

Действие их может быть подсчитано по законам гидростатики. Для $r = a$ имеем

$$\frac{d\varphi}{dt} = a \frac{dU}{dt} \cos \theta, \quad q^2 = 4U^2 \sin^2 \theta; \quad (8)$$

отсюда следует

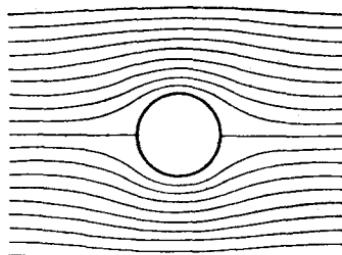
$$p = \rho \left[a \frac{dU}{dt} \cos \theta - 2U^2 \sin^2 \theta + F(t) \right]. \quad (9)$$

Ясно, что направление результирующей силы параллельно начальному направлению $\theta = 0$; чтобы найти ее абсолютное значение для единицы длины цилиндра, умножим уравнение (9) на $-a d\theta \cos \theta$ и проинтегрируем по θ между пределами 0 и 2π ; результат будет равен $-M' \frac{dU}{dt}$, как и выше.

Если в рассмотренном выше примере сообщить жидкости и цилинду скорость $-U$, то мы будем иметь случай обтекания потоком со скоростью U на бесконечности неподвижного цилиндра. Прибавляя $Ur \cos \theta$ к φ и соответственно $Ur \sin \theta$ к ψ , получим

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= U \left(r + \frac{a^2}{r} \right) \cos \theta, \\ \psi &= U \left(r - \frac{a^2}{r} \right) \sin \theta. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Линии тока показаны на фиг. 14. Если никакие внешние силы не действуют и скорость U постоянна, то результирующая сила, действующая на цилиндр, будет равна нулю, ср. § 92.



Фиг. 14.

§ 69. Чтобы ряд (1) § 67 мог представлять любой случай непрерывного безвихревого движения между двумя концентрическими окружностями, к нему необходимо прибавить еще член

$$A \ln z. \quad (1)$$

Если $A = P + iQ$, то соответствующие выражения для φ и ψ будут

$$P \ln r - Q\theta \quad \text{и} \quad P\theta + Q \ln r. \quad (2)$$

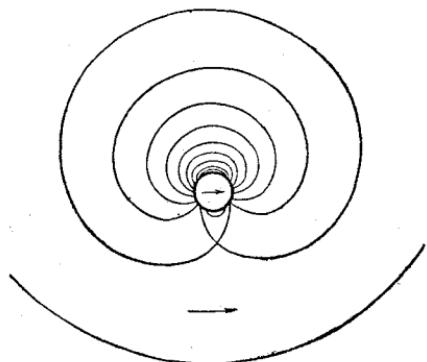
Смысл этих выражений очевиден: $2\pi P$ (циклическая константа ψ) означает поток через внутреннюю или внешнюю окружность, а $2\pi Q$ (циклическая константа φ) — циркуляцию по некоторой замкнутой кривой, заключающей начало.

Вернемся, например, к задаче прошлого параграфа и предположим, что имеет место — наряду с движением, вызванным цилиндром, — еще циркуляция вокруг цилиндра с циклической постоянной κ . Границные условия будут удовлетворены, если предположить, что

$$\varphi = U \frac{a^2}{r} \cos \theta - \frac{\kappa}{2\pi} \theta. \quad (3)$$

Под влиянием циркуляции, наложенной на движение, вызванное цилиндром, скорость на одной стороне его увеличивается, а на другой уменьшается (возможно также наоборот). Следовательно, если цилиндр движется прямолинейно с постоянной скоростью, то на одной стороне произойдет уменьшение, а на другой увеличение давления, и для

поддержания движения необходимо приложить силу перпендикулярно к направлению движения.



Фиг. 15.

Фиг. 15 показывает линии тока. На некотором малом расстоянии от начала они приближаются по виду к концентрическим кругам, так как движение, вызванное цилиндром, здесь мало в сравнении с циклическим движением. Если, как в представленном случае,

$$U > \frac{\kappa}{2\pi a},$$

то точка, для которой скорость равна нулю, находится в жидкости. Система линий тока имеет во всех случаях одну и ту же конфигурацию;

единственно, на что влияет изменение значения U , есть изменение масштаба чертежа по отношению к диаметру цилиндра.

Если, как в § 68, задача будет сведена к задаче установившегося движения, то вместо (3) мы будем иметь

$$\varphi = U \left(r + \frac{a^2}{r} \right) \cos \theta - \frac{\kappa}{2\pi} \theta, \quad (4)$$

откуда для $r = a$

$$\frac{p}{\rho} = \text{const.} - \frac{1}{2} q^2 = \text{const.} - \frac{1}{2} \left(2U \sin \theta + \frac{\kappa}{2\pi a} \right)^2. \quad (5)$$

Результирующее давление на цилиндр, поэтому, равно

$$-\int_0^{2\pi} p \sin \theta \, a \, d\theta = +\kappa \rho U, \quad (6)$$

а его направление перпендикулярно к общему направлению потока. Этот результат независим от радиуса цилиндра. В дальнейшем мы покажем, что он имеет место для сечения любой формы¹⁾.

Чтобы вычислить давление жидкости на цилиндр для случая, когда цилиндр движется произвольным образом, необходимо взять подвижную систему координат, начало которой лежит в центре цилиндра и ось x которой совпадает с направлением скорости U . Если обозначить через χ угол между этим и некоторым неподвижным направлением, то получим уравнение (7) § 20 в виде

$$\frac{p}{\rho} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{2} q^2 - \frac{d\chi}{dt} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}; \quad (7)$$

¹⁾ Этой важной теоремой мы обязаны Кутта и Жуковскому; см. Кутта, Sitzb. d. k. bayr. Akad. d. Wiss. (1910). Доказательство будет дано позднее (§ 72b).

q здесь означает скорость жидкости относительно движущейся координатной системы и вычисляется при помощи относительного потенциала скоростей $\varphi + Ur \cos \theta$, где φ дано формулой (3). Для $r=a$ находим

$$\frac{p}{\rho} = a \frac{dU}{dt} \cos \theta - \frac{1}{2} \left(2U \sin \theta + \frac{\kappa}{2\pi a} \right)^2 + aU \frac{d\chi}{dt} \sin \theta + \frac{\kappa}{2\pi} \frac{d\chi}{dt}. \quad (8)$$

Компоненты результирующего давления, параллельные соответственно осям x и y , будут, следовательно,

$$\left. \begin{aligned} - \int_0^{2\pi} p \cos \theta a d\theta &= - M' \frac{dU}{dt}, \\ - \int_0^{2\pi} p \sin \theta a d\theta &= \kappa \rho U - M' U \frac{d\chi}{dt}, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

причем, как и раньше, $M' = \kappa \rho a^2$.

Если P и Q обозначают компоненты внешней силы, действующей на цилиндр, соответственно в направлении касательной и нормали к траектории, то уравнения движения цилиндра напишутся в виде

$$\left. \begin{aligned} (M+M') \frac{dU}{dt} &= P, \\ (M+M') U \frac{d\chi}{dt} &= \kappa \rho U + Q. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Если внешние силы отсутствуют, то U постоянно; полагая при этом

$$\frac{d\chi}{dt} = \frac{U}{R},$$

где R есть радиус кривизны траектории, мы найдем

$$R = (M+M') \frac{U}{\kappa \rho}. \quad (11)$$

Траектория есть, следовательно, окружность, описываемая в направлении циклического движения¹⁾.

Если обозначим через ξ, η декартовы координаты точки на оси цилиндра относительно неподвижной системы координат, то уравнения (10) равносочлены со следующими:

$$\left. \begin{aligned} (M+M') \dot{\xi} &= - \kappa \rho \dot{\eta} + X, \\ (M+M') \ddot{\eta} &= \kappa \rho \dot{\xi} + Y, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

где X, Y суть компоненты внешних сил. Чтобы найти действие постоянной силы, мы можем положить

$$\left. \begin{aligned} X &= (M+M') g', \\ Y &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

¹⁾ Rayleigh, On the Irregular Flight of a Tennis Ball, Mess. of Math. VII (1878) (Papers, I, 344); Greenhill, Mess. of Math., IX, 113 (1880).

Решение тогда будет

$$\left. \begin{aligned} \zeta &= a + c \cos(nt + \varepsilon), \\ \eta &= \beta + \frac{g'}{n} t + c \sin(nt + \varepsilon), \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

где a, β, c, ε суть произвольные постоянные, а

$$n = \frac{x_0}{M + M'}. \quad (15)$$

Это показывает, что траектория есть трохонда, которая описывается со средней скоростью $\frac{g'}{n}$ перпендикулярно к оси x ¹⁾. Следует отметить, что цилиндр вообще не совершает никакого поступательного движения в направлении внешней силы. В частном случае $c=0$ траектория есть прямая линия, перпендикулярная к силе. Эта задача будет служить иллюстрацией к теории «гиростатических систем», о которой мы будем говорить в главе VI.

§ 70. Формула (1) § 67, исправленная прибавлением члена $A \ln z$, может быть легко обобщена так, что она будет пригодной и для всякого случая безвихревого движения, когда область имеет границами окружности, из которых одна заключает все другие. В самом деле, мы имеем для всякой отдельной внутренней границы ряд вида

$$A \ln(z - c) + \frac{A_1}{z - c} + \frac{A_2}{(z - c)^2} + \dots, \quad (1)$$

где $c = a + ib$ представляет центр окружности, а коэффициенты A, A_1, A_2, \dots , вообще говоря, суть комплексные величины. Однако возникающая трудность определения коэффициентов таким образом, чтобы они удовлетворяли наперед заданным граничным условиям, настолько велика, что применимость этого метода очень ограничена.

На деле определение безвихревого движения жидкости при данных граничных условиях представляет задачу, точное решение которой прямым путем удается только в очень ограниченном числе случаев. Когда границы состоят из твердых прямых стенок, тогда для решения достаточно метода преобразования, данного Шварцем²⁾ и Кристоффелем³⁾, который мы изложим в § 73. Большинство случаев, решения которых теперь известны, были получены обратным методом. А именно, берем какой-нибудь известный вид функции φ или ψ и исследуем, каким граничным условиям она может удовлетворить. Некоторые

¹⁾ Greenhill см. стр. 103.

²⁾ Schwarz, Ueber einige Abbildungsaufgaben, Crelle, LXX (Gesammelte Abhandlungen, Berlin, 1890, II, 65).

³⁾ Christoffel, Sul problema delle temperature stazionarie e la rappresentazione di una data superficie, Ann. di Mat. (2), I, 89. См. также Kirchhoff, Zur Theorie des Kondensators, Berl. Monatsber., 1877 (Ges. Abh., 101). Многие из решений, которые могут быть получены таким образом, имеют интересные применения в электростатике, теплопроводности и т. д. См., например, Thomson J. J., Recent Researches in Electricity and Magnetism, Oxford, 1893. Проблема криволинейных границ была исследована Leathem, Phil. Trans. A, CCXV, 439 (1915).

простые примеры такого способа решения были уже разобраны в § 63 и 64.

Если мы возьмем задачу об обтекании некоторой заданной неподвижной границы, решение которой известно, например

$$w = f(z),$$

и применим к ней конформное отображение

$$z = \chi(z'),$$

то преобразованные границы в плоскости z' будут опять являться линиями тока, и мы таким путем получим решение новой задачи. Иногда бывает целесообразно разложить преобразование на два или несколько отдельных последовательных преобразований.

Задача, которая этим путем привела к интересным преобразованиям, есть задача об обтекании круглого неподвижного цилиндра. Легко видеть из § 68 и 69, что общее решение такой задачи есть

$$w = U\left(z + \frac{a^2}{z}\right) - iV\left(z - \frac{a^2}{z}\right) + \frac{i\kappa}{2\pi} \ln \frac{z}{a}, \quad (2)$$

где $-U, -V$ суть компоненты скорости в бесконечности, а κ обозначает циркуляцию. Следуя указанному методу, положим

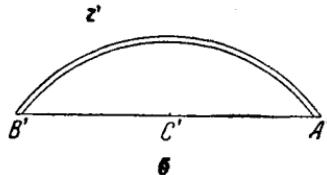
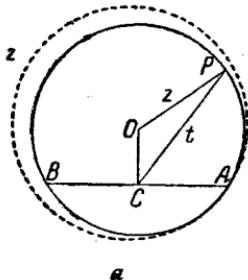
$$z = t + c, \quad (3)$$

где t есть новая комплексная переменная и $|c| < a$, и затем

$$z' = t + \frac{b^2}{t}. \quad (4)$$

Ясно, что бесконечно удаленные части плоскости z и плоскости z' тождественны, и поэтому общее направление течения в обоих случаях, а также

величины циркуляций одинаковы. Постоянные c и b выбираются так, что точки $t = \pm b$ в плоскости t соответствуют двум произвольно выбранным точкам A и B в плоскости z .



Фиг. 16.

Пусть, например, AB есть хорда круга радиуса $r = a$, параллельная оси Ox . Пусть центральный угол, стягиваемый этой хордой в O , будет 2β . Из фиг. 16 мы найдем, что

$$c = -ia \cos \beta, \quad b = a \sin \beta. \quad (5)$$

Если P есть какая-то другая точка в плоскости z , то имеем

$$z = \overline{OP}; \quad t = \overline{CP}. \quad (6)$$

Из (4) следует, что

$$\frac{z' - 2b}{z' + 2b} = \left(\frac{t - b}{t + b} \right)^2. \quad (7)$$

Если мы теперь положим на один момент

$$t - b = r_1 e^{i\theta_1}, \quad t + b = r_2 e^{i\theta_2}, \quad z' - 2b = r'_1 e^{i\theta'_1}, \quad z' + 2b = r'_2 e^{i\theta'_2}, \quad (8)$$

то будем иметь

$$\theta'_1 - \theta'_2 = 2(\theta_1 - \theta_2). \quad (9)$$

Пусть теперь P пробегает окружность в плоскости z в положительном направлении, считая от A . Соответствующая точка P' в плоскости z' , согласно (9), будет двигаться таким образом, что угол $A'P'B'$ будет постоянен и равен 2π ; траекторией ее будет, следовательно, дуга круга. Когда P проходит через точку B , θ_2 возрастает на π ; следовательно, для того чтобы уравнение (9) имело место, θ'_2 должно возрасти на 2π . Когда таким образом P пройдет свой круг, то P' будет двигаться обратно вдоль дуги $B'A'$. Мы получаем таким образом случай, когда поток в произвольном направлении и с произвольной циркуляцией обтекает цилиндрическую пластиинку, сечение которой есть дуга круга.

Так как

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\frac{dw}{dz}}{1 - \frac{b^2}{t^2}}, \quad (10)$$

то скорость в угловых точках A' , B' будет обращаться в бесконечность. Ее можно, однако, сделать конечной в одной точке, например B , выбирая соответственное значение циркуляции, а именно

$$\kappa = 4\pi a (U \cos \beta - V \sin \beta). \quad (11)$$

Течение в точке B' будет тогда даваться формулой

$$u - iv = (U \sin \beta + V \cos \beta) \sin \beta e^{2i\beta} \quad (12)$$

и будет направлено по касательной к дуге.

Если общая скорость потока равна W и составляет с направлением $B'A'$ угол α , то будем иметь

$$U = -W \cos \alpha, \quad V = -W \sin \alpha. \quad (13)$$

Тогда, если R есть радиус дуги,

$$a \sin \beta = R \sin 2\beta. \quad (14)$$

Подъемная сила, следовательно, будучи направленной под прямым углом к направлению потока, как будет показано в § 72b, равна

$$4\pi\varrho W^2 R \frac{\sin 2\beta}{\sin \beta} \cos(\alpha + \beta). \quad (15)$$

Вместо круга с радиусом $r = a$ мы можем взять теперь окружность, касающуюся первой в точке A и охватывающую точку B (как показано на фиг. 16), и ее отображать. Таким путем мы получим профиль крыла Жуковского, для которого дуга круга будет служить скелетом¹⁾. Он будет иметь

¹⁾ О дальнейшем развитии и видоизменении метода можно отослать к книге Глаузерт Г., Основы теории крыльев и винта (перев. с англ.), ГНТИ, 1931.

заострение в точке, соответствующей точке A , и, следовательно, давать бесконечную скорость только в этой точке. Этой особенности мы можем избежать, выбирая соответственное значение для κ .

