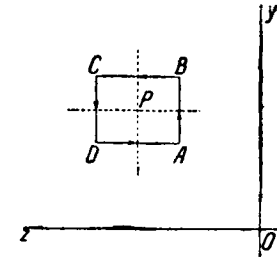
же направлении, равна циркуляции вдоль первоначальной границы поверхности. Если предположить на мгновение, что граница поверхности состоит из одной единственной замкнутой кривой, тогда в рассматриваемой сумме поток вдоль каждой общей пограничной линии двух элементов встречается дважды, по одному разу для каждого элемента, но с противоположными знаками, и поэтому при суммировании он выпадает из общего результата. В результате сохраняются только потоки вдоль тех сторон, которые являются частями первоначального контура; этим и доказывается выше формулированная теорема.

Фиг. 5.




Фиг. 6.

Отсюда, из соображений непрерывности, следует, что циркуляция вдоль границы элемента поверхности $\delta S$, данного по положению и направлению, в основном пропорциональна площади элемента.

Если элементом будет прямоугольник $\delta y\,\delta z$ (фиг. 6) с центром в точке $(x, y, z)$, то, вычисляя циркуляцию вокруг него в направлении, указанном стрелкой на фигуре, получим

$$J(AB) = \left\{v - \frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial z}\delta z\right\}\delta y,$$

$$J(BC) = \left\{w + \frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial y}\delta y\right\}\delta z,$$

$$J(CD) = -\left\{v + \frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial z}\delta z\right\}\delta y,$$

$$J(DA) = -\left\{w - \frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial y}\delta y\right\}\delta z,$$

и поэтому

$$J(ABCDA) = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\delta y\,\delta z.$$

Таким путем мы заключаем, что циркуляция вокруг каждой бесконечно малой площадки $\delta S_1\,\delta S_2\,\delta S_3$ в плоскостях, параллельных координатным плоскостям, равна

$$\xi\,\delta S_1,\ \eta\,\delta S_2,\ \zeta\,\delta S_3. \tag{1}$$

Если мы далее воспользуемся фигурой (1) и обозначениями § 2, то будем иметь

$$J(ABCA) = J(PBCP) + J(PCAP) + J(PABP) = \\ = \xi\,l\Delta + \eta\,m\Delta + \zeta\,n\Delta,$$

откуда мы заключаем, что циркуляция вдоль границы *всякой* беско-

нечно малой площадки $\delta S$ равна

$$(l\xi + m\eta + n\zeta)\,\delta S. \tag{2}$$

Этим самым мы даем независимое доказательство того, что определенные в (2) § 30 величины $\xi$, $\eta$, $\zeta$ могут быть рассматриваемы как компоненты вектора.

Заметим, что необходимо условиться относительно связи между направлением, в котором взята циркуляция вокруг контура элемента $\delta S$, и направлением нормали $(l, m, n)$. Для определенности будем принимать в этой книге, что оси координат образуют правую систему; так что если оси $x$ и $y$ соответственно указывают на восток и на север, то ось $z$ будет направлена вертикально вверх[1]). Направление, в котором взята циркуляция, данная формулой (2), находится к направлению нормали $(l, m, n)$ в отношении, характеризуемом правым винтом[2]).

**§ 32.** Выражая теперь то положение, что циркуляция по контуру конечной площади равна сумме циркуляций по контурам бесконечно малых элементов, на которые может быть разбита площадь, мы согласно (2) § 31 будем иметь

$$\int (u\,dx + v\,dy + w\,dz) = \iint (l\xi + m\eta + n\zeta)\,dS, \tag{3}$$

или, вставляя для $\xi$, $\eta$, $\zeta$ их значения из § 30,

$$\int (u\,dx + v\,dy + w\,dz = \\ = \iint \left\{ l\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) + m\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) + n\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \right\} dS, \tag{4}$$

где простой интеграл берется вдоль пограничной кривой, а двойной интеграл — по поверхности[3]). В этой формуле величины $l$, $m$, $n$ обозначают направляющие косинусы нормали, восставленной всегда с одной и той же стороны поверхности; мы будем называть эту сторону поверхности положительной стороной. Направление интегрирования в интеграле, находящемся в левой части формулы (4), будет тогда такое, по какому надо итти на положительной стороне поверхности вблизи контура, чтобы иметь площадь всегда с левой стороны.

Формула (3) или (4) может быть распространена, очевидно, на поверхность, граница которой состоит из двух или многих замкнутых кривых, при условии, что интегрирование в левой части формулы (4) проводится в надлежащем смысле, т. е. согласно установ-

---

[1]) Maxwell, Proc. Lond. Math. Soc., III, 279, 280. В помещенной выше фигуре ось $x$ принимается направленной на читателя.

[2]) См. Maxwell, Electricity and Magnetism, Oxford, 1873, § 23.

[3]) Эта теорема принадлежит Стоксу (Smith's Prize Examination Papers, 1854). Первое опубликованное доказательство дал Hankel, Zur allgem. Theorie der Bewegung der Flüssigkeiten, Göttingen, 1861. Вышеизложенное доказательство принадлежит Кельвину, см. выше стр. 50; см. также Thomson and Tait, Natural Philosophy, § 190 (j) и Maxwell, Electricity and Magnetism, § 24.

ленному выше правилу. Таким образом, если интеграл по поверхности в формуле (4) распространен по заштрихованной части фиг. 7, то направления, по которым надо брать циркуляции, в различных частях ограничивающей кривой, указаны стрелками, причем положительная сторона поверхности та, которая обращена к читателю.

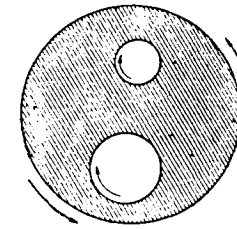
Значение поверхностного интеграла, взятого по *замкнутой* поверхности, равно нулю.

Отметим, что (4) представляет чисто математическую теорему и имеет место для любых функций $u$, $v$, $w$ от $x$, $y$, $z$, предполагая только, что они во всех точках поверхности непрерывны и диференцируемы [1]).

**§ 33.** Конец этой главы посвящается изучению кинематических свойств общего безвихревого движения, которое определяется равенствами

$$\xi = \eta = \zeta = 0, \tag{1}$$

т. е. мы предполагаем, что циркуляция по всякой *бесконечно малой* замкнутой кривой равна нулю. Существование потенциала скоростей и его свойства в различных встречающихся случаях будут являться следствиями этого определения.



Фиг. 7.

Физическое значение этих исследований состоит именно в том, что движение части жидкой массы при известных, очень общих условиях остается все время безвихревым, если оно было безвихревым в некоторый момент. Это положение в действительности уже установлено, как мы увидим, при помощи доказанной в § 17 теоремы Лагранжа, однако ввиду важности вопроса позволительно повторить доказательство в обозначениях Эйлера в форме, данной Кельвином [2]).

Рассмотрим сначала некоторую проведенную в жидкости конечную линию $AB$ и предположим, что каждая точка этой линии движется с той же скоростью, какую имеет жидкость в этой точке. Вычислим затем величину, на которую возрастает в единицу времени поток вдоль этой линии, считая от $A$ к $B$. Если обозначить через $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$ проекции элемента линии на оси координат, то имеем

$$\frac{D}{Dt}(u\,\delta x) = \frac{Du}{Dt}\,\delta x + u\frac{D\,\delta x}{Dt}.$$

Но $\frac{D\,\delta x}{Dt}$, скорость, с которой растет $\delta x$ вследствие движения жидкости, равна разности компонент скорости, параллельных оси $x$, на обоих концах элемента, т. е. равна $\delta u$, а значение $\frac{Du}{Dt}$ дано в § 5.

---

[1]) При этом нет необходимости, чтобы производные были непрерывны.
[2]) См. выше стр. 50.

Отсюда и из аналогичных вычислений получим, что если $\varrho$ есть функция только $p$ и внешние силы $X$, $Y$, $Z$ имеют потенциал $\Omega$, то

$$\frac{D}{Dt}(u\,\delta x+v\,\delta y+w\,\delta z)=-\frac{\delta p}{\varrho}-\delta\Omega+u\,\delta u+v\,\delta v+w\,\delta w.$$

Интегрируя по линии от $A$ до $B$, получим

$$\frac{D}{Dt}\int\limits_A^B(u\,dx+v\,dy+w\,dz)=\left[-\int\frac{dp}{\varrho}-\Omega+\frac{1}{2}q^2\right]_A^B, \qquad (2)$$

или: скорость возрастания потока вдоль линии от $A$ к $B$ равна разности значений выражения $-\int\frac{dp}{\varrho}-\Omega+\frac{1}{2}q^2$ в точках $B$ и $A$. Эта теорема включает в себе всю динамику совершенной жидкости. Например, отсюда могут быть получены уравнения (2) § 15, если в качестве линии $AB$ взять бесконечно малый линейный элемент, проекции которого были первоначально $\delta a$, $\delta b$, $\delta c$, и затем коэфициенты этих бесконечно малых величин положить в отдельности равными нулю.

Если $\Omega$ однозначно, то выражение в скобках в правой части уравнения (2) есть однозначная функция от $x$, $y$, $z$. Поэтому, распространяя интегрирование в левой части по замкнутой кривой, когда $B$ совпадает с $A$, мы получим

$$\frac{D}{Dt}\int(u\,dx+v\,dy+w\,dz)=0, \qquad (3)$$

т. е. циркуляция по замкнутой кривой, двигающейся с жидкостью, со временем не меняется.

Отсюда следует, что если движение части жидкости было сначала безвихревым, то оно сохраняет это свойство и в дальнейшем; ибо в противном случае циркуляция по всякой бесконечно малой замкнутой кривой согласно уравнению (3) § 32 не равнялась бы постоянно нулю, как это имело место вначале.

**§ 34.** Рассмотрим какую-нибудь область, которая наполнена жидкостью, имеющей безвихревое движение. Согласно (3) § 32, в этом случае циркуляция равна нулю для всякой замкнутой кривой, через которую можно провести непрерывную, целиком находящуюся в нашей области поверхность или, другими словами, для всякой замкнутой кривой, которую, не выходя из области, можно стянуть в одну точку. Такая замкнутая кривая называется *приводимой*.

Рассмотрим, далее, два пути $ACB$, $ADB$, которые соединяют две точки области $A$ и $B$ и каждый из которых может быть непрерывным изменением переведен в другой, не выходя за пределы области. Такие пути называют *взаимно переводимыми*. Так как замкнутая кривая $ACBDA$ приводима, то

$$J(ACBDA)=0$$

или, так как

$$J(BDA) = -J(ADB),$$

то

$$J(ACB) = J(ADB),$$

т. е. поток для двух взаимно переводимых кривых имеет одно и то же значение.

Область, в которой *все* пути, соединяющие одну и ту же пару точек области, взаимно переводимы, называется *односвязной*. Такова область, ограниченная сферой или двумя концентрическими сферами. В дальнейшем вплоть до § 46 мы будем рассматривать только односвязные области.

**§ 35.** Безвихревое движение жидкости в односвязной области характеризуется существованием однозначного потенциала скоростей. Если обозначить через $-\varphi$ поток от фиксированной точки $A$ к переменной точке $P$, то будем иметь

$$\varphi = -\int_A^P (u\,dx + v\,dy + w\,dz). \tag{1}$$

Мы показали, что значение $\varphi$ не зависит от пути интегрирования, если этот путь лежит всецело внутри области. Поэтому $\varphi$ есть однозначная функция положения точки $P$; при этом предполагаем, что это положение дано значениями координат $(x, y, z)$ точки $P$. Перемещая $P$ последовательно на бесконечно малые отрезки параллельно каждой из осей координат, мы найдем

$$u = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad w = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}, \tag{2}$$

а это значит, что $\varphi$ согласно определению, данному в § 17, есть потенциал скоростей.

Если за нижний предел интеграла в (1) вместо $A$ взять другую точку $B$, то к значению $\varphi$ прибавляется только произвольная постоянная, представляющая значение потока от $A$ к $B$. Первоначальное определение $\varphi$ в § 17 и физическая интерпретация в § 18 определяют эту функцию также только вплоть до аддитивной произвольной постоянной.

Если следовать по линии тока, то $\varphi$ монотонно убывает, поэтому в односвязной области линии тока не могут образовать замкнутых кривых.

**§ 36.** Функция $\varphi$, с которой мы имеем здесь дело, и ее первые производные естественно являются конечными, непрерывными и однозначными функциями для всех точек рассматриваемой области. Для несжимаемых жидкостей, к более подробному рассмотрению которых мы теперь приступаем, $\varphi$ должно удовлетворять также уравнению неразрывности (5) § 20 или, как мы в будущем будем писать для краткости, для каждой точки области должно быть

$$\Delta\varphi = 0. \tag{1}$$

Следовательно, $\varphi$ подчиняется теперь тем же математическим условиям, что и потенциал масс, притягивающихся или отталкивающихся по закону обратной пропорциональности квадрату расстояния, для всех точек вне указанных масс. Поэтому многие из результатов, доказанных в теории притяжения, электростатике, теории магнетизма и в теории стационарного течения тепла, имеют также и гидродинамическое применение. Мы теперь приступаем к рассмотрению тех из них, которые наиболее важны с последней точки зрения.

При произвольном движении несжимаемой жидкости поверхностный интеграл от нормальной компоненты скорости, распространенный по какой-либо незамкнутой или замкнутой поверхности, вообще называется *потоком* через эту поверхность. Он равен, конечно, объему массы жидкости, протекающей через поверхность в единицу времени.

Если движение не вихревое, то поток определяется интегралом

$$-\iint \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, dS,$$

где $\delta S$ есть элемент поверхности, а $\delta n$ — элемент восстановленной к ней в соответственном направлении нормали. Во всякой области, наполненной целиком жидкостью, полный поток через границу равен нулю, т. е.

$$\iint \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, dS = 0, \tag{2}$$

причем элемент $\delta n$ нормали проводится всегда в одинаковую сторону (именно внутрь), а интегрирование распространяется по всей границе. Уравнение (2) можно рассматривать как обобщенную форму уравнения неразрывности (1).

Линии тока, проведенные через точки бесконечно малой замкнутой кривой, определяют трубку, которая называется трубкой тока. Произведение из скорости $q$ на площадь поперечного сечения (назовем ее через $\sigma$) постоянно для всех сечений такой трубки.

Мы можем, если угодно, все пространство, наполненное жидкостью, воображать составленным из трубок тока и допустить, что форма трубок такова, что для каждой из них произведение $q\sigma$ будет иметь одно и то же значение. В таком случае поток через поверхность пропорционален числу пересекающих ее трубок тока. Если поверхность замкнута, то уравнение (2) выражает тот факт, что через поверхность столько же трубок тока входит, сколько выходит. Поэтому линия тока не может ни начинаться, ни кончаться во внутренней точке жидкости.

**§ 37.** Функция $\varphi$ не может иметь максимум или минимум ни в какой точке, лежащей внутри жидкости; ибо если бы это имело место, то $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ должно было бы быть на малой замкнутой поверхности вокруг рассматриваемой точки или всюду положительно, или всюду

отрицательно. Каждый из этих случаев несовместим, однако, с уравнением (2).

Далее, квадрат скорости ни в какой точке, лежащей внутри жидкости, не может иметь максимума; для доказательства возьмем ось $x$ параллельно направлению скорости в произвольной точке $P$. Уравнение (1) и поэтому также уравнение (2) удовлетворяется, если мы напишем $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ вместо $\varphi$. Вышеизложенное рассуждение показывает тогда, что $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ в $P$ не может иметь ни максимума, ни минимума. Поэтому в непосредственной близости с $P$ должны существовать точки, в которых $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2$ и, следовательно, тем более

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2$$

больше, чем квадрат скорости в $P$ *).

С другой стороны, квадрат скорости в какой-нибудь точке жидкости может иметь минимум. Простейший такой случай есть тот, когда скорость равна *нулю*; смотри, например, фигуру § 69.

