Соответствующее решение для случая, когда значения φ заданы на поверхности сферической полости, находящейся в безграничной первоначально покоящейся жидкости, очевидно, будет

$$\varphi = \frac{a}{r} S_0 + \frac{a^2}{r^2} S_1 + \frac{a^3}{r^3} S_2 + \ldots + \frac{a^{n+1}}{r^{n+1}} S_n + \ldots \tag{3}$$

Комбинируя оба эти результата, получим случай безграничной жидкой массы, связность которой нарушена бесконечно тонким двойным слоем сферической формы, внутри которого действует произвольное импульсивное давление. Значения (2) и (3) для функции φ на этом слое, очевидно, непрерывны. Но значения нормальных компонент скорости будут здесь разрывны; именно для внутренней жидкости мы будем иметь

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \sum n \frac{S_n}{a},$$

а для внешней

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = -\sum (n+1) \frac{S_n}{a}.$$

Движение как внутри, так и вне сферического слоя может таким образом рассматриваться как образованное распределением по сфере простых источников с поверхностной плотностью

$$\sum (2n+1) \frac{S_n}{a}; \tag{4}$$

см. § 58.

§ 91. Предположим, что вместо импульсивных давлений на поверхности шара заданы нормальные компоненты скорости; мы имеем, следовательно,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = S_1 + S_2 + \ldots + S_n + \ldots, \tag{1}$$

где обязательно отсутствует член нулевого порядка, так как вследствие постоянства объема заключенной массы имеет место равенство

$$\iint \frac{\partial\varphi}{\partial r} d\tilde{\omega} = 0. \tag{2}$$

Функция φ для внутренней задачи будет иметь вид

$$\varphi = A_1 r S_1 + A_2 r^2 S_2 + \ldots + A_n r^n S_n + \ldots, \tag{3}$$

ибо это выражение конечно и непрерывно, удовлетворяет уравнению $\Delta\varphi = 0$, и постоянные могут быть определены таким образом, что $\frac{\partial\varphi}{\partial r}$ принимает заданные на поверхности значения (1), а именно, мы будем иметь

$$nA_n a^{n-1} = 1.$$

Искомое решение таким образом будет

$$\varphi = a \sum \frac{1}{n} \frac{r^n}{a^n} S_n. \tag{4}$$

Соответствующее решение для внешней задачи находится тем же самым путем, и оно будет иметь вид

$$\varphi = -a \sum \frac{1}{n+1} \frac{a^{n+1}}{r^{n+1}} S_n. \tag{5}$$

Оба решения, взятые вместе, дают движение, которое образуется в безграничной массе жидкости, разделенной на две части тонкой сферической оболочкой, если каждой точке оболочки сообщить заданную нормальную компоненту скорости, удовлетворяющую условию (2).

При переходе через оболочку значение φ делает скачок от $a \sum \frac{S_n}{n}$ к $-a \sum \frac{S_n}{n+1}$, так что *тангенциальная* компонента скорости здесь будет разрывной. Движение как внутреннее, так и внешнее обусловлено двойным слоем (слоем дублетов) с плотностью

$$-a \sum \frac{2n+1}{n(n+1)} S_n; \tag{6}$$

см. § 58.

Кинетическая энергия жидкости, находящейся внутри шара, подсчитанная по формуле (4) § 44, будет выражаться в виде

$$2T = \varrho \iint \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial r} dS = \varrho a^3 \sum \frac{1}{n} \iint S_n^2 d\tilde{\omega}, \tag{7}$$

ибо интегралы, содержащие произведения сферических поверхностных функций различных порядков, вследствие ортогональности (§ 87) выпадают. Для жидкости вне шара будем иметь

$$2T = -\varrho \iint \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial r} dS = \varrho a^3 \sum \frac{1}{n+1} \iint S_n^2 d\tilde{\omega}. \tag{8}$$

§ 91a. Сферические функции нулевого порядка прямо приводят к рассмотрению следующих двух задач, математически тесно связанных между собой: задачи сжатия сферического пузыря в воде и задачи расширения сферической полости, вызываемого давлением заключенного внутри нее газа, как это имеет место в случае подводных мин.