В следующих параграфах мы дадим простой метод получения решения в двух важных случаях плоского движения.

§ 71. Случай 1. Граница жидкости состоит из твердой цилиндрической поверхности, движущейся со скоростью U перпендикулярно к направлению ее длины.

Возьмем ось x в направлении скорости U ; обозначим через ds элемент кривой сечения поверхности плоскостью xy . Тогда для всех точек этой кривой сечения скорость жидкости в направлении нормали, которую мы обозначим через $\frac{d\psi}{ds}$, должна быть равна проекции скорости контура на эту нормаль, т. е. $-U \frac{dy}{ds}$. Интегрируя вдоль сечения, мы получим

$$\psi = -Uy + \text{const.} \quad (1)$$

Если мы сделаем какое-либо предположение относительно вида ψ , то это уравнение будет определять систему кривых, из которых каждая при ее движении, параллельном оси x , дает допустимую форму линии тока $\psi = \text{const.}$ ¹⁾. Дадим несколько примеров.

1. Если возьмем ψ в форме $-Uy$, то условие (1) будет выполняться для всякого вида контура. Поэтому жидкость, заключенная в цилиндр произвольного вида, имеющий только поступательное движение, движется, как твердое тело. Если, кроме того, цилиндрическая область, занятая жидкостью, будет односвязной, то это движение будет представлять единственный возможный вид безвихревого движения в этом случае. Это следует также из § 40; ибо движение жидкости и твердого тела, как одной массы, удовлетворяет, очевидно, всем условиям и представляет, следовательно, единственное решение, которое допускает задача.

2. Пусть $\psi = \frac{A \sin \theta}{r}$; тогда уравнение (1) примет вид

$$\frac{A}{r} \sin \theta = -Ur \sin \theta + \text{const.} \quad (2)$$

В этой системе кривых содержится также и окружность радиуса a при условии, что $\frac{A}{a} = -Ua$.

Следовательно,

$$\psi = -\frac{Ua^2}{r} \sin \theta \quad (3)$$

изображает течение, которое образуется от движения круглого цилиндра в безграничной жидкости со скоростью U перпендикулярно к своей оси; это совпадает с § 68.

¹⁾ Ср. Rankine, см. сноску на стр. 85, там применяется метод получения кривых, подобных поперечному сечению кораблей.

3. Введем эллиптические координаты ξ, η , которые связаны с x, y соотношением

$$x + iy = c \operatorname{ch}(\xi_0 + i\eta), \quad (4)$$

или

$$x = c \operatorname{ch} \xi \cos \eta, \quad y = c \operatorname{sh} \xi \sin \eta, \quad (5)$$

(ср. § 66), причем предполагается, что ξ изменяется от 0 до ∞ , а η — от 0 до 2π . Если мы теперь положим

$$\varphi + i\psi = Ce^{-(\xi+i\eta)}, \quad (6)$$

где C есть некоторая действительная постоянная, то будем иметь

$$\psi = -Ce^{-\xi} \sin \eta, \quad (7)$$

и уравнение (1) примет вид

$$Ce^{-\xi} \sin \eta = Uc \operatorname{sh} \xi \sin \eta + \text{const.}$$

В этой системе кривых содержится эллипс, параметр которого ξ_0 определяется из уравнения

$$Ce^{-\xi_0} = Uc \operatorname{sh} \xi_0.$$

Если a, b суть полуоси эллипса, то

$$a = c \operatorname{ch} \xi_0, \quad b = c \operatorname{sh} \xi_0$$

и

$$C = \frac{Ubc}{a-b} = Ub \left(\frac{a+b}{a-b} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Следовательно, формула

$$\psi = -Ub \left(\frac{a+b}{a-b} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\xi} \sin \eta \quad (8)$$

дает течение, которое образуется в безграничной жидкости, когда эллиптический цилиндр с полуосами a, b движется в ней параллельно своей большей оси со скоростью U .

Что действительно написанные выше формулы дают в бесконечности для скорости значение нуль, можно вывести из следующего рассуждения: для больших значений ξ величины $d\xi$ и $d\eta$ будут того же порядка, как $e^\xi d\xi$ или $e^\xi d\eta$, так что $\frac{d\psi}{dx}, \frac{d\psi}{dy}$ — того же порядка, как $e^{-2\xi}$, или, наконец, как $\frac{1}{r^2}$, где r обозначает расстояние какой-либо точки от оси цилиндра. В бесконечности ψ стремится к нулю как выражение $\frac{A \sin \theta}{r}$, так же, как и в случае дублета.

Если движение эллиптического цилиндра параллельно малой оси, то будем иметь следующую формулу:

$$\psi = Va \left(\frac{a+b}{a-b} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\xi} \cos \eta. \quad (9)$$

Линии тока в каждом из этих случаев будут одинаковыми для всех софокусных эллиптических форм цилиндра, так что формулы будут иметь место и тогда, когда сечение сводится к отрезку, соединяющему оба фокуса. В этом случае формула (9) примет вид

$$\psi = Vc e^{-\xi} \cos \eta. \quad (10)$$

Это дает течение, которое вызывает бесконечно длинная пластинка ширины $2c$ в безграничной жидкости, при движении в ней в направлении, перпендикулярном к ее плоскости. Так как на острых краях пластинки скорость становится бесконечно большой, то это решение подлежит практически ограничению, указанному ранее в нескольких примерах¹⁾.

Кинетическую энергию жидкости получим из формулы

$$2T = \varrho \int \varphi d\psi = \varrho C^2 e^{-2\xi_0} \int_0^{2\pi} \cos^2 \eta d\eta = \pi \varrho b^2 U^2, \quad (11)$$

где b есть половина ширины цилиндра, измеренной перпендикулярно к направлению движения.

Если вокруг цилиндра имеет место циркуляция χ , то мы должны к указанным выше значениям ψ прибавить еще член $\frac{\chi \xi}{2\pi}$. В случае пластинки можно так подобрать значение χ , что скорость на одном ребре — но не на обоих — будет конечной.

Если подобрать соответственно единицы длины и времени, то мы можем вместо (4) и (6) написать

$$x + iy = \operatorname{ch}(\xi + i\eta), \quad \varphi + i\psi = e^{-(\xi + i\eta)},$$

отсюда следует

$$x = \varphi \left(1 + \frac{1}{\varphi^2 + \psi^2} \right), \quad y = \psi \left(1 - \frac{1}{\varphi^2 + \psi^2} \right).$$

Эти формулы удобно применить для вычерчивания кривых $\varphi = \text{const.}$, $\psi = \text{const.}$, которые представлены на фиг. 17.

Соединяя вместе результаты формул (8) и (9), мы получим случай эллиптического цилиндра, имеющего поступательную скорость с компонентами U и V ,

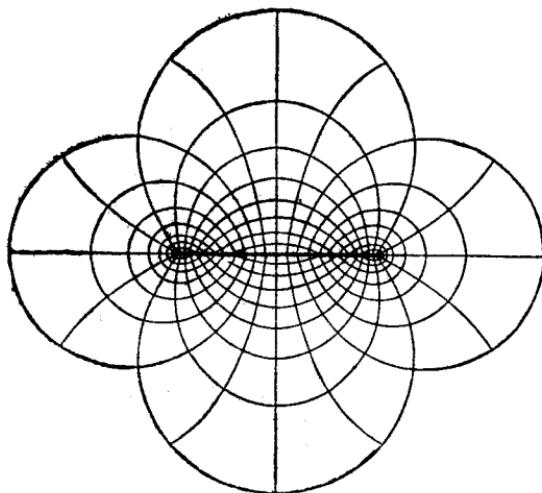
$$\psi = - \left(\frac{a+b}{a-b} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\xi} (Ub \sin \eta - Va \cos \eta). \quad (12)$$

¹⁾ Это исследование дано Lamb, Quart. Journ. of Math., XIV (1875). Результаты, эквивалентные (8) и (9), были получены другим путем Beltrami, Sui principii fondamentali dell'idrodinamica razionale, Mem. dell'Accad. delle Scienze di Bologna, 1873, стр. 394 (Opere matematiche, Milano, 1904, II, 202).

Чтобы найти движение относительно этого цилиндра, мы должны к этому выражению для ψ прибавить еще

$$Uy - Vx = C(U \operatorname{sh} \xi \sin \eta - V \operatorname{ch} \xi \cos \eta). \quad (13)$$

Например, функция тока при обтекании плоской пластинки, поставленной



Фиг. 17.

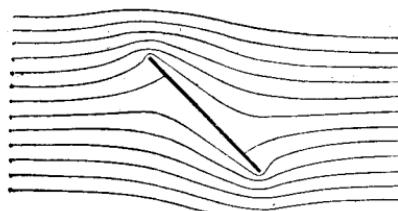
под углом в 45° к потоку, ребра которой лежат на $x = \pm c$, будет иметь вид

$$\psi = -\frac{1}{\sqrt{2}} q_0 c \operatorname{sh} \xi (\cos \eta - \sin \eta), \quad (14)$$

где q_0 обозначает скорость в бесконечности. Это можно непосредственно проверить, так как оно дает $\psi = 0$ для $\xi = 0$ и

$$\psi = -\frac{q_0}{\sqrt{2}} (x - y)$$

для $\xi = \infty$. Линии тока для этого случая показаны на фиг. 18 (для удобства повернутой на 45°). Они нам будут полезны для иллюстрации результатов главы VI.



Фиг. 18.

Если следовать по линии тока $\psi = 0$ от $\phi = +\infty$ до $\phi = -\infty$, то мы увидим, что она состоит в начале из гиперболической дуги $\eta = \frac{1}{4} \pi$, которая упирается в пластинку под прямым углом, затем она разделяется на две ветви, которые идут по поверхности пластиинки и, наконец, соединяясь, они

образуют при продолжении дугу гиперболы $\eta = \frac{5}{4} \pi$. В точках, в которых дуги гиперболы упираются в пластинку, скорость равна нулю, и давление

следовательно, достигает максимума¹⁾. Ясно, что давление жидкости на пластинку сводится к паре сил, которая стремится поставить пластинку широкой стороной перпендикулярно к направлению потока; легко найти, что момент этой пары сил, отнесенной к единице длины, равен $\frac{1}{2}\pi\varrho q_0^2 c^2$; ср. § 124.

§ 72. Случай II. Граница жидкости состоит из твердой цилиндрической поверхности, которая вращается с угловой скоростью ω вокруг оси, параллельной образующей цилиндра.

Если мы возьмем начало на оси вращения, а оси x и y в плоскости, перпендикулярной к ней, то при тех же обозначениях, что и раньше, $\frac{d\psi}{ds}$ будет равно нормальной компоненте скорости границы, или

$$\frac{d\psi}{ds} = \omega r \frac{dr}{ds},$$

где r обозначает расстояние от начала. Интегрируя, мы находим для всех точек границы

$$\psi = \frac{1}{2} \omega r^2 + \text{const.} \quad (1)$$

Если мы возьмем для ψ какое-нибудь возможное выражение, то формула (1) даст нам уравнение ряда кривых, из которых каждая при вращении около начала создаст систему линий тока, определяемых через ψ .

Мы рассмотрим следующие примеры:

1. Возьмем

$$\psi = Ar^2 \cos 2\theta = A(x^2 - y^2), \quad (2)$$

тогда уравнение (1) принимает вид

$$\left(\frac{1}{2}\omega - A\right)x^2 + \left(\frac{1}{2}\omega + A\right)y^2 = C;$$

это дает для всякого данного значения A систему подобных конических сечений. Чтобы эта система содержала эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

необходимо

$$\left(\frac{1}{2}\omega - A\right)a^2 = \left(\frac{1}{2}\omega + A\right)b^2,$$

или

$$A = \frac{1}{2}\omega \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}.$$

¹⁾ Проф. H e l e S h a w сделал несколько прекрасных экспериментальных проверок форм линий тока для некоторых случаев стационарного безвихревого плоского движения, включая и те, которые представлены на фиг. 11 и 15. См. Trans. Inst. Nav. Arch. XL (1898). Теория его метода найдет место в гл. XI.

²⁾ Если общее направление потока составляет с пластинкой угол a , то момент пары будет равен $\frac{1}{2}\pi\varrho q_0^2 c^2 \sin 2a$. Cisotti, Ann. di Mat. (3), XIX,

Следовательно, формула

$$\psi = \frac{1}{2} \omega \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} (x^2 - y^2) \quad (3)$$

дает течение жидкости в полом цилиндре, сечение которого есть эллипс с полуосями a, b , в случае, когда цилиндр вращается с угловой скоростью ω вокруг своей продольной оси. Расположение линий тока $\psi = \text{const.}$ показывает фиг. 19.

Соответствующая формула для φ будет

$$\varphi = -\omega \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} xy. \quad (4)$$

Кинетическая энергия жидкости, отнесенная к единице длины цилиндра, дается формулой

$$2T = \rho \iint \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy = \frac{1}{4} \frac{(a^2 - b^2)^2}{a^2 + b^2} \omega^2 \rho ab. \quad (5)$$

Это значение меньше, чем то, которое получится, если вращать жидкость вместе с ограничивающей ее поверхностью, как твердую массу; при этом первое значение относится ко второму как

$$\left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \right)^2$$

к единице. Мы имеем здесь пример к доказанной в § 45 теореме о минимуме Кельвина.

2. Вводя эллиптические координаты так же, как в § 71, (3) мы положим

$$\varphi + i\psi = Cie^{-2(\xi+i\eta)}. \quad (6)$$

Так как при этом будет иметь место равенство

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{2} c^2 (\operatorname{ch} 2\xi + \cos 2\eta),$$

то уравнение (1) принимает вид

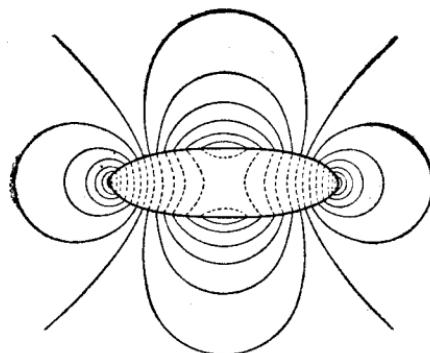
$$Ce^{-2\xi} \cos 2\eta - \frac{1}{4} \omega c^2 (\operatorname{ch} 2\xi + \cos 2\eta) = \text{const.}$$

Эта система кривых содержит эллипс с параметром ξ_0 , когда

$$Ce^{-2\xi_0} - \frac{1}{4} \omega c^2 = 0,$$

или, если ввести данные ранее значения a, b , когда

$$C = \frac{1}{4} \omega (a + b)^2,$$



Фиг. 19.

так что

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \frac{1}{4} \omega (a+b)^2 e^{-2\xi} \cos 2\eta, \\ \varphi &= \frac{1}{4} \omega (a+b)^2 e^{-2\xi} \sin 2\eta. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

На большом расстоянии от начала скорость здесь будет величиной порядка $\frac{1}{r^3}$.

Вышенаписанные формулы дают, таким образом, течение безграничной жидкости, которая, будучи первоначально в покое, приведена в движение вращением эллиптического цилиндра вокруг его оси с угловой скоростью ω ¹). Фиг. 16 показывает линии тока как внутри, так и вне твердого цилиндрического сосуда, вращающегося около своей оси.

Кинетическая энергия внешней части жидкости равна

$$2T = \frac{1}{8} \pi \rho c^4 \omega^2. \quad (8)$$

Замечательно, что для всех цилиндров, сечения которых представляют софокусные эллипсы, она одинакова.

Комбинируя эти результаты с результатами § 60 и 71, найдем следующее: если, во-первых, эллиптический цилиндр движется поступательно, причем его компоненты скорости, параллельные главным осям его сечения, будут U и V , если, во-вторых, он вращается с угловой скоростью ω и если, далее, жидкость, свободная от вихрей, циркулирует вокруг цилиндра, при этом циклическая постоянная есть κ , то функция тока относительно названных осей будет выражаться в виде

$$\begin{aligned} \psi = -\sqrt{\frac{a+b}{a-b}} e^{-\xi} (Ub \sin \eta - Va \cos \eta) + \\ + \frac{1}{4} \omega (a+b)^2 e^{-2\xi} \cos 2\eta + \frac{\kappa}{2\pi} \xi. \end{aligned} \quad (9)$$

Траектории, описываемые частицами жидкости, которые, конечно, имеют вид, отличный от линий тока, для нескольких разобранных случаев были изучены Мортоном²), и они очень интересны. Частный случай круглого цилиндра исследован Maxwellлом (§ 68)³.