**§ 38.** Применим теперь уравнение (2) к конечной части жидкости, содержащейся внутри поверхности шара. Пусть $r$ обозначает расстояние какой-либо точки от центра, а $\delta\widetilde{\omega}$ есть телесный угол, под которым виден из центра элемент $\delta S$ поверхности; тогда имеем

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}=-\frac{\partial\varphi}{\partial r} \text{ и } \delta S=r^2\,\delta\widetilde{\omega}.$$

Если отбросить множитель $r^2$, то уравнение (2) представится в виде

$$\iint\frac{\partial\varphi}{\partial r}d\widetilde{\omega}=0,$$

или

$$\frac{\partial}{\partial r}\iint\varphi\,d\widetilde{\omega}=0. \tag{3}$$

Так как

$$\frac{1}{4\pi}\iint\varphi\,d\widetilde{\omega}, \text{ или } \frac{1}{4\pi r^2}\iint\varphi\,dS$$

дает среднее значение $\varphi$ на поверхности шара, то уравнение (3) показывает, что это среднее значение не зависит от радиуса. Среднее значение $\varphi$ поэтому одно и то же для всякого шара, который концентричен данному и может быть переведен в него постепенным изменением радиуса, не выходя из области, наполненной жидкостью с безвихревым движением. Таким образом мы можем рассматривать

*) Эта теорема была высказана в другой связи Кельвином. Lord Kelvin, Phil. Mag., Oct., 1850 (Reprint of Papers on Electrostatics, etc., London, 1872 Art. 665). Вышеизложенное доказательство принадлежит Кирхгофу. Kirchhoff, Vorlesungen über mathematische Physik, Mechanik, Leipzig, 1876. Другое доказательство см. § 44.

шар стянутым в одну точку, а тогда получаем простое доказательство теоремы, данной впервые Гауссом в его трактате [1]) по теории притяжения, что среднее значение $\varphi$ на произвольной шаровой поверхности, внутри которой имеет место уравнение (1), всегда равно значению $\varphi$ в центре. Доказанная в § 37 теорема, что $\varphi$ ни в одной точке, лежащей внутри жидкости, не может иметь максимума или минимума, есть, очевидно, следствие вышеизложенной теоремы.

Данное здесь доказательство принадлежит в существенном Фросту [2]). Другое доказательство, несколько отличающееся по форме, дано Рэлеем [3]). Так как уравнение (1) линейно, то оно удовлетворяется средним арифметическим некоторого числа отдельных решений $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3$,... Предположим, что вокруг точки $P$, как начала координат, проведено бесконечное множество прямоугольных систем координат, и пусть $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3$, ... означают потенциалы скоростей того движения, которое относительно этих отдельных систем равно первоначальному, определяемому через $\varphi$, движению относительно системы $x$, $y$, $z$. В этом случае среднее арифметическое (назовем его через $\bar{\varphi}$) функций $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3$, ... есть функция только от $r$ — расстояния точки $P$. Если мы хотим теперь выразить, что при движении, характеризуемом потенциалом скоростей $\bar{\varphi}$ (если только такое существует), поток через шаровую поверхность, которая, не выходя из области, наполненной жидкостью, может быть стянута в одну точку, равняется нулю, то мы должны положить

$$4\pi r^2 \cdot \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial r} = 0 \text{ или } \bar{\varphi} = \text{const}.$$

**§ 39.** Предположим, что область, наполненная жидкостью с безвихревым движением, перифрактическая [4]), т. е. что она изнутри ограничена одной или многими замкнутыми поверхностями. Применим теперь уравнение (2) к области, которая заключена между одной или многими из этих внутренних поверхностей и сферической поверхностью, причем последняя охватывает внутренние поверхности и целиком лежит внутри жидкости. Если $M$ обозначает полный поток, входящий через внутренние границы в указанную область, то, применяя те же обозначения, что и раньше, мы найдем

$$\iint \frac{\partial \varphi}{\partial r}\, dS = -M,$$

где поверхностный интеграл распространяется только по поверхности

---

[1]) Gauss, Allgemeine Lehrsätze..., Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins, 1839 (Werke, Göttingen, 1870—1880, V, 199).

[2]) Frost, Quarterly, Journal of Mathematics, XII (1873).

[3]) Rayleigh, Messenger of Mathematics, VII, 69 (1878 (Papers, I, 347).

[4]) См. Maxwell, Electricity and Magnetism, Arts, 18, 22. Область называется аперифрактической, если всякая построенная в ней замкнутая поверхность может быть стянута в одну точку, не выходя из области.

сферы. Это можно также представить в виде

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial r}\iint \varphi\, d\tilde{\omega} = -\frac{M}{4\pi r^2},$$

откуда следует, что

$$\frac{1}{4\pi}\iint \varphi\, d\tilde{\omega} = \frac{1}{4\pi r^2}\iint \varphi\, dS = \frac{M}{4\pi r} + C. \tag{4}$$

Это значит, что среднее значение $\varphi$ на всякой сферической поверхности, взятой при указанных выше условиях, равно $\frac{M}{4\pi r} + C$, где $r$ есть радиус, $M$ — абсолютное постоянное и $C$ — не зависящая от $r$ величина, которая, однако, может зависеть от положения центра [1]).

Если, однако, первоначальная область безвихревого движения является снаружи неограниченной и если первые (а следовательно, и все высшие) производные от $\varphi$ в бесконечности равны нулю, то $C$ имеет одно и то же значение для *всех* сферических поверхностей, которые окружают все внутренние поверхности. В самом деле, если переместить такую сферическую поверхность, не изменяя ее вида, параллельно оси $x$ [2]), то изменение $C$ вследствие такого перемещения равно, согласно формуле (4), среднему значению $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ на поверхности. Так как $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ в бесконечности равно нулю, то мы можем, выбирая сферу достаточно большой, это среднее значение сделать как угодно малым. Следовательно, $C$ не будет меняться от перемещения центра сферы параллельно оси $x$. Подобным же образом мы можем убедиться, что $C$ не будет также меняться и при перемещении параллельно оси $y$ или $z$; а это значит, что $C$ есть абсолютная постоянная.

Если внутренние граничные поверхности области таковы, что полный поток через них равен нулю, например, если они представляют поверхности твердых тел или частей несжимаемой завихренной жидкости, то тогда будет $M=0$, и, следовательно, $\varphi$ на *всякой* сферической поверхности, заключающей все внутренние границы, имеет одно и то же среднее значение.

**§ 40.** ($a$) Если потенциал скоростей $\varphi$ постоянен на границе односвязной области, наполненной жидкостью с безвихревым движением, то он имеет то же постоянное значение также и внутри области. Ибо, если бы функция $\varphi$ не была постоянной, то она имела бы непременно максимум или минимум в какой-нибудь точке области.

Иначе: в § 35 и § 36 мы видели, что линии тока не могут начинаться или кончаться ни в какой точке области и что они не могут образовать замкнутые кривые, лежащие целиком внутри области. Они должны, следовательно, так проходить через область, чтобы начинаться и кончаться на границе. В нашем случае, однако, это

---

[1]) Следует помнить, что сферические поверхности, к которым относятся эти теоремы, переводимы друг в друга в том смысле, о котором шла речь в § 34.

[2]) Kirchhoff, Mechanik, стр. 191.

невозможно, так как такая линия должна переходить всегда от точек, где $\varphi$ больше, к таким точкам, где $\varphi$ меньше. Следовательно, здесь движение не может иметь места, т. е.

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0,$$

и поэтому $\varphi$ постоянно и равно своему значению на границе.

($\beta$). Если $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ равно нулю для всякой точки на границе такой области, о которой речь шла выше, то $\varphi$ должно быть постоянной всюду внутри области. В самом деле, условие $\frac{\partial\varphi}{\partial n}=0$ указывает, что ни одна из линий тока не может войти в область или выйти из нее, но что все они находятся внутри области. Это, однако, как мы видели, несовместимо с теми условиями, которым подчинены линии тока. Поэтому, как и выше, здесь никакое движение не может иметь места, и $\varphi$ постоянна.

Эта теорема иначе может быть выражена следующим образом. В односвязной области, полностью ограниченной неподвижными твердыми стенками, не может иметь места непрерывное безвихревое движение жидкости.

($\gamma$). Пусть граница рассматриваемой области состоит частично из поверхностей $S$, на которых $\varphi$ имеет постоянное значение, и частично из поверхностей $\Sigma$, на которых $\frac{\partial\varphi}{\partial n}=0$. Согласно вышеизложенным рассуждениям, никакая линия тока не может итти от одной точки $S$ к другой точке $S$, и никакая из этих линий не может пересекать $\Sigma$. А следовательно, вообще не могут существовать такие линии; функция $\varphi$ поэтому, как и выше, постоянна и равна своему значению на $S$.

Из этих теорем следует, что безвихревое движение несжимаемой жидкости в односвязной области вполне определено, когда даны для всех точек границы или значения $\varphi$, или значения компоненты скорости $-\frac{\partial\varphi}{\partial n}$, направленной по внутренней нормали, или, наконец, когда даны значения $\varphi$ для одной части поверхности и значения $-\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ для другой. В самом деле, если $\varphi_1$, $\varphi_2$ означают потенциалы скоростей двух движений, из которых каждое удовлетворяет заданным граничным условиям в одном из этих случаев, то функция $\varphi_1-\varphi_2$ удовлетворяет условию ($\alpha$), или ($\beta$), или ($\gamma$) этого параграфа и должна поэтому быть постоянной во всей области.

**§ 41.** Имеется ряд очень важных случаев, которые не вполне охватываются совокупностью вышеизложенных теорем, именно те случаи, в которых область, наполненная несжимаемой жидкостью с безвихревым движением, простирается в бесконечность, а изнутри ограничена одной или несколькими замкнутыми поверхностями. Мы предположим пока, что эта область односвязна, и $\varphi$, следовательно, однозначна.

Если $\varphi$ на внутренних границах области постоянна и на бесконечном расстоянии от них всюду стремится к тому же самому постоянному значению, то она постоянна во всей области. Ибо иначе в некоторой точке внутри области функция $\varphi$ имела бы максимум или минимум.

Совершенно так же, как и в § 40, мы заключаем, что значение $\varphi$ всюду вполне определено, если эта функция задана произвольно на внутренних границах и имеет постоянное значение в бесконечности.

Большее значение в рассматриваемых нами исследованиях имеет теорема, что, если компонента скорости по нормали для каждой точки внутренней границы равна нулю и жидкость в бесконечности находится в покое, то функция $\varphi$ всюду постоянна. Мы не можем, однако, сделать такое заключение прямо из доказательства соответствующей теоремы в § 40. Действительно, мы можем предположить область ограниченной снаружи бесконечно большой поверхностью, в каждой точке которой $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ как угодно мало; но это не исключает того, что сам интеграл $\iint \frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dS$, распространенный по некоторой части этой поверхности, может быть все еще конечным, вследствие чего указанная ссылка была бы несостоятельной. Мы поступим поэтому следующим образом.

Так как скорость на бесконечном расстоянии от внутренних границ (назовем их через $S$) стремится к пределу нуль, то можно провести замкнутую поверхность $\Sigma$, полностью заключающую $S$, вне которой скорость всегда меньше, чем наперед заданное значение $\varepsilon$; если $\Sigma$ взять достаточно большой, то $\varepsilon$ можно сделать как угодно малым. Возьмем теперь некоторую точку $P$ в произвольном направлении по отношению $S$, но вне $\Sigma$ и на таком расстоянии от нее, что телесный угол, под которым $\Sigma$ видно из $P$, бесконечно мал; около $P$, как центра, опишем теперь две сферы, из которых одна как раз охватывает $S$, а другая, наоборот, ее исключает. Мы покажем теперь, что средние значения $\varphi$ вдоль каждой из этих двух сферических поверхностей могут отличаться друг от друга только на бесконечно малую величину. В самом деле, пусть $Q$, $Q'$ — точки на этих сферических поверхностях, лежащие на общем радиусе $PQQ'$; если $Q$ и $Q'$ попадают внутрь $\Sigma$, то соответствующие значения для $\varphi$ могут отличаться на конечную величину; но так как часть каждой из сферических поверхностей, заключенная внутри $\Sigma$, составляет только бесконечно малую часть всей сферы, то для разности средних значений не может получиться конечное число. Если, напротив, $Q$ и $Q'$ лежат вне $\Sigma$, то соответствующие значения $\varphi$ не могут отличаться более чем на $\varepsilon\cdot QQ'$, так как $\varepsilon$, согласно определению, дает верхнюю границу для величины изменения $\varphi$ вне $\Sigma$. Поэтому средние значения $\varphi$ на этих обеих сферических поверхностях могут отличаться только меньше, чем на $\varepsilon\cdot QQ'$. Так как $QQ'$ конечно, а $\varepsilon$, выбирая $\Sigma$ достаточно большой, можно сделать как угодно малым, то разность

средних значений, если взять $P$ достаточно далеко, может быть сделана бесконечно малой.

Из § 38 и 39 мы знаем, что среднее значение $\varphi$ на внутренней сферической поверхности равно значению $\varphi$ в центре $P$ и что среднее значение на внешней сферической поверхности (так как $M=0$) равно постоянной величине $C$. Отсюда следует, наконец, что значение $\varphi$ в бесконечности всюду стремится к постоянному значению $C$.

Тот же самый результат имеет место и тогда, когда компонента скорости по нормали на внутренней границе не равна нулю. Ибо в теореме § 39 $M$ делится на $r$, который в нашем случае бесконечен.

Следовательно, если для всех точек внутренней границы будет $\frac{\partial\varphi}{\partial n}=0$ и жидкость в бесконечности находится в покое, то она должна всюду быть в покое. В самом деле, на внутренних границах никакая линия тока не может ни начинаться, ни кончаться; поэтому такие линии должны, если они существуют, приходить из бесконечности, пересекать область, занятую жидкостью, и снова возвращаться в бесконечность, т. е. они должны образовать бесконечно длинные пути между местами, в которых значения $\varphi$ с точностью до бесконечно малой величины имеют одно и то же значение $C$, что невозможно.

Теорема о том, что для покоящейся в бесконечности жидкости движение вполне определено, как только будет дано значение $-\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ на всей внутренней границе, выводится при помощи такого же рассуждения, как в § 40.

## Теорема Грина

**§ 42.** В учебниках электростатики и др. многие важные свойства потенциала доказываются обыкновенно с помощью одной теоремы, которой мы обязаны Грину. Свойства, наиболее важные для наших целей, мы уже получили; но так как эта теорема, между прочим, приводит к употребительному выражению для кинетической энергии в случае общего безвихревого движения, то ее надлежит здесь изложить.

Пусть имеем $U$, $V$, $W$ три любые функции, которые конечны, однозначны и диференцируемы для всех точек связной области, целиком ограниченной одной или несколькими замкнутыми поверхностями $S$. Пусть $\delta S$ — элемент одной из этих поверхностей и $l$, $m$, $n$ — направляющие косинусы его нормали, направленной внутрь.

Мы докажем сначала, что

$$\iint (lU+mV+nW)dS=-\iiint\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial W}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz, \quad (1)$$

где тройной интеграл распространяется по всей области, а двойной интеграл — по ограничивающим ее поверхностям.

Если мы проведем ряд поверхностей так, что они разобьют область на некоторое число отдельных частей, то интеграл

$$\iint (lU + mV + nW)\, dS, \tag{2}$$

взятый по первоначальной граничной поверхности, равен сумме подобных интегралов, из которых каждый распространен по поверхности, ограничивающей одну из этих частей. В самом деле, для всякого элемента $\delta\sigma$ разделяющей поверхности в интегралы, которые соответствуют областям, лежащим по обе стороны этой поверхности, входят элементы

$$(lU + mV + nW)\,\delta\sigma$$

и

$$(l'U + m'V + n'W)\,\delta\sigma.$$

Но так как нормали, к которым относятся значения $l$, $m$, $n$ и $l'$, $m'$, $n'$, направлены всегда внутрь, то должно быть

$$l' = -l,\ m' = -m,\ n' = -n,$$

поэтому при составлении суммы названных интегралов элементы, соответствующие разделяющей поверхности, сократятся, и останутся только те, которые относятся к первоначальной ограничивающей поверхности.

