa}{C\omega} ie^{-i\omega t}. \quad (37)$$

Этот результат можно сравнить с формулой для медленной прецессии волчка, которую можно рассматривать теперь уже как частный случай. Полученный результат оказывается совершенно таким же, как если бы масса была во всех отношениях твердой. Следует заметить, что эти рассуждения не зависят от малости  $\varepsilon$ .

Если, однако, распределение возмущающих сил в пространстве медленно меняется и множитель времени есть  $e^{int}$ , то мы должны положить  $\sigma = -\omega + n$ , и тогда получаем

$$p + iq = -\frac{(C_1 - A_1)\omega + A_1n}{\Delta(-\omega + n)} i\kappa e^{-i(\omega - n)t}. \quad (38)$$

Знаменатель этой дроби можно написать в виде

$$\Delta(-\omega + n) = (A_0A_1 + A_1^2 - F^2)n^2 - \\ - \{ C_0A_1 - A(C_1 - A_1) + C_1A_1 - F^2 \} n\omega - C(C_1 - A_1)\omega^2. \quad (39)$$

Если принять во внимание формулы (34) и (35), то получаем следующий результат: если отношение  $\frac{n}{\omega}$  не только вообще мало, но мало именно по сравнению с  $\varepsilon$ , то формула (38) может быть приближенно написана в виде

$$p + iq = \frac{i\kappa}{C\omega} e^{-i(\omega - n)t}; \quad (40)$$

а это опять та же формула, которая должна была бы иметь место, если бы жидкость затвердела. Положенное здесь в основу допущение заключается в том, что отношение (абсолютного) периода  $\frac{2\pi}{\omega}$  возмущающей силы к периоду вращения должно быть велико по сравнению с  $\frac{1}{\epsilon}$ .

Отсюда следует, что совершенно незначительное отклонение формы полости от сферической было бы достаточно, чтобы вынужденные колебания большого периода практически были бы таковы, как если бы вся масса была твердым телом. Если бы земной шар состоял из твердой оболочки, охватывающей жидкую массу с эллиптичностью того же порядка ( $\frac{1}{300}$ ), как и у внешней поверхности Земли, то указанное выше условие, конечно, с избытком будет выполняться для случая лунно-солнечной прецессии, период которой равен 26 000 лет. Напротив, влияние жидкого внутреннего ядра на лунную нутацию с периодом в девятнадцать лет было бы заметно, а на солнечную и лунную нутации с периодами в полгода и в четырнадцать дней (соответственно) это влияние было бы даже существенно<sup>1)</sup>.

Следует еще добавить, что результаты, заключающиеся в формулах (36), поскольку они относятся к *свободным* колебаниям, основаны на предположении, что масса оболочки сравнима с массой жидкости. В предельном случае, когда массой оболочки можно пренебречь, имеет место соотношение

$$\Delta(\sigma) = (A_1^2 - F^2)\sigma(\sigma + \omega) - C_1(C_1 - A_1)\omega^2. \quad (41)$$

Уравнение для определения периодов свободных колебаний будет в этом случае иметь вид

$$(a^2 - c^2)\sigma(\sigma + \omega) - 2a^2\omega^2 = 0. \quad (42)$$

Оказывается, что периоды для  $c < a$  или для  $c > 3a$  будут действительны, а для  $a < c < 3a$  становятся мнимыми. Это согласуется с наблюдением Кельвина<sup>2)</sup>, согласно которому жидкий гиростат, оболочка которого представляет несколько удлиненный эллипсоид вращения, неустойчив, между тем как сплющенная форма устойчива.

**§ 385.** Прецессия жидкого эллипсоида со *свободной* поверхностью также была исследована Пуанкаре; он подтвердил высказывание Кельвина, что если период возмущающих сил достаточно велик, то прецессия практически такова, как если бы масса была твердой. Эта задача значительно труднее, чем предшествующая, так как возмущающие силы вызывают также приливные колебания, и поэтому оказывается необходимым отделить прецессию от деформации, обусловленной этими колебаниями.

Пуанкаре, следя Дирихле, применяет упомянутый в § 382 метод Лагранжа, но представляет интерес, а также и некоторое преимущество, воспользоваться здесь методом предыдущего параграфа (с необходимыми изменениями).

При том и другом способе вычисление имеет несколько косвенный характер. Представим себе, что граничная поверхность жидкости вначале вынуждена (если это необходимо), благодаря соответствующему

<sup>1)</sup> Эти результаты были установлены Кельвином в 1876 г. (Papers, III, 322). Математическое исследование, на котором они основываются, не было опубликовано.

<sup>2)</sup> Kelvin, Papers, IV, 129, 183. Более точный критерий для устойчивости был дан Гринхиллем; см. также Hough, см. выше.

давлению, оставаться эллипсоидом, но при этом размеры его могут меняться. В конце же оказывается, что в этих вынуждающих давлениях нет необходимости (ср. § 382).