3. Предположим, что

$$\psi = Ar^3 \cos 3\theta = A(x^3 - 3xy^2).$$

Уравнение (1) для точек контура границы тогда будет

$$A(x^3 - 3xy^2) - \frac{1}{2} \omega (x^2 + y^2) = C. \quad (10)$$

¹⁾ Lamb, Quart. Journ. Math., XIV (1875); см. также Beltrami, см. ссылку на стр. 109.

²⁾ Morton W. B., Proc. Roy. Soc., A, LXXXIX, 106 (1913).

³⁾ Maxwell, Proc. Lond. Math. Soc., II (1870) (Papers, II, 208).

Мы можем выбрать постоянные таким образом, что прямая $x = a$ составит часть контура. Условия для этого таковы:

$$Aa^3 - \frac{1}{2}\omega a^2 = C, \quad 3Aa + \frac{1}{2}\omega = 0.$$

Подставляя в (10) найденные отсюда значения A , C , мы получим

$$x^3 - a^3 - 3xy^2 + 3a(x^2 - a^2 + y^2) = 0.$$

Разделив это уравнение на $x - a$, будем иметь

$$x^2 + 4ax + 4a^2 = 3y^2,$$

или

$$x + 2a = \pm \sqrt{3}y.$$

Остальная часть контура состоит, таким образом, из двух прямых линий, которые проходят через точку $(-2a, 0)$ и составляют с осью x угол в 30° .

Уравнение (10) представляет, следовательно, течение жидкости, содержащейся в сосуде в форме равносторонней призмы, которая вращается с угловой скоростью ω вокруг оси, параллельной ее образующей и проходящей через центр ее сечения; мы будем иметь здесь

$$\psi = -\frac{1}{6} \frac{\omega}{a} r^3 \cos 3\theta, \quad \varphi = \frac{1}{6} \frac{\omega}{a} r^3 \sin 3\theta, \quad (11)$$

где $2\sqrt{3}a$ есть длина одного ребра основания призмы¹⁾.

4. Для случая, когда жидкость заключена во вращающийся цилиндр, сечение которого есть сектор круга радиуса a с углом $2a$, а ось вращения проходит через центр круга, мы можем принять

$$\psi = \frac{1}{2} \omega r^2 \frac{\cos 2\theta}{\cos 2a} + \sum A_{2n+1} \left(\frac{r}{a} \right)^{(2n+1) \frac{\pi}{2a}} \cos (2n+1) \frac{\pi\theta}{2a}, \quad (12)$$

причем отсчет угла производится от биссектрисы угла сектора. В самом деле, это выражение нам дает

$$\psi = \frac{1}{2} \omega r^2$$

для $\theta = \pm a$, а постоянные A_{2n+1} могут быть определены по методу Фурье, так что для $r = a$ будет

$$\psi = \frac{1}{2} \omega a^2.$$

Мы найдем этим способом

$$A_{2n+1} = (-1)^{n+1} \omega a^2 \left\{ \frac{1}{(2n+1)\pi - 4a} - \frac{2}{(2n+1)\pi} + \frac{1}{(2n+1)\pi + 4a} \right\}. \quad (13)$$

¹⁾ Задача движения жидкости во вращающемся цилиндрическом сосуде до известной степени математически тождественна с задачей о кручении призмы постоянного сечения. Примеры 1 и 3 суть только применение двух решений этой задачи, предложенных Сен-Бенаном; см. Thomson and Tait § 704 и далее.

Соответствующее выражение для φ будет

$$\varphi = -\frac{1}{2} \omega r^2 \frac{\sin 2\theta}{\cos 2a} - \sum A_{2n+1} \left(\frac{r}{a} \right)^{(2n+1) \frac{\pi}{2a}} \sin (2n+1) \frac{\pi\theta}{2a}. \quad (14)$$

Кинетическая энергия подсчитывается по формуле

$$2T = -\rho \int \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds = -2\rho \omega \int_0^a \varphi_a r dr, \quad (15)$$

где φ_a есть значение φ для $\theta = a$; значение $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ на круглой части контура равно нулю¹⁾.

Случай полукруга $a = \frac{1}{2} \pi$ будет иметь значение для нас впоследствии. Для этого случая будем иметь

$$A_{2n+1} = (-1)^{n+1} \frac{\omega a^2}{\pi} \left\{ \frac{1}{2n-1} - \frac{2}{2n+1} + \frac{1}{2n+3} \right\} \quad (16)$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \int_0^a \varphi_a r dr &= \frac{\omega a^4}{\pi} \sum \frac{1}{2n+3} \left\{ \frac{1}{2n-1} - \frac{2}{2n+1} + \frac{1}{2n+3} \right\} = \\ &= -\frac{\omega a^4}{\pi} \left(2 - \frac{\pi^2}{8} \right). \end{aligned}$$

Отсюда следует²⁾

$$2T = \frac{1}{2} \pi \rho \omega^2 a^4 \left(\frac{8}{\pi^2} - \frac{1}{2} \right) = 0,3106 a^2 \cdot \frac{1}{2} \pi \rho \omega^2 a^2. \quad (17)$$

Эта величина меньше, чем соответствующая величина живой силы для случая, если бы жидкость затвердела; она относится к последней, как 0,6212 к единице; ср. § 45.

§ 72a. Мы видели в нескольких случаях, что когда цилиндр имеет поступательное движение в безграничной жидкости, то он на большом расстоянии создает тот же эффект, что и дублет. Общая формула, выражающая это обстоятельство, может быть выражена через некоторые постоянные, которые входят в выражение кинетической энергии жидкости³⁾.

Положим

$$\varphi = U\varphi_1 + V\varphi_2, \quad (1)$$

где (U, V) есть скорость цилиндра, функции φ_1 и φ_2 определяются из тех условий, что всюду во внешней части области они удовлетворяют уравнению

¹⁾ Эта задача решена впервые Stokes, On the Critical Values of the Sums of Periodic Series, Cambr. Trans., VIII (1874) (Papers, I, 305); см. также Hicks, Mess. of Math., VIII, 42 (1878); Greenhill, ibid., VIII, 89; X, 83.

²⁾ Greenhill, см. сноску¹⁾.

³⁾ См. Proc. Roy. Soc. A, CXI, 14 (1926) и ниже § 300.

ним $\nabla^2 \varphi_1 = 0$, $\nabla^2 \varphi_2 = 0$, в бесконечности их частные производные обращаются в нуль, а на контуре цилиндра они удовлетворяют условиям

$$-\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = l, \quad -\frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = m, \quad (2)$$

где (l, m) суть направляющие косинусы внешней нормали. В таком случае энергия жидкости будет подсчитываться в виде

$$\frac{2T}{\varrho} = - \int \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds = AU^2 + 2HUV + BV^2, \quad (3)$$

где

$$\left. \begin{aligned} A &= - \int \varphi_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} ds = \int l \varphi_1 ds, \\ B &= - \int \varphi_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} ds = \int m \varphi_2 ds, \\ H &= - \int \varphi_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} ds = - \int \varphi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} ds = \int m \varphi_1 ds = \int l \varphi_2 ds. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Два выражения H равны между собой в силу теоремы Грина для плоскости. Сравнить с § 121, где будет рассматриваться общий случай в трехмерном пространстве.

Обращаясь к формуле (7) § 60, допустим, что цилиндр с произвольной формой сечения движется с единичной скоростью параллельно оси x . Беря начало внутри контура и записывая

$$r^2 = (x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 = r_0^2 - 2(xx_0 + yy_0) + \dots, \quad (5)$$

где (x_0, y_0) представляет удаленную точку, в которой требуется определить φ , а (x, y) — точку контура, тогда мы будем иметь

$$\ln r = \ln r_0 - \frac{xx_0 + yy_0}{r_0^2} + \dots \quad (6)$$

и приближенно

$$\frac{\partial}{\partial n} (\ln r) = - \frac{lx_0 + my_0}{r_0^2}.$$

Полагая в указанной формуле (7) § 60

$$\varphi = \varphi_1, \quad \varphi' = -k, \quad (7)$$

мы получим

$$2\pi\varphi_P = \frac{(A+Q)x_0 + Hy_0}{r_0^2}, \quad (8)$$

где A и H определяются формулами (4), а

$$Q = \int lx ds, \quad (9)$$

т. е. Q обозначает площадь сечения цилиндра.

Течение на большом расстоянии, следовательно, есть такое, которое создается дублетом, но только ось дублета, вообще говоря, не совпадает с направлением движения цилиндра.

Вполне очевидно и обобщение формулы (8). Если цилиндр имеет скорость (U, V) , то получим

$$2\pi r_0^2 \varphi_P = \{ (A+Q)U + HV \} x_0 + \{ HU + (B+Q)V \} y_0. \quad (10)$$

Через комплексные переменные w и z мы можем представить это в виде

$$w = \frac{a + i\beta}{z_0}, \quad (11)$$

при условии, что

$$2\pi a = (A + Q)U + HV, \quad 2\pi\beta = HU + (B + Q)V. \quad (12)$$

Например, для эллиптического сечения, сравнивая формулу (3) с (11) § 71, мы имеем $A = \pi b^2$, $B = \pi a^2$, $Q = \pi ab$. Следовательно, будем иметь

$$\varphi_P = \frac{(a+b)(bx_0 + aVy_0)}{2r_0^2}. \quad (13)$$

§ 72b. Гидродинамические силы на неподвижный цилиндр, вызываемые стационарным безвихревым движением окружающей жидкости, были ранее вычислены в одном или двух случаях. Общий метод, пригодный всякий раз, когда известен вид функции $w = \varphi + i\psi$ для движения жидкости, был указан Блазиусом ¹⁾.

Давления на контур вообще могут быть приведены к силе (X, Y) , приложенной в начале, и паре с моментом N . Если θ есть угол, который образует скорость q с осью x , то мы имеем

$$Y + iX = -\frac{1}{2} \rho \int q^2 (\cos \theta - i \sin \theta) ds, \quad (1)$$

где интеграл распространяется по контуру цилиндра. Эта формула может быть представлена в виде

$$Y + iX = -\frac{1}{2} \rho \int (qe^{-i\theta})^2 e^{i\theta} ds = -\frac{1}{2} \rho \int \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz, \quad (2)$$

откуда можно определить X и Y .

Кроме того, если ϑ будет представлять угол, который образует элемент ds контура с радиусом-вектором, то будем иметь

$$N = \int pr \cos \vartheta ds = \int pr dr = -\frac{1}{2} \rho \int (u^2 + v^2) (x dx + y dy). \quad (3)$$

Но вдоль линии тока мы имеем $v dx = u dy$, следовательно,

$$(u - iv)^2 (dx + i dy) = (u^2 + v^2) (dx - i dy),$$

и

$$(u - iv)^2 (x + iy) (dx + i dy) = (u^2 + v^2) \{ x dx + y dy + i(y dx - x dy) \}.$$

Таким образом N может быть представлено в виде действительной части от интеграла

$$-\frac{\rho}{2} \int \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 z dz. \quad (4)$$

¹⁾ Blasius, Funktiontheoretische Methoden in der Hydrodynamik, Zeitschr. f. Math. u. Phys., LVIII (190).

Независимо от Блазиуса этот общий метод был указан Чаплыгиным С. А. в том же году в Матем. сб., т. XXVIII. Прим. ред.

В случае какого-нибудь цилиндра, погруженного в равномерный поток с циркуляцией, значение функции w на большом расстоянии стремится к виду

$$w = A + Bz + C \ln z. \quad (5)$$

Так как в области, занятой жидкостью, подинтегральное выражение в формуле (2) особенностей не имеет, то сам интеграл может быть заменен через интеграл по бесконечно большому контуру, по отношению к которому бесконечно удаленная точка будет внутренней точкой. В таком случае будем иметь

$$\int \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 dz = \int \left(B^2 + \frac{2BC}{z} + \frac{C^2}{z^2} \right) dz = 2BC \int \frac{dz}{z} = 4\pi i BC. \quad (6)$$

Если поток в бесконечности имеет скорость (U, V) , и κ означает циркуляцию, то получим

$$B = -(U - iV), \quad C = -\frac{i\kappa}{2\pi}. \quad (7)$$

А тогда имеем формулы

$$X = \kappa \varrho V, \quad Y = -\kappa \varrho U, \quad (8)$$

которые обобщают результат, полученный в § 69 для частного случая кругового сечения.

Для вычисления момента N выражение (5) должно быть продолжено еще на одну степень. Представляя w в виде

$$w = A + Bz + C \ln z + \frac{D}{z}, \quad (9)$$

мы будем иметь

$$\left(\frac{dw}{dz} \right)^2 = B^2 + \frac{2BC}{z} + \frac{C^2 - 2BD}{z^2} + \dots \quad (10)$$

Опуская все члены, которые будут обращаться в нуль в случае бесконечно большого контура, получим

$$\int \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 z dz = 2\pi i (C^2 - 2BD). \quad (11)$$

Подставляя значения B и C из (7), полагая $D = a + i\beta$ и беря только действительную часть, мы найдем, что

$$N = 2\pi \varrho (\beta U - aV). \quad (12)$$

Если наложением на поток общей скорости $(-U, -V)$ мы приведем жидкость в бесконечности к покоя, то слагаемое $\frac{D}{z}$ в формуле (9) как раз обусловлено перемещением цилиндра с этой скоростью. В таком случае значения a и β уже нами вычислены в § 72, только знак будет обратным. Следовательно, формула (12) даст

$$N = \varrho \{ (A - B) UV - H (U^2 - V^2) \}. \quad (13)$$

Так, для эллиптического сечения, отнесенного к его главным осям,

$$N = -\pi \varrho (a^2 - b^2) VU. \quad (14)$$

В качестве дальнейшего применения формулы Блазиуса мы можем подсчитать силу на неподвижный цилиндр, вызываемую внешним источником. Положим

$$w = -\mu \ln(z - c) + f(z), \quad (15)$$

где первое слагаемое представляет источник в точке $z = c$, а $f(z)$ — его зеркальное изображение в цилиндре, причем $f(z)$ прибавлена из-за необходимости обратить в нуль нормальную скорость на контуре, обусловленную источником. Тогда имеем

$$\frac{dw}{dz} = -\frac{\mu}{z - c} + f'(z). \quad (16)$$

Контурный интеграл в формуле (2) будет теперь равен интегралу по бесконечно большому контуру минус интеграл (в положительном направлении) вокруг особой точки $z = c$. Интеграл по бесконечному контуру дает в результате нуль. Вблизи же особой точки должна быть принята во внимание только та часть $\left(\frac{dw}{dz}\right)^2$, которая содержит первую степень $z - c$ в знаменателе, т. е.

$$-\frac{2\mu f'(c)}{z - c}.$$

Тогда

$$Y + iX = -2\pi i \mu \varrho f'(c). \quad (17)$$

Вид функции $f(z)$ для случая круглого цилиндра уже известен из п. 3, § 64. Предполагая, что источник находится на оси x , так что c будет действительной, мы будем иметь

$$f(z) = -\mu \ln\left(z - \frac{a^2}{c}\right) + \mu \ln z, \quad (18)$$

$$f'(c) = -\frac{\mu a^2}{c(c^2 - a^2)}, \quad (19)$$

$$X = \frac{2\pi \mu^2 a^2}{c(c^2 - a^2)}, \quad Y = 0^*. \quad (20)$$

В общем случае мы можем прибегнуть приближенно к асимптотической форме, которую принимает $f(z)$, когда расстояние источника велико в сравнении с размерами поперечного сечения. Тогда мы допускаем, что эта функция $f(z)$ представляет эффект, производимый поступательным движением цилиндра со скоростью, равной, но противоположной по знаку той скорости, которую вызвал бы источник вблизи, если бы цилиндр отсутствовал. В таком случае, предполагая все еще источник находящимся на оси x , мы из § 72a будем иметь

$$f(z) = \frac{(A + Q + iH) U}{2\pi z}, \quad (21)$$

где $U = \frac{\mu}{c}$. Отсюда

$$f'(c) = -\frac{(A + Q + iH) \mu}{2\pi c^2}, \quad (22)$$

и, следовательно, будем иметь

$$X = \frac{(A + Q) \mu^2 \varrho}{c^3}, \quad Y = -\frac{H \mu^2 \varrho}{c^3}. \quad (23)$$

* Результат принадлежит профессору Тэйлору.