Предположим, что разделяющие поверхности состоят из трех систем плоскостей, которые проведены параллельно координатным плоскостям на бесконечно малых расстояниях друг от друга. Если назовем через $x$, $y$, $z$ координаты центра какого-либо выделенного таким образом параллелепипеда и через $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$ — длины его ребер, то значение интеграла (2), взятое по грани, параллельной плоскости $yz$ и лежащей ближе к началу, равно

$$\left(U - \frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial x}\,\delta x\right)\delta y\,\delta z,$$

а значение интеграла, отнесенного к противоположной грани, равно

$$-\left(U + \frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial x}\,\delta x\right)\delta y\,\delta z.$$

Сумма этих значений равна

$$-\frac{\partial U}{\partial x}\,\delta x\,\delta y\,\delta z.$$

Вычислив подобным же образом значения интегралов, которые относятся к другим парам граней, мы получим конечный результат в виде

$$-\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial x}\right)\delta x\,\delta y\,\delta z.$$

Таким образом формула (1) просто выражает тот факт, что поверхностный интеграл (2), распространенный по границе области, равен сумме соответствующих интегралов, распространенных по поверхностям пространственных элементов, из которых может быть составлена рассматриваемая область.

Из формулы (1) следует или это может быть доказано непосредственно с помощью преобразования координат, что если $U$, $V$, $W$ рассматриваются как компоненты вектора, то выражение

$$\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial W}{\partial z}$$

представляет скалярную величину, т. е. что значение его при всяком таком преобразовании остается неизменным. Это выражение называют обыкновенно *дивергенцией* векторного поля в точке $(x, y, z)$.

Интерпретация формулы (1) в случае, когда $(U, V, W)$ представляют компоненты скорости непрерывной среды, вполне очевидна. В частном случае безвихревого движения мы получим

$$\iint \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, dS=-\iiint \Delta\varphi\, dx\, dy\, dz, \tag{3}$$

где $\partial n$ есть элемент направленной внутрь нормали к поверхности $S$.

Если, далее, положить

$$U=\varrho u,\ V=\varrho v,\ W=\varrho w,$$

то мы воспроизведем в основном второе исследование § 7.

Другой важный результат получится, если положить

$$U=u\varphi,\ V=v\varphi,\ W=w\varphi,$$

где $u$, $v$, $w$ удовлетворяют внутри области соотношению

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0,$$

а на границе

$$lu+mv+nw=0.$$

Мы получим тогда, что

$$\iiint\left(u\frac{\partial\varphi}{\partial x}+v\frac{\partial\varphi}{\partial y}+w\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)dx\, dy\, dz=0. \tag{4}$$

Функция $\varphi$ подчинена здесь только тому ограничению, что она во всей области остается конечной, однозначной и непрерывной и обладает конечными первыми производными.

**§ 43.** Обозначим через $\varphi$, $\varphi'$ две произвольные функции, которые вместе с их первыми и вторыми производными конечны и однозначны в рассматриваемой области. Положим

$$U=\varphi\frac{\partial\varphi'}{\partial x},\quad V=\varphi\frac{\partial\varphi'}{\partial y},\quad W=\varphi\frac{\partial\varphi'}{\partial z},$$

так что

$$lU+mV+nW=\varphi\frac{\partial\varphi'}{\partial n}.$$

Вставляя это в уравнение (1), найдем

$$\iint\varphi\frac{\partial\varphi'}{\partial n}\,dS=-\iiint\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi'}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\varphi'}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\varphi'}{\partial z}\right)dx\, dy\, dz-$$
$$-\iiint\varphi\,\Delta\varphi'\, dx\, dy\, dz. \tag{5}$$

Переставляя $\varphi$ и $\varphi'$, получим

$$\iint \varphi' \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = -\iiint \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \varphi'}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \varphi'}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial \varphi'}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz - \\ - \iiint \varphi' \Delta\varphi\, dx\,dy\,dz. \qquad (6)$$

Уравнения (5) и (6) вместе и выражают теорему Грина [1]).

**§ 44.** Пусть $\varphi$ и $\varphi'$ представляют потенциалы скоростей двух различных безвихревых движений жидкости. Так как

$$\Delta\varphi = 0, \quad \Delta\varphi' = 0, \qquad (1)$$

то мы получим

$$\iint \varphi \frac{\partial \varphi'}{\partial n} dS = \iint \varphi' \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS. \qquad (2)$$

Вспоминая данное в § 18 физическое истолкование потенциала скоростей и предполагая движение полученным мгновенно из состояния равновесия, мы усматриваем в этом уравнении частный случай динамической теоремы

$$\sum p_r \dot{q}_r = \sum p'_r \dot{q}'_r,$$

где $p_r$, $\dot{q}_r$ и $p'_r$, $\dot{q}'_r$ суть обобщенные компоненты импульса и скорости для двух произвольных возможных движений системы [2]).

Если положить в формуле (6) § 43

$$\varphi' = \varphi$$

и допустить, что $\varphi$ есть потенциал скоростей несжимаемой жидкости, то мы получим

$$\iiint \left\{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right\} dx\,dy\,dz = -\iint \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS. \qquad (3)$$

Чтобы истолковать это уравнение, умножим обе части его на $\frac{1}{2}\varrho$. Тогда $-\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ в правой части обозначает направленную внутрь нормальную компоненту скорости жидкости, а $\varrho\varphi$, согласно § 18, есть необходимое для образования движения импульсивное давление. Существует теорема динамики [3]), которая утверждает, что произведенная импульсивной силой работа измеряется произведением импульса на полусумму компонент, взятых по направлению импульса, начальной и конечной скорости точки, на которую подействовал импульс. Поэтому правая сторона формулы (3), умноженная на $\frac{1}{2}\varrho$, выражает работу, произведенную теми импульсивными давлениями, которые, будучи распределены по поверхности $S$, могут вызвать рассматри-

---

[1]) Green G., Essay on Electricity and Magnetism, Nottingham, 1828, § 3 (Mathematical Papers (ed. Ferrers), Cambridge, 1871, стр. 3).

[2]) Thomson and Tait, Natural Philosophy, § 313, уравнение (11).

[3]) Thomson and Tait, Natural Philosophy, § 308.

ваемое движение; левая сторона, напротив, дает кинетическую энергию этого движения. Сама же формула указывает на равенство обеих этих величин. Отсюда, если $T$ обозначает общую кинетическую энергию жидкости, следует очень важная формула

$$2T = -\varrho \iint \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, dS. \tag{4}$$

Если в формулу (3) подставить $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ вместо $\varphi$, которая, конечно, удовлетворяет уравнению

$$\Delta \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0,$$

и применить получающуюся формулу к области, которая ограничена сферической поверхностью, описанной радиусом $r$ около произвольного центра $(x, y, z)$, то мы будем иметь в обозначениях § 39

$$\frac{1}{2} r^2 \frac{\partial}{\partial r} \iint u^2 d\widetilde{\omega} = \iint u \frac{\partial u}{\partial r}\, dS = -\iint \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) dS =$$
$$= \iiint \left\{\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial z}\right)^2\right\} dx\, dy\, dz.$$

Полагая $q^2 = u^2 + v^2 + w^2$, получим

$$\frac{1}{2} r^2 \frac{\partial}{\partial r} \iint q^2 d\widetilde{\omega} = \iiint \left\{\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\right)^2 +\right.$$
$$\left. + 2\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y\, \partial z}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z\, \partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial y}\right)^2\right\} dx\, dy\, dz. \tag{5}$$

Так как правая часть этого уравнения существенно положительна, то среднее значение $q^2$ на сферической поверхности, описанной около произвольного центра, возрастает вместе с радиусом сферы. Поэтому $q^2$ ни в какой точке жидкости не может иметь максимума, что уже доказано другим путем в § 37.

Если мы теперь вспомним формулу для давления в общем случае безвихревого движения жидкости:

$$\frac{p}{\varrho} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \Omega - \frac{1}{2} q^2 + F(t), \tag{6}$$

то, предполагая, что потенциал $\Omega$ внешних сил удовлетворяет условию

$$\Delta \Omega = 0, \tag{7}$$

заключаем, что среднее значение $p$ на сферической поверхности, описанной около произвольного центра, лежащего внутри жидкости, уменьшается при возрастании радиуса. Область с наименьшим давлением будет находиться поэтому где-нибудь на границе жидкости. Это обстоятельство имеет отношение к вопросу, рассматриваемому в 23.

**§ 45.** В связи с этим обратим внимание на замечательную теорему, открытую Кельвином [1]) и впоследствии им обобщенную настолько, что она представляет теперь общее свойство динамических систем, которые мгновенно приводятся в движение из состояния покоя при заданных условиях для скоростей [2]):

---

[1]) Thomson W., On the Vis-viva of a Liquid in Motion, Camb. and Dub. Math. Journ., 1849 (Papers, I, 107).

[2]) Thomson and Tait, 312.

*Безвихревое* движение капельной жидкости в односвязной области обладает меньшей кинетической энергией, чем всякое другое движение с одинаковой нормальной компонентой скорости на границе.

Пусть $T$ есть кинетическая энергия безвихревого движения, которой соответствует потенциал скоростей $\varphi$, и $T_1$ — кинетическая энергия другого движения, заданного выражениями

$$u = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} + u_0, \quad v = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} + v_0, \quad w = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} + w_0, \tag{8}$$

причем вследствие уравнения неразрывности внутри области должно быть

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0,$$

а в силу заданных условий на границе

$$lu_0 + mv_0 + nw_0 = 0.$$

Полагая далее

$$T_0 = \frac{1}{2}\varrho \iiint (u_0^2 + v_0^2 + w_0^2)\, dx\, dy\, dz, \tag{9}$$

мы найдем, что

$$T_1 = T + T_0 - \varrho \iiint \left( u_0 \frac{\partial\varphi}{\partial x} + v_0 \frac{\partial\varphi}{\partial y} + w_0 \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right) dx\, dy\, dz.$$

Так как этот последний интеграл вследствие (4) § 42 обращается в нуль, то будем иметь

$$T_1 = T + T_0, \tag{10}$$

что и доказывает нашу теорему [1]).

**§ 46.** Для дальнейшего необходимо знать, каким будет выражение (4) для кинетической энергии, если жидкость простирается в бесконечность, находится там в покое и изнутри ограничена одной или несколькими замкнутыми поверхностями $S$. Проведем большую замкнутую поверхность $\Sigma$ так, чтобы она заключала в себе совокупность поверхностей $S$. Энергия заключенной между $S$ и $\Sigma$ жидкости равна

$$-\frac{1}{2}\varrho \iint \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, dS - \frac{1}{2}\varrho \iint \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, d\Sigma, \tag{11}$$

где интегрирование в первом члене проводится по $S$, а во втором по $\Sigma$. Так как вследствие уравнения неразрывности

$$\iint \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, dS + \iint \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, d\Sigma = 0,$$

то выражение (11) может быть представлено в виде

$$-\frac{1}{2}\varrho \iint (\varphi - C) \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, dS - \frac{1}{2}\varrho \iint (\varphi - C) \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, d\Sigma, \tag{12}$$

---

[1]) Некоторые обобщения этого результата даны Leathem, Cambridge Tracts № 1, 2 изд. (1913). Они дают дальнейшие интересные иллюстрации общего динамического принципа Кельвина.

где $C$ может быть некоторой произвольной постоянной; здесь же мы допускаем, что она имеет то постоянное значение, к которому, согласно § 39, стремится $\varphi$ на бесконечном расстоянии от $S$. Представим теперь всю наполненную жидкостью область составленною из трубок тока, каждая из которых или должна итти от одной точки внутренней границы к другой точке ее или же от внутренней границы простираться в бесконечность. Поэтому значение интеграла

$$\iint \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\Sigma,$$

взятого по некоторой незамкнутой или замкнутой, конечной или бесконечной поверхности, лежащей внутри области, должно быть конечно. А тогда, если взять $\Sigma$ бесконечно большой и всюду бесконечно удаленной от $S$, второй член (12) должен в конечном счете исчезнуть, и мы будем иметь

$$2T = -\varrho \iint (\varphi - C) \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS, \tag{13}$$

где интеграл берется только по внутренней границе.

Если полный поток через внутреннюю границу равен нулю, то

$$\iint \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = 0,$$

и формулу (13) можно представить просто в виде

$$2T = -\varrho \iint \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS. \tag{14}$$

## О многосвязных областях

**§ 47.** Прежде чем рассматривать свойства безвихревого движения в многосвязных областях, мы должны ближе изучить свойства и классификацию таких областей. В нижеследующем обозрении этой ветви геометрии (топология) мы ради полноты повторим одно или два уже ранее данных определения.

Рассмотрим некоторую связную область пространства, заключенного внутри какой-то границы. Область называют связной, если возможно от некоторой произвольной точки ее перейти к другой произвольной ее точке вдоль бесконечно большого числа путей, каждый из которых лежит всецело внутри области.

Такие два произвольные пути или две какие-нибудь замкнутые кривые, которые непрерывным изменением, не выходя из области, можно совместить, называются *взаимно переводимыми*. Всякая замкнутая кривая, которая, оставаясь внутри области, может быть стянута в точку, называется *приводимой*. Два взаимно переводимые пути образуют вместе приводимую замкнутую кривую. Если два пути или две замкнутые кривые взаимно переводимы, то возможно натянуть на них непрерывную, целиком расположенную внутри области поверхность, для которой эти кривые образуют полную границу, и на-

оборот. Далее целесообразно делать различие между просто и кратно неприводимыми контурами. Неприводимый контур называется кратно неприводимым, если его можно перевести с помощью непрерывного изменения всецело или частично в другой несколько раз пробегаемый неприводимый контур. Простой неприводимый контур есть такой, для которого это невозможно.

Перегородкой или диафрагмой называется проведенная через область поверхность, граница которой образована линией или линиями, по которым эта поверхность пересекает границу области. Поэтому перегородка необходимо должна быть связной поверхностью и не может состоять из двух или нескольких отдельных частей.

Область называется односвязной, если все пути, проведенные между какими-нибудь ее точками, взаимно переводимы или все взятые в ней замкнутые кривые приводимы.

Область называется двусвязной, если между двумя ее точками $A$ и $B$ могут быть проведены два и только два пути взаимно непереводимые; всякий другой путь между $A$ и $B$ переводим в один из этих обоих или в комбинацию их, в которой каждый может входить несколько раз. Другими словами: область такова, что в ней может быть проведен один и только один неприводимый простой контур; все другие контуры переводимы или в этот (или возможно в кривую, образованную из него через повторение) или же они приводимы. Как пример двусвязной области мы можем взять область, заключенную внутри кольца (тора), или область вне кольца, простирающуюся в бесконечность.

Вообще область называется $n$-связной, если в ней могут быть проведены между двумя точками $n$ и только $n$ взаимно непереводимых путей или если могут быть проведены $n-1$ и не больше (простых) неприводимых и взаимно непереводимых замкнутых кривых.

Заштрихованная часть фиг. 6 есть двухмерная трехсвязная область.

Можно показать, что вышеизложенное определение $n$-связной области непротиворечиво. В простых случаях, когда $n=2$, $n=3$, это ясно без доказательства.

**§ 48.** Предположим, что мы имеем $n$-связную область с $n-1$ независимыми просто неприводимыми замкнутыми кривыми. В этом случае можно провести перегородку, которая одну из этих замкнутых кривых пересечет в одной только точке, а остальные $n-2$ замкнутых кривых совсем не пересечет. Такая перегородка не нарушит связности области, так как пересеченная ею замкнутая кривая останется как путь от одной стороны перегородки до другой. Однако порядок связности области понижается на *единицу*; ибо всякая замкнутая кривая в измененной области должна быть переводима в одну или несколько из $n-2$ не пересеченных нашей перегородкой замкнутых кривых.