В первой задаче[1]) имеем, если R_0 — первоначальный радиус пузыря а R — радиус в момент t, то

$$\varphi = \frac{R^2 \dot{R}}{r}, \tag{1}$$

[1]) Besant, Hydrostatics and Hydrodynamics, Cambridge, 1859; Rayleigh, Phil. Mag., XXXIV, 94 (1917) (Papers, VI, 504).

так как это дает $-\frac{\partial\varphi}{\partial r}=\dot{R}$ для $r=R$. Если мы положим $\Omega=0$ в уравнении (5) § 22, то получим

$$\frac{p-p_0}{\varrho}=\frac{R^2\ddot{R}+2R\dot{R}^2}{r}-\frac{R^4\dot{R}^2}{2r^4}, \tag{2}$$

где p_0 обозначает давление для $r=\infty$. Отсюда, полагая $r=R$ и пренебрегая внутренним давлением, мы получим уравнение

$$R\ddot{R}+\frac{3}{2}\dot{R}^2=-\frac{p_0}{\varrho}, \tag{3}$$

интеграл которого есть

$$R^3\dot{R}^2=\frac{2}{3}\frac{p_0}{\varrho}(R_0^3-R^3). \tag{4}$$

Это уравнение нельзя дальше легко интегрировать, однако, можно найти момент (t) полного исчезновения пузыря. Именно, если мы положим $R=R_0x^{\frac{1}{3}}$, то получим

$$t_1=R_0\sqrt{\frac{\varrho}{6p_0}}\int_0^1 x^{-\frac{1}{6}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}\,dx=R_0\sqrt{\frac{\varrho}{6p_0}}\frac{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}=$$

$$=0{,}915\,R_0\sqrt{\frac{\varrho}{p_0}}. \tag{5}$$

Если $\varrho=1$, $R_0=1$ *см* и $p_0=10^6$ CGS (1 атмосфера), то будем иметь $t_1=0{,}000915$ секунды.

Кинетическая энергия в любой момент времени будет равна

$$2\pi\varrho R^3\dot{R}^2=\frac{4}{3}\pi p_0(R_0^3-R^3), \tag{6}$$

что в действительности легко определить, рассматривая работу, совершаемую достаточно большой частью жидкости против окружающей ее внешней части. При полном сжатии потерянная энергия или, лучше, энергия, превращенная в другие формы, будет равна $\frac{4}{3}\pi p_0R_0^3$. Для $R_0=1$ и $p_0=10^6$ это составляет $4{,}18\cdot10^6$ эргов или приблизительно 0,0426 *кгм*.

Уравнения (1) и (2) применимы также и в задаче расширения полости, но при этом давлением p_0 на большом расстоянии можно пренебречь. Если p_1 обозначает начальное давление в полости, когда $R=R_0$, а также $R=0$, то, если принимать адиабатический закон расширения, внутреннее давление в момент t будет даваться формулой

$$\frac{p}{p_1}=\left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\gamma}. \tag{7}$$

Отсюда следует

$$R\ddot{R}+\frac{3}{2}\dot{R}^2=c_0^2\left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\gamma}, \tag{8}$$

где

$$c_0=\sqrt{\frac{p_1}{\varrho}}. \tag{9}$$

Эта величина c_0 имеет размерность скорости и определяет быстроту, с которой совершается изменение. Интегралом уравнения (8) будет

$$\frac{\dot{R}^2}{c_0^2} = \frac{2}{3(\gamma-1)}\left\{\left(\frac{R_0}{R}\right)^3 - \left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\gamma}\right\}. \tag{10}$$

Из уравнения (8) видно, что начальное ускорение ($\ddot{R}$) в направлении радиуса равно $\frac{c_0^2}{R_0}$ и при этом безразлично, по какому закону происходит расширение.