Если f (равное $\frac{\mu^2}{c^3}$) будет представлять ускорение в положении начала в невозмущенном потоке, то указанные результаты можно представить в виде

$$X = \varrho (A + Q) f, \quad Y = -\varrho H f. \quad (24)$$

Для круглого сечения $A = \pi a^2$, $H = 0$, $Q = \pi a^2$; формула (20) будет иметь место, если только пренебречь членами порядка $\frac{a^4}{c^2}$.

Некоторые изящные применения метода Блазиуса, относящиеся к взаимному действию круглых цилиндров при наличии циркуляции, были даны Чизотти¹⁾. Один из его результатов можно здесь указать. Цилиндр, радиуса b , помещен эксцентрично внутри второго цилиндра, радиуса a , промежуточное пространство заполнено жидкостью, имеющей циркуляцию κ . Тогда результирующая сила на цилиндр будет направлена к ближайшей точке стенок внешнего цилиндра и имеет значение

$$\frac{\kappa^3 d^3}{2\pi \sqrt{(a+b+d)(a+b-d)(a-b+d)(a-b-d)}},$$

где d есть расстояние между осями.

Свободные линии тока.

§ 73. Первое решение задачи плоского движения, при котором жидкость ограничена частью твердыми плоскими стенками, а частью поверхностями постоянного давления, было дано Гельмгольцем²⁾. Кирхгоф³⁾ и другие разработали затем общие методы для решения этих вопросов. Если рассматривать поверхность постоянного давления как свободную поверхность, то мы будем иметь перед собой теорию жидких струй, которая дает некоторые интересные результаты в дополнение к § 24. Далее, так как пространство по ту сторону свободной поверхности может быть заполнено покоящейся жидкостью, что не меняет условий задачи, то мы получаем таким образом несколько случаев разрывного движения, которые для идеальной жидкости математически допустимы, но не всегда имеют практическое значение. К этому вопросу мы вернемся впоследствии (гл. XI); поверхности постоянного давления мы будем обозначать, как „свободные“ поверхности. Так как мы пренебрегаем внешними силами, как, например, силой тяжести, то скорость вдоль такой поверхности согласно (2) § 21 должна быть постоянна.

Рассматриваемый метод основывается на свойствах введенной в § 65 функции ζ . Мы предполагаем, что движущаяся жидкость ограничена линиями тока $\psi = \text{const.}$, которые состоят частично из прямых стенок и частично из линий, вдоль которых скорость (q) по величине постоянна. Ради простоты мы выберем единицу длины и единицу времени таким образом, чтобы постоянная скорость равнялась еди-

¹⁾ Cisotti, Rend. d. r. Accad. d. Lincei (6), I (1925—1926).

²⁾ Helmholz, см. сноску на стр. 98.

³⁾ Kirchhoff, Zur Theorie freier Flüssigkeitsstrahlen, Crelle, LXX (1869) (Ges. Abh., стр. 416); см. также его Mechanik, гл. XXI, XXII.

нице. Тогда в плоскости функции ζ линии, вдоль которых $q=1$, будут представлены дугами окружности с радиусом, равным единице, и с центром в начале координат, а прямолинейные стенки (так как направление течения вдоль каждой из них постоянно) — через радиальные прямые, идущие от окружности во внешнюю часть плоскости. Точки, в которых эти прямые пересекают окружность, соответствуют точкам, где граничные линии тока из одного вида переходят в другой.

Рассмотрим сначала функцию $\ln \zeta$. В плоскости этой функции дуги окружности $q=1$ отображаются на части мнимой оси, а радиальные прямые отображаются на прямые, параллельные действительной оси, так как

$$\ln \zeta = \ln \frac{1}{q} + i\theta, \quad (1)$$

если $\zeta = q^{-1} e^{i\theta}$. Остается определить соотношение вида ¹⁾

$$\ln \zeta = f(w), \quad (2)$$

где, как обычно, $w = \varphi + i\psi$, и именно таким образом, чтобы прямолинейные границы в плоскости $\ln \zeta$ соответствовали прямым $\psi = \text{const.}$ в плоскости w . При этом, чтобы сделать задачу определенной, достаточно потребовать, чтобы двум точкам одной области, из которых одна лежит внутри, а другая на границе, соответствовали в другой области две подобные же точки.

Когда установлено соответствие плоскостей ζ и w , тогда соотношение между z и w находится интегрированием уравнения

$$\frac{dz}{dw} = -\zeta. \quad (3)$$

Произвольная постоянная, входящая в результат, определяется заданием произвольного положения нулевой точки в плоскости z .

Задача таким образом сводится к конформному отображению двух областей, ограниченных прямыми линиями ²⁾. Задача этого отображения решается с помощью ранее изложенного ³⁾ метода Шварца и Кристоффеля, при котором обе области отображаются одна после другой на одну и ту же полуплоскость. Пусть $Z (= X + iY)$ и t — две комплексные величины, связанные соотношением

$$\frac{dZ}{dt} = A (a-t)^{-\frac{\alpha}{\pi}} (b-t)^{-\frac{\beta}{\pi}} (c-t)^{-\frac{\gamma}{\pi}} \dots, \quad (4)$$

где a, b, c, \dots суть действительные величины, из которых каждая больше предыдущей, в то время как $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ — углы (не обязательно положительные), удовлетворяющие соотношению

$$\alpha + \beta + \gamma + \dots = 2\pi. \quad (5)$$

¹⁾ Применение $\ln \zeta$ вместо ζ исходит от Planck, Wied. Ann., XXI (1884).

²⁾ См. Forsyth, Theory of Functions, гл. XX.

³⁾ См. прим. 2 и 3 на стр. 104.

Рассмотрим теперь линию, которая состоит из частей действительной оси t и малых полуокруглых вырезов (на верхней стороне) вокруг точек a, b, c, \dots . Если точка пробегает эту линию от $t = -\infty$ до $t = +\infty$, то только одна абсолютная величина выражения (4) будет изменяться, когда точка проходит прямолинейный отрезок, тогда как обход малых полуокружностей в направлении часовой стрелки скажется в появлении множителей $e^{ia}, e^{ib}, e^{ic}, \dots$ один за другим. Рассматривая $\frac{dZ}{dt}$ как оператор, который переводит dt в dZ , мы видим, что верхняя половина плоскости t отображается конформно на площадь замкнутого многоугольника с внешними углами $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ с помощью формулы

$$Z = A \int (a-t)^{-\frac{\alpha}{\pi}} (b-t)^{-\frac{\beta}{\pi}} (c-t)^{-\frac{\gamma}{\pi}} \dots dt + B, \quad (6)$$

при условии, что путь интегрирования в плоскости t лежит полностью внутри ограниченной, как указано выше, области. Если $a, b, c, \dots, \alpha, \beta, \gamma, \dots$ даны, то многоугольник вполне определен по своей форме; комплексные постоянные A и B влияют только на его масштаб и его ориентировку и соответственно на его положение.

Как уже сказано, нас особенно должно интересовать конформное отображение *прямоугольных* площадей. Если $\alpha = \beta = \gamma = \delta = \frac{\pi}{2}$, то формула (6) примет вид

$$Z = A \int \frac{dt}{\sqrt{(a-t)(b-t)(c-t)(d-t)}} + B. \quad (7)$$

Легко видеть, что прямоугольник будет конечен во всех своих измерениях, если по крайней мере две из точек a, b, c, d не лежат в бесконечности. Этот исключительный случай для нас как раз особенно важен; мы можем при этом точки, лежащие в конечной части плоскости, принять для простоты находящимися в $t = \pm 1$, так что

$$Z = A \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 1}} + B = A \operatorname{arc ch} t + B. \quad (8)$$

В частности, функция

$$t = \operatorname{ch} \frac{Z}{k}, \quad (9)$$

где k действительно, преобразует пространство, ограниченное положительными полупрямыми

$$Y = 0, \quad Y = k\pi$$

и расположенным между ними отрезком оси Y , в верхнюю половину плоскости t ; ср. § 66, 1.

Далее, если обе конечные точки совпадают, например, в нулевой точке, то мы будем иметь

$$Z = A \int \frac{dt}{t} + B = A \ln t + B, \quad (10)$$

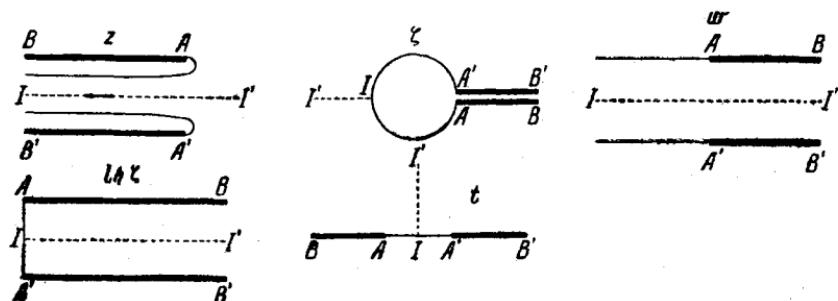
Эта функция преобразует верхнюю половину плоскости t в полосу, ограниченную двумя параллельными прямыми в плоскости Z . Если, например,

$$t = e^{\frac{z}{k}}, \quad (11)$$

где k действительно, то этими прямыми будут линии

$$Y = 0, \quad Y = k\pi.$$

§ 74. В качестве первого примера применения нашего метода рассмотрим случай истечения жидкости из большого сосуда через прямолинейный канал, который вдается внутрь сосуда ¹⁾. Это будет представлять плоскую форму насадки Борда, о которой говорилось в § 24.



Фиг. 20.

Границы соответствующих площадей в плоскостях ζ , $\ln \zeta$ и w легко нарисовать; они представлены на фиг. 20 ²⁾. Мы должны теперь площади в плоскостях $\ln \zeta$ и w связать с верхней полуплоскостью переменного t . Из уравнений (8) и (10) предыдущего параграфа следует, что это может быть сделано с помощью подстановок

$$\left. \begin{aligned} \ln \zeta &= A \operatorname{arc ch} t + B, \\ w &= C \ln t + D. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Вершины углов A и A' в плоскости $\ln \zeta$ мы сопоставим точкам $t = \pm 1$; далее предположим, что $t = 0$ соответствует точке $w = -\infty$, как это яствует из фигуры. Чтобы иметь дело с определенным значением циклических функций $\operatorname{arc ch} t$ и $\ln t$, предположим, что обе они обращаются в нуль для $t = 1$ и что их значения для других точек положительной полуплоскости определяются соображениями непрерывности. Отсюда получается, что для $t = -1$ значение каждой

¹⁾ Эта задача была сначала решена Гельмгольцем, см. прим. на стр. 98.

²⁾ Жирно нарисованные линии соответствуют твердым границам, а тонко начертанные линии — свободным поверхностям. Соответствующие точки в различных фигурах обозначены одинаковыми буквами.

из обеих функций равно $i\pi$. В точках A' , A плоскости $\ln \zeta$ проще всего положить соответственно

$$\ln \zeta = 0 \quad \text{и} \quad \ln \zeta = 2i\pi;$$

тогда, обращаясь для определения постоянных к уравнению (1), мы получим

$$0 = B, \quad 2i\pi = i\pi A + B,$$

следовательно,

$$\ln \zeta = 2 \operatorname{arc ch} t. \quad (2)$$

Далее, возьмем в плоскости w прямую JJ' за линию $\psi = 0$. Если ширина выходящей струи достаточно далеко от выхода будет равна $2b$, то граничные линии тока будут $\psi = \pm b$. Затем мы можем принять, что $\varphi = 0$ есть эквипотенциальная кривая, проходящая через A , A' . Тогда из уравнения (1) следует

$$ib = i\pi C + D, \quad -ib = D,$$

и поэтому

$$w = \frac{2b}{\pi} \ln t - ib. \quad (3)$$

Легко исключить t из уравнений (2) и (3) и затем установить с помощью интегрирования соотношения между z и w , но формулы в данном виде, пожалуй, более удобны.

Теперь легко проследить ход каждой свободной линии тока, например $A'J$ от ее начальной точки A' . Для точек этой линии t действительно изменяется от 1 до 0; кроме того, уравнение (2) дает

$$i\theta = 2 \operatorname{arc ch} t, \quad \text{или} \quad t = \cos \frac{1}{2} \theta.$$

Поэтому согласно уравнению (3) получим

$$\varphi = \frac{2b}{\pi} \ln \cos \frac{1}{2} \theta. \quad (4)$$

Так как вдоль этой линии

$$\frac{d\varphi}{ds} = -q = -1,$$

то мы можем положить

$$\varphi = -s,$$

где s есть дуга, отмеряемая от A' . Естественное уравнение кривой, таким образом, будет

$$s = \frac{2b}{\pi} \ln \sec \frac{1}{2} \theta. \quad (5)$$

Если начальная точка находится в A' , то можно отсюда вывести обычным путем формулы

$$\begin{aligned} x &= \frac{2b}{\pi} \left(\sin^2 \frac{1}{2} \theta - \ln \sec \frac{1}{2} \theta \right), \\ y &= \frac{b}{\pi} (\theta - \sin \theta). \end{aligned} \quad (6)$$

Давая θ ряд значений от 0 до π , можно легко начертить эту кривую (фиг. 21). Так как верхней границей y будет b , то оказывается, что расстояние между твердыми стенками должно быть $4b$. Коэффициент сжатия, таким образом, равен $\frac{1}{2}$, в согласии с теорией Борда.

§ 75. Для случая, когда жидкость вытекает из большого сосуда через отверстие в плоской стенке, решение аналитически получается совершенно таким же образом. Главное различие состоит в том, что значения $\ln \zeta$ в точках A, A' на фиг. 22 должны быть взяты теперь соответственно равными нулю и $-i\pi$; это дает для определения постоянных A, B из формулы (1) следующие уравнения:

$$0 = i\pi A + B, \quad -i\pi = B,$$

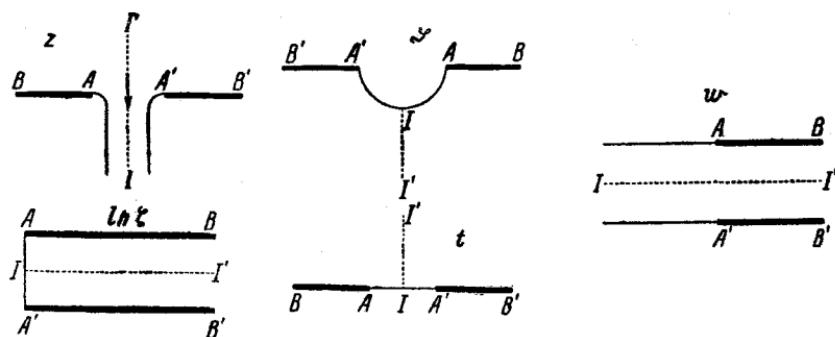
так что будет

$$\ln \zeta = \operatorname{arc ch} t - i\pi. \quad (7)$$

Соотношение между w и t будет совершенно таким же, как выше:

$$w = \frac{2b}{\pi} \ln t - ib, \quad (8)$$

причем $2b$ есть окончательная ширина потока между свободными границами.



Фиг. 22.

Для линии тока AI t будет действительно и изменяется оно от -1 до 0 . Так как

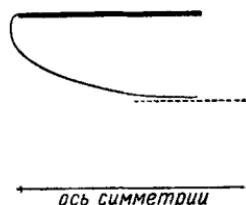
$$i\theta = \operatorname{arc ch} t - i\pi,$$

то мы можем положить

$$t = \cos(\theta + \pi),$$

где θ изменяется от 0 до $-\frac{1}{2}\pi$. Таким образом из формулы (8) и из $\varphi = -s$ получается естественное уравнение линии тока в виде

$$s = \frac{2b}{\pi} \ln(-\sec \theta). \quad (9)$$



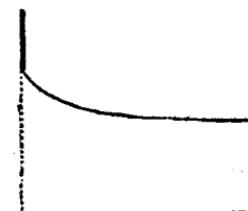
ось симметрии

Фиг. 21,

Отсюда, если точка A на первой из фиг. 22 берется в качестве начала¹⁾, находим

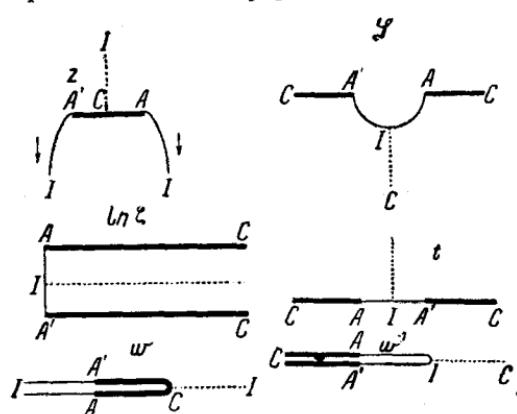
$$x = \frac{4b}{\pi} \sin^2 \frac{1}{2} \theta, \quad y = \frac{2b}{\pi} \left\{ \ln \operatorname{tg} \left(\frac{1}{4} \pi + \frac{1}{2} \theta \right) - \sin \theta \right\}. \quad (10)$$

Кривая (в измененном положении) изображена на фиг. 23.