Вторая подобным образом проведенная перегородка понизит порядок связности опять на единицу, и т. д.; таким образом, проводя $n-1$ перегородок, мы можем привести область к односвязной.

Односвязная область разбивается перегородкой на две отдельные части; ибо иначе можно бы было перейти от точки на одной стороне перегородки к соседней точке на второй стороне ее вдоль лежащего целиком внутри области пути, который в первоначальной области представлял бы неприводимую замкнутую кривую.

Таким образом в $n$-связной области, не нарушая связности ее, можно провести $n-1$, но не больше, перегородок. Этим свойством пользуются иногда для определения $n$-связной области.

## Безвихревое движение в многосвязных областях

**§ 49.** В области, наполненной жидкостью с безвихревым движением, циркуляция по двум взаимно переводимым замкнутым кривым $ABCA$ и $A'B'C'A'$ имеет одно и то же значение. В самом деле, две замкнутые кривые могут быть связаны друг с другом при помощи непрерывной, целиком лежащей внутри области, поверхности; если мы применим теорему § 32 к этой поверхности, то, принимая во внимание правило относительно направления интегрирования, получим

$$J(ABCA)+J(A'C'B'A')=0,$$

или

$$J(ABCA)=J(A'B'C'A').$$

Если замкнутая кривая $ABCA$ переводима в комбинацию двух или нескольких замкнутых кривых $A'B'C'A'$, $A''B''C''A''$ и т. д., то мы можем все эти замкнутые кривые связать непрерывной поверхностью, которая лежит всецело внутри области и для которой эти контуры составляют полную границу. Поэтому будем иметь

$$J(ABCA)+J(A'C'B'A')+J(A''C''B''A'')+\ldots=0,$$

или

$$J(ABCA)=J(A'B'C'A')+J(A''B''C''A'')+\ldots,$$

т. е. циркуляция по произвольной замкнутой кривой равна сумме циркуляций по отдельным кривым той совокупности замкнутых кривых, в которые переводима первоначальная кривая.

Пусть порядок связности области будет $n+1$, так что в ней можно провести $n$ независимых просто неприводимых замкнутых кривых $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Пусть циркуляции по этим замкнутым кривым будут соответственно $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$. Знак каждого $\varkappa$ будет зависеть, естественно, от направления интегрирования вдоль соответствующей замкнутой кривой; мы назовем направление, по которому взято $\varkappa$, положительным направлением замкнутой кривой. Значение циркуляции по другой произвольной замкнутой кривой можно сразу определить. В самом деле, данная замкнутая кривая должна быть переводимой в какую-либо комбинацию кривых $a_1, a_2, \ldots, a_n$; $a_1$ может при этом проходиться $p_1$ раз, $a_2$ — $p_2$ раз и т. д., причем $p_1$, естественно, будет отрицательным, если соответствующая замкнутая кривая про-

ходится в отрицательном направлении. Искомая циркуляция тогда равна

$$p_1\varkappa_1 + p_2\varkappa_2 + \ldots + p_n\varkappa_n. \tag{1}$$

Так как два произвольные пути, которые соединяют две точки $A$ и $B$ области, вместе образуют замкнутую кривую, то отсюда следует, что значения потока по обоим путям могут отличаться только на величины вида (1), причем, конечно, в частных случаях некоторые или все $p$ могут равняться нулю.

**§ 50.** Обозначим через $-\varphi$ поток от фиксированной точки $A$ к переменной точке $P$, т. е.

$$\varphi = -\int_A^P (u\,dx + v\,dy + w\,dz). \tag{2}$$

До тех пор, пока путь интегрирования от $A$ до $P$ не установлен, значение $\varphi$ будет определяться с точностью до величины вида (1).

Если, однако, провести $n$ перегородок по способу, указанному в § 48, для того чтобы привести область к односвязной и ограничить путь интегрирования в выражении (2) так, чтобы он лежал внутри преобразованной таким образом области (т. е. он не должен пересекать ни одну из перегородок), то $\varphi$ будет однозначной функцией, как и в § 35. Далее, $\varphi$ будет непрерывной функцией в преобразованной области, но ее значения в двух соседних точках на различных сторонах перегородки отличаются на $\pm\varkappa$. Чтобы получить значение $\varphi$ для случая, когда интегрирование взято вдоль произвольного пути внутри непреобразованной области, мы должны *вычесть* величину вида (1), где какое-то $p$ указывает, сколько раз этот путь пересекает соответствующую перегородку. При этом пересечение перегородки в положительном направлении той замкнутой кривой, для которой проведена перегородка, будет считаться положительным, а пересечение в противоположном направлении будет отрицательным.

Перемещая $P$ на бесконечно малый отрезок параллельно каждой координатной оси, мы найдем, что

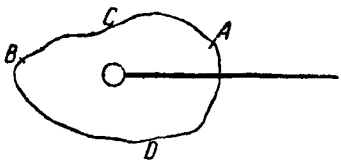
$$u = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad v = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad w = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

Функция $\varphi$ удовлетворяет, таким образом, определению потенциала скоростей (§ 17). Однако, она будет теперь многозначной или циклической, т. е. нельзя будет каждой точке первоначальной области поставить в соответствие единственное определенное значение $\varphi$ таким образом, чтобы эти значения образовали непрерывную систему. Напротив, когда $P$ будет описывать неприводимую замкнутую кривую, то $\varphi$, вообще говоря, не будет возвращаться к своему первоначальному значению, но будет отличаться от него на величину вида (1).

Количества $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$, представляющие величины, на которые уменьшается $\varphi$, когда $P$ проходит различные независимые замкнутые кривые области, мы назовем *циклическими* постоянными функции $\varphi$.

В качестве непосредственного следствия теоремы о циркуляции § 33, при допускаемых там условиях, будет следовать, что эти циклические постоянные не зависят от времени. Насколько необходимы эти условия, будет выяснено на примере § 29, где потенциал внешних сил сам есть циклическая функция.

Вышеизложенная теория может быть иллюстрирована случаем (2) § 27; область там двусвязная (так как она изнутри ограничена малым кругом около начала координат, где формула дает бесконечно большое значение для скорости); поэтому две произвольные точки $A$ и $B$ (фиг. 8) области могут быть соединены при помощи двух взаимно непереводимых путей, которые расположены по обе стороны оси $z$, например, $ACB$ и $ADB$ на приложенной фигуре. Ту часть плоскости $xz$, для которой $x$ положительно, мы можем взять в качестве перегородки и этим самым превратить область в односвязную. Циркуляция по произвольной замкнутой кривой, которая пересекает эту перегородку только один раз как, например, $ACBDA$, равна



Фиг. 8.

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mu}{r} r\, d\theta, \quad \text{или} \quad 2\pi\mu.$$

Циркуляция же по замкнутой кривой, не пересекающей перегородки, равна нулю. В преобразованной области можно положить $\varphi$ равной однозначной функции, например — $\mu\theta$. Однако ее значение на положительной стороне перегородки равно нулю, в то время как в соседней точке на отрицательной стороне равно $-2\pi\mu$.

Более сложные примеры безвихревого движения в многосвязных двухмерных областях встретятся в следующей главе.

**§ 51.** Прежде чем перейти к дальнейшему, мы дадим вкратце несколько другой метод изложения этой теории.

Исходя из существования потенциала скоростей как основной характеристики того класса движений, который мы намереваемся изучать, и принимая второе данное в § 48 определение $n+1$-связной области, мы замечаем, что в односвязной области всякая поверхность уровня (поверхность равного потенциала) или должна быть замкнутой поверхностью, или должна представлять перегородку, разбивающую область на две отдельные части. Отсюда, предполагая, что проведена целая система таких поверхностей, мы видим, что всякая замкнутая кривая, которая пересекает однажды произвольную из заданных эквипотенциальных поверхностей, должна пересечь ее вторично, но в противоположном направлении. Поэтому каждому элементу этой кривой, заключенному между двумя последовательными эквипотенциальными поверхностями, соответствует второй элемент кривой, такой, что поток вдоль второго, будучи равным разности соответствующих значений $\varphi$, равен и противоположен потоку вдоль первого. Поэтому величина циркуляции вдоль всей замкнутой кривой равна нулю.

Если, однако, область многосвязная, то эквипотенциальная поверхность может образовать перегородку, не разбивая области на две отдельные части. Проведем теперь столько таких поверхностей, сколько возможно, чтобы не разрушить связности области. Их число не может по определению быть больше, чем $n$. Всякая другая незамкнутая эквипотенциальная поверхность должна, очевидно, быть переводимой в одну или больше из этих перегородок. Если провести кривую с одной стороны перегородки к другой ее стороне, притом не пересекая какой-нибудь другой перегородки, то всякая эквипотенциальная поверхность, переводимая в первую перегородку, пересекается этой кривой нечетное число раз, а всякая другая эквипотенциальная поверхность — четное число раз. Поэтому циркуляция по образованной таким образом замкнутой кривой не равна нулю, и $\varphi$ будет циклической функцией.

В методе, развитом выше, мы обосновали всю теорию на уравнениях

$$\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0 \tag{3}$$

и вывели из них, как необходимые следствия, существование и свойства потенциала скоростей в различных случаях. Действительно, содержание § 34, 35 и 49, 50 может рассматриваться, как исследование о свойствах решений этой системы диференциальных уравнений в зависимости от характера области, для которой они имеют место.

Интегрирование уравнений (3) для случая, когда мы с правой стороны вместо нуля будем иметь известные функции от $x$, $y$, $z$, будет разобрано в главе VII.

**§ 52.** Переходя теперь, как в § 36, к частному случаю несжимаемой жидкости, мы заметим, что, все равно, будет ли $\varphi$ циклической или нет, ее первые производные $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$, а следовательно, и все производные высшего порядка, суть существенно однозначные функции, и при этом $\varphi$ всегда будет удовлетворять уравнению неразрывности

$$\Delta\varphi=0, \tag{1}$$

или эквивалентному уравнению

$$\iint\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dS=0, \tag{2}$$

где поверхностный интеграл распространяется по всей границе произвольной части жидкости.

Теорема ($a$) § 40 о том, что функция $\varphi$ должна внутри всякой области, для точек которой имеет место уравнение (1), быть постоянной, если она постоянна на границе ее, имеет место также и тогда, когда область многосвязна. Ибо $\varphi$ должна быть обязательно однозначна, если она постоянна на всей границе.

Другие теоремы § 40, которые опираются на допущение, что линии тока не могут образовать замкнутые кривые, потребуют не-

которых изменений. Именно мы должны присоединить еще условие, что циркуляция по всякой замкнутой кривой области должна равняться нулю.

Если мы отбросим это ограничение, то будем иметь следующую теорему: безвихревое движение несжимаемой жидкости в $n$-связной области вполне определено, если даны как нормальная компонента скорости для всякой точки границы, так и значение циркуляции для всякой из $n$ независимых неприводимых замкнутых кривых, которые можно провести в данной области. В самом деле, если $\varphi_1$, $\varphi_2$ суть (циклические) потенциалы скоростей двух движений, удовлетворяющих вышеизложенным условиям, то

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$$

есть однозначная функция, которая для всякой точки области удовлетворяет уравнению (1), а для всякой точки границы удовлетворяет условию $\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0$. Поэтому $\varphi$ согласно § 40 постоянна, и движения, определяемые с помощью $\varphi_1$ и $\varphi_2$, тождественны.

Теория многосвязности развита, повидимому, впервые Риманом [1]) для двухмерных областей в связи с его исследованиями по теории функции комплексного переменного. Там встречаются также циклические функции, которые удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0$$

в многосвязных областях.

Значение этой теории для гидродинамики и существование многозначных потенциалов скоростей в некоторых случаях впервые отмечено Гельмгольцем [2]). Вопрос о циклическом безвихревом движении в многосвязных областях был впоследствии опять поднят Кельвином и вполне исследован в его уже цитированной работе о вихревом движении [3]).

## Обобщение Кельвина для теоремы Грина

**§ 53.** При доказательстве теоремы Грина предполагалось, что как $\varphi$, так и $\varphi'$ суть однозначные функции. Формулировка теоремы должна быть изменена, если одна из двух функций циклична, что может случиться, когда область, по которой производится интегрирование в § 43, будет многосвязной. Предположим, например, что $\varphi$ циклична; поверхностный интеграл на левой стороне и второй тройной интеграл на правой стороне уравнения (5) § 43 будут тогда по своему значению неопределенны, так как $\varphi$ само неопределенно. Чтобы устранить эту неопределенность, проведем указанные в § 48 перегородки, которые превратят область в односвязную. В преобразован-

---

[1]) Riemann, Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse, Göttingen, 1851 (Mathematische Werke, Leipzig, 1876, p. 3) и Lehrsätze aus der Analysis Situs, Crelle, LIV (1857) (Werke, p. 84).

[2]) Helmholtz, Crelle, LV (1858).

[3]) См. также Kirchhoff, Über die Kräfte, welche zwei unendlich dünne starre Ringe in einer Flüssigkeit scheinbar auf einander ausüben können, Crelle, LXXI (1869) (Ges. Abh., p. 404).

ной таким образом области мы можем $\varphi$ принять непрерывной и однозначной; указанное только что уравнение сохранит свое значение, если предположить, что обе стороны каждой перегородки будут рассматриваться как части поверхности, ограничивающей область, и будут приняты во внимание в поверхностном интеграле на левой стороне. Обозначим через $\delta\sigma_1$ элемент перегородки, через $\varkappa_1$ — циклическую постоянную для этой перегородки, через $\frac{\partial\varphi'}{\partial n}$ — первую производную от $\varphi'$ по положительному направлению нормали к $\delta\sigma_1$. Так как в частях поверхностного интеграла, относящихся к противоположным сторонам элемента $\delta\sigma_1$, величина $\frac{\partial\varphi'}{\partial n}$ должна быть взята с противоположными знаками, в то время как значение $\varphi$ на положительной стороне превышает значение $\varphi$ на отрицательной стороне на $\varkappa_1$, то для элемента интеграла, отнесенного к $\delta\sigma_1$, мы получим значение

$$\varkappa_1 \frac{\partial\varphi'}{\partial n}\,\delta\sigma_1.$$

Благодаря этим изменениям условий, уравнение (5) § 43 переходит в следующее:

$$\iint \varphi \frac{\partial\varphi'}{\partial n}\,dS + \varkappa_1 \iint \frac{\partial\varphi'}{\partial n}\,d\sigma_1 + \varkappa_2 \iint \frac{\partial\varphi'}{\partial n}\,d\sigma_2 + \ldots =$$
$$= -\iiint \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi'}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\varphi'}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\varphi'}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz -$$
$$- \iiint \varphi\,\Delta\varphi'\,dx\,dy\,dz, \qquad (1)$$

где первый из поверхностных интегралов на левой стороне распространяется только по первоначальной границе области, а остальные — по различным перегородкам области. Множитель при каждом $\varkappa$ представляет, очевидно, взятый со знаком *минус* полный расход через соответствующую перегородку при движении с потенциалом скоростей $\varphi'$. Значения $\varphi$ в первом и последнем членах уравнения определяются по методу, данному в § 50.

Если $\varphi'$ будет также циклической функцией с циклическими постоянными $\varkappa_1', \varkappa_2', \ldots$, то уравнение (6) § 43 с помощью тех же самых рассуждений примет вид

$$\iint \varphi' \frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dS + \varkappa_1' \iint \frac{\partial\varphi}{\partial n}\,d\sigma_1 + \varkappa_2' \iint \frac{\partial\varphi}{\partial n}\,d\sigma_2 + \ldots =$$
$$= -\iiint \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi'}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\varphi'}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\varphi'}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz -$$
$$- \iiint \varphi'\,\Delta\varphi\,dx\,dy\,dz. \qquad (2)$$

Уравнения (1) и (2) вместе и составляют то обобщение теоремы Грина, которое предложено Кельвином.