Равенства (1) заменяются теперь в соответствии с формулой (5) § 110 следующими:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{a}{c} q_1 z - \frac{a}{b} r_1 y + qz - ry + \frac{\dot{a}}{a} x, \\ v &= \frac{b}{a} r_1 x - \frac{b}{c} p_1 z + rx - pz + \frac{\dot{b}}{b} y, \\ w &= \frac{c}{b} p_1 y - \frac{c}{a} q_1 x + py - qx + \frac{\dot{c}}{c} z, \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

причем изменения осей эллипсоида связаны условием несжимаемости

$$\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c} = 0. \quad (44)$$

Формула (3) для кинетической энергии изменится благодаря этому добавлением члена

$$\frac{1}{5} \sum (m) (\dot{a}^2 + \dot{b}^2 + \dot{c}^2). \quad (45)$$

Знаки у величин  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ , определяемых формулами (4), можно теперь отбросить, так как  $A_0$ ,  $B_0$ ,  $C_0 = 0$ .

Составляющие главного момента количества движения выражаются так же, как в формуле (7), и уравнения движения (13), следовательно, все еще будут иметь силу; при этом следует помнить, что коэффициенты  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $F$ ,  $G$ ,  $H$  не являются уже постоянными, так как они содержат переменные величины  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Обозначения  $L$ ,  $M$ ,  $N$  должны естественно включать в себя моменты (если они существуют) вынуждающих давлений на поверхность.

Составляющие вектора-вихря попрежнему определяются формулами (2) и формула (11) остается неизменной; вместо же формул (10) будем иметь

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\dot{a}}{a} \xi + \frac{a}{c} q_1 \zeta - \frac{a}{b} r_1 \eta_1 \text{ и т. д.} \quad (46)$$

Отсюда следует, если принять во внимание соотношение (44),

$$\frac{d}{dt} (bc\xi) = abq_1\zeta - car_1\eta \text{ и т. д.} \quad (47)$$

Уравнения Гельмгольца сохраняют согласно с этим вид (12), но коэффициенты в уравнениях (14) будут, конечно, переменными.

Проекции ускорения в произвольной точке жидкости можно получить из формул § 12; например, проекция ускорения на ось  $x$  будет равна

$$\frac{du}{dt} - rv + qw + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{Dx}{Dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{Dy}{Dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{Dz}{Dt}, \quad (48)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \frac{Dx}{Dt} &= \frac{\dot{a}}{a} x + \frac{a}{c} q_1 z - \frac{a}{b} r_1 y, \\ \frac{Dy}{Dt} &= \frac{\dot{b}}{b} y + \frac{b}{a} r_1 x - \frac{b}{c} p_1 z, \\ \frac{Dz}{Dt} &= \frac{\dot{c}}{c} z + \frac{c}{b} p_1 y - \frac{c}{a} q_1 x. \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Проекции ускорения оказываются, таким образом, линейными функциями от  $x, y, z$  с коэффициентами, зависящими от  $t$ . Условия для интегрируемости гидродинамических уравнений показывают тотчас, что эти функции должны приводиться к виду

$$ax + hy + gz, \quad hx + \beta y + fz, \quad gx + fy + yz. \quad (50)$$

Это можно, хотя и несколько кропотливо, установить при помощи уравнений Гельмгольца (14), которые и представляют на самом деле упомянутые выше условия интегрируемости. Гидродинамические уравнения принимают поэтому вид

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} &= ax + hy + gz + \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \frac{\partial \Omega'}{\partial x}, \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} &= hx + \beta y + fz + \frac{\partial \Omega}{\partial y} + \frac{\partial \Omega'}{\partial y}, \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} &= gx + fy + yz + \frac{\partial \Omega}{\partial z} + \frac{\partial \Omega'}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

где  $P$  — давление,  $\Omega$  — потенциал самой эллипсоидальной массы и  $\Omega'$  — потенциал отдаленных возмущающих тел.

В обозначениях § 373 будем иметь

$$\Omega = \pi \rho (a_0 x^2 + \beta_0 y^2 + \gamma_0 z^2 - \chi_0). \quad (52)$$

Потенциал же возмущающих сил для точек в окрестности начала можно разложить в ряд по сферическим функциям положительной степени. Члены первого порядка не оказывают никакого влияния на движение по отношению к центру масс, в то время как члены порядка выше второго по обыкновению могут быть отброшены. Мы положим поэтому

$$\Omega' = \frac{1}{2} (A' x^2 + B' y^2 + C' z^2 + 2F' yz + 2G' zx + 2H' xy), \quad (53)$$

причем коэффициенты, которые представляют известные функции времени, вследствие уравнения  $\Delta \Omega' = 0$  должны удовлетворять условию  $A' + B' + C' = 0$ .

Уравнения (51) удовлетворяются поэтому решением вида

$$P = \lambda \rho \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} \right), \quad (54)$$

если

$$a + 2\pi \rho a_0 + A' = \frac{2\lambda}{a^2}, \quad \beta + 2\pi \rho \beta_0 + B' = \frac{2\lambda}{b^2}, \quad \gamma + 2\pi \rho \gamma_0 + C' = \frac{2\lambda}{c^2}, \quad (55)$$

и

$$f + F' = 0, \quad g + G' = 0, \quad h + H' = 0. \quad (56)$$

Уравнения (14), (44), (55), (56) представляют систему десяти уравнений, связывающих десять зависимых переменных  $a, b, c, p, q, r, p_1, q_1, r_1, \lambda$  с временем.