Фиг. 23.

§ 76. В следующем примере мы предположим, что поток неограниченной ширины натекает на плоскую пластинку и после этого разделяется на две части, ограниченные с внутренней стороны свободными поверхностями.



Фиг. 24.

Средняя линия тока после встречи с пластинкой под прямым углом разделяется на две ветви, которые следуют вдоль пластинки до ее ребер и затем образуют свободные поверхности. Пусть эта линия тока будет $\psi = 0$ и пусть в точке разветвления $\varphi = 0$. Вид границ в различных плоскостях показан на фиг. 24. Область, наполненная жидкостью, соответствует теперь всей плоскости w , которую, однако, мы теперь должны мыслить

ограниченной изнутри двумя сторонами прямой $\psi = 0$, $\varphi < 0$.

При тех же обозначениях, как в начале § 75, мы будем иметь

$$\ln \zeta = \operatorname{arc ch} t - i\pi, \quad (1)$$

или

$$t = -\operatorname{ch}(\ln \zeta) = -\frac{1}{2} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right). \quad (2)$$

Соответствие между плоскостями w и t лучше всего установить, если мы сначала рассмотрим границы в плоскости w^{-1} . Применим

1) Этот пример дан Кирхгофом, см. примечание на стр. 120 и подробнее исследован Rayleigh, Notes on Hydrodynamics, Phil. Mag., Dec. 1876 (Papers, I, 297.)

здесь метод Шварца и Кристофеля. Если мы в формуле (4) § 73 положим

$$\alpha = -\pi, \quad \beta = \gamma = \dots = 0,$$

то получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{dw^{-1}}{dt} &= At, \\ w^{-1} &= \frac{1}{2} At^2 + B. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

В точке I имеем $t = 0, w^{-1} = 0$, так что $B = 0$, или

$$w = -\frac{C}{t^2}. \quad (4)$$

Чтобы связать C (которое, очевидно, действительно) с шириной l пластиинки, заметим, что вдоль CA $\zeta = q^{-1}$ и, следовательно, согласно уравнению (2),

$$t = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{q} + q \right), \quad q = -t - \sqrt{t^2 - 1}, \quad (5)$$

причем знак корня взят так, чтобы иметь $q = 0$ при $t = -\infty$. Далее, имеем

$$\frac{dx}{d\varphi} = -\frac{1}{q}.$$

Если мы проинтегрируем это вдоль CA на первом рисунке фиг. 24, то получим

$$l = 2 \int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} dt = -4C \int_{-\infty}^{-1} \frac{dt}{qt^3} = -4C \int_{-\infty}^{-1} \left\{ -t + \sqrt{t^2 - 1} \right\} \frac{dt}{t^3}; \quad (6)$$

отсюда будем иметь

$$C = \frac{l}{\pi + 4}. \quad (7)$$

Вдоль свободной границы AI мы имеем $\ln \zeta = it$ и, следовательно, согласно формулам (2) и (4),

$$t = -\cos \theta, \quad \varphi = -C \sec^2 \theta. \quad (8)$$

Естественное уравнение кривой, следовательно, таково:

$$s = \frac{l}{\pi + 4} \sec^2 \theta, \quad (9)$$

причем θ меняется от 0 до $-\frac{1}{2}\pi$. Отсюда получаем

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{2t}{\pi+4} \left(\sec \theta + \frac{1}{4} \pi \right), \\ y &= \frac{t}{\pi+4} \left\{ \sec \theta \tan \theta - \ln \left(\frac{1}{4} \pi + \frac{1}{2} \theta \right) \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

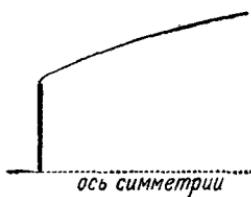
причем нулевая точка лежит в центре пластинки фиг. 25.

Избыток давления на передней стороне пластинки согласно формуле (8) § 23 равен $\frac{1}{2} \varrho (1 - q^2)$. Следовательно, результирующая сила на пластинку будет равна

$$\begin{aligned} &\varrho \int_{-\infty}^{-1} (1 - q) \frac{dx}{dt} dt = \\ &= -2\varrho C \int_{-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{q} - q \right) \frac{dt}{t^3} = -4\varrho C \int_{-\infty}^{-1} \sqrt{t^2 - 1} \frac{dt}{t^3} = \pi \varrho C. \end{aligned} \quad (11)$$

Из уравнения (8) § 23 и вследствие очевидного геометрического сходства движения во всех рассмотренных случаях ясно, что результирующее давление P_0 будет пропорционально квадрату общей скорости потока. Мы найдем таким образом для произвольной скорости q_0 ¹⁾

$$P_0 = \frac{\pi}{\pi+4} \varrho q_0^2 l = 0,440 \varrho q_0^2 l. \quad (12)$$



Фиг. 25.

§ 77. Если поток встречает пластинку под углом, образуя с ее плоскостью угол α , то задача изменяется так, как показано на фиг. 23.

Уравнения (1) и (2) предыдущего параграфа продолжают иметь место, но в точке I мы будем иметь теперь $\zeta = e^{-i(\pi-\alpha)}$, и поэтому $t = \cos \alpha$. Следовательно, вместо уравнения (4)²⁾ будем иметь

$$w = \frac{-C}{(t - \cos \alpha)^2}. \quad (13)$$

Так как $q^{-1} = |\zeta|$, то в точках передней грани пластинки имеем

$$\frac{1}{q} = \pm t + \sqrt{t^2 - 1}, \quad q = \pm t - \sqrt{t^2 - 1}, \quad (14)$$

¹⁾ Kirchhoff, см. примечание на стр. 120. Rayleigh, On the Resistance of Fluids, Phil. Mag., Dec. 1876 (Papers, I, 287.)

²⁾ Решение до этого места дано Кирхгофом (Crelle, см. прим. на стр. 120); данное в тексте исследование с небольшими изменениями вычислительного характера заимствовано из работы Рэяля.

причем необходимо взять верхний или нижний знак, смотря по тому, $t \geq 0$, т. е. смотря по тому, лежит ли рассматриваемая точка налево или направо от C на первом рисунке фиг. 26.

Таким образом будем иметь

$$\frac{dx}{dt} = \pm \frac{1}{q} \frac{d\varphi}{dt} = \\ = \frac{2C}{(t - \cos \alpha)^3} (t \pm \sqrt{t^2 - 1}). \quad (15)$$

t между A' и C изменяется от 1 до ∞ , в то время как между A и C оно пробегает интервал от $-\infty$ до -1. Если положить

$$t = \frac{1 - \cos \alpha \cos \omega}{\cos \alpha - \cos \omega}$$

то соответствующие значения ω пробегают интервал соответственно от π до α и от α до 0; мы найдем, следовательно,

$$\frac{dt}{(t - \cos \alpha)^3} = - \frac{\cos \alpha - \cos \omega}{\sin^4 \alpha} \sin \omega d\omega, \\ \pm \sqrt{t^2 - 1} = \frac{\sin \alpha \sin \omega}{\cos \alpha - \cos \omega}.$$

Отсюда получается

$$\frac{dx}{d\omega} = - \frac{2C}{\sin^4 \alpha} (1 - \cos \alpha \cos \omega + \sin \alpha \sin \omega) \sin \omega \quad (16)$$

и, следовательно,

$$x = \frac{C}{\sin^4 \alpha} \left\{ 2 \cos \omega + \cos \alpha \sin^2 \omega + \right. \\ \left. + \sin \alpha \sin \omega \cos \omega + \left(\frac{1}{2} \pi - \omega \right) \sin \alpha \right\}, \quad (17)$$

причем центр пластиинки выбирается за начало, так что x будет иметь соответственно одинаковые по абсолютной величине и противоположные по знаку значения для $\omega = 0$ и $\omega = \pi$. Таким образом вся ширина, выраженная через C , будет равна

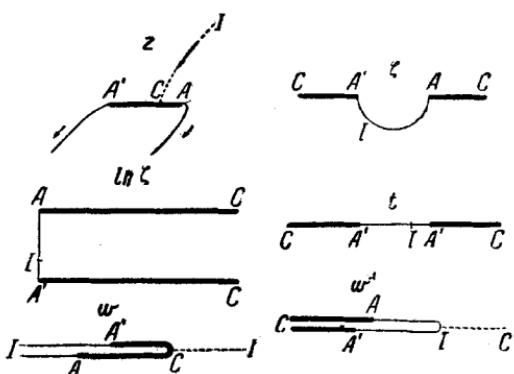
$$l = \frac{4 + \pi \sin \alpha}{\sin^4 \alpha} C. \quad (18)$$

Расстояние точки разветвления ($\omega = \alpha$) от центра равно

$$x = \frac{2 \cos \alpha (1 + \sin^2 \alpha) + \left(\frac{1}{2} \pi - \alpha \right) \sin \alpha}{4 + \pi \sin \alpha} l. \quad (19)$$

Интегрируя выражение

$$\frac{1}{2} \varrho (1 - q^2) dx = \pm \frac{1}{2} \varrho \left(\frac{1}{q} - q \right) \frac{d\varphi}{dt} dt = \\ = \pm 2\varrho C \sqrt{t^2 - 1} \frac{dt}{(t - \cos \alpha)^3} = - \frac{2\varrho C}{\sin^3 \alpha} \sin^2 \omega d\omega \quad (20)$$



Фиг. 26.

в пределах от π до 0, получим полное давление на переднюю грань:

$$\pi \rho \frac{C}{\sin^3 a}.$$

Введя l и произвольную скорость потока q_0 , мы найдем

$$P_0 = \frac{\pi \sin a}{4 + \pi \sin a} \cdot \rho q_0^2 \cdot l. \quad (1)$$

Чтобы найти центр давления, составим момент сил относительно центра пластиинки. Мы получим тогда

$$\frac{1}{2} \rho \int (1 - q^2) x \, dx = - \frac{2\rho C}{\sin^3 a} \int_{\pi}^0 x \sin^2 \omega \, d\omega = \frac{\pi \rho C}{\sin^3 a} \cdot \frac{3}{4} \frac{C \cos a}{\sin^4 a}, \quad (22)$$

где значение x взято из уравнения (17). Первый множитель представляет полное давление; абсцисса x центра давления будет дана тогда вторым множителем или, если мы выразим ее через ширину, то получим

a	I	II	III
90°	1,000	0,000	0,0 0
70°	0,965	0,037	0,232
50°	0,854	0,075	0 402
30°	0,641	0,117	0,483
20°	0,481	0,139	0,496
10°	0,273	0,163	0,500

$$x = \frac{3}{4} \frac{\cos a}{4 + \pi \sin a} l. \quad (23)$$

В приведенной рядом таблице, заимствованной из работы Рэля, столбец I дает излишек давления на передней грани, отнесенный к его значению, для $a=90^\circ$, в то время как столбцы II и III дают расстояния центра давления и

точки разветвления струи от центра пластиинки, выраженные в долях общей ширины ¹⁾.

§ 78. Интересное видоизменение задачи § 76 было дано Бобylevым ²⁾. Предположим, что струя набегает симметрично на согнутую пластиинку, сечение которой состоит из двух отрезков одинаковой величины, образующих между собой некоторый угол.

Если обозначить через $2a$ величину угла, обращенного в сторону течения, то границы плоскости ζ могут быть преобразованы так, что они будут иметь тот же самый вид, как и в § 76. Это будет достигнуто, если положить

$$\zeta = A \zeta'^n,$$

где A и n должны быть определены таким образом, что

$$\zeta' = 1 \text{ при } \zeta = e^{-i\left(\frac{1}{2}\pi-a\right)} \text{ и } \zeta' = e^{-i\pi} \text{ при } \zeta = e^{-i\left(\frac{1}{2}\pi+a\right)}.$$

¹⁾ Для сравнения с экспериментальными результатами см. Rayleigh, примечание на стр. 128 и Nature, XLV (1891) (Papers, III, 491).

²⁾ Журнал Русского физико-химического о-ва, XIII (1881) (Beiblätter zu Wiedemanns Annalen, VI, 163). Кажется, однако, что эта задача еще раньше трактовалась подобным же образом M. Réth y (Klausenburger Berichte (1879)). Она была обобщена B. G. Jones, Proc. Roy. Soc. A, XCI.

Отсюда получим

$$A = e^{-i\left(\frac{1}{2}\pi - a\right)}, \quad n = \frac{2a}{\pi}.$$

На правой половине пластиинки t , так же как и раньше, будет отрицательным и, так как $q^{-1} = |\zeta|$, то будем иметь

$$\frac{1}{q} = (-t + \sqrt{t^2 - 1})^n, \quad q = (-t - \sqrt{t^2 - 1})^n. \quad (24)$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{q} \frac{d\varphi}{dt} dt &= 2C \int_{-\infty}^{-1} (-t + \sqrt{t^2 - 1})^n \frac{dt}{t^3} = \\ &= -C - nC \int_{-\infty}^{-1} (-t + \sqrt{t^2 - 1})^n \frac{dt}{t^2 \sqrt{t^2 - 1}}, \\ \int_{-\infty}^{-1} q \frac{d\varphi}{dt} dt &= 2C \int_{-\infty}^{-1} (-t - \sqrt{t^2 - 1})^n \frac{dt}{t^3} = \\ &= -C + nC \int_{-\infty}^{-1} (-t - \sqrt{t^2 - 1})^n \frac{dt}{t^2 \sqrt{t^2 - 1}}. \end{aligned}$$

Эти выражения посредством подстановки

$$t = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{\omega}} + \sqrt{\omega} \right),$$

где ω изменяется от 0 до 1, могут быть сведены к известному виду. Таким образом мы найдем

$$\frac{1}{C} \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{q} \frac{d\varphi}{dt} dt = -1 - 2n \int_0^1 \frac{\omega - \frac{1}{2}n}{(1+\omega)^2} d\omega = -1 - n - n^2 \int_0^1 \frac{\omega - \frac{1}{2}n}{1+\omega} d\omega, \quad (25)$$

$$\frac{1}{C} \int_{-\infty}^{-1} q \frac{d\varphi}{dt} dt = -1 + 2n \int_0^1 \frac{\omega^{\frac{1}{2}n}}{(1+\omega)^2} d\omega = -1 - n + n^2 \int_0^1 \frac{\omega^{\frac{1}{2}n-1}}{1+\omega} d\omega. \quad (26)$$

Мы при этом использовали следующие формулы:

$$\int_0^1 \frac{\omega^{-k}}{(1+\omega)^2} d\omega = \frac{1}{2} + k \int_0^1 \frac{\omega^{-k}}{1+\omega} d\omega,$$

$$\int_0^1 \frac{\omega^k}{(1+\omega)^2} d\omega = -\frac{1}{2} + k \int_0^1 \frac{\omega^{k-1}}{1+\omega} d\omega,$$

где $1 > k > 0$.

Так как вдоль линии тока

$$\frac{ds}{d\varphi} = -\frac{1}{q},$$

то согласно (25) будем иметь, если b обозначает половину ширины пластиинки

$$b = C \left\{ 1 + \frac{2a}{\pi} + \frac{4a^2}{\pi^2} \int_0^1 \frac{\omega - \frac{a}{\pi}}{1+\omega} d\omega \right\}. \quad (27)$$

Определенный интеграл, который встречается в этом выражении, может быть вычислен с помощью формулы

$$\int_0^1 \frac{\omega^{-k}}{1+\omega} d\omega = \frac{1}{(1-k)(2-k)} + \frac{1}{2} \Psi \left(1 - \frac{1}{2} k \right) - \frac{1}{2} \Psi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} k \right), \quad (28)$$

где $\Psi(m) = \frac{d}{dm} \ln \Pi(m)$; эта функция была введена и табулирована Гауссом¹⁾.