**§ 54.** Если обе функции $\varphi$ и $\varphi'$ будут представлять потенциалы скоростей несжимаемой жидкости, то

$$\left.\begin{aligned}\Delta\varphi &= 0,\\ \Delta\varphi' &= 0\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

и поэтому

$$\int\int_s \varphi\frac{\partial\varphi'}{\partial n}\,dS + \varkappa_1\int\int\frac{\partial\varphi'}{\partial n}\,d\sigma_1 + \varkappa\int\int\frac{\partial\varphi'}{\partial n}\,d\sigma_2 + \ldots =$$

$$= \int\int\varphi'\,\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dS + \varkappa_1'\int\int\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,d\sigma_1 + \varkappa_2'\int\int\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,d\sigma_2 + \ldots \tag{4}$$

Чтобы получить физическое истолкование этой теоремы, необходимо сначала изложить предложенный Кельвином способ, при помощи которого можно получить любое циклическое безвихревое движение капельной жидкости в многосвязной области.

Предположим, что жидкость заключена в совершенно гладкую и изгибаемую оболочку, форма которой совпадает с формой ограничивающей поверхности. Для того чтобы превратить область в односвязную, проведем $n$ перегородок, как в § 48; допустим, далее, что эти перегородки представляют такие же бесконечно тонкие и невесомые пленки.

В начальный момент жидкость находится в покое, затем пусть каждый элемент выше названной оболочки внезапно начинает двигаться внутрь с данной (положительной или отрицательной) нормальной компонентой скорости $-\frac{\partial\varphi}{\partial n}$; одновременно к отрицательным сторонам перегородок пусть будут приложены импульсивные давления $\varkappa_1\varrho, \varkappa_2\varrho, \ldots, \varkappa_n\varrho$. Вызванное таким способом движение будет характеризоваться следующими свойствами. Оно будет безвихревым, так как образовалось из состояния покоя; нормальная компонента скорости для всякой точки первоначальной границы будет иметь заданное значение; значения же импульсивных давлений в двух соседних точках на разных сторонах перегородки будут отличаться на соответствующие значения $\varkappa\varrho$, а значения потенциала скоростей тем самым будут отличаться на соответствующее значение $\varkappa$; наконец, движения на обеих сторонах перегородки переходят непрерывно друг в друга. Чтобы доказать это последнее положение, заметим сначала, что компоненты скорости, перпендикулярные к перегородке в двух соседних точках на разных ее сторонах, равны между собой, так как обе равны нормальной компоненте скорости соответствующей частицы пленки. Пусть далее $P$, $Q$ суть две рядом лежащие точки перегородки, $\varphi_P$, $\varphi_Q$ — соответствующие значения $\varphi$ на положительной стороне, $\varphi'_P$, $\varphi'_Q$ — на отрицательной стороне этой перегородки, тогда будем иметь

$$\varphi_P - \varphi'_P = \varkappa = \varphi_Q - \varphi'_Q$$

и поэтому

$$\varphi_Q - \varphi_P = \varphi'_Q - \varphi'_P,$$

т. е., если

$$PQ = \delta s,$$

то

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \frac{\partial \varphi'}{\partial s}.$$

Следовательно, тангенциальные компоненты скорости двух соседних точек на различных сторонах перегородки также равны. Если мы теперь вообразим, что сейчас же после толчка пленки перегородок стали жидкими, то мы и будем иметь искомое безвихревое движение.

Физическое истолкование уравнения (4) после умножения на $-\varrho$ будет таким же, как в § 44. Величины $\varrho\varkappa$ будут представлять дополнительные компоненты импульса, а значения

$$-\iint \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, d\sigma,$$

т. е. количества жидкости, прошедшей через различные отверстия области, будут являться соответствующими обобщенными скоростями.

**§ 55.** Если мы в формуле (2) положим $\varphi' = \varphi$ и допустим, что $\varphi$ есть потенциал скоростей несжимаемой жидкости, то получим

$$2T = \varrho \iiint \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 \right\} dx\, dy\, dz =$$

$$= -\varrho \iint \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, dS - \varrho\varkappa_1 \iint \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, d\sigma_1 - \varrho\varkappa_2 \iint \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, d\sigma_2 - \ldots \qquad (5)$$

Последняя часть этой формулы получает простое истолкование с помощью только что изложенного сейчас искусственного способа образования циклического безвихревого движения. Первый член, как мы уже видели, есть удвоенная работа, которую совершает действующее на все части первоначальной границы жидкости импульсивное давление $\varrho\varphi$.. Далее, $\varrho\varkappa_1$ есть импульсивное давление, которое действует в положительном направлении на бесконечно тонкую невесомую пленку, которую мы вообразили на месте первой перегородки. А тогда выражение

$$-\frac{1}{2} \iint \varrho\varkappa_1 \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, d\sigma_1$$

будет обозначать работу, произведенную действующими на пленку импульсивными силами; то же самое относится к остальным перегородкам. Поэтому формула (5) выражает тот факт, что энергия движения равна работе, производимой всей системой импульсивных сил, которая, как мы допустили, способна образовать данное движение.

Применяя (5) к случаю, когда жидкость простирается в бесконечность и там находится в покое, мы можем первый член третьей части заменить через

$$-\varrho \iint (\varphi - C) \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, dS, \qquad (6)$$

где интегрирование распространяется только на внутренние границы.

Доказательство этого такое же, как и в § 46. Если полный поток через границу равен нулю, то выражение (6) сводится к

$$-\varrho \iint \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS. \tag{7}$$

Данная в § 45 теорема Кельвина о минимуме может быть теперь обобщена следующим образом:

Безвихревое движение несжимаемой жидкости в многосвязной области обладает меньшей кинетической энергией, чем всякое другое движение с теми же самыми нормальными компонентами скорости на границе и одинаковыми значениями полного расхода через каждый из различных независимых каналов области.

Провести доказательство предоставляем читателю.

## Источники и стоки. Дублеты

**§ 56.** Аналогия с теорией электростатики, теплопроводности и т. д. может простираться еще далее, если ввести понятия источника и стока.

Простой источник есть точка, из которой мы воображаем жидкость вытекающей равномерно во все стороны. Если полный поток наружу через малую замкнутую поверхность, окружающую точку, равен $m$, то величина $m$ называется мощностью источника. Отрицательный источник называется стоком. Существование источника или стока предполагает, конечно, непрерывное образование или уничтожение жидкости в рассматриваемой точке.

Для простого источника в жидкости, покоящейся в бесконечности, потенциал скоростей в некоторой точке $P$ равен

$$\varphi = \frac{m}{4\pi r}, \tag{1}$$

где $r$ означает расстояние точки $P$ от источника. В самом деле, этот потенциал скоростей дает течение в радиальном направлении от этой точки и, если

$$\delta S = r^2 \delta\tilde{\omega}$$

есть элемент сферической поверхности с центром в источнике, то

$$-\iint \frac{\partial \varphi}{\partial r} dS = m,$$

где $m$ — постоянное; таким образом уравнение неразрывности удовлетворяется, и поток наружу равен мощности источника.

Совокупность источника и стока мощности $+m'$ и $-m'$ с взаимным расстоянием $\delta s$, причем в пределе $\delta s$ берется бесконечно малым, а $m'$ бесконечно большим, но так, что произведение $m'\,\delta s$ остается конечным и равным, скажем, $\mu$, называется *диполем*, или *дублетом* мощности $\mu$. Проведенная в направлении от $-m'$ к $+m'$ прямая, на которой лежит $\delta s$, называется *осью дублета*.

Чтобы найти потенциал скоростей в точке $(x, y, z)$ жидкости при наличии в ней в точке $(x', y', z')$ дублета мощности $\mu$ с направлением оси $(l, m, n)$, заметим, что имеет место равенство

$$f(x'+l\,\delta s,\ y'+m\,\delta s,\ z'+n\,\delta s)-f(x', y', z')=$$
$$=\left(l\frac{\partial}{\partial x'}+m\frac{\partial}{\partial y'}+n\frac{\partial}{\partial z'}\right)f(x', y', z')\,\delta s,$$

если $f$ есть любая непрерывная функция. Полагая

$$f(x', y', z')=\frac{m'}{4\pi r},$$

где

$$r=\{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\}^{1/2},$$

мы найдем

$$\varphi=\frac{\mu}{4\pi}\left(l\frac{\partial}{\partial x'}+m\frac{\partial}{\partial y'}+n\frac{\partial}{\partial z'}\right)\frac{1}{r}= \tag{2}$$
$$=-\frac{\mu}{4\pi}\left(l\frac{\partial}{\partial x}+m\frac{\partial}{\partial y}+n\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{1}{r}= \tag{3}$$
$$=\frac{\mu}{4\pi}\frac{\cos\vartheta}{r^2}, \tag{4}$$

где $\vartheta$ есть угол между проведенной из точки $(x', y', z')$ в $(x, y, z)$ прямой $r$ и осью $(l, m, n)$.

Продолжая таким же образом (см. § 82), мы можем образовать источники более высокого порядка; но сказанного уже достаточно для нашей непосредственной цели.

Наконец, мы можем вообразить, что простые источники или дублеты встречаются не в изолированных точках, а распределены непрерывно вдоль линии, поверхности или объема.

**§ 57.** Теперь мы можем доказать, что всякое непрерывное, ациклическое безвихревое движение жидкости может быть вызвано действием простых и двойных источников, распределенных по границе области.

Это утверждение основывается на доказанной в § 44 теореме, выраженной уравнением

$$\iint\varphi\frac{\partial\varphi'}{\partial n}\,dS=\iint\varphi'\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dS, \tag{5}$$

где $\varphi$ и $\varphi'$ суть две любые однозначные функции, для которых удовлетворяются уравнения $\Delta\varphi=0$ и $\Delta\varphi'=0$ во всей рассматриваемой области, причем интегрирование производится по всей границе. Для данного случая мы должны $\varphi$ взять в качестве потенциала скоростей рассматриваемого движения и $\varphi'$ положить равным обратному значению расстояния любой точки жидкости от неподвижной точки $P$, т. е.

$$\varphi'=\frac{1}{r}.$$

Мы будем сначала предполагать, что $P$ лежит внутри области, занятой жидкостью. Так как в этом случае функция $\varphi'$ в точке $P$ равна бесконечности, то необходимо эту точку исключить из области, к которой применяется формула (5). Это можно сделать, описав малую сферическую поверхность $\Sigma$ около $P$, как центра. Если мы предположим теперь, что $\delta\Sigma$ есть элемент этой сферической поверхности, а $\delta S$ — элемент первоначальной границы, то указанная формула дает

$$\iint \varphi \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) d\Sigma + \iint \varphi \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) dS = \\ = \iint \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial n} d\Sigma + \iint \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial n} dS. \qquad (6)$$

На поверхности $\Sigma$ имеем

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}.$$

А тогда, если мы положим $\delta\Sigma = r^2 d\tilde{\omega}$ и затем будем приближать $r$ к нулю, то первый интеграл в левой части (6) будет равняться $-4\pi\varphi_P$, где $\varphi_P$ есть значение $\varphi$ в точке $P$; первый же интеграл в правой части обратится в нуль; следовательно, мы получим

$$\varphi_P = -\frac{1}{4\pi}\iint \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial n} dS + \frac{1}{4\pi}\iint \varphi \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) dS. \qquad (7)$$

Эта формула дает значение $\varphi$ в любой точке жидкости, выраженное через значения $\varphi$ и $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ на границе. Сравнивая с формулами (1) и (2), мы видим, что первый член формулы (7) есть потенциал скоростей для простых источников, распределенных по границе с плотностью, равной $-\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ на единицу площади; второй член есть потенциал скоростей для дублетов, распределенных по границе, с плотностью $\varphi$ на единицу площади, причем направление оси дублетов совпадает с направлением нормали к ограничивающей поверхности. Ниже из уравнения (10) будет следовать, что это есть только одно из бесконечно большого числа возможных распределений источников на поверхности, которые все дают одно и то же значение $\varphi$ для внутренней части области.

Если жидкость простирается по всем направлениям в бесконечность и там находится в покое, то мы можем с некоторой предосторожностью рассматривать интегралы в формуле (7) как интегралы, распространенные только по внутренним границам. Чтобы в этом убедиться, возьмем в качестве внешней пограничной поверхности бесконечно большую шаровую поверхность с центром в точке $P$. Соответствующая часть первого интеграла в формуле (7) обращается в нуль, в то время как во втором интеграле она равна $C$, т. е. равна постоянному значению, к которому, как мы видели в § 41, стремится $\varphi$ в бесконечности. Теперь для упрощения форму-

лировки нашей теоремы удобно положить $C=0$; это вполне законно, так как мы имеем право всегда прибавить к $\varphi$ произвольное постоянное.

Если точка $P$ лежит вне пограничной поверхности, то тогда $\varphi'$ будет конечной во всей первоначальной области, и формула (5) дает тотчас

$$0=-\frac{1}{4\pi}\iint\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dS+\frac{1}{4\pi}\iint\varphi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)dS, \tag{8}$$

причем опять, в том случае, когда жидкость простирается в бесконечность и там находится в покое, можно опустить члены, относящиеся к бесконечно далекой части пограничной поверхности.

**§ 58.** Выраженное формулой (7) распределение источников, далее, может быть заменено через распределение либо только простых источников, либо только дублетов.

Пусть $\varphi$ есть потенциал скоростей жидкости, которая занимает определенную область, а $\varphi'$ обозначает потенциал скоростей любого возможного ациклического безвихревого движения в остальной части неограниченного пространства, при условии, что $\varphi$ или $\varphi'$, в зависимости от случая, в бесконечности обращается в нуль. Тогда, если точка $P$ лежит внутри вышеуказанной определенной области и, следовательно, вне остальной части пространства, то мы будем иметь

$$\left.\begin{aligned}\varphi_P&=-\frac{1}{4\pi}\iint\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dS+\frac{1}{4\pi}\iint\varphi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)dS,\\ 0&=-\frac{1}{4\pi}\iint\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi'}{\partial n'}\,dS+\frac{1}{4\pi}\iint\varphi'\frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{r}\right)dS,\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

где $\delta n$, $\delta n'$ суть элементы нормали к $dS$, направленной внутрь (соответственно в первую и вторую области), так что

$$\frac{\partial}{\partial n'}=-\frac{\partial}{\partial n}.$$

Складывая, мы получим

$$\varphi_P=-\frac{1}{4\pi}\iint\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}+\frac{\partial\varphi'}{\partial n'}\right)dS+\frac{1}{4\pi}\iint(\varphi-\varphi')\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)dS. \tag{10}$$

Функция $\varphi'$ определяется в свою очередь через значения $\varphi'$ и $\frac{\partial\varphi'}{\partial n'}$ на пограничной поверхности области, которые еще находятся в нашем распоряжении.