Из (8) и (10) мы находим, что максимум $\dot{R}$ будет иметь место при

$$\left(\frac{R}{R_0}\right)^{3\gamma-3} = \gamma \tag{11}$$

и что его значение получается из

$$\frac{\dot{R}^2}{c_0^2} = \frac{2}{3\gamma^{\gamma/(\gamma-1)}}. \tag{12}$$

Решение нелегко доводится до конца, за исключением частного случая $\gamma = \frac{4}{3}$. Положив

$$\frac{R}{R_0} = 1 + z, \tag{13}$$

мы получим

$$(1+z)^2\frac{dz}{dt} = \frac{c_0}{R}\sqrt{2z}, \tag{14}$$

откуда следует

$$\frac{c_0 t}{R_0} = \sqrt{2z}\left(1 + \frac{2}{3}z + \frac{1}{5}z^2\right). \tag{15}$$

В качестве конкретного примера предположим, что первоначальный диаметр полости равен 1 метру и начальное давление $p_1 = 1000$ атмосферам, что дает $c_0 = 3{,}16 \cdot 10^4$ *см/сек*. Мы найдем тогда, что радиус полости удваивается в $^1/_{250}$ секунды и увеличивается в 5 раз приблизительно в $^1/_{30}$ секунды. Начальное ускорение радиуса равно $2{,}00 \cdot 10^7$ *см/сек*^{2}; это показывает, что пренебрежение силой тяжести на первых стадиях движения вполне оправдывается. Максимум $\dot{R}$ имеет место при

$$\frac{R}{R_0} = \frac{4}{3}, \quad t = 0{,}0016 \text{ сек.}$$

и равен приблизительно 145 *м/сек* или приблизительно $^1/_{10}$ скорости звука в воде. При начальных давлениях порядка 10 000 атмосфер и больше мы получим скорости, сравнимые со скоростью звука, причем влиянием сжимаемости в дальнейшем не следует пренебрегать [1]).

§ 92. Сферическая функция первого порядка встречается в задаче о движении твердого шара в безграничной покоящейся в бесконечности жидкости. Если мы возьмем начало координат в центре шара, а ось x по направлению движения, то нормальная компонента ско-

---

[1]) Это рассуждение заимствовано из работы Lamb, The early stages of a submarine explosion, Phil. Mag., XLV, 257 (1923).

рости на поверхности выразится так:

$$\frac{Ux}{r} = U\cos\theta,$$

где U есть скорость центра. Поэтому условия для определения φ будут следующие: 1) всюду должно быть $\Delta\varphi = 0$, 2) пространственные производные от φ должны в бесконечности обращаться в нуль, 3) на поверхности шара, т. е. для $r = a$, мы должны иметь

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial r} = U\cos\theta. \tag{1}$$

Вид уравнения (1) как раз указывает на зональную сферическую функцию первого порядка; поэтому мы принимаем

$$\varphi = A\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r} = -A\frac{\cos\theta}{r^2}.$$

Из условия (1) получим

$$-\frac{2A}{a^3} = U,$$

и для искомого решения будем иметь[1])

$$\varphi = \frac{1}{2}U\frac{a^3}{r^2}\cos\theta. \tag{2}$$

Сравнивая с формулой (4) § 56, мы видим, что движение жидкости происходит таким образом, как если бы оно образовалось от дублета напряжения $2\pi Ua^3$, находящегося в центре шара. Относительно вида линий тока см. фиг. 28.

Энергию движения жидкости мы получим из выражения

$$\begin{aligned} 2T &= -\varrho\iint\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial r}dS = \\ &= \frac{1}{2}\varrho aU^2\int_0^\pi\cos^2\theta\cdot 2\pi a\sin\theta\cdot a\,d\theta = \\ &= \frac{2}{3}\pi\varrho a^3U^2 = M'U^2, \end{aligned} \tag{3}$$

где $M' = \frac{2}{3}\pi\varrho a^3$. Мы получаем точно, как и в § 68, что эффект давлений жидкости эквивалентен только увеличению инертной массы твердого тела, причем это увеличение равно теперь *половине* массы вытесненной жидкости[2]).