Следует заметить, что уравнения (56) представляют в точности те уравнения, которые могли бы быть получены из формул (51) и (53) при выражении того обстоятельства, что скорости изменения моментов количеств движения по отношению к фиксированным осям, совпадающим с мгновенными положениями осей эллипсоида, равны соответствующим моментам внешних сил. Уравнения (56) действительно эквивалентны системе (13), причем  $L, M, N$  теперь должны относиться только к одним возмущающим силам, так как при том распределении давления, которое дается формулой (54), моменты этих давлений относительно указанных осей будут равны нулю. Нетрудно также и непосредственно показать тождественность уравнений (56) и (13).

Подставим, хотя это и не существенно для наших целей, значения  $a$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , полученные из (48), в уравнения (55). Тогда, исключая  $\lambda$ , будем иметь

$$\begin{aligned} \ddot{aa} - a^2(q^2 + r^2 + q_1^2 + r_1^2) - 2caqq_1 - 2abrr_1 + 2\pi\varrho a^2 a_0 + A'a^2 = \\ = b\ddot{b} - b^2(r^2 + p^2 + r_1^2 + p_1^2) - 2abrr_1 - 2bcpp_1 + 2\pi\varrho b^2 \beta_0 + B'b^2 \\ = \ddot{cc} - c^2(p^2 + q^2 + p_1^2 + q_1^2) - 2bcpp_1 - 2caqq_1 + 2\pi\varrho c^2 \gamma_0 + C'c^2. \end{aligned} \quad (57)$$

Эти уравнения вместе с уравнениями (13), (14) и (44) мы можем рассматривать как нашу основную систему уравнений.

До сих пор мы ничем не пренебрегали, и уравнения были бы, например, приложимы к конечным колебаниям эллипсоида Якоби при существовании потенциала вида (53). Но в случае *малого* возмущения из состояния равномерного вращения вокруг оси  $z$  величины  $p$ ,  $q$ ,  $p_1$ ,  $q_1$ ,  $r_1$  будут малыми, в то время как  $r$  будет приблизительно постоянным. Оказывается, что коэффициенты можно рассматривать как постоянные, если пренебречь малыми величинами второго порядка в первых двух уравнениях системы (13) и в первых двух уравнениях системы (14). Изменения мгновенных осей при этом будут независимы от приливной деформации и оказываются точно такими же, как если бы жидкость была заключена в твердую оболочку, массою которой можно пренебречь.

Приливные колебания свободной поверхности, с другой стороны, определяются уравнениями (57) вместе с уравнением (44) и третьими уравнениями систем (13) и (14). Следует заметить, что эти последние два уравнения принимают вид

$$\frac{d}{dt}(Cr + Hr_1) = N, \quad \frac{d}{dt}(Hr + Cr_1) = 0. \quad (58)$$

Если эллипсоид в невозмущенном состоянии есть эллипсоид вращения вокруг оси  $z$ , то уравнения, определяющие прецессию, приводятся, как и раньше, к виду (20) и (21). Кроме того, в астрономических приложениях та часть возмущающего потенциала, которая оказывает влияние на прецессию, состоит из членов вида

$$\Omega' = -kr^2 \sin \theta \cos \theta \cos(\sigma t + \varphi), \quad (59)$$

где  $\sigma$  приблизительно равно  $\omega$ ; см. § 219 (1) и стр. 453. В декартовых координатах имеем

$$\Omega' = kz(y \sin \sigma t - x \cos \sigma t). \quad (60)$$

Это дает

$$L = -k(C - A) \sin \sigma t, \quad M = -k(C - A) \cos \sigma t, \quad N = 0. \quad (61)$$

Таким образом, имеем

$$L + iM = -ik(C - A)e^{-i\sigma t}. \quad (62)$$

Ход доказательства, которое ведет к заключению, что прецессия при известных условиях оказывается такой же, как в случае твердой массы, такой же, как и в предыдущем параграфе.

Когда возмущающая функция имеет вид (59), то в случае Земли колебания длин полусосей  $a$  и  $c$  соответствуют суточным приливам.

## ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Адамар (Hadamard, J.) 448, 607, 752.  
Альборн (Ahlborn) 860  
Арган 90.
- Барнес (Barnes) 838.  
Барнсайд (Barnside) 524.  
Бассе (Basset) 168, 197, 229, 243, 780, 789, 811, 901, 913.  
Батеман (Bateman) 878.  
Бельтрами (Beltrami) 109, 185.  
Бернулли (Bernoulli D.) 37, 40, 453.  
Берри (Berry, A.) 760.  
Берстон (Bairstow L.) 772, 775.  
Бессель (Bessel F.) 171.  
Блазиус (Blasius H.) 117, 841, 866.  
Бобылев 130, 727.  
Боджюо (Boggio) 811.  
Бойс (Boys) 879.  
Больц (Boltze) 870.  
Больцман (Boltzmann) 136, 250.  
Борда (Borda) 41.  
Бриан (Bryan) 147, 228, 906.  
Бромвич (Bromwich) 449, 565.  
Бургес (Burgess R.) 769.  
Буркхардт (Burkhardt) 83.  
Буссинеск (Boussinesk) 529.  
Бъркнес (Bjerknes V.) 168, 312.  
Бъркнес (Bjerknes S.) 168, 185, 196.  
Бэрд (Baird) 446.
- Вайнштейн (Weinstein) 531.  
Ванциль (Wantzel) 43.  
Watson (Watson, G.) 369.  
Webb (Webb) 467.  
Weber (Weber) 31, 621.  
Wedderburn (Wedderburn) 475.  
Welsch (Welsh) 271.  
Wigleу (Wigley W.) 548.  
Williamс (Williams) 751.  
Wien (Wien) 511.  
Wood (Wood) 595.  
Woodall (Woodall) 587.
- Hadley (Hadley) 386.  
Hamilton (Hamilton) 478.  
Hansemann (Hansemann) 554.  
Hankel (Hankel) 52, 367, 675.
- Hanlon (Hanlon) 42.  
Hansen (Hansen) 171.  
Harrison (Harrison) 465, 775, 842.  
Gauss (Gauss) 58, 90, 132.  
Gwyther (Gwyther) 532.  
Heine (Heine) 641.  
Helmholtz (Helmholtz) 38, 74, 98, 120, 243, 251, 253, 260, 306, 468, 534, 623, 721, 743, 776, 803, 823.  
Herman (Herman R.) 168.  
Gerstner (Gerstner F.) 526.  
Hilbert (Hilbert) 315, 484.  
Glaisher (Glaisher) 143, 504.  
Glaeert (Glaeert) 860, 876.  
Hobson (Hobson) 683.  
Hogner (Hogner) 546, 548.  
Goldsborough (Goldsborough) 341, 412, 443, 444.  
Goldstein (Goldstein) 364, 409.  
Graig (Graig) 215.  
Green (Green G.) 62, 82, 193, 345, 478.  
Greenhill (Greenhill) 133, 217, 222, 281, 467, 735, 907, 918.  
Gröbli (Gröbli) 281, 305.  
Gough (Gough) 478, 913.  
Guthrie (Guthrie) 240.  
Hugoniot (Hugoniot) 44, 607.
- Dyson (Dyson) 197, 307, 896.  
d'Alembert (d'Alembert J.).  
Darwin (Darwin G.) 317, 355, 427, 430, 446, 453, 807, 892, 896, 903.  
Darcy (Darcy) 840.  
Debouy 653.  
De Vries (De Vries) 532.  
Dedekind (Dedekind) 907, 912.  
Jeans (Jeans) 904.  
Jones (Jones J.) 638.  
Jones (Jones R.) 869:  
Динник А. Н. 630.  
Dirichlet (Dirichlet) 155, 390, 907.  
Doodson (Doodson) 349, 385, 453.  
De K. 280.  
Duprez (Duprez) 576.
- Jeffreys (Jeffreys) 349, 364, 737, 786, 863, 873.  
Жуковский Н. Е. 102, 861.