Положим сначала, что на границе

$$\varphi'=\varphi;$$

тогда тангенциальные компоненты скорости на обеих сторонах границы непрерывны, нормальные же компоненты, наоборот, разрывны. Чтобы легче такой случай представить, вообразим, что все бесконечное пространство, наполненное капельной жидкостью, разделено на две части бесконечно тонкой двуслойной поверхностью; в промежутке между слоями можно вдоль поверхности распределить такое импуль-

сивное давление, которое могло бы породить данное движение из состояния покоя. В этом случае последний член формулы (10) обращается в нуль, так что

$$\varphi_P = -\frac{1}{4\pi}\iint \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}+\frac{\partial\varphi'}{\partial n'}\right) dS, \tag{11}$$

т. е. движение жидкости (по обе стороны) обусловливается простыми источниками, распределенными по границе с поверхностной плотностью

$$-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}+\frac{\partial\varphi'}{\partial n'}\right)^{1)}.$$

Далее, мы можем предположить на границе

$$\frac{\partial\varphi'}{\partial n}=\frac{\partial\varphi}{\partial n};$$

тогда будем иметь непрерывные нормальные компоненты скорости и, наоборот, разрывные тангенциальные компоненты на первоначальной границе. В этом случае можно вообразить движение происходящим вследствие того, что каждой точке бесконечно тонкой оболочки, которая занимает положение границы, мы сообщаем заданную нормальную компоненту скорости $-\frac{\partial\varphi}{\partial n}$. Теперь первый член формулы (10) обращается в нуль, и мы получим

$$\varphi_P = \frac{1}{4\pi}\iint (\varphi-\varphi')\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) dS. \tag{12}$$

Эта формула показывает, что движение по обе стороны оболочки может быть представлено, как вызванное при помощи дублетов, которые распределены по границе с поверхностной плотностью

$$\varphi-\varphi'.$$

Можно показать, что это представление $\varphi$ либо только через простые источники, либо только через двойные источники будет единственным, в то время как представление, данное в § 57, является неопределенным [2]).

Ясно, что *циклическое*, безвихревое движение несжимаемой жидкости не может быть вызвано через распределение только простых источников. Однако легко видеть, оно может быть представлено через некоторое распределение двойных источников по границе вместе с равномерным распределением двойных источников по каждой перегородке, которые превращают область, наполненную жидкостью, в односвязную область. В самом деле, в обозначениях § 53 мы будем иметь

$$\varphi_P = \frac{1}{4\pi}\iint (\varphi-\varphi')\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) dS + \frac{\varkappa_1}{4\pi}\iint \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma_1 + \frac{\varkappa_2}{4\pi}\iint \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma_2 + \ldots, \tag{13}$$

---

[1]) Это исследование дано впервые Грином при рассмотрении соответствующих вопросов электростатики, см. прим. на стр. 65.

[2]) Larmor C., On the Mathematical Expression of the Principle of Huyghens, Proc. Lond. Math. Soc. (2), ч. I (1903) (Math. and Phys. Papers, Cambridge, 1929, II, 240)

где $\varphi$ есть однозначный потенциал скоростей, который мы получаем в измененной области, а $\varphi'$ обозначает потенциал скоростей ациклического движения, которое образуется во внешнем пространстве, когда каждому элементу $\delta S$ оболочки, совпадающей по положению с первоначальной границей, мы сообщим надлежащую нормальную компоненту скорости $-\frac{\partial\varphi}{\partial n}$

Другой способ представления безвихревого движения, безразлично, будет ли оно циклическим или нет, будет описан в главе о вихревом движении.

На этом мы заканчиваем изучение теории безвихревого движения. Математически образованный читатель, без сомнения, заметит отсутствие некоторых важных звеньев в цепи наших заключений. Например, не было дано независимого от физических рассуждений доказательства существования функции $\varphi$, которая удовлетворяет уравнениям § 36 внутри произвольно данной односвязной области и принимает заданные значения на границе. В данном руководстве мы не приводим строгого доказательства соответствующих „теорем существования". Чтобы получить обозрение литературы по этой части вопроса, читатель может обратиться к цитированным ниже авторам [1]).

## ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

# ПЛОСКОЕ ДВИЖЕНИЕ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

**§ 59.** Если компоненты скорости $u$, $v$ суть функции только от $x$, $y$, в то время как $w$ равно нулю, то движение происходит в плоскостях, параллельных плоскости $xy$, и оно одинаково во всех таких плоскостях. Исследование движения жидкости при этих предположениях характеризуется определенными аналитическими особенностями, и многие очень интересные проблемы могут быть решены при этом достаточно просто.

Так как все движение будет известно, если мы знаем его в плоскости $z=0$, то мы можем ограничить наше внимание только этой плоскостью. Точки и линии в этой плоскости могут всегда рассматриваться, соответственно, как следы прямых, параллельных оси $z$, или как следы цилиндрических поверхностей с образующими, параллельными оси $z$.

Под потоком (расходом) через некоторую кривую мы будем понимать объем жидкости, протекающей в единицу времени через ту часть цилиндрической поверхности, которая заключена между плоскостями

$$z=0, \quad z=1$$

и следом которой является указанная кривая.

---

[1]) Burkhardt H. und W. F. Meyer, Potentialtheorie, и Sommerfeld A., Randwerthaufgaben in der Theorie d. part. Diff.-Gleichungen, Encycl. d. math. Wiss., 2 (1900).

Пусть $A$, $P$ будут какие-то две точки в плоскости $xy$. Поток через две произвольные кривые, соединяющие $A$, $P$, будет иметь всегда одно и то же значение, если обе кривые могут быть переводимы друг в друга, не выходя из области, наполненной движущейся жидкостью; ибо в противном случае в области, заключенной между двумя кривыми, создавалась бы или терялась некоторая масса. Если при этом точка $A$ будет неподвижна, а $P$ подвижна, то поток через произвольную кривую $AP$ будет функцией положения точки $P$. Обозначим эту функцию через $\psi$; выражаясь точнее, $\psi$ будет обозначать поток через $AP$ *справа налево* для наблюдателя, находящегося на кривой, который смотрит в направлении от $A$ к $P$. Выражаясь математически, если $l$, $m$ означают направляющие косинусы (направленной налево) нормали произвольного элемента $\delta s$ кривой, то

$$\psi = \int_A^P (lu + mv)\, ds. \tag{1}$$

Если область, наполненная жидкостью, аперифрактична (см. § 39), то $\psi$ должна быть непременно однозначной функцией; но в перифрактических областях значение $\psi$ может зависеть от выбора пути $AP$. Однако для двухмерного пространства понятия „перифрактичности“ и „многосвязности“ означают одно и то же, так что свойства функции $\psi$ для случая, когда она в пространстве, занятом движущейся жидкостью, многозначна, могут быть заимствованы из § 50, где мы обсуждали тот же самый вопрос в отношении функции $\varphi$. Когда области перифрактичны, тогда циклические постоянные функции $\psi$ суть значения потока через те замкнутые кривые, которые образуют различные части внутренней границы.

Если переместить точку, от которой отсчитываем $\psi$, например, от $A$ к $B$, то это скажется только в прибавлении постоянной к значению $\psi$, а именно значения потока через линию $BA$; следовательно, $\psi$ определяется только с точностью до аддитивной постоянной.

Если точка $P$ движется таким образом, что значение $\psi$ остается неизменным, то она описывает такую кривую, которая нигде не пересекается жидкостью, т. е. линию тока. Поэтому кривые $\psi = \text{const}$ суть линии тока, и $\psi$ называется *функцией тока*.

Если переместить $P$ параллельно оси $y$ на бесконечно малый отрезок $PQ = \delta y$, то приращение $\psi$ будет представлять поток справа налево через $PQ$, т. е.

$$\delta\psi = -u\, PQ,$$

или

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y}. \tag{2}$$

Также, если переместить $P$ параллельно оси $x$, получим

$$v = \frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{3}$$

Существование такой функции $\psi$, которая связана с $u$, $v$ соотношениями (2) и (3), следует также из особой формы уравнения непрерывности в нашем случае, именно — из

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0; \qquad (4$$

последнее есть аналитическое условие того, что $u\,dy - v\,dx$ есть полный диференциал [1]).

Вышеизложенные рассуждения имеют место как при вихревом, так и при безвихревом движении. Данные в § 30 формулы для компонент вихря имеют в этом случае вид

$$\xi=0, \quad \eta=0, \quad \zeta=\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}; \qquad (5)$$

следовательно, в случае безвихревого движения будем иметь

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=0. \qquad (6$$

**§ 60.** В дальнейшем мы ограничимся случаем безвихревого движения, которое, как мы видели, характеризуется тем, что существует потенциал скоростей $\varphi$, связанный с $u$, $v$ соотношениями

$$u=-\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad v=-\frac{\partial\varphi}{\partial y}; \qquad (1)$$

так как мы рассматриваем только движение несжимаемой жидкости, то $\varphi$ должно удовлетворять уравнению неразрывности в виде

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0. \qquad (2)$$

Теория функции $\varphi$, а также связь между ее свойствами и свойствами двухмерной области, в которой имеет место безвихревое движение, может быть просто заимствована из соответствующих теорем прошлой главы для трехмерного пространства. Необходимые при этом изменения формулировок теорем или их доказательств будут большей частью иметь чисто формальный характер.

Например, и здесь мы будем иметь теорему, что среднее значение $\varphi$ вдоль окружности круга будет равно ее значению в центре при условии, что круг может быть стянут в точку, оставаясь все время внутри области, занятой жидкостью.

Кроме того, если эта область простирается до бесконечности, будучи ограниченной изнутри одной или несколькими замкнутыми кривыми, и если скорость стремится к нулю в бесконечности, то значение $\varphi$ будет стремиться там к некоторому постоянному при условии, что полный расход через внутренние границы равен нулю. Последняя оговорка здесь является существенной.

---

[1]) Функция $\psi$ введена таким способом. Lagrange, Nouv. Mém. de l'Acad de Berlin, 1781 (Oeuvres, IV, 720). Кинематическое истолкование дано Rankine, On Plane Water-Lines in Two Dimensions, Phil. Trans., 1864 (Miscellaneous Scientific Papers, London, 1881, p. 495).

Уравнение (2) имеет фундаментальное решение в виде $\varphi = C \ln r$, где $r$ обозначает расстояние от некоторой фиксированной точки. Это решение представляет источник на плоскости, ибо, если мы возьмем

$$\varphi = -\frac{m}{2\pi} \ln r, \tag{3}$$

то поток наружу через окружность, охватывающую данную точку, будет

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial r} 2\pi r = m. \tag{4}$$

Постоянное $m$, таким образом, представляет мощность, или напряжение источника. Мы в основном придем к тому же результату, если представим, что точечные источники, о которых была речь в § 56, распределены равномерно с линейной плотностью $m$ вдоль оси $z$. Скорость в этом случае будет направлена по $r$ и равна $\frac{m}{2\pi r}$, что согласуется с (3). Мы будем иметь здесь так называемый линейный источник (в трехмерном пространстве).

Для двойного источника или, как его иногда называют, дублета мы будем иметь

$$\varphi = -\frac{\mu}{2\pi} \frac{\partial}{\partial s} (\ln r), \tag{5}$$

где символ $\frac{\partial}{\partial s}$ означает пространственное диференцирование в направлении оси дублета. Если $\vartheta$ будет представлять угол между направлением возрастания $r$ и этой осью, то имеем $\delta r = -\delta s \cos \vartheta$ и, следовательно,

$$\varphi = \frac{\mu}{2\pi} \frac{\cos \vartheta}{r}. \tag{6}$$

Кроме того, мы можем установить ряд формул, аналогичных формулам § 58. В частности, соответственно формуле (12) § 58 мы будем иметь

$$\varphi_P = -\frac{1}{2\pi} \int (\varphi - \varphi') \frac{\partial}{\partial n} (\ln r)\, ds, \tag{7}$$

которая дает значение $\varphi$ в какой-то области, выраженное через распределение дублетов вдоль границы. Эту формулу можно будет применять и к случаю, когда жидкость с внешней стороны неограничена при условии, что скорость стремится к нулю в бесконечности и что полный поток наружу равен нулю. Как и в § 58, функция $\varphi'$ относится к области внутри внутренней границы и подчинена тому условию, что $\frac{\partial \varphi'}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial n}$ на этой границе. Следствия из этой формулы будут вскоре указаны (§ 72а).

**§ 60а.** Рассмотренные выше кинематические соотношения имеют свою полную аналогию и в теории электропроводности. В случае

равномерного плоского проводящего слоя мы имеем

$$\sigma f = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad \sigma g = -\frac{\partial V}{\partial y} \tag{1}$$

и

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} = 0, \tag{2}$$

где $(f, g)$ есть плотность тока, $V$ — электрический потенциал, а $\sigma$ есть удельное сопротивление материала. Если мы теперь положим

$$u = \sigma f, \quad v = \sigma g, \quad \varphi = V, \tag{3}$$

то написанные выше соотношения будут совпадать с соответствующими соотношениями гидродинамики. Это обстоятельство подсказывает практический метод решения плоских гидрокинетических задач. Проводящий слой может быть взят в виде тонкого слоя слабо проводящей жидкости ($H_2SO_4$), содержащейся в прямоугольном лотке, две противоположные стороны которого являются металлическими и сохраняют постоянную разность потенциалов, другие же стороны (и дно) представляют изоляторы. Эквипотенциальные линии, к которым ортогональны линии тока, электрически легко могут быть обнаружены. Этим способом могут быть получены практические решения задач об обтекании потоком какого-либо препятствия (представляемого в электрическом эксперименте в виде непроводящего диска), которые нелегко могут быть изучены аналитически [1]).

Помимо этого, мы можем вместо (3) положить

$$u = -\sigma g, \quad v = \sigma f, \quad \psi = -V. \tag{4}$$

При этом гидродинамические соотношения будут выполняться, но линии тока теперь будут соответствовать линиям равного электрического потенциала и, следовательно, могут быть найдены непосредственно. Обтекаемый контур в этом случае должен представляться в виде диска, проводимость которого настолько значительно превышает проводимость окружающего слоя, что может считаться практически абсолютной. Эта аналогия допускает и дальнейшее приспособление, с помощью которого можно также представить циркуляцию. В самом деле, если $(l, m)$ будут направляющие косинусы направленной наружу нормали к контуру препятствия, то циркуляция будет равна

$$\int (lv - mu)\, ds = \sigma \int (lf + mg)\, ds \tag{5}$$

и, следовательно, пропорциональна в электрической аналогии полному потоку электричества наружу. С этой целью диск соединяется

---

[1]) За подробностями эксперимента можно отослать к статье E. F. Relf, Phil. Mag. (6), XLVIII (1924). В качестве критерия пригодности метода может служить то, что фиг. 18 воспроизведена с исключительной точностью. Таким способом была определена циркуляция вокруг пластинки и сравнена с теорией.

с одной клеммой соответствующей батареи, а вторая клемма должна быть соединена с одной из проводящих стенок лотка.

**§ 61.** Пусть часть жидкости ограничена цилиндрической поверхностью, образующая которой параллельна оси $z$, и двумя перпендикулярными к оси $z$ плоскостями, расстояние между которыми равно единице. Кинетическая энергия $T$ этой части жидкости тогда напишется

$$2T = \varrho \iint \left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right\} dx\,dy = -\varrho \int \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, ds, \qquad (1)$$

где поверхностный интеграл распространяется по той части плоскости $xy$, которая вырезана цилиндрической поверхностью, а криволинейный интеграл распространяется по контуру этой части. Так как

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = -\frac{\partial\psi}{\partial s},$$

то формула (1) может быть написана следующим образом:

$$2T = \varrho \int \varphi\, d\psi, \qquad (2)$$

где интегрирование ведется по контуру.

Если мы подобным же образом как в § 46, подсчитаем энергию для области, простирающейся в бесконечность, то мы найдем, что ее значение будет бесконечно, за исключением случая, когда полный поток $M$ во внешнее пространство равен нулю. В самом деле, если провести окружность большого радиуса $r$ в качестве внешней границы рассматриваемой части плоскости $xy$, то увидим, что соответствующая часть интеграла на правой стороне формулы (1) растет безгранично вместе с $r$. Единственное исключение образует случай $M=0$, и здесь мы можем считать, что линейный интеграл в формуле (1) распространен только по внутреннему контуру.

Если цилиндрическая часть ограничивающей поверхности состоит из двух или многих отдельных частей, из которых одна заключает все остальные, то область будет многосвязной, и уравнение (1) потребует тогда исправления, которое может быть проведено в точности, как в § 55.