---

[1]) Stokes, On some cases of Fluid Motion, Camb. Trans., VIII (1843) (Papers, I, 17); Dirichlet, Über die Bewegung eines festen Körpers in einem incompressibeln flüssigen Medium, Berl. Monatsber., 1852 (Werke, Berlin, 1889—1897, II, 115).

[2]) Stokes, см. сноску [1]). Этот результат был другим путем получен Грином при рассмотрении бесконечно малого движения. Green, On the Vibration of Pendulums in Fluid-Media, Edin. Trans, 1833 (Papers, стр. 315).

[Обычно это приращение инертной массы тела называют „присоединенной" массой. *Прим. ред.*].

Если шар движется прямолинейно и на жидкость не действуют никакие внешние силы, то результирующее давление равно, следовательно, силе

$$-M'\frac{dU}{dt} \tag{4}$$

в направлении движения; оно исчезает, когда U постоянна. Отсюда следует: если шару сообщить движение и затем предоставить самому себе, то он будет двигаться в дальнейшем прямолинейно и с постоянной скоростью.

Поведение твердого тела, движущегося в действительной жидкости, конечно, совершенно иное; чтобы сохранить движение, необходимо непрерывно прикладывать силу, в противном случае тело постепенно пришло бы к покою. Необходимо, однако, при таком сравнении помнить, что в идеальной жидкости не имеет места рассеяние энергии и что, кроме того, когда жидкость несжимаема, твердые тела не могут терять свою кинетическую энергию через передачу ее жидкости, ибо, как мы видели в гл. III, движение жидкости определяется вполне движением твердого тела и поэтому одновременно они и прекращаются.

Если мы хотим изложенный выше результат проверить непосредственным вычислением с помощью формулы

$$\frac{p}{\varrho}=\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\frac{1}{2}q^2+F(t), \tag{5}$$

то должны вспомнить о том, что начало координат находится в движении и поэтому значения r и θ для определенной точки пространства растут соответственно со скоростью $-U\cos\theta$, $\frac{U\sin\theta}{r}$, или же мы должны воспользоваться (6) § 20. В том и другом случае мы найдем

$$\frac{p}{\varrho}=\frac{1}{2}a\frac{dU}{dt}\cos\theta+\frac{9}{16}U^2\cos 2\theta-\frac{1}{16}U^2+F(t). \tag{6}$$

Три последних члена правой части этого уравнения будут одинаковы для элементов поверхности в положении θ и $\pi-\theta$; поэтому при постоянном U давления на различные элементы передней полусферы уравновешиваются одинаковыми давлениями на соответствующие элементы задней полусферы. Если же движение шара ускоряется, тогда образуется излишек давления на передней и уменьшение давления на задней полусфере. Обратное происходит, когда движение замедляется. Результирующее давление в направлении движения выражается, как и раньше, формулой

$$-\int_0^\pi 2\pi a\sin\theta\cdot a\,d\theta\cdot p\cos\theta=-\frac{2}{3}\pi\varrho a^3\frac{dU}{dt}.$$

§ 93. Мы можем применить этот же метод, чтобы найти движение, образующееся в жидкости, заключенной между твердым шаром и концентрической сферической оболочкой, когда шар движется с данной скоростью U.

Взяв начало координат в центре шара, мы видим, что необходимо применить сферические функции как положительной, так и отрицательной степени, так как наполненное жидкостью пространство ограничено снаружи и изнутри; действительно, необходимо удовлетворить двум граничным условиям:

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial r}=U\cos\theta \quad \text{для } r=a \ (a-\text{радиус шара})$$

и

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r}=0 \qquad \text{для } r=b \ (b-\text{радиус внешней оболочки}),$$

причем ось x совпадает, как и выше, с направлением движения.