- Зильберштейн 312.  
 Зоммерфельд (Sommerfeld A.) 83,  
 448, 675, 851.
- Ирншоу (Earnshaw) 352, 601.
- Карман (Kärmän V.) 283, 860, 866.  
 Карслоу (Carslaw) 675.  
 Келланд (Kelland) 322, 559.  
 Кельвин (Kelvin) 20, 52, 57, 66,  
 224, 240, 253, 290, 310, 317, 434,  
 494, 507, 513, 563, 568, 575, 585,  
 703, 839, 850, 913, 918.  
 Кирхгоф (Kirchhoff) 57, 120, 128,  
 136, 200, 205, 218, 224, 250, 289,  
 554, 627, 654, 809, 815, 819, 858.  
 Клебш (Clebsch) 195, 312, 641, 799.  
 Клейн (Klein) 448.  
 Ковалевская С. 894.  
 Кован (Cowan M.) 326, 532.  
 Кокер (Coker) 838.  
 Колладон (Colladon) 595.  
 Кортеев (Korteweg) 532, 776.  
 Кох (Koch) 721.  
 Коши (Cauchy) 33, 49, 481, 486, 539.  
 Крайстл (Chrystal) 349.  
 Кристоффель (Christoffel) 104, 656.  
 Крудели (Krudeli) 883.  
 Кундт 819.  
 Кутта (Kutta) 102, 861.  
 Кэли 389.
- Лагранж (Lagrange) 15, 33, 85, 319,  
 323.  
 Ламб (Lamb H.) 109, 154, 215, 341,  
 449, 464, 478, 492, 541, 546, 647,  
 812, 899.  
 Ламэ (Lamé) 187.  
 Ланденбург 751.  
 Лаплас (Laplace) 140, 150, 383, 414,  
 430, 434, 596, 631, 888, 893.  
 Пармор (Larmor) 83, 224, 243, 306,  
 627.  
 Леви-Чивита (Levi-Civita) 133, 374, 525.  
 Лежандр (Legendre) 144.  
 Липшиц (Lipschitz) 173, 371.  
 Лисем (Leathem) 67, 133.  
 Лиувиль (Liouville) 617, 891.  
 Лихтенштейн (Lichtenstein) 304, 881.  
 Лодж (Lodge A.) 143, 404.  
 Ломмель (Lommel) 484, 630.  
 Лоренц (Lorentz) 653, 751, 858.  
 Ляв (Love) 133, 440, 449, 475, 565,  
 627, 654, 656, 799, 904, 912.  
 Ляпунов 448, 882.
- Макдональд (Macdonald) 385, 561, 653.  
 Маклорен (Maclaurin) 386, 887.
- Максвелл (Maxwell) 42, 52, 94, 185,  
 300, 576, 720, 782.  
 Маллок (Mallock) 737, 842.  
 Маргулис (Margules) 701, 703.  
 Маттиессен (Matthiessen L.) 894.  
 Мах 879.  
 Мейер (Meyer C.) 891.  
 Мейер (Meyer O.) 811.  
 Мейер (Meyer W.) 83.  
 Меллер (Mehler) 171, 369.  
 Мериан (Merian) 551.  
 Мизес (Mises) 866.  
 Митчелл (Michell) 133, 523, 548,  
 732.  
 Мортон (Morton W.) 113.
- Навье (Navier) 723.  
 Нейман (Neumann C.) 168, 170.  
 Нейман (Neumann F.) 146.  
 Нетер (Noether F.) 766.  
 Нильсен (Nielsen N.) 369.  
 Никольсон (Nicholson J.) 653.  
 Ньютон (Newton J.) 736.
- Обербек (Oberbeck) 759.  
 Озен (Oseen) 766, 769, 870.  
 Орр (Orr) 850, 858.  
 Остроградский 551.
- Перри (Perry) 143.  
 Планк (Planck) 121.  
 Покельс (Pockels) 623.  
 Попов 498.  
 Прандтль (Prandtl) 860, 866.  
 Прудман (Proudmann) 294, 349, 385,  
 407, 447.  
 Пуазель (Poiseuille) 720, 733, 839.  
 Пуанкаре (Poincaré) 320, 365, 445,  
 653, 881, 897, 903, 905, 913, 918.  
 Пуассон (Poisson) 34, 361, 371, 471,  
 481, 486, 492, 539, 617, 723.
- Раус (Routh) 243, 281, 390.  
 Рейнольдс (Reynolds O.) 38, 43,  
 44, 479, 720, 730, 837, 839, 843,  
 852, 857.  
 Рибчинский 752.  
 Риман (Riemann) 74, 89, 350, 601,  
 904, 907, 910.  
 Риц (Ritz) 319.  
 Розенхед (Rosenhead) 288, 292, 860.  
 Рэлей (Rayleigh) 44, 58, 128, 171,  
 328, 346, 361, 371, 446, 478, 498,  
 521, 524, 529, 568, 585, 591, 597,  
 608, 623, 634, 639, 643, 653, 678,  
 739, 777, 821, 841, 847, 858, 861,  
 873, 879.

- Рэнкин (Rankine) 85, 162, 526, 604, 608.
- Саутвелл (Southwell) 852.
- Свейн (Miss Swain L.) 341, 760.
- Севелл (Sewell) 829.
- Сен-Венан (Saint-Venant) 43, 114, 723.
- Сильвестер (Sylvester) 140.
- Симпсон (Simpson T.) 888.
- Синдж (Synge) 860.
- Скотт Расселл (Scott Russell) 528, 530, 585, 793.
- Сольборн 444.
- Стантон (Stanton) 44, 842, 859, 880.
- Степан (Stefan) 160.
- Стирн (Stearn) 812.
- Стокс (Stokes G.) 33, 43, 48, 52, 115, 155, 161, 166, 257, 260, 309, 326, 359, 371, 467, 478, 494, 521, 558, 597, 606, 613, 636, 723, 736, 750, 811, 815.
- Страйк (Struik) 525.
- Стюарт (Stuart F.) 314.
- Теразава (Terazawa K.) 493, 541, 739.
- Тёплер (Töpler) 136.
- Томсон (Thomson W.) 141, 187, 200, 233, 237, 243, 245, 250, 304, 307, 391, 452, 574, 585, 886, 903.
- Торричелли (Torricelli) 40.
- Тэйлор (Taylor G.) 119, 402, 610, 694, 739, 843, 862, 876.
- Тэт (Tait) 141, 200, 233, 237, 243, 391, 453, 886, 903.
- Уолтон (Walton) 280.
- Фаге (Fage) 859, 860.
- Файлон (Filon L.) 775.
- Факсен (Faxén) 751, 776.
- Феррел (Ferrel) 434.
- Фёппль (Föppl L.) 280.
- Фойхт (Voigt) 168.
- Форслайк (Forsdyke) 306.
- Фосет (Miss Fawcett) 224, 229.
- Франклайн (Franklin B.) 464.
- Фрезер (Frazer) 737.
- Фрост (Frost) 58.
- Фруд (Froude) 38, 477, 548.
- Хавелок (Havelock) 515, 519, 546, 548, 780.
- Хаф (Hough) 425, 437, 440, 546, 702, 789, 913.
- Хегге (Hegge) 872.
- Хевисайд (Heaviside) 263, 376.
- Хеле-Шоу (Hele Shaw) 111.
- Хидак (Hidak) 364.
- Хикс (Hicks W.) 162, 168, 197, 279, 304, 909.
- Хилл (Hill) 309.
- Цейлон (Zeilon) 871.
- Чаплыгин С. А. 117.
- Чапман (Chapman) 702.
- Чизотти (Cisotti) 120, 133, 512.
- Шарп (Sharpe) 858.
- Шварц (Schwarz) 104.
- Шверд (Schwerd) 633.
- Шлемильх (Schlömilch O.) 504.
- Штурм (Sturm) 595.
- Эверетт (Everett) 597.
- Эйлер (Euler) 15, 18.
- Экман (Ekman) 549, 839.
- Энке (Encke) 740.
- Эри (Airy) 326, 329, 336, 350, 430, 434, 460.
- Якоби (Jacobi) 150, 187, 891.