## Конформные преобразования.

**§ 62.** Функции $\varphi$ и $\psi$ связаны соотношениями

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}. \qquad (1)$$

Эти условия будут выполняться, если положить

$$\varphi + i\psi,$$

где $i$ обозначает, как обычно, $\sqrt{-1}$, равным некоторой аналитической функции от $x+iy$:

$$\varphi + i\psi = f(x+iy). \qquad (2)$$

В самом деле, тогда имеем

$$\frac{\partial}{\partial y}(\varphi + i\psi) = if'(x+iy) = i\frac{\partial}{\partial x}(\varphi + i\psi). \qquad (3)$$

Если мы теперь приравняем здесь в отдельности действительные и мнимые части, то увидим, что уравнения (1) удовлетворяются.

Таким образом при произвольном предположении относительно вида функции (2) мы будем иметь возможный случай безвихревого движения. Кривые $\varphi = \text{const}$ суть эквипотенциальные кривые, а кривые $\psi = \text{const}$ представляют линии тока. Так как согласно (1) мы имеем

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y}=0,$$

то кривые этих обеих систем пересекаются под прямыми углами, что уже было ранее доказано. Так как уравнения (1) остаются неизменными, если мы напишем $-\psi$ вместо $\varphi$ и $\varphi$ вместо $\psi$, то мы можем, если пожелаем, кривые $\psi = \text{const}$ рассматривать как эквипотенциальные кривые, а кривые $\varphi = \text{const}$ как линии тока; следовательно, всякое предположение относительно вида функции (2) дает *два* возможных случая безвихревого движения.

Ради краткости мы будем в этой главе пользоваться обозначениями, употребляемыми в теории функций, и будем писать

$$z = x + iy, \tag{4}$$

$$w = \varphi + i\psi. \tag{5}$$

С современной точки зрения, основное свойство аналитической функции комплексного переменного состоит в том, что она обладает определенной производной по этой переменной [1]). Если $\varphi$, $\psi$ суть две любые функции от $x$ и $y$, то каждому значению $x+iy$ должно соответствовать одно или несколько определенных значений $\varphi+i\psi$; отношение диференциала этой функции к диференциалу от $x+iy$

$$\frac{\delta\varphi + i\,\delta\psi}{\delta x + i\,\delta y} \quad \text{или} \quad \frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+i\,\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\delta x+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}+i\,\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\delta y}{\delta x + i\,\delta y}$$

зависит вообще от отношения $\delta x : \delta y$. Условие того, что первое отношение для всех значений последнего будет одно и то же, представится в виде

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}+i\,\frac{\partial\psi}{\partial y}=i\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+i\,\frac{\partial\psi}{\partial x}\right), \tag{6}$$

что эквивалентно с формулами (1). Это свойство принималось Риманом в качестве определения аналитической функции комплексного переменного; это значит, что такая функция должна иметь для каждого данного значения переменного не только одно или несколько определенных значений, но также для каждого из этих значений и определенную производную. Преимущество этого определения состоит в том, что оно совершенно не зависит от существования аналитического выражения для функции.

---

[1]) См., например, Forsyth, Theory of Functions, изд. 3-е, Cambridge, 1918, гл. I, 2.

Если представлять комплексные величины $z$ и $w$ геометрически, следуя методу Аргана и Гаусса, то производную $\frac{dw}{dz}$ можно рассматривать как оператор, который преобразует бесконечно малый вектор $\delta z$ в соответствующий вектор $\delta w$. И тогда из указанного выше свойства следует, что это отображение подобно в бесконечно малых частях.

Возьмем, например, две системы прямых линий в плоскости $w$:

$$\varphi = \text{const}, \quad \psi = \text{const};$$

пусть при этом каждая из постоянных пробегает значения некоторой арифметической прогрессии, причем обе прогрессии имеют одну и ту же бесконечно малую разность. Прямые этих обеих систем пересекают друг друга под прямыми углами и разбивают плоскость на бесконечно малые квадраты. Тогда в плоскости $xy$ две соответствующие системы кривых

$$\varphi = \text{const}, \quad \psi = \text{const},$$

где постоянные имеют те же значения, что и раньше, пересекаются также под прямыми углами (что уже было доказано другим путем) и разбивают плоскость на бесконечно малые квадраты.

Обратно, если $\varphi$, $\psi$ суть две любые функции от $x$, $y$ такие, что обе системы кривых

$$\varphi = m\varepsilon, \quad \psi = n\varepsilon$$

где $\varepsilon$ — бесконечно малая, а $m$, $n$ — произвольно целые числа, разбивают плоскость на элементарные квадраты то из геометрических соображений следует

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = \pm \frac{\partial y}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial x}{\partial \psi} = \mp \frac{\partial y}{\partial \varphi}.$$

Если взять верхние знаки, то эти уравнения суть условия того, что $x + iy$ есть функция от $\varphi + i\psi$. Случай нижнего знака приводится к тому же случаю изменением знака у $\psi$. Уравнение (2) составляет, таким образом, *полное* решение задачи конформного отображения двух плоскостей друг на друга [1]).

Подобие соответствующих бесконечно малых частей плоскости $w$ и плоскости $z$ не имеет места в точках, в которых производная $\frac{dw}{dz}$ равна нулю или бесконечности. Так как

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i\,\frac{\partial \psi}{\partial x}, \tag{7}$$

то в применении к гидродинамике соответствующие значения скорости в этом случае равны нулю или бесконечности.

Во всех физических применениях $w$ должна быть однозначной функцией или, по крайней мере, циклической функцией $z$ в смысле

---

[1]) Lagrange, Sur la construction des cartes géographiques, Nouv. Mém. de l'Academie de Berlin, 1779 (Oeuvres, IV, 636).

Относительно дальнейшей истории проблемы см. Forsyth, Theory of Functions, гл. XIX.

§ 50 в рассматриваемой области. Поэтому в случае многозначной функции область должна сводиться к части одного листа соответствующей римановой поверхности, внутри которой не должны встречаться точки разветвления.

**§ 63.** Мы можем теперь перейти к некоторым применениям вышеизложенного метода.

Сначала возьмем

$$w = Az^n,$$

где $A$ действительно. Введя полярные координаты $r$, $\theta$, получим

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= Ar^n \cos n\theta, \\ \psi &= Ar^n \sin n\theta. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Рассмотрим, в частности, следующие случаи.

1. Для $n=1$ линии тока образуют систему прямых, параллельных оси $x$, а эквипотенциальные кривые представляют подобную же систему прямых, параллельных оси $y$. В этом случае любые две соответствующие фигуры в плоскости $w$ и в плоскости $z$ подобны — безразлично, будут ли фигуры бесконечно малыми или конечными.

2. Для $n=2$ кривые $\varphi = \text{const}$ образуют систему равнобочных гипербол, для которых главными осями служат оси координат, а кривые $\psi = \text{const}$ представляют подобную же систему гипербол, для которых координатные оси являются асимптотами. Линии

$$\theta = 0, \quad \theta = \frac{\pi}{2}$$

суть части одной и той же линии тока $\psi = 0$; мы можем, следовательно, взять положительные части координатных осей $x$, $y$ в качестве твердых границ и будем, таким образом, иметь случай, когда жидкость движется внутри угла, между двумя перпендикулярными друг другу стенками.

3. При $n = -1$ мы получаем две системы окружностей, которые касаются координатных осей в начале. Так как при этом

$$\varphi = \frac{A}{r} \cos\theta,$$

то скорость в начале обращается в бесконечность; мы должны поэтому предположить, что область, к которой мы применяем наши формулы, ограничена внутри замкнутой кривой.

4. Для $n = -2$ каждая из систем кривых состоит из двойной системы лемнискат Оси обеих систем $\varphi = \text{const}$ совпадают с осями координат, а оси систем $\psi = \text{const}$ совпадают с биссектрисами координатных углов.

5. Выбирая соответственным образом значения $n$, можно получить случай безвихревого движения, при котором граница состоит из двух твердых наклонных под произвольным углом $\alpha$ стенок. Так как уравнение линий тока есть

$$r^n \sin n\theta = \text{const}, \tag{2}$$

то мы видим, что линии $\theta=0$, $\theta=\frac{\pi}{n}$ суть части одной и той же линии тока. Если, следовательно, мы положим $n=\frac{\pi}{\alpha}$, то получим искомое решение

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= Ar^{\frac{\pi}{\alpha}} \cos \frac{\pi\theta}{\alpha}, \\ \psi &= Ar^{\frac{\pi}{\alpha}} \sin \frac{\pi\theta}{\alpha}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Компоненты скорости в направлении $r$ и в перпендикулярном к нему направлении будут

$$\left.\begin{aligned} &-A\frac{\pi}{\alpha} r^{\frac{\pi}{\alpha}-1} \cos\frac{\pi\theta}{\alpha}, \\ &A\frac{\pi}{\alpha} r^{\frac{\pi}{\alpha}-1} \sin\frac{\pi\theta}{\alpha} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

и, следовательно, будут нулями, конечными или бесконечными в начале, смотря по тому, будет ли $\alpha$ меньше, равно или больше, чем $\pi$.

**§ 64.** Рассмотрим теперь некоторые случаи циклических функций.

1. Допущение, что

$$w=-\mu \ln z, \tag{1}$$

где $\mu$, действительно, дает

$$\varphi=-\mu \ln r, \quad \psi=-\mu\theta. \tag{2}$$

Скорость на расстоянии $r$ от начала будет равна $\frac{\mu}{r}$; начало должно быть исключено с помощью описанной вокруг него замкнутой кривой.

Если мы возьмем лучи $\theta=\text{const}$ в качестве линий тока, то мы получим случай источника (двухмерного) мощности $2\pi\mu$ в начале координат (см. § 60).

Если взять окружности $r=\text{const}$ в качестве линий тока, то мы будем иметь случай § 27; движение будет теперь циклическим; циркуляция по всякой кривой, заключающей начало, равна $2\pi\mu$.

2. Примем теперь

$$w=-\mu \ln \frac{z-a}{z+a}. \tag{3}$$

Если мы обозначим через $r_1$, $r_2$ длины отрезков, соединяющих некоторую точку плоскости $xy$ с точками $(\pm a, 0)$, и через $\theta_1$, $\theta_2$ углы, которые эти отрезки составляют с положительным направлением оси $x$, то будем иметь

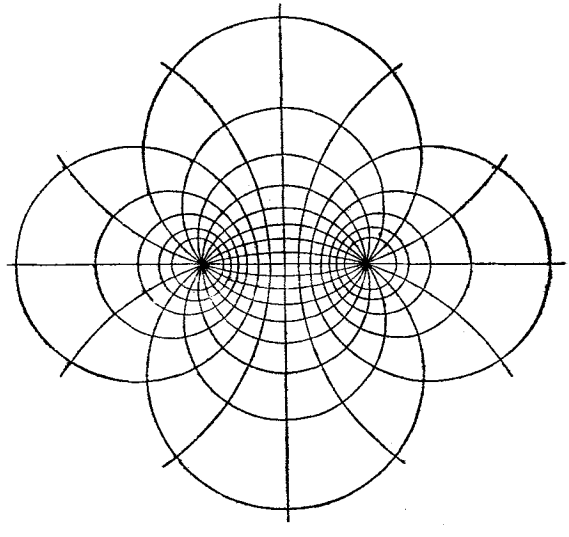
$$z-a=r_1e^{i\theta_1}, \quad z+a=r_2e^{i\theta_2};$$

отсюда следует

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= -\mu \ln \frac{r_1}{r_2}, \\ \psi &= -\mu(\theta_1 - \theta_2). \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Кривые (фиг. 9) $\varphi = \text{const}$, $\psi = \text{const}$ образуют два пучка ортогональных друг к другу соосных окружностей [1]).

Кривые каждой из этих систем могут быть взяты в качестве эквипотенциальных кривых; кривые другой системы тогда будут представлять линии тока. В каждом из обоих случаев скорость в точках $(\pm a, 0)$ будет бесконечно большой. Если, следовательно, исключить эти точки с помощью замкнутых кривых вокруг них, то оставшаяся часть плоскости $xy$ образует трехсвязную область.



Фиг. 9.

Если взять окружности $\theta_1 - \theta_2 = \text{const}$ в качестве линий тока, то мы будем иметь случай одного источника и одного стока равной мощности в точках $(\pm a, 0)$. Если $a$ стремится к нулю, в то время как $\mu a$ остается конечным, то этим реализуется допущение для формулы (5) § 65; последнее соответствует, следовательно, случаю линейного дублета в начале координат. Линии тока показаны (частью) на фиг. 13.

Если мы, с другой стороны, возьмем окружности

$$\frac{r_1}{r_2} = \text{const}$$

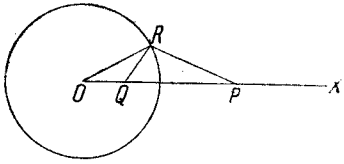
в качестве линий тока, то мы будем иметь случай циклического движения; циркуляция по замкнутой кривой, которая заключает только первую из указанных выше точек, равна $2\pi\mu$, циркуляция же по замкнутой кривой около второй точки равна $-2\pi\mu$; циркуляция же по замкнутой кривой, заключающей обе точки, равна нулю. Этот пример будет для нас представлять дополнительный интерес, когда в главе VII мы перейдем к изучению прямолинейного вихря.

---

[1]) В смысле совпадения для одного семейства окружностей горизонтальных диаметров, а для другого — вертикальных диаметров. (*Прим. ред.*)

3. С помощью простой комбинации источников мы можем представить течение около круглого цилиндра, обусловленное существованием источника в заданной внешней точке $P$.

Пусть $Q$ есть инверсия точки $P$ по отношению к окружности, и вообразим в точках $P$ и $Q$ одинаковые источники с мощностью $\mu$, а в центре $O$ сток $-\mu$. Тогда, обращаясь к примеру (2), получим для функции $\psi$ в точке $R$ на окружности (фиг. 10) значение




Фиг. 10.

$$\psi = -\mu\,(\angle RPx + \angle RQx - \angle ROx) = \\ = -\mu\,(\angle RPx + \angle ORQ) = \\ = -\mu\,(\angle RPx + \angle RPQ) = -\pi\mu,$$

т. е. $\psi$ равно постоянному вдоль окружности [1]).

4. Потенциальная функция и функция тока, которые соответствуют ряду источников одинаковой мощности и находящихся на равном расстоянии в точках $(0, 0)$, $(0, \pm a)$, $(0, \pm 2a)$, ..., представляются следующими формулами:

$$w \sim \ln z + \ln(z - ia) + \ln(z + ia) + \ln(z - 2ia) + \ln(z + 2ia) + \ldots, \tag{5}$$

или

$$w = C \ln \operatorname{sh} \frac{\pi z}{a}, \tag{6}$$

где $C$ есть действительная величина. Это дает

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{2} C \ln \frac{1}{2}\left(\operatorname{ch}\frac{2\pi x}{a} - \cos\frac{2\pi y}{a}\right), \\ \psi &= C \operatorname{arctg}\left[\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi y}{a}}{\operatorname{th}\frac{\pi x}{a}}\right], \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

что согласуется с результатом, данным Максвеллом [2]). Формулы эти имеют место также и для случая, когда источник находится в середине между двумя твердыми параллельными стенками, $y = \pm\frac{1}{2}a$.

Случай ряда *двойных* источников с осями, параллельными оси $x$, мы получим, если продиференцируем (6) по $z$. Опуская множитель, мы получим

$$w = C \operatorname{cth} \frac{\pi z}{a}, \tag{8}$$

или

$$\varphi = \frac{C \operatorname{sh}\frac{2\pi x}{a}}{\operatorname{ch}\frac{2\pi x}{a} - \cos\frac{2\pi y}{a}}, \quad \psi = -\frac{C \sin\frac{2\pi y}{a}}{\operatorname{ch}\frac{2\pi x}{a} - \cos\frac{2\pi y}{a}}. \tag{9}$$

Если наложить на это равномерное движение, параллельное отрицательной оси $x$, то будем иметь

$$w = z + C \operatorname{cth} \frac{\pi z}{a}, \tag{10}$$

или

$$\varphi = x + \frac{C \operatorname{sh}\frac{2\pi x}{a}}{\operatorname{ch}\frac{2\pi x}{a} - \cos\frac{2\pi y}{a}}, \quad \psi = y - \frac{C \sin\frac{2\pi y}{a}}{\operatorname{ch}\frac{2\pi x}{a} - \cos\frac{2\pi y}{a}}. \tag{11}$$

---

[1]) Kirchhoff, Pogg. Ann. LXIV (1845) (Ges. Abh. 1)

[2]) Maxwell, Electricity and Magnetism, § 203.