Мы, следовательно, полагаем

$$\varphi=\left(Ar+\frac{B}{r^2}\right)\cos\theta. \tag{1}$$

Приведенные выше условия дают тогда

$$A-\frac{2B}{a^3}=-U, \quad A-\frac{2B}{b^3}=0,$$

а отсюда

$$A=\frac{a^3}{b^3-a^3}U, \quad B=\frac{1}{2}\frac{a^3b^3}{b^3-a^3}U. \tag{2}$$

Кинетическую энергию жидкости мы получим из

$$2T=-\varrho\iint\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial r}\,dS,$$

где интегрирование распространяется по внутренней сферической поверхности, так как на внешней $\frac{\partial\varphi}{\partial r}=0$. Мы найдем

$$2T=\frac{2}{3}\pi\frac{b^3+2a^3}{b^3-a^3}\varrho a^3U^2. \tag{3}$$

Оказывается, что эффективное приращение инертной массы равно теперь [1])

$$\frac{2}{3}\pi\frac{b^3+2a^3}{b^3-a^3}\varrho a^3. \tag{4}$$

Если b уменьшается от ∞ до a, то это выражение непрерывно возрастает от $\frac{2}{3}\pi\varrho a^3$ до ∞ в согласии с теоремой о минимуме Кельвина (§ 45). Другими словами, введение в задачу § 92 твердой сферической разделяющей стенки действует для всякой данной скорости шара как вынужденное увеличение кинетической энергии и, следовательно, по существу, как увеличение инерции системы.

§ 94. Во всех случаях, в которых движение жидкости имеет место в плоскостях, проходящих через общую прямую, и для всех плоскостей этого пучка одинаково, существует функция тока, которая в некотором отношении аналогична функции тока плоского движения, рассмотренной в прошлой главе. Если взять в некоторой плоскости пучка две точки A и P, из которых A неподвижна,

---

[1]) Stokes, см. сноску на стр. 155.

а P переменна, и затем рассматривать кольцевую поверхность, которая образуется отрезком AP при вращении его около оси симметрии, то поток через эту поверхность, очевидно, есть функция положения P. Обозначим эту функцию через $2\pi\psi$ и совместим ось x с осью симметрии, тогда мы можем сказать, что ψ есть функция от x и $\tilde{\omega}$, где x есть абсцисса точки P, а $\tilde{\omega}=(y^2+z^2)^{1/2}$ есть ее расстояние от оси x. Кривые $\psi=\text{const.}$ будут, очевидно, линиями тока на рассматриваемой плоскости.

Если P' есть точка, бесконечно близкая к P, лежащая в той же самой меридиональной плоскости, то из вышеизложенного определения следует, что компонента скорости, перпендикулярная к PP', будет равна

$$\frac{2\pi\delta\psi}{2\pi\tilde{\omega}\cdot PP'};$$

отсюда следует, беря PP' сначала параллельно $\tilde{\omega}$, а затем параллельно x,

$$u=-\frac{1}{\tilde{\omega}}\frac{\partial\psi}{\partial\tilde{\omega}}, \qquad v=\frac{1}{\tilde{\omega}}\frac{\partial\psi}{\partial x}, \tag{1}$$

где u и v суть компоненты скорости жидкости соответственно в направлении x и $\tilde{\omega}$ и где знак устанавливается так же, как и в § 59.