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Бассейн круглый, 364, 409, 412.  
— прямоугольный, 413, 551.
- Вектор соленоидальный 311.
- Вещество непрерывное 13.
- однородное 13.
- Вихрь 49, 252.  
— винтовой 307.  
— круговой 299, 301.  
— прямолинейный 275.  
— сферический 309.
- Возмущение безвихревое 290.  
— начальное произвольное 324.  
— постоянное 580.  
— эллиптическое 291, 292.
- Волна атмосферная 678.  
— в неоднородной жидкости 473.
- Длинная 320, 322, 325, 558.
- звуковая 815.  
— колебательная 532.  
— конечной амплитуды 601.  
— краевая 558.  
— красная 560.  
— на глубокой воде 481.  
— — горизонтальной плоскости 576.  
— — плоской поверхности 570.
- Волна одиночная 528, 531.
- плоская 594, 597.
- приливная 315.  
— прогрессивная 314, 317, 328, 346.
- расходящаяся 369, 374.
- стоячая 457, 558.  
— сферическая 611.
- установившаяся 525, 534, 604.
- Волны сферические симметричные 612.
- Вращение жидкости 45.
- Вязкость 703.  
— турбулентная 843.
- Глубина критическая 442.
- Давление концентрированное 518.  
— установившееся 498.
- Движение апериодическое 705.
- безвихревое 48, 50, 53, 67, 70, 76, 79, 136.
- безграничной жидкости 182.
- вертикальное 325.
- вихревое 251.

- Движение волновое 526.  
— длинных волн 326.
- затухающее 802.
- ламинарное 49, 719, 739, 850.
- непрерывное 15.
- неустановившееся 739.
- обратимое 246.
- осредненное 854.
- Движение плоское 83.
- прерывное 133.
- стационарное 307.
- турбулентное 839, 854.
- установившееся 36, 213, 223, 328, 728, 736, 760.
- циклическое 82, 225.
- Детерминант косой 389.
- Диафрагма 69.
- Дивергенция 18, 31, 64.
- Диполь 78.
- Диск круглый тонкий 175, 183.  
— эллиптический 190.
- Дно гофрированное 511.
- Дублет 78.
- Жидкость вязкая 716, 802.  
— капельная 19, 40.
- несжимаемая 19.
- очень вязкая 790.
- сжимаемая 873.
- Завихрение равномерное 293.
- Закон адиабатический 607.
- Грина 347.
- Изменение движения внезапное 25.
- Импульс 202, 227, 271.
- Интеграл Френеля 483.
- Истечение газа 42.
- Источник 78.  
— гармонический простой 374.
- Источник переменный 375.
- Канал переменного поперечного сечения 344, 347.
- постоянного поперечного сечения 337, 339, 340, 341, 348, 555.
- прямолинейный 401.
- эллиптический 364.
- Колебание вынужденное 318, 336, 364, 396, 407.