Нормальную компоненту давления на каждую из половинок можно найти методом § 76; она будет равна

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \rho \int_{-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{q} - q \right) \frac{d\varphi}{dt} dt &= \frac{1}{2} n^2 C \rho \int_0^\infty \frac{\omega - \frac{1}{2} n}{1+\omega} d\omega = \\ &= \frac{1}{2} n^2 C \rho \frac{\pi}{\sin \frac{n\pi}{2}} = \rho C \frac{2a^2}{\pi \sin a}. \end{aligned} \quad (29)$$

Результирующее давление в направлении потока, следовательно, равно

$$\frac{4a^2}{\pi} \rho C. \quad (30)$$

А тогда для произвольной скорости потока q_0 результирующее давление будет выражаться в виде

$$P = \frac{4a^2}{\pi L} \rho q_0^2 b, \quad (31)$$

где L есть числовой множитель, заключенный в скобках в (27).

Для $a = \frac{1}{2} \pi$ мы получаем $L = 2 + \frac{1}{2} \pi$, что приводит к результату (12) § 76.

¹⁾ Gauß, Disquisitiones generales circa seriem infinitam..., Werke, Göttingen, 1870, III, 161.

В следующей таблице, которая (с незначительным изменением) заимствована из работы Бобылева, второй столбец дает отношение $\frac{P}{P_0}$, т. е. отношение результирующего давления к тому, которое испытывает плоская пластинка с той же самой площадью. Это отношение будет максимальным для a , равного приблизительно 100° ; клин будет обращен тогда к потоку вогнутой стороной. Третий столбец дает отношение P к произведению расстояния $(2b \sin a)$ между ребрами клина на $\frac{1}{2} \rho q_0^2$. Для значений a , которые лежат вблизи 180° , это отношение приближается к единице, как и следовало ожидать, так как жидкость внутри острого угла будет находиться тогда почти в покое, и избыток давления поэтому практически будет равен $\frac{1}{2} \rho q_0^2$. Последний столбец дает отношение результирующего давления к тому, которое испытывает пластинка шириной $2b \sin a$, вычисленное на основании формулы (12).

a	$\frac{P}{P_0}$	P $\rho q_0^2 b \sin a$	P $P_0 \sin a$
10°	0,039	0,199	0,227
20°	0,140	0,359	0,409
30°	0,278	0,489	0,555
40°	0,433	0,593	0,674
45°	0,512	0,637	0,724
50°	0,589	0,677	0,769
60°	0,733	0,745	0,846
70°	0,854	0,800	0,909
80°	0,945	0,844	0,959
90°	1,000	0,879	1,000
100°	1,016	0,907	1,031
110°	0,995	0,931	1,059
120°	0,935	0,950	1,079
130°	0,840	0,964	1,096
135°	0,780	0,970	1,103
140°	0,713	0,975	1,109
150°	0,559	0,984	1,119
160°	0,385	0,990	1,126
170°	0,197	0,996	1,132

Разрывные движения.

§ 79. Достаточно было дать несколько важнейших примеров установившегося движения со свободной поверхностью, изученных, быть может, более систематическим методом. Значительные дополнения по этому вопросу были внесены Митчеллом ¹⁾, Ляв ²⁾ и другими авторами ³⁾. Остается только сказать еще несколько слов относительно

¹⁾ Michell, On the Theory of Free Stream-lines, Phil. Trans. A, CLXXXI (1890).

²⁾ Love, On the Theory of Discontinuous Fluid Motions in two Dimensions, Proc. Camb. Phil. Soc., VII (1891).

³⁾ Литературные указания см. у Love, Encycl. d. Math. Wiss., IV (3), 97. Очень обстоятельное изложение наиболее важных известных решений с новыми добавлениями и расширениями даны Greenhill, Report on the Theory of a Stream-line past a Plane Barrier, опубликовано Advisory Committee for Aerodynamics, 1910. Распространение на случай искривленных твердых границ дано в общем виде в различных работах Levi-Civita и Cisotti. Они помещены в Rend. d. Circolo Mat. di Palermo; XXIII, XXV, XXVI, XXVIII и Rend. d. r. Accad. d. Lincei, XX и XXI; изучение частных случаев представляет естественно большие трудности. Позднее данным вопросом занимался Leathem, Phil. Trans. A, CCXX, 439 (1915) и H. Levy, Proc. Roy. Soc. A, XCII, 107 (1915). Теория соударяющихся струй была подробно исследована Cisotti, Vene confluentia, Ann. di mat. (3), XXIII, 285 (1914). Из работ русских авторов следует назвать в первую очередь работу Н. Е. Жуковского (1890 г.) „Видоизменение метода Кирхгоффа“. Полное собрание соч. т., III, изд. ОНТИ, 1936 г.

физических соображений, которые первоначально привели к исследованию такого рода задач.

На предыдущих страницах мы имели дело с некоторыми примерами течения несжимаемой жидкости около острого выдающегося вперед ребра, и в каждом случае получалось, что скорость на ребре равнялась бесконечности. На самом деле это является необходимым следствием предположения, что движение является безвихревым, причем безразлично, сжимаема или несжимаема жидкость, как это можно установить, рассматривая непосредственно близкие эквипотенциальные поверхности (которые упираются в границу под прямым углом).

Появления бесконечно большой скорости можно избежать, делая ребро немного закругленным, однако и тогда скорость вблизи ребра значительно превзойдет то значение, которое она принимает на некотором расстоянии от него, большом сравнительно с радиусом кривизны.

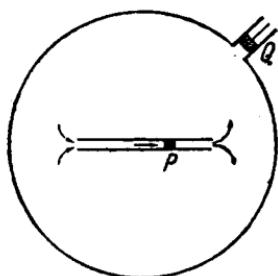
Чтобы движение жидкости находилось в согласии с этими условиями, необходимо, чтобы давление на некотором расстоянии от ребра

значительно превышало давление на ребре. Этот излишек давления обусловливается *инерцией* жидкости; жидкость может обтекать острое ребро преодолевая центробежную силу, только при таком распределении давления, когда оно очень быстро возрастает с удалением от ребра.

Таким образом, если давление на расстоянии не очень велико, то возможность рассматриваемого движения требует отрицательного давления вблизи ребра, которое, однако, жидкость при обычных условиях выдержать не может.

Для большей определенности вопроса представим себе следующий случай. Прямая трубка (фиг. 27), длина которой велика по сравнению с ее диаметром, помещена в середине большого замкнутого сосуда, который наполнен несжимаемой жидкостью, лишенной трения. Внутри этой трубки на некотором расстоянии от концов помещается скользящий поршень P , который произвольным образом может двигаться под действием внешних сил. Толщина стенок трубки предполагается малой по сравнению с диаметром, а края ее обоих концов закругленными, так что острые углы отсутствуют. Кроме того, мы предполагаем, что к стенке сосуда в некотором месте приделана боковая трубка с поршнем Q , посредством которого можно по желанию регулировать давление внутри сосуда.

Пусть вначале вся система находится в покое. Сообщим поршню P постепенно возрастающую скорость, однако таким образом, чтобы (для простоты) движение в каждый момент времени можно было рассматривать приближенно, как установленное. Вначале, предполагая, что на Q действует достаточно большая сила, образуется непрерывное движение вроде изображенного на фиг. 12, так как, действительно, только один этот вид движения совместим с усло-



Фиг. 27.

виями задачи. По мере того как ускорение поршня возрастает, давление на Q может даже при очень умеренных скоростях P сделаться необычайно большим, и если Q может переместиться, то образуется кольцевая пустота на каждом конце трубы.

С теоретической точки зрения нелегко изучить дальнейший ход движения в подобном случае, даже тогда, когда мы имеем дело с идеальной жидкостью. В действительных же жидкостях задача видоизменяется благодаря вязкости, которая препятствует всякому скольжению жидкости в непосредственном соприкосновении с трубкой и также оказывает значительное влияние на резкие разности скоростей, которые здесь будут иметь место.

Наблюдение показывает, что движение жидкостей при тех условиях, которые предполагаются в отдельных случаях, часто совершенно отличается от типов, представленных на фиг. 11, 12, 17, 18. В случае, который мы только что описывали, жидкость, вытекающая из отверстия трубы, не будет тотчас же распространяться по всем направлениям; она образует по крайней мере до некоторого расстояния более или менее компактный поток, ограниченный со всех сторон покоящейся вблизи жидкостью. Известным примером является поток газа, смешанного с дымом, выходящий из дымовой трубы. Однако, во всех случаях подобного рода замечено, что движение непосредственно вблизи границ потока является далеко не упорядоченным¹⁾.

Стремление построить примеры установившихся плоских движений жидкостей без трения, приближающихся к наблюдаемым случаям, и привело Гельмгольца²⁾ и Кирхгофа³⁾ к исследованию теории свободных линий тока. Ясно, что мы можем мыслить, если пожелаем, пространство по ту сторону свободной границы наполненным покоящейся жидкостью постоянной плотности, так как при этом не изменится условие постоянства давления вдоль линии тока. В таком случае задачи § 76 и 77 будут давать теорию давления, оказываемого на пластинку потоком, ее обтекающим, или (что сводится к тому же) теорию сопротивления, которое испытывает пластинка, движущаяся с постоянной скоростью внутри жидкости, находящейся, наоборот, в покое.

К вопросу практического применения этой теории мы вернемся впоследствии в связи с некоторыми родственными задачами (гл. XI).

Течение в криволинейном слое.

§ 80. Теорию, развитую в § 59, 60, можно легко распространить на двухмерное движение *криволинейного* слоя жидкости, толщина которого мала по сравнению с радиусом кривизны. Эта задача была

¹⁾ Некоторые опыты показывают, что образование струй может произойти до того, как будет достигнута гельмгольцева „пределная скорость”, и что внутреннее трение при этом процессе играет существенную роль. Smoluchowski, Sur la formation des veines d’efflux dans les liquides, Bull. de l’Acad de Cracovie, 1904.

²⁾ См. сноска¹⁾ на стр. 98 и сноска²⁾ на стр. 120.

исследована с точки зрения электропроводности Больцманом¹⁾, Кирхгофом²⁾, Тöplerом³⁾ и др.

Как и в § 59, возьмем неподвижную точку A и переменную точку P на поверхности, которой определяется форма слоя, и обозначим через ψ поток через какую-нибудь кривую AP на этой поверхности. Тогда ψ есть функция положения точки P и, если P переместить в произвольном направлении на малый отрезок ds , то найдем, что поток через элемент ds будет равен $\frac{\partial \psi}{\partial s} ds$.

Компонента скорости перпендикулярная к ds , будет тогда равна $\frac{\partial \psi}{h ds}$, где h обозначает толщину слоя, при этом мы еще не предполагаем, что эта толщина всюду одинакова.

Если движение безвихревое, то существует потенциал скоростей φ ; эквипотенциальные кривые $\varphi = \text{const.}$ пересекают линии тока $\psi = \text{const.}$ под прямыми углами.

В случае постоянной толщины, к которому мы теперь переходим, удобнее написать ψ вместо $\frac{\varphi}{h}$, так что компонента скорости, перпендикулярная к ds , будет выражаться одинаковым образом через $\frac{\partial \psi}{\partial s}$ и $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$, где dn обозначает элемент, который проведен перпендикулярно к ds в надлежащую сторону.

Дальнейшие соотношения будут совершенно такими же, как и в плоской задаче; в частности, кривые

$$\varphi = \text{const.}, \quad \psi = \text{const.}$$

разбивают поверхность на элементарные квадраты, если каждая „const.“ пробегает значения всех членов арифметической прогрессии с бесконечно малой разностью, являющейся в обоих случаях одинаковой. В самом деле, в силу свойства ортогональности наши элементарные площадки суть прямоугольники; если сторонами этих прямоугольников будут ds_1, ds_2 , то они же соответственно будут означать элементы линий тока и эквипотенциальных линий, и так как

$$\frac{\partial \psi}{\partial s_2} = \frac{\partial \varphi}{\partial s_1},$$

то отсюда следует, что $ds_1 = ds_2$, ибо согласно построению $\delta\psi = \delta\varphi$.

Таким образом, всякая задача безвихревого движения в криволинейном слое (постоянной толщины) преобразуется с помощью конформного отображения в соответствующую плоскую задачу. Для сферической поверхности мы можем, например, наряду с бесчисленным множеством других методов, применить метод стереографической проекции. В качестве простого примера возьмем, например, случай, когда слой постоянной толщины покрывает всю поверхность шара за исключением двух круговых островов (величина и взаимное положение которых могут быть произвольные). Очевидно, единственное (плоское) безвихревое движение, которое возможно в наполненном жидкостью двусвязном пространстве, это такое, при котором жидкость циркулирует вокруг обоих островов в противоположных направлениях, причем циклические постоянные для обеих циркуляций должны быть одинаковыми. Так как окружности при проектировании переходят в окружности, то соответствующая плоская задача есть та самая, которая решена в § 64, п. 2,

¹⁾ Boltzmann, Wiener Sitzungsberichte, LII, 214 (1865). (Wissenschaftl. Abh. Leipzig, 1909, I.)

²⁾ Kirchhoff, Berl. Monatsber., 19 Juli, 1875 (Gesam. Abhand., I (56)).

³⁾ Töpler, Pogg. Ann., CLX, 375 (1877).

т. е. линии тока будут образовывать семейство соосных окружностей с действительными пограничными точками (скажем A, B), а эквипотенциальные кривые будут составлять ортогональную систему кривых, проходящих через точки A, B . Если мы вернемся обратно к шару, то из хорошо известных теорем стереографической проекции будет следовать, что линии тока, включая контуры обоих островов, суть те окружности, плоскости которых проходят через неподвижную прямую, именно через линию пересечения касательных плоскостей в точках, соответствующих A и B ; эквипотенциальные кривые будут окружности, плоскости которых проходят через эти точки¹⁾.

При всяком виде преобразования с помощью конформного отображения, безразлично, будет ли движение безвихревым или нет, скорость $\frac{\partial \psi}{\partial n}$ преобразуется в обратном отношении к линейному элементу, и поэтому кинетические энергии тех частей жидкости, которые заполняют соответствующие поверхности, равны между собой (предполагая, конечно, что плотность и толщина в обоих случаях одинаковы). Теми же рассуждениями найдем, что циркуляция

$$\int \frac{\partial \psi}{\partial n} ds$$

по замкнутой кривой не меняется при проектировании.

ГЛАВА ПЯТАЯ.

БЕЗВИХРЕВОЕ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ. ТРЕХМЕРНЫЕ ЗАДАЧИ.

§ 81. Среди методов решения уравнения

$$\Delta \varphi = 0 \quad (1)$$

для трехмерного случая метод сферических функций является наиболее важным. Он особенно целесообразен в том случае, когда граничные условия отнесены к сферическим или близким к сферическим поверхностям.

За исчерпывающими исследованиями по этому методу мы должны отослать к специальным руководствам²⁾. Эта теория очень обширна.

¹⁾ Этот пример дан Кирхгофом в электрической интерпретации; там задача состоит в распределении потока на равномерно проводящем сферическом слое, когда электроды помещены в каких-либо двух точках A и B поверхности.

²⁾ Todhunter, Functions of Laplace, Lamé and Bessel. Cambridge, 1875 г. Ferrers, Spherical Harmonics, Cambridge, 1877. Heine, Handbuch der Kugelfunctionen, 2-е изд., Berlin, 1878. Thomson and Tait, Natural Philosophy, 2-е изд., Cambridge, 1879, I, 171—218. Byerly, Fourier's Series and Spherical, Cylindrical and Ellipsoidal Harmonics, Boston, U. S. A., 1893. Уиттекер и Батсон, Курс современного анализа, ч. II. ГТТИ, 1934.

Историю этой теории можно найти у Todhunter, History of the Theories of Attraction etc., Cambridge, 1873, II. Также см. Wangerin, Theories der Kugelfunctionen, U. S. W. Encycl. der Math. Wiss., II (I), 1904.

и рассматривается с разнообразных точек зрения, но мы здесь дадим лишь краткий очерк тех ее частей, которые наиболее важны для наших целей, не приводя формальных доказательств или ограничиваясь только их наметкой.

Легко видеть, что вследствие однородности оператора Δ относительно x, y, z каждое слагаемое функции φ , которое представляет однородный алгебраический многочлен, должно в отдельности удовлетворять уравнению (1). Каждое такое однородное решение уравнения (1) называется *объемной сферической функцией* соответствующей степени. Если φ_n есть объемная сферическая функция степени n и если положить

$$\varphi_n = r^n S_n, \quad (2)$$

то S_n будет функцией только направления, на котором точка (x, y, z) расположена по отношению к началу; другими словами, она будет функцией положения той точки, в которой радиус-вектор пересекает сферическую поверхность радиуса единица, описанную около начала координат. Эту функцию называют *поверхностной сферической функцией* степени n ¹⁾.