Эти кинематические соотношения можно также получить из формы, которую принимает уравнение неразрывности при рассматриваемых условиях. Если мы выразим, что полный поток через кольцеобразную область, образованную вращением прямоугольного элемента поверхности $\delta x\,\delta\tilde{\omega}$ вокруг оси, равен нулю, то получим

$$\frac{\partial}{\partial x}(u\cdot 2\pi\tilde{\omega}\,\delta\tilde{\omega})\,\delta x+\frac{\partial}{\partial\tilde{\omega}}(v\cdot 2\pi\tilde{\omega}\,\delta x)\,\delta\tilde{\omega}=0,$$

или

$$\frac{\partial}{\partial x}(\tilde{\omega}u)+\frac{\partial}{\partial\tilde{\omega}}(\tilde{\omega}v)=0, \tag{2}$$

а это уравнение показывает, что

$$\tilde{\omega}v\,dx-\tilde{\omega}u\,d\tilde{\omega}$$

есть полный диференциал. Обозначая его через $d\psi$, мы получим соотношения (1)[1]).

До сих пор мы не делали предположения, что движение свободно от вихрей; условие того, что движение невихревое, имеет вид

$$\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial\tilde{\omega}}=0,$$

---

[1]) Функция тока в случае симметрии вокруг оси введена в этом виде Stokes, On the Steady Motion of Incompressible Fluids, Camb. Trans., VII (1842) (Papers, I, 1).

Математическая теория разработана очень обстоятельно Sampson, On Stokes'Current-Function, Phil. Trans. A, CLXXXII (1891).

а это приводит к уравнению

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial\tilde{\omega}^2}-\frac{1}{\tilde{\omega}}\frac{\partial\psi}{\partial\tilde{\omega}}=0. \tag{3}$$

Диференциальное уравнение для φ мы получим, положив в *уравнении* (2)

$$u=-\frac{\partial\varphi}{\partial x};\quad v=-\frac{\partial\varphi}{\partial\tilde{\omega}};$$

оно будет иметь вид

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\tilde{\omega}^2}+\frac{1}{\tilde{\omega}}\frac{\partial\varphi}{\partial\tilde{\omega}}=0. \tag{4}$$

Отсюда видно, что функции φ и ψ нельзя переставлять (как это имело место в § 62); они даже имеют различные размерности.

Кинетическая энергия жидкости внутри области, ограниченной произвольной поверхностью вращения около оси, будет вычисляться по формуле

$$2T=-\varrho\iint\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}dS=\varrho\int\varphi\frac{\partial\psi}{\tilde{\omega}\partial s}2\pi\tilde{\omega}ds=2\pi\varrho\int\varphi\,d\psi, \tag{5}$$

где δs есть элемент того сечения, по которому меридиональная плоскость пересекается с ограничивающей поверхностью, и интегрирование проводится в соответствующих направлениях по различным частям этого сечения; ср. § 61 (2).

§ 95. В случае наличия точечного источника в начале координат, потенциал скоростей которого есть

$$\varphi=\frac{1}{r}, \tag{1}$$

поток через произвольную замкнутую кривую численно равен телесному углу, под которым кривая видна из начала координат. Для круга с осью Ox, радиус которого виден из O под углом θ, имеем, следовательно, принимая во внимание знак,

$$2\pi\psi=-2\pi(1-\cos\theta).$$

Если мы опустим постоянный член, то будем иметь

$$\psi=\frac{x}{r}=\frac{\partial r}{\partial x}. \tag{2}$$

Решения, соответствующие любому числу простых источников, помещенных в различных точках оси x, могут быть, очевидно, налагаемы друг на друга для двойного источника (дублета), когда

$$\varphi=-\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r}=\frac{\cos\theta}{r^2}; \tag{3}$$

будем иметь, следовательно,

$$\psi=-\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}=-\frac{\tilde{\omega}^2}{r^3}=-\frac{\sin^2\theta}{r}. \tag{4}$$

И вообще: простой объемной сферической функции степени $-n-1$, т. е. функции

$$\varphi = A\frac{\partial^n}{\partial x^n}\frac{1}{r}, \tag{5}$$

соответствует функция[1])

$$\psi = A\frac{\partial^{n+1} r}{\partial x^{n+1}}. \tag{6}$$

Более общая формула, применимая к сферическим функциям произвольной степени, безразлично целой или нет, получается следующим образом. Применяя полярные координаты r и θ и совмещая линейный элемент PP' § 94 сначала с $r\,\delta\theta$, а затем с δr, находим компоненты скорости в меридиональной плоскости вдоль r и перпендикулярно к r

$$-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{r\,\partial\theta}, \quad \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial r}. \tag{7}$$