- Колебание вынужденное первого рода 425.  
 — второго рода 429.  
 — третьего рода 431.  
 — гравитационное 563.  
 — малое 315, 317, 386, 779.  
 — нормальное 317, 319.  
 — поперечное 555.  
 — свободное 316, 317.  
 — первого класса 441.  
 — второго класса 441.  
 — собственное 391.  
 — цилиндра 662.  
 — шара 638.  
 — эллиптическое 317.  
 Кольцо 893.  
 — вихревое 302, 305, 306.  
 Компонент вихря 252.  
 — нормальный возмущающей силы 316.  
 Компоненты скорости пульсаций 853.  
 Контур кратно неприводимый 69.  
 — простой неприводимый 69.  
 Конформное отображение 90, 122.  
 Координаты главные 388.  
 — нормальные 316.  
 — параболические 675.  
 Коэффициент вязкости 719, 721.  
 — кинематический 720.  
 — инерции 178, 316, 388.  
 — скатия 40.  
 — трения скольжения 722.  
 — турбулентного трения 743.  
 — уплотнения 594.  
 Коэффициенты устойчивости главные 316, 388.  
 Кривая приводимая 54, 68.  
 — эквипотенциальная 89.  
 Кривые взаимно переводимые 54, 68.  
 Крыло аэроплана 872.  
 Линия вихревая 252.  
 — тока 34, 89.  
 Масса присоединенная 155.  
 Маятник квадрантный 219.  
 — шаровой 654, 809.  
 Мера напряжения вихря 253.  
 Метод Гамильтона 233.  
 — Кулона 782.  
 — обобщенных координат 233.  
 — размерностей 864.  
 — решения плоских гидроакустических задач 87.  
 — сферических функций 137.  
 Модуль затухания 705.  
 Мощность источника 78.  
 Напряжение тангенциальное 13.  
 Насадка Борда 123.  
 Натяжение поверхностное 569.  
 Нить вихревая 252, 277.  
 Ньютона скорость звука 596.  
 Область аперифрактическая 58.  
 — двусвязная 69.  
 — п-связная 69.  
 — односвязная 55, 69.  
 — перифрактическая 58.  
 — связная 68.  
 Оболочка сферическая 152, 633, 803.  
 Ось растяжения 49.  
 — дублета 78.  
 — объемной сферической функции 140.  
 — круговая системы вихревых колец 302.  
 — системы вихрей 277.  
 Отверстие эллиптическое 190.  
 Отражение волн 640, 663.  
 Пара вихрей 278.  
 Парадокс Даламбера 858.  
 Перегородка 69, 637.  
 Пластиинка плоская 126, 128, 858.  
 — согнутая 130.  
 Поверхность пограничная неподвижная 20.  
 — постоянного давления 120.  
 Поверхность равного потенциала 34.  
 — раздела 569.  
 — разрыва 20.  
 — сферическая 150, 163, 306.  
 — цилиндрическая 88, 107, 111.  
 Пограничный слой 865.  
 Полость сферическая 153.  
 Полюс поверхности сферической функции 140.  
 Постоянная циклическая 72.  
 — цилиндрическая 88, 107, 111.  
 Пограничный слой 865.  
 Полость сферическая 153.  
 Полюс поверхности сферической функции 140.  
 Постоянная циклическая 72.  
 Потенциал гравитационный 383.  
 — кинетический 234.  
 — приливообразующих сил 425.  
 — скоростей 32, 144, 265.  
 Поток вдоль линии 50.  
 — через кривую 83.  
 — — поверхность 56, 261.  
 Преобразование Вебера 29.  
 — Клебша 312.  
 Препятствие произвольное 650.  
 — сферическое 640, 642, 829.

- Препятствие цилиндрическое 513,  
515, 663, 668.  
Призма равносторонняя 114.  
Прилив высокий 352.  
— длинного периода 453.  
— Комбинационный 355.  
— лунный 338, 339, 341.  
— луно-солнечный 430.  
— малый 445.  
— морской внезапный 445.  
Прилив полусуточный 454.  
— с большим возвышением волны 350.  
— солнечный 337.  
— суточный 454.  
Принцип энергии 37.  
Профиль крыла Жуковского 106.  
Пузырь сферический 152.
- Распределение давлений гармоническое 499.  
— — произвольное 500.  
— температуры вертикальное 684,  
688, 691.  
Распространение волн вертикальное 687.  
Расширение объемное в данной точке 18.  
Решетка 669, 673.  
Рябь 575.  
Ряд асимптотический 370.  
— гипергеометрический 141.
- Сектор круговой 363.  
Симметрия винтообразная 218.  
Система прямолинейных вихрей 289.  
Скорость волны 468.  
— групповая 477, 479.  
— критическая 838.  
— массовая 605.  
Слой вихревой 267.  
— воды колыцеобразный 363.  
— круговой 358, 402.  
— — открытый 385.  
— — переменной глубины 365.  
Слой воды прямоугольный 357.  
— сферический 378.  
— жидкости плоский горизонтальный 398.  
— криволинейный 135.  
— пограничный 865.  
Случай двух вихревых колец 305.  
— двух вихрей 277.  
Сопротивление волновое 519, 547.  
Сосуд сферический 802, 835.  
— эллипсоидальный 184, 258.  
Сток 78.  
Столб жидкости цилиндрический 588.
- Струя внутри покоящейся жидкости 469.  
Сфериод приливный 451.
- Тело винтообразно изотропное 218.  
— вращения колыцеобразное 228.  
— погруженное в неравномерный поток 248.  
— с отверстиями 225.  
Теорема Грина 62, 65, 75.  
— Кельвина 66.  
— Лагранжа 32.  
— Рэлея 320.  
— Торричелли 40.  
Теория атомов вихревая 311.  
— каналовая 336.  
— свободных линий тока 135.  
— смазки 730.  
Течения, расположенные друг над другом, 467, 472.  
Траектория вихря 280.  
Труба цилиндрическая круглая 722.  
Трубка вихревая 252.  
— Пито 42.  
— тока 36, 56.
- Удар 25.  
Упругость объемная 19, 594.  
Уравнение бесселевых функций 168,  
170.  
— длинных волн 327.  
— зональных сферических функций 141.  
— неразрывности 18, 19, 28, 187.  
— поверхностных сферических функций 141.  
— энергии 22.  
Уравнения гиростатической системы 245.  
— движения 14, 17, 28, 31.  
— — вязкой жидкости 722, 746.  
— Лагранжа 234, 316.  
— Озенна линеаризированные 766.  
— системы вихревых линий 252.  
Условие несжимаемости 236.  
— стационарного движения 307, 309.  
Устойчивость, главные коэффициенты 898.  
— вековая или практическая 391.  
— движения 221, 448.  
— динамических систем 448.  
— обыкновенная или кинетическая 391, 449.  
— океана 447.
- Форма бифуркации 898.  
— обтекаемая 864.  
— равновесия предельная 898.