Всякой объемной сферической функции φ_n степени n соответствует другая функция степени $-n - 1$, получаемая делением первой на r^{2n+1} , т. е. $\varphi = r^{-2n-1} \varphi_n$ есть также решение уравнения (1). Таким образом каждой поверхностной сферической функции S_n соответствуют две объемные сферические функции $r^n S_n$ и $r^{-n-1} S_n$.

§ 82. Важнейший случай — это тот, когда n есть целое число и когда, кроме того, поверхностная сферическая функция конечна на всей сфере радиуса единица. В той форме, в которой представлена теория (для этого случая) Томсоном и Тэтом, а также и Максвеллом²⁾, наиболее простое решение уравнения (1) имеет вид

$$\varphi_{-1} = \frac{A}{r}. \quad (3)$$

Оно представляет, как мы видели в § 56, потенциал скоростей для точечного источника в начале координат.

Так как уравнение (1) удовлетворяется и тогда, когда φ дифференцируется по x, y или z , то мы тем самым получаем новое решение

$$\varphi_{-2} = A \left(l \frac{\partial}{\partial x} + m \frac{\partial}{\partial y} + n \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \frac{1}{r}. \quad (4)$$

Это есть потенциал скоростей для диполя в начале координат, ось которого имеет направление (l, m, n) ; см. (3) § 56. Этот процесс

¹⁾ Симметрическое представление пространственных сферических функций с помощью декартовых координат было введено в одной очень мало оцененной работе Clebsch, Crelle, LXXI, 195 (1863). Независимо от него этот способ был принят Томсоном и Тэтом в качестве основания для своих исследований.

²⁾ Maxwell, Electricity and Magnetism, гл. IX.

может быть продолжен; общий вид объемной сферической функции полученной этим путем, будет

$$\varphi_{-n-1} = A \frac{\partial^n}{\partial h_1 \partial h_2 \dots \partial h_n} \frac{1}{r}, \quad (5)$$

где

$$\frac{\partial}{\partial h_s} = l_s \frac{\partial}{\partial x} + m_s \frac{\partial}{\partial y} + n_s \frac{\partial}{\partial z},$$

а l_s, m_s, n_s суть произвольные направляющие косинусы.

Функцию φ_{-n-1} можно рассматривать как потенциал скоростей определенной конфигурации простых источников, расположенных вокруг начала, причем размеры этой системы малы сравнительно с r . Чтобы построить эту систему, допустим, что из всякой данной системы источников можно вывести систему высшего порядка, переместив данную систему сначала на отрезок $\frac{1}{2} h_s$ в направлении (l_s, m_s, n_s) и затем накладывая на нее ей *обратную* систему, смешенную из своего первоначального положения на $\frac{1}{2} h_s$ в противоположном направлении. Таким образом, если исходить из того, что в начале координат имеется простой источник O , то первое применение описанного процесса дает нам два источника O_+, O_- на равном расстоянии, но в противоположных направлениях от начала. Тот же прием, примененный к системе O_+, O_- , дает нам уже четыре источника $O_{++}, O_{-+}, O_{+-}, O_{--}$ в вершинах параллелограмма. Следующий шаг дает нам восемь источников в вершинах параллелепипеда и т. д. Если m' есть мощность первоначального источника O , то потенциал скоростей, соответствующий конфигурации 2^n источников, полученных таким образом, на большом расстоянии от этой системы, будет даваться уравнением (5), если

$$4\pi A = m' h_1 h_2 \dots h_n.$$

Эта формула становится верной для всех расстояний r , если h_1, h_2, \dots, h_n неограниченно убывают, а m' неограниченно возрастает, но так, что A остается конечным.

Поверхностная сферическая функция, соответствующая объемной сферической функции (5), выражается формулой

$$S_n = Ar^{n+1} \frac{\partial^n}{\partial h_1 \partial h_2 \dots \partial h_n} \frac{1}{r}, \quad (6)$$

а дополнительная объемная сферическая функция будет тогда иметь вид

$$\varphi_n = r^n S_n = r^{2n+1} \varphi_{-n-1}. \quad (7)$$

Если применить метод инверсии¹⁾ к указанной выше конфигурации источников, то можно показать, что объемная сферическая функция

¹⁾ Изложенный Thomson and Tait, Natural Philosophy, § 515.

вида (7) положительной степени n может быть рассматриваема как потенциал скоростей для соответственной конфигурации 2^n простых источников, находящихся в бесконечности.

Прямые, проведенные из начала по различным направлениям (l_s, m_s, n_s), называются *осами* объемных сферических функций (5) или (7), а точки, в которых эти прямые пересекают сферу радиуса единица, называются *полюсами* поверхностной сферической функции S_n . Формула (5) содержит $2n+1$ произвольных постоянных, именно: полярные координаты n полюсов (две для каждого) и множитель A . Можно показать, что это выражение представляет самую общую поверхностную сферическую функцию, которая имеет порядком целое число n и остается конечной на сфере радиуса единица¹⁾.

§ 83. В оригинальной работе Лапласа²⁾ уравнение

$$\Delta\varphi = 0$$

выражается сначала через сферические координаты r, θ, ω , причем

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \cos \omega, \\ z &= r \sin \theta \sin \omega. \end{aligned}$$

Простейший путь для выполнения этого преобразования состоит в применении теоремы (2) § 36 к поверхности элемента объема $r \delta\theta r \sin \theta \delta\omega \delta r$. В этом случае разность потоков через обе перпендикулярные к r площадки будет

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial r} r \delta\theta r \sin \theta \delta\omega \right) \delta r.$$

Аналогичным способом мы найдем для обеих перпендикулярных к меридиану ($\omega = \text{const.}$) граней

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \left(\frac{\partial\varphi}{r \partial\theta} r \sin \theta \delta\omega \delta r \right) \delta\theta$$

и для обеих граней, перпендикулярных к кругу широты ($\theta = \text{const.}$):

$$\frac{\partial}{\partial\omega} \left(\frac{\partial\varphi}{r \sin \theta \partial\omega} r \delta\theta \delta r \right) \delta\omega.$$

Складывая, получим

$$\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial\varphi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin \theta \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega^2} = 0. \quad (1)$$

Этот результат мог быть, конечно, получен из уравнения (1) § 81 обыкновенным способом замены независимых переменных.

¹⁾ Sylvester, Phil. Mag. (5), II, 291 (1876) (Mathematical Papers, Cambridge, 1904, III, 37).

²⁾ Laplace, Théorie de l'attraction des sphéroïdes et de la figure des planètes, Mém. de l'Acad. Roy. des Sciences, 1782 (Oeuvres complètes, Paris, 1878, X, 341); Mécanique Céleste, 2, гл. II.

Если мы теперь предположим, что φ представляет однородную функцию степени n и положим

$$\varphi = r^n S_n,$$

то получим из (1)

$$\frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial S_n}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 S_n}{\partial \omega^2} + n(n+1) S_n = 0. \quad (2)$$

Это есть общее дифференциальное уравнение поверхностных сферических функций. Так как произведение $n(n+1)$ не изменяется, если заменить n через $-n-1$, то и

$$\varphi = r^{-n-1} S_n$$

также есть решение уравнения (1), что было уже установлено в § 81.

§ 84. В случае, когда имеет место симметрия относительно оси x , выражение $\frac{\partial^2 S_n}{\partial \omega^2}$ обращается в нуль. Положив $\cos \theta = \mu$, мы получим тогда

$$\frac{d}{d\mu} \left\{ (1 - \mu^2) \frac{dS_n}{d\mu} \right\} + n(n+1) S_n = 0; \quad (1)$$

это есть дифференциальное уравнение зональных сферических функций ¹⁾. Так как это уравнение содержит члены только двух различных степеней μ , то его удобно интегрировать с помощью рядов. Мы получим

$$S_n = A \left\{ 1 - \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} \mu^2 + \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \mu^4 - \dots \right\} + \\ + B \left\{ \mu - \frac{(n-1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \mu^3 + \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \mu^5 - \dots \right\}. \quad (2)$$

Встречающиеся здесь ряды принадлежат к гипергеометрическим рядам; если мы вместе с Гауссом ²⁾ напишем

$$F(a, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{a\beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{a(a+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma \cdot (\gamma+1)} x^2 + \\ + \frac{a(a+1)(a+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} x^3 + \dots, \quad (3)$$

то мы будем иметь

$$S_n = AF \left(-\frac{1}{2} n, \frac{1}{2} + \frac{1}{2} n, \frac{1}{2}, \mu^2 \right) + \\ + B\mu F \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} n, 1 + \frac{1}{2} n, \frac{3}{2}, \mu^2 \right). \quad (4)$$

Ряд (3) сходится, очевидно, абсолютно, когда x лежит между 0 и 1; когда же $x=1$, ряд будет сходиться тогда и только тогда, когда

$$\gamma - a - \beta > 0.$$

¹⁾ Это название было введено Томсоном и Тэтом, так как узловые линии ($S_n = 0$) разбивают сферу радиуса единица на параллельные зоны.

²⁾ См. примечание на стр. 132.

В этом случае мы имеем

$$F(a, \beta, \gamma, 1) = \frac{\Pi(\gamma-1) \Pi(\gamma-a-\beta-1)}{\Pi(\gamma-a-1) \Pi(\gamma-\beta-1)}, \quad (5)$$

где $\Pi(m)$ есть функция Эйлера $\Gamma(m+1)$ в обозначении Гаусса.

Поведение функции, представленной рядом (3), в том случае, когда

$$\gamma - a - \beta < 0$$

и когда x приближается к значению 1, может быть выяснено с помощью формулы ¹⁾

$$F(a, \beta, \gamma, x) = (1-x)^{\gamma-a-\beta} F(\gamma-a, \gamma-\beta, \gamma, x). \quad (6)$$

Так как ряд в правой части последнего соотношения сходится, когда $x=1$, то мы видим, что $F(a, \beta, \gamma, x)$ обращается в бесконечность вместе с выражением $(1-x)^{\gamma-a-\beta}$ или, выражаясь точнее: для значений x , бесконечно близких к единице, будем иметь в конце концов

$$F(a, \beta, \gamma, x) = \frac{\Pi(\gamma-1) \Pi(a+\beta-\gamma-1)}{\Pi(a-1) \Pi(\beta-1)} (1-x)^{\gamma-a-\beta}. \quad (7)$$

Для промежуточного случая

$$\gamma - a - \beta = 0$$

мы можем воспользоваться формулой

$$\frac{d}{dx} F(a, \beta, \gamma, x) = \frac{a\beta}{\gamma} F(a+1, \beta+1, \gamma+1, x). \quad (8)$$

Эта формула вместе с уравнением (6) в нашем случае дает

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} F(a, \beta, \gamma, x) &= \frac{a\beta}{\gamma} (1-x)^{-1} F(\gamma-a, \gamma-\beta, \gamma+1, x) = \\ &= \frac{a\beta}{\gamma} (1-x)^{-1} F(a, \beta, a+\beta+1, x). \end{aligned} \quad (9)$$

Ряд, представляемый последним множителем, сходится при $x=1$, так что $F(a, \beta, \gamma, x)$ обращается в бесконечность как $\ln(1-x)$. Выражаясь точнее, мы будем иметь для значений x , близких к этому пределу (т. е. близких к единице)

$$F(a, \beta, a+\beta, x) = \frac{\Pi(a+\beta-1)}{\Pi(a-1) \Pi(\beta-1)} \ln \frac{1}{1-x}. \quad (10)$$

§ 85. Что касается обоих рядов, которые входят в общее выражение (2) § 84 для зональной сферической функции, то оказывается, что первый ряд обрывается, когда n четное, а второй ряд — когда n нечетное целое число. Для других значений n оба ряда сходятся абсолютно, когда μ заключено между -1 и $+1$, на границах же при $\mu = \pm 1$ они расходятся, так как в каждом случае имеет место равенство $\gamma - a - \beta = 0$, и обращаются в бесконечность как $\ln(1-\mu^2)$.

Отсюда следует, что конечные ряды, соответствующие целым значениям n , суть единственные зональные сферические функции, которые остаются конечными на сфере радиуса единица. Если мы напишем члены ряда в обратном порядке, то найдем, что оба случая:

¹⁾ Forsyth, Differential Equations, 3-е изд., London, 1903, гл. VI.

для n четного и n нечетного, могут быть выражены одной и той же формулой¹⁾

$$P_n(\mu) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \left\{ \mu^n - \frac{n \cdot (n-1)}{2(2n-1)} \mu^{n-2} + \right. \\ \left. + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4(2n-1)(2n-3)} \mu^{n-4} - \dots \right\}, \quad (1)$$

причем постоянный множитель так подобран, чтобы при $\mu=1$ иметь $P_n(\mu)=1$ ²⁾. Эту формулу можно представить также в виде:

$$P_n(\mu) = \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{d^n}{d\mu^n} (\mu^2 - 1)^n. \quad (2)$$

Ряд (1) может быть получен другим путем из формулы (6) § 82, которая в случае зональной сферической функции должна иметь вид.

$$S_n = Ar^{n+1} \frac{\partial^n}{\partial x^n} \frac{1}{r}. \quad (3)$$

В качестве частных случаев из формулы (2) мы будем иметь

$$P_0(\mu) = 1, \quad P_1(\mu) = \mu,$$

$$P_2(\mu) = \frac{1}{2} (3\mu^2 - 1), \quad P_3(\mu) = \frac{1}{2} (5\mu^3 - 3\mu).$$

Различные авторы выражали P_n через другие функции, в которых за независимое переменное принималось не μ , а θ . Например, имеем

$$P_n(\cos \theta) = 1 - \frac{n(n+1)}{1^2} \sin^2 \frac{1}{2} \theta + \\ + \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{1^2 \cdot 2^2} \sin^4 \frac{1}{2} \theta - \dots \quad (4)$$

Это выражение может быть выведено из формулы (2)²⁾ или же

1) Для четного n это соответствует случаю

$$A = (-1)^{\frac{1}{2}n} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (n-1)}{2 \cdot 4 \dots n}, \quad B = 0,$$

в то время как для нечетного n мы имеем

$$A = 0, \quad B = (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)} \frac{3 \cdot 5 \dots n}{2 \cdot 4 \dots (n-1)}.$$

См. прим. на стр. 137, Heine, I, 12, 147.

*) Функции P_1, P_2, \dots, P_7 табулированы Glaisher для значений μ с интервалами 0,01, Brit. Ass. Report. 1879, и таблицы напечатаны в работе Dale, Five-Figure Tables..., London, 1903. Одна таблица этих функций для каждого градуса квадранта вычислена под руководством проф. Реггу и опубликована в Phil. Mag., Dec., 1891 г.

Обе таблицы перепечатаны в книге Yerlys, также в Jahnke und Emde, Functionentafeln, Leipzig, 1919. Значения первых 20 зональных сферических функций с интервалами в 5° вычислены проф. A. Lodge, Phil. Trans. A, CCIII (1904).

**) Murphy, Elementary Principles of the Theories of Electricity..., Cambridge, 1833, стр. 7 (Thomson and Tait, § 782).

его можно получить независимо от последней, если в уравнении (1) § 84 положить $\mu = 1 - 2x$ и интегрировать его при помощи рядов.

Функция $P_n(\mu)$ была впервые введена в анализ Лежандром¹⁾ как коэффициент при h^n в разложении выражения

$$(1 - 2\mu h + h^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Связь такого представления с нашей теперешней точкой зрения заключается в следующем: если φ есть потенциал скоростей источника на оси x на расстоянии c от начала, то мы будем иметь, согласно определению Лежандра, для значений r , меньших чем c ,

$$4\pi\varphi = (c^2 - 2\mu cr + r^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{c} + P_1 \frac{r}{c^2} + P_2 \frac{r^2}{c^3} + \dots \quad (5)$$

Каждый член этого разложения должен в отдельности удовлетворять уравнению $\Delta\varphi = 0$, и поэтому коэффициент P_n должен быть решением уравнения (1) § 84. Так как P_n , определенное таким образом, очевидно, для каждого значения μ конечно и для $\mu = 1$ равно единице, то оно должно совпадать с выражением (1).