Линия тока $\psi=0$ состоит здесь частично из прямой $y=0$, частично же из овальной кривой, полуоси которой в направлении координатных осей даны уравнениями

$$\operatorname{sh}^2\frac{\pi x}{a}=\frac{\pi C}{a},\quad y\operatorname{tg}\frac{\pi y}{a}=C. \tag{12}$$

Если положить

$$C=\frac{\pi b^2}{a}, \tag{13}$$

где $b$ мало по сравнению с $a$ [1]), то обе эти полуоси приближенно равны $b$. Мы получаем таким образом потенциальную функцию и функцию тока для жидкости, которая протекает через решетку, составленную из параллельных стержней с малым круглым сечением. Действительно, второе из уравнений (11) получает для малых значений $x$, $y$ вид

$$\psi=y\left(1-\frac{b^2}{x^2+y^2}\right), \tag{14}$$

**§ 65.** Если $w$ есть функция от $z$, то из определения § 62 сейчас же следует, что $z$ есть функция от $w$. Эта формулировка иногда бывает аналитически более удобной, чем первая.

Соотношения (1) § 62 заменяются тогда через

$$\frac{\partial x}{\partial\varphi}=\frac{\partial y}{\partial\psi},\quad \frac{\partial x}{\partial\psi}=-\frac{\partial y}{\partial\varphi}. \tag{1}$$

Так как

$$\frac{dw}{dz}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+i\frac{\partial\psi}{\partial x}=-u+iv,$$

то

$$-\frac{dz}{dw}=\frac{1}{u-iv}=\frac{1}{q}\left(\frac{u}{q}+i\frac{v}{q}\right),$$

где $q$ есть результирующая скорость в $(x, y)$. Если мы напишем

$$\zeta=-\frac{dz}{dw} \tag{2}$$

и будем представлять свойства функции $\zeta$ графически по способу, ранее разъясненному, то вектор, проведенный из начала координат к произвольной точке плоскости $\zeta$, будет совпадать по направлению со скоростью в соответствующей точке плоскости $z$, а его абсолютная величина будет обратно пропорциональной значению этой скорости.

---

[1]) Приближенно круговая форма сохраняется, однако, для достаточно большой области значений $C$. Так, из (12) мы находим, если положить $C=\frac{1}{4}a$:

$$\frac{x}{a}=0{,}254,\quad \frac{y}{a}=0{,}250.$$

Оба диаметра приблизительно равны, хотя ширина овала равна половине интервала между линиями тока $y=\pm\frac{1}{2}a$.

Далее, так как $\frac{1}{q}$ есть абсолютное значение величины $\frac{dz}{dw}$, т. е. $\frac{\partial x}{\partial \varphi}+i\frac{\partial y}{\partial \varphi}$, то будем иметь

$$\frac{1}{q^2}=\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2. \tag{3}$$

Это можно, согласно (1), представить и в такой форме:

$$\frac{1}{q^2}=\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial \psi}\right)^2=\left(\frac{\partial y}{\partial \psi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2=\left(\frac{\partial y}{\partial \psi}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial \psi}\right)^2=$$
$$=\frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial y}{\partial \psi}-\frac{\partial x}{\partial \psi}\frac{\partial y}{\partial \varphi}. \tag{4}$$

Эта последняя формула

$$\frac{1}{q^2}=\frac{\partial(x, y)}{\partial(\varphi, \psi)} \tag{5}$$

выражает тот факт, что соответствующие элементарные площадки в плоскостях $z$ и $w$ относятся как квадрат абсолютной величины $\frac{dz}{dw}$ к единице.

**§ 66.** Важное значение имеют следующие примеры такого способа представления функций:

1) Возьмем

$$z=c\operatorname{ch} w, \tag{1}$$

или

$$\left.\begin{aligned} x&=c\operatorname{ch}\varphi\cos\psi,\\ y&=c\operatorname{sh}\varphi\sin\psi.\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Кривые $\varphi=\text{const}$ будут представлять эллипсы

$$\frac{x^2}{c^2\operatorname{ch}^2\varphi}+\frac{y^2}{c^2\operatorname{sh}^2\varphi}=1, \tag{3}$$

а кривыми $\psi=\text{const}$ будут гиперболы

$$\frac{x^2}{c^2\cos^2\psi}-\frac{y^2}{c^2\sin^2\psi}=1; \tag{4}$$

эти конические сечения имеют общие фокусы $(\pm c,\ 0)$. Обе системы таких кривых представлены на фиг. 11.

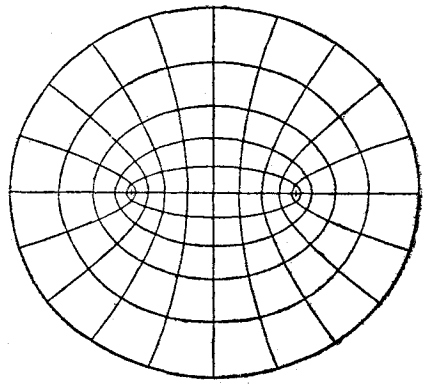
Так как в фокусах

$$\varphi=0,\quad \psi=n\pi,$$

где $n$ обозначает некоторое целое число, то мы видим согласно уравнению (2) предыдущего параграфа, что скорость там будет бесконечной. Если взять гиперболы в качестве линий тока, то часть оси $x$, которая лежит вне точек $(\pm c,\ 0)$, можно рассматривать как твердую стенку. Это соответствует течению несжимаемой жидкости

с одной стороны тонкой плоской разделяющей стенки на другую ее сторону через отверстие ширины $2c$; при этом скорость на ребрах будет бесконечно большой.

Если же взять эллипсы в качестве линий тока, то получим случай жидкости, циркулирующей вокруг эллиптического цилиндра или в пределе вокруг твердой пластинки, сечение которой есть отрезок, соединяющий фокусы $(\pm c,\ 0)$.



Фиг. 11.

На бесконечно большом расстоянии от начала $\varphi$ будет бесконечно велико, порядка $\ln r$, где $r$ есть радиус-вектор; скорость же будет там бесконечно малой, порядка $\frac{1}{r}$.

2) Пусть

$$z = w + e^{w}, \tag{5}$$

или

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi + e^{\varphi}\cos\psi, \\ y &= \psi + e^{\varphi}\sin\psi. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Линия тока $\psi = 0$ совпадает с осью $x$. Часть прямой $y = \pi$, лежащая между $x = \infty$ и $x = -1$, рассматриваемая как линия, возвращающаяся в самое себя[1]), образует линию тока $\psi = \pi$, т. е. когда $\varphi$ уменьшается от $+\infty$ через $0$ до $-\infty$, то $x$ растет от $-\infty$ до $-1$ и затем убывает опять до $-\infty$. Аналогичное имеет место и для линии тока $\psi = -\pi$.

Так как

$$\zeta = -\frac{dz}{dw} = -1 - e^{\varphi}\cos\psi - ie^{\varphi}\sin\psi,$$

то оказывается, что для больших отрицательных значений $\varphi$ скорость направлена в сторону отрицательной оси $x$ и равна единице, в то время как для больших положительных значений $\varphi$ она будет равна нулю.

Вышеуказанные формулы представляют, таким образом, движение жидкости, втекающей из открытого пространства в канал, ограниченный двумя тонкими параллельными стенками. На краях стенок

$$\varphi = 0, \quad \psi = \pm\pi,$$

и, следовательно, $\zeta = 0$, т. е. скорость здесь будет бесконечно большой.

---

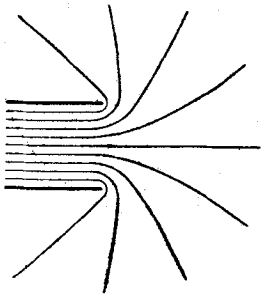
[1]) То-есть проходящаяся дважды, туда и обратно. *Прим. ред.*

Фиг. 12 показывает вид линий тока, проведенных, как во всех случаях этой главы, для равноотстоящих значений $\psi$[1]).

Когда стенки не параллельны, а образуют угол $\pm\beta$, то соответствующая формула имеет вид

$$z=\frac{1-n}{n}(1-e^{-nw})+e^{(1-n)w}, \tag{7}$$

где $n=\frac{\beta}{\pi}$. Линии тока $\psi=\pm\pi$ идут по направлению стенок[2]). Когда $n$ обращается в нуль, то уравнение (7) совпадает с (5), в то время как для $n=\frac{1}{2}$ мы будем фактически иметь случай 1, показанный на фиг. 11.



Фиг. 12.

Если изменить знак $w$ в (5), то направление движения станет обратным. Если мы далее наложим на это движение равномерное течение в отрицательном направлении оси $x$ тем, что напишем $w-z$ вместо $w$, то мы получим[3])

$$w=e^{z-w}, \quad \text{или} \quad z=w+\ln w. \tag{8}$$

Скорость между стенками на большом расстоянии влево будет теперь равна нулю, и мы будем иметь, следовательно, идеализированное представление трубки Пито (§ 24). Линии тока можно получить из уравнений

$$x=\varphi+\frac{1}{2}\ln(\varphi^2+\psi^2), \quad y=\psi+\operatorname{arctg}\frac{\psi}{\varphi}. \tag{9}$$

**§ 67.** Как известно, всякая конечная, непрерывная и однозначная функция $f(z)$, первая производная которой конечна для всех точек области между двумя концентрическими окружностями, описанными около начала, может быть разложена в следующий ряд:

$$f(z)=A_0+A_1z+A_2z^2+\ldots+B_1z^{-1}+B_2z^{-2}+\ldots \tag{1}$$

Если же вышеизложенные условия выполнены для всех точек внутри круга с центром в начале, то в формуле (1) сохраняется только ряд по возрастающим степеням $z$; если они выполнены для всех точек вне такого круга, то для представления функции достаточно ряда по убывающим степеням $z$ со свободным членом, наконец, когда условия соблюдены для всех точек плоскости $xy$ без исключения, тогда функция $f(z)$ не может быть ничем иным, кроме как постоянной $A_0$.

---

[1]) Этот пример указан Helmholtz, Berl. Monatsber., 23 апреля 1868 (Phil. Mag., ноябрь 1868; Wiss. Abh., 1, 154).

[2]) Harris R. A., On Two-Dimensional Fluid Motion through Spouts composed of two Plane Walls., Ann. of Math. (2), II (1901). Там рассмотрен случай $\beta=\frac{1}{4}\pi$.

[3]) Rayleigh, Proc. Roy. Soc. A, XCI, 503 (1915) (Papers, VI, 329), где начерчено несколько линий тока.

Полагая

$$f(z) = \varphi + i\psi,$$

вводя полярные координаты и представляя, далее, комплексные постоянные $A_n$, $B_n$ в виде $P_n + iQ_n$, $R_n + iS_n$, соответственно получим

$$\left.\begin{aligned} \varphi = P_0 + \sum_1^\infty r^n (P_n \cos n\theta - Q_n \sin n\theta) + \\ + \sum_1^\infty r^{-n} (R_n \cos n\theta + S_n \sin n\theta), \\ \psi = Q_0 + \sum_1^\infty r^n (Q_n \cos n\theta + P_n \sin n\theta) + \\ + \sum_1^\infty r^{-n} (S_n \cos n\theta - R_n \sin n\theta). \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Эти формулы удобны в тех задачах, когда значение $\varphi$ или $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ задано на концентрических окружностях. Это заданное значение может быть разложено для всякого контура по теореме Фурье в ряд по синусам и косинусам кратного $\theta$. Найденные таким образом ряды должны быть эквивалентны рядам, получающимся из формулы (2); тогда, приравнивая в отдельности коэфициенты при $\sin n\theta$ и при $\cos n\theta$, мы получим уравнения для определения $P_n$, $Q_n$, $R_n$, $S_n$.

**§ 68.** В качестве простого примера возьмем следующий случай: бесконечно длинный круглый цилиндр радиуса $a$ движется со скоростью $U$ перпендикулярно к своей оси в неограниченной жидкости, которая в бесконечности находится в покое.

Возьмем начало координат на оси цилиндра, а оси $x$ и $y$ в плоскости, перпендикулярной к оси цилиндра, при этом пусть ось $x$ совпадает с направлением скорости $U$. Так как мы мыслим движение образовавшимся из состояния покоя, то оно должно быть безвихревым и $\varphi$ однозначной. Так как $\int \frac{\partial\varphi}{\partial n} ds$, распространенный по контуру сечения цилиндра, равен нулю, то $\psi$ также однозначна (§ 59), и, следовательно, формулы (2) имеют место. Более того, задача, согласно § 41, вполне определенна, так как жидкость покоится в бесконечности и $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ для всякой точки внутренней границы жидкости задано с помощью формулы

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial r} = U \cos\theta \quad (3)$$

для $r = a$. Эти условия дают $P_n = 0$, $Q_n = 0$ и

$$U \cos\theta = \sum_1^\infty n a^{-n-1} (R_n \cos n\theta + S_n \sin n\theta).$$

Последнее уравнение может быть удовлетворено только тогда, когда $R_1 = Ua^2$, а все остальные коэфициенты равны нулю. Полное решение поэтому будет

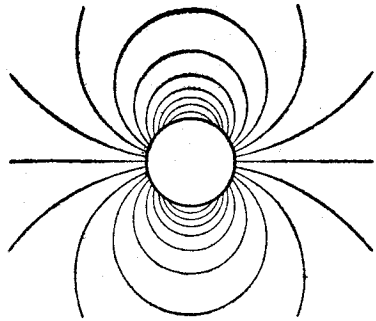
$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \frac{Ua^2}{r}\cos\theta, \\ \psi &= -\frac{Ua^2}{r}\sin\theta. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Линии тока $\psi = \text{const}$. суть окружности, показанные на фиг. 13. Сравнивая с формулой (6) § 60, мы видим, что эффект здесь тот же, что и от дублета в начале координат.

Кинетическая энергия жидкости подсчитывается по формуле (2) § 61

$$2T = \varrho \int \varphi\, d\psi = \varrho U^2 a^2 \int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta = M' U^2, \tag{5}$$

где $M' = \pi a^2 \varrho$ есть масса жидкости, вытесняемой единицей длины цилиндра. Этот результат показывает, что весь эффект от присутствия жидкости может быть представлен прибавлением величины $M'$ к массе цилиндра, отнесенной к единице его длины.



Фиг. 13.

Следовательно, если при прямолинейном движении цилиндра на него действует внешняя сила $X$, отнесенная к единице длины, то уравнение энергии будет

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}MU^2 + \frac{1}{2}M'U^2\right) = XU,$$

или

$$(M + M')\frac{dU}{dt} = X, \tag{6}$$

где $M$ обозначает собственную массу цилиндра. Если мы напишем это в виде

$$M\frac{dU}{dt} = X - M'\frac{dU}{dt},$$

то увидим, что давление жидкости равно силе $-M'\frac{dU}{dt}$ на единицу длины в направлении движения. Оно исчезает, когда $U$ постоянно.

Этот результат можно проверить непосредственно вычислением. Согласно (6) § 20 давление определяется по формуле

$$\frac{p}{\varrho} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{1}{2}q^2 + F(t), \tag{7}$$

где $q$ есть скорость жидкости относительно оси движущегося цилиндра. При этом внешние силы, действующие на цилиндр, не принимаются во внимание.