- Формула Блазиуса 119.  
 Функции Бесселя 168, 171, 661.  
 — сферические поверхностные ортогональные 147.  
 Функция аналитическая 89.  
 — гармоническая секториальная 147.  
 — — тессеральная 147.  
 — диссипативная 711.  
 — Ламз 184.  
 — многозначная 71.  
 — однозначная 46.  
 — присоединенная 146.  
 — сферическая зональная 142, 145, 438.  
 — — нулевого порядка 152.  
 — — объемная 138, 171.  
 — — первого порядка 154.  
 — — поверхностная 138, 140, 146, 171.  
 — тока 84, 157.  
 — циклическая 46, 71, 92.  
 — цилиндрическая 168.  
 — Эйлера 142.  
 — эллипсоидальная 175.
- Хвост** 769.
- Центр** реакции 233.  
 — системы вихрей 277.
- Цилиндр** круглый 99, 101, 105, 119, 120, 230, 280, 874.
- Цилиндр круговой 294, 812.  
 — с произвольной формой сечения, 116, 119, 874.  
 — эллиптический 108, 112, 113.
- Циркуляция вдоль замкнутой кривой 50.
- Частота** круговая 317.
- Чистое** растяжение 49.
- Члены** гиростатические 711.  
 — — трения 711.
- Шар** 154, 161, 163, 166, 237, 238, 654, 775.
- Широта** геоцентрическая 425.
- Экран** 669, 674.
- Эллипсоид** 758, 775, 884.  
 — вращения удлиненный 178, 179.  
 — Дирихле 907.  
 — Маклорена 886, 902, 906.  
 — переменной формы 910.  
 — с неравными осями 184, 186, 192.  
 — сжатый или планетовидный 180, 183.  
 — Якоби 890, 903.
- Энергия** внутренняя 24.  
 — поверхностная 569.  
 — системы вихрей 271.

### Опечатки

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть
21	2 св.	$= \frac{1}{R} \frac{\partial F}{\partial t}$	$= - \frac{1}{R} \frac{\partial F}{\partial t}$
55	20 сн.	$v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$	$v = - \frac{\partial \varphi}{\partial y}$
84	3 сн.	$n = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$	$u = - \frac{\partial \varphi}{\partial y}$
180	5 св.	$(1 - \mu)^{1/2}$	$(1 - \mu)^{1/2}$
213	1 сн.	$\mathfrak{Q}p$	$\mathfrak{Q}'p$
214	14 св.	$\theta + ry$	$u + ry$
282		строки 6 и 7 снизу следует поменять местами	
317	1 сн.	Немцами!!! я	Немцами для
368	2 св.	$\int \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)$	$\int \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)$
464	8 св.	$\frac{g}{k} \frac{\rho - \rho'}{\rho - \rho'}$	$\frac{g}{k} \frac{\rho - \rho'}{\rho - \rho'}$
470	8 св.	$\frac{\varphi + i\psi}{c} =$	$\frac{\varphi + i\psi}{c} =$
474	3 св.	$- \frac{\partial p'}{\partial y} = g\rho'$	$- \frac{\partial p'}{\partial y} = g\rho'$
493	17 сн.	$\omega^2 = \frac{gl^2}{4b}$	$\omega^2 = \frac{gl^2}{4b}$
515	9 сн.	$e^{-k(y+l) + ikx}$	$e^{-k(y+l) + ikx}$
529	1 сн.	стр ...	стр. 328.
654	3 сн.	$= c^2 \Delta \varphi$	$- \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \Delta \varphi$
868	3 сн.	$\int_0^y u \frac{\partial u}{\partial x} \cdot$	$\int_0^y u \frac{\partial u}{\partial x} dy$

Г. Ламб. Гидродинамика.