Для значений r , больших c , соответствующее разложение будет

$$4\pi\varphi = \frac{1}{r} + P_1 \frac{c}{r^2} + P_2 \frac{c^2}{r^3} + \dots \quad (6)$$

Мы можем отсюда вывести выражения, которые впоследствии (§ 98) будут нам полезны, именно, выражения для потенциала скоростей, соответствующего диполю с напряжением единица, который лежит на оси x на расстоянии c от начала и ось которого совпадает с этой осью. Этот потенциал скоростей, очевидно, равен $\frac{\partial\varphi}{\partial c}$, где φ имеет одно из двух указанных выше выражений; таким образом искомый потенциал для $r < c$ равен

$$-\frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{c^2} + 2P_1 \frac{r}{c^3} + 3P_2 \frac{r^2}{c^4} + \dots \right), \quad (7)$$

а для $r > c$

$$\frac{1}{4\pi} \left(P_1 \frac{1}{r^2} + 2P_2 \frac{c}{r^3} + \dots \right). \quad (8)$$

Второе независимое решение уравнения (1) § 84, когда n есть целое число, может быть выражено в наиболее компактной форме²⁾

$$Q_n(\mu) = \frac{1}{2} P_n(\mu) \ln \frac{1+\mu}{1-\mu} - Z_n, \quad (9)$$

¹⁾ Legendre, Sur l'attraction des sphéroïdes homogènes, Mémoires des Savans Étrangers, X (1785).

²⁾ Это эквивалентно формуле (4) § 84 для четного n , если

$$A = 0, \quad B = (-1)^{\frac{1}{2}n} \frac{2 \cdot 4 \dots n}{1 \cdot 4 \dots (n-1)};$$

для нечетного n , если

$$A = (-1)^{\frac{1}{2}(n+1)} \frac{2 \cdot 4 \dots n-1}{3 \cdot 5 \dots n}, \quad B = 0.$$

См. Heine, I, 141, 147.

где

$$Z_n = \frac{2n-1}{1-n} P_{n-1} + \frac{2n-5}{3(n-1)} P_{n-3} + \dots \quad (10)$$

Эта функция $Q_n(\mu)$ иногда называется зональной сферической функцией *второго рода*.

Таким образом имеем

$$Q_0(\mu) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\mu}{1-\mu},$$

$$Q_1(\mu) = \frac{1}{2} \mu \ln \frac{1+\mu}{1-\mu} - 1,$$

$$Q_2(\mu) = \frac{1}{4} (3\mu^2 - 1) \ln \frac{1+\mu}{1-\mu} - \frac{3}{2} \mu,$$

$$Q_3(\mu) = \frac{1}{4} (5\mu^2 - 3\mu) \ln \frac{1+\mu}{1-\mu} - \frac{5}{2} \mu^2 + \frac{2}{3}.$$

§ 86. Если отбросить ограничение, что относительно оси x имеет место симметрия, то можно функцию S_n , если только она есть конечная и однозначная функция от ω , разложить в ряд членов, соответственно содержащих $\cos s\omega$ и $\sin s\omega$. Если это разложение имеет место для всей сферы (т. е. от $\omega=0$ до $\omega=2\pi$), то мы можем (согласно теореме Фурье) допустить, что значения s суть целые числа. Дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет каждый такой член, есть

$$\frac{d}{d\mu} \left\{ (1-\mu^2) \frac{dS_n}{d\mu} \right\} + \left\{ n(n+1) - \frac{s^2}{1-\mu^2} \right\} S_n = 0. \quad (1)$$

Если положить

$$S_n = (1-\mu^2)^{\frac{1}{2}s} v,$$

то уравнение (1) примет вид

$$(1-\mu^2) \frac{d^2v}{d\mu^2} - 2(s+1)\mu \frac{dv}{d\mu} + (n-s)(n+s+1)v = 0,$$

который более удобен для интегрирования рядами. Мы получим

$$\begin{aligned} S_n = A (1-\mu^2)^{\frac{1}{2}s} & \left\{ 1 - \frac{(n-s)(n+s+1)}{1 \cdot 2} \mu^2 + \right. \\ & + \frac{(n-s-2)(n-s)(n+s+1)(n+s+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \mu^4 - \dots \Big\} + \\ & + B (1-\mu^2)^{\frac{1}{2}s} \left\{ \mu - \frac{(n-s-1)(n+s+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \mu^3 + \right. \\ & + \frac{(n-s-3)(n-s-1)(n+s+2)(n+s+4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \mu^5 - \dots \Big\}, \quad (2) \end{aligned}$$

причем множитель $\cos s\omega$ или $\sin s\omega$ временно опущен. Пользуясь

символом гипергеометрической функции, выражение (2) можно записать так:

$$S_n = (1 - \mu^2)^{\frac{1}{2} s} \left\{ AF \left(\frac{1}{2} s - \frac{1}{2} n, \frac{1}{2} + \frac{1}{2} s + \frac{1}{2} n, \frac{1}{2}, \mu^2 \right) + B \mu F \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} s - \frac{1}{2} n, 1 + \frac{1}{2} s + \frac{1}{2} n, \frac{3}{2}, \mu^2 \right) \right\}. \quad (3)$$

Эти выражения сходятся при $\mu^2 < 1$, но так как в каждом случае имеем

$$\gamma - a - \beta = -s,$$

то ряды на границах $\mu = \pm 1$ становятся бесконечными как $(1 - \mu^2)^{-s}$, если только они не обрываются ¹⁾. Первый ряд будет конечным, когда $n - s$ есть целое четное число, а второй ряд — когда $n - s$ — нечетное целое число. Перестановкой членов этих рядов мы можем оба эти конечные решения выразить общей формулой ²⁾

$$P_n^s(\mu) = \frac{(2n)!}{2^n (n-s)! n!} (1 - \mu^2)^{\frac{1}{2} s} \left\{ \mu^{n-s} - \frac{(n-s)(n-s-1)}{2 \cdot (2n-1)} \mu^{n-s-2} + \frac{(n-s)(n-s-1)(n-s-2)(n-s-3)}{2 \cdot 4 \cdot (2n-1)(2n-3)} \mu^{n-s-4} - \dots \right\}. \quad (4)$$

Сравнивая с (1) § 85, мы находим, что

$$P_n^s(\mu) = (1 - \mu^2)^{\frac{1}{2} s} \frac{d^s P_n(\mu)}{d\mu^s}. \quad (5)$$

Что это есть решение уравнения (1), легко может быть проверено непосредственно.

Выражая через степени от $\sin \frac{1}{2} \theta$, мы будем иметь

$$P_n^s(\cos \theta) = \frac{(n+s)!}{2^s (n-s)! s!} \sin^s \theta \left\{ 1 - \frac{(n-s)(n+s+1)}{1 \cdot (s+1)} \sin^2 \frac{1}{2} \theta + \frac{(n-s-1)(n-s)(n+s+1)(n+s+2)}{1 \cdot 2 \cdot (s+1)(s+2)} \sin^4 \frac{1}{2} \theta - \dots \right\}. \quad (6)$$

Это выражение соответствует формуле (4) § 85 и легко может быть выведено из нее.

Если мы произведем сводку наших результатов, то увидим, что сферическая поверхностная функция, конечная на всей сфере радиуса единицы, необходимо должна быть порядка целого числа и, кроме

¹⁾ Rayleigh, Theory of Sound, London, 1877, § 338.

²⁾ Существует большое разнообразие в способах обозначения этих „при соединенных функций“, как их называют. Обозначение, принятное в тексте, предложено F. Neumann и принято Уиттекером и Ватсоном, стр. 119.

того, она, если обозначить через n ее порядок, может быть представлена в следующей форме:

$$S_n = A_0 P_n(\mu) + \sum_{s=1}^n (A_s \cos s\omega + B_s \sin s\omega) P_n^s(\mu), \quad (7)$$

куда входят $2n+1$ произвольных постоянных. Члены формулы (7), содержащие ω , называются *тессеральными гармоническими функциями*, за исключением двух последних, которые даются формулой

$$(1 - \mu^2)^{\frac{1}{2} n} (A_n \cos n\omega + B_n \sin n\omega)$$

и называются *секториальными гармоническими функциями*¹⁾. Названия происходят от вида тех частей, на которые разделяется сфера радиуса единица узловыми линиями $S_n = 0$.

Формулу для тессеральной функции ранга s можно также вывести иным путем из общего выражения (6) § 82, заставляя совпасть из n полюсов сферической функции $n-s$ полюсов в точке сферы $\theta=0$ и распределяя остальные s полюсов равномерно по экватору $\theta = \frac{1}{2} \pi$.

Второе независимое решение уравнения (1), когда n есть целое число, может быть приведено к виду

$$S_n = (A_s \cos s\omega + B_s \sin s\omega) Q_n^s(\mu), \quad (8)$$

где²⁾

$$Q_n^s(\mu) = (1 - \mu^2)^{\frac{1}{2} s} \frac{d^s Q_n(\mu)}{d\mu^s}. \quad (9)$$

Эту функцию называют часто *тессеральной функцией второго рода*.

§ 87. Две поверхностные сферические функции S и S' называются сопряженными или ортогональными, если

$$\iint SS' d\omega = 0, \quad (1)$$

где $d\omega$ есть элемент поверхности сферы радиуса единица, а интегрирование распространяется по всей сфере.

Можно показать, что две произвольные поверхностные сферические функции различного порядка, которые являются конечными на единичной сфере, ортогональны друг к другу, а также и то, что $2n+1$ гармонических функций произвольного порядка n зонального, тессерального и секториального типа, определенные в § 85, 86, все взаимно ортогональны. В дальнейшем мы увидим, что свойство

¹⁾ Прилагательное „сферическая“ подразумевается; его часто опускают ради краткости.

²⁾ Таблицы функции $Q_n(\mu)$, $Q_n^s(\mu)$ для различных значений n и s даны в *Гуап. Proc. Camb. Phil. Soc.*, VI, 297.

ортогональности имеет большое значение для практического применения этой теории.

Так как

$$\tilde{\delta\omega} = \sin \theta \delta\theta \delta\omega = -\delta\mu \delta\omega,$$

то мы получаем, как частный случай вышеуказанной теоремы:

$$\int_{-1}^{+1} P_m(\mu) d\mu = 0, \quad (2)$$

$$\int_{-1}^{+1} P_m(\mu) P_n(\mu) d\mu = 0, \quad (3)$$

$$\int_{-1}^{+1} P_m^s(\mu) P_n^s(\mu) d\mu = 0 \quad (4)$$

при условии, что m и n не равны.

Для $m=n$ можно показать ¹⁾, что

$$\int_{-1}^{+1} (P_n(\mu))^2 d\mu = \frac{2}{2n+1}, \quad (5)$$

$$\int_{-1}^{+1} (P_n^s(\mu))^2 d\mu = \frac{(n+s)!}{(n-s)!} \frac{2}{2n+1}. \quad (6)$$

§ 88. Мы можем теперь сослаться на теорему, что всякая произвольная функция $f(\mu, \omega)$ положения точки на единичной сфере может быть разложена в ряд сферических поверхностных функций, получаемых из (7) § 86, если n будет принимать все целые значения от 0 до ∞ . При вычислении коэффициентов этого разложения применяются формулы (5) и (6).

Если имеет место симметрия относительно оси, то это разложение принимает следующий вид:

$$f(\mu) = C_0 + C_1 P_1(\mu) + C_2 P_2(\mu) + \dots + C_n P_n(\mu) + \dots \quad (7)$$

Умножая обе части этого уравнения на $P_n^s(\mu) d\mu$ и интегрируя в пределах между -1 и $+1$, мы найдем

$$C_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} f(\mu) d\mu \quad (8)$$

и, вообще,

$$C_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} f(\mu) P_n(\mu) d\mu. \quad (9)$$

¹⁾ Ferrers, стр. 86; Уиттекер и Ватсон, стр. 94, 120.

Математическое доказательство сформулированной выше теоремы можно найти в специальных учебниках¹⁾; физические основания для допущения возможности такого рода и других подобных разложений будут указываться попутно в связи с различными задачами.

§ 89. Решение уравнения $\Delta\varphi = Q$ можно получить также помощью обычных методов решения линейных уравнений с постоянными коэффициентами²⁾. Таким способом мы можем убедиться, что уравнению удовлетворяет функция

$$\varphi = e^{ax + \beta y + \gamma z},$$

или в более общей форме

$$\varphi = f(ax + \beta y + \gamma z), \quad (1)$$

при условии, что

$$a^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0. \quad (2)$$

Например, мы можем положить

$$\left. \begin{array}{l} a = 1, \\ \beta = i \cos \tau, \\ \gamma = i \sin \tau, \end{array} \right\} \quad (3)$$

или также

$$\left. \begin{array}{l} a = 1, \\ \beta = i \operatorname{ch} u, \\ \gamma = \operatorname{sh} u. \end{array} \right\} \quad (4)$$

Можно показать³⁾, что самое общее решение может быть получено сложением решений вида (1).

Используя предположение (3) и вводя цилиндрические координаты x, ω, ω , причем

$$y = \tilde{\omega} \cos \omega, \quad z = \tilde{\omega} \sin \omega, \quad (5)$$

мы можем составить решение, симметричное относительно оси x , если положим

$$\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x + i\tilde{\omega} \cos(\vartheta - \omega)) d\vartheta.$$

Где помещается начало отсчета угла ϑ — безразлично, так как интегрирование распространяется на всю окружность; поэтому формула может быть написана следующим образом⁴⁾:

$$\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x + i\tilde{\omega} \cos \vartheta) d\vartheta = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(x + i\tilde{\omega} \cos \vartheta) d\vartheta. \quad (6)$$

¹⁾ Относительно новых исследований по этому вопросу см. Wangerin, примечание на стр. 137.

²⁾ Forsyth, Differential Equations, стр. 444.

³⁾ Whittaker, Month. Not. R. Ast. Soc., LXII (1902).

⁴⁾ Уиттакер и Батсон, Курс современного анализа, гл. 18.

Этот результат замечателен тем, что он выражает значения φ в симметричных точках относительно оси x через значения $f(x)$, которые φ принимает в точках на самой оси. С помощью теоремы § 38 можно показать, что вид φ в подобном случае вполне определяется значениями φ на некотором произвольном конечном отрезке оси x ¹⁾.

Как частные случаи выражения (6) получаем функции

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (x + i\tilde{\omega} \cos \vartheta)^n d\vartheta, \quad \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (x + i\tilde{\omega} \cos \vartheta)^{-n-1} d\vartheta,$$

где n есть целое число. Так как эти выражения суть объемные сферические функции, которые остаются конечными на шаре радиуса единица, и так как они для $\tilde{\omega}=0$ сводятся к r^n и r^{-n-1} , то они должны быть тождественны с $P_n(\mu)r^n$ и соответственно с $P_n(\mu)r^{-n-1}$. Мы получаем таким образом формулы

$$P_n(\mu) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\mu + i\sqrt{1-\mu^2} \cos \vartheta)^n d\vartheta, \quad (7)$$

$$P_n(\mu) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{d\vartheta}{(\mu + i\sqrt{1-\mu^2} \cos \vartheta)^{n+1}}, \quad (8)$$

которые первоначально получены были Лапласом²⁾ и Якоби³⁾.

§ 90. Для первого применения изложенной выше теории предположим, что на поверхность шаровидной первоначально покоящейся жидкой массы действуют произвольно распределенные импульсивные давления. Это эквивалентно заданию произвольных значений φ на поверхности. Значение φ внутри тем самым вполне будет определено согласно § 40. Чтобы его найти, предположим, что данные на поверхности значения представлены согласно теореме, изложенной в § 88 в виде ряда по сферическим функциям

$$\varphi = S_0 + S_1 + S_2 + \dots + S_n + \dots, \quad (1)$$

где порядок n есть целое число.

Искомое значение будет тогда иметь вид

$$\varphi = S_0 + \frac{r}{a} S_1 + \frac{r^2}{a^2} S_2 + \dots + \frac{r^n}{a^n} S_n + \dots, \quad (2)$$

ибо это выражение удовлетворяет уравнению $\Delta\varphi=0$ и принимает заданный вид (1), когда $r=a$, где a есть радиус шара.

¹⁾ Thomson and Tait, § 498.

²⁾ Laplace, Mécanique céleste, книга II, гл. II.

³⁾ Jacobi, Crelle, XXVI (1843) (Gesammelte Werke, Berlin, 1881, VI, 148).