Таким образом, в случае безвихревого движения мы будем иметь

$$\frac{\partial\psi}{\sin\theta\,\partial\theta} = r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial r} = -\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}. \tag{8}$$

Если

$$\varphi = r^n S_n, \tag{9}$$

где S_n есть зональная сферическая функция n-го порядка, то, положив $\mu = \cos\theta$, мы получим

$$\frac{\partial\psi}{\partial\mu} = -nr^{n+1}S_n, \quad \frac{\partial\psi}{\partial r} = r^n(1-\mu^2)\frac{dS_n}{d\mu}.$$

Из последнего уравнения получим функцию тока

$$\psi = \frac{1}{n+1}r^{n+1}(1-\mu^2)\frac{dS_n}{d\mu}, \tag{10}$$

которая необходимо должна удовлетворять и первому соотношению; это легко можно проверить с помощью (1) § 84.

Таким образом в случае зональной сферической функции P_n мы будем иметь соответствующие выражения:

$$\varphi = r^n P_n(\mu), \qquad \psi = \frac{1}{n+1}r^{n+1}(1-\mu^2)\frac{dP_n}{d\mu} \tag{11}$$

и

$$\varphi = r^{-n-1}P_n(\mu), \quad \psi = -\frac{1}{n}r^{-n}(1-\mu^2)\frac{dP_n}{d\mu}, \tag{12}$$

причем выражения (12) должны быть эквивалентны (5) и (6).

---

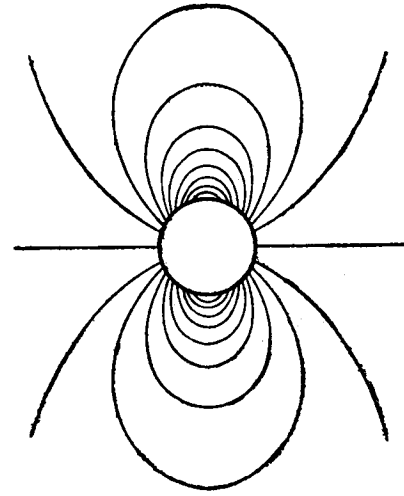
[1]) Stefan, Über die Kraftlinien eines um eine Axe symmetrischen Feldes, Wied. Ann., XVII (1882).

Те же самые соотношения, конечно, имеют место и для зональных сферических функций второго рода Q_n.

§ 96. В § 92 мы видели, что движение, вызываемое твердым шаром в неограниченной жидкости, можно рассматривать как образованное наличием дублета в центре шара. Сравнивая данные там формулы с (4) § 95, мы видим, что функция тока, соответствующая движению шара, будет равна

$$\psi = -\frac{1}{2} U \frac{a^3}{r} \sin^2 \theta. \qquad (1)$$

Вид линий тока, проведенных для нескольких равноотстоящих значений ψ, изображен на фиг. 28. Линии же тока по отношению к шару[1]) представлены в конце главы VII.



Фиг. 28.

Функция тока, соответствующая двум дублетам, оси которых направлены вдоль оси x в противоположные стороны, имеет вид

$$\psi = \frac{A\tilde{\omega}^2}{r_1^3} - \frac{B\tilde{\omega}^2}{r_2^3}, \qquad (2)$$

где r_1 и r_2 означают расстояния произвольной точки от положений P_1, P_2 обоих дублетов. На поверхности тока $\psi = 0$ имеем

$$\frac{r_1}{r_2} = \left(\frac{A}{B}\right)^{1/3},$$

т. е. эта поверхность есть сфера, для которой P_1 и P_2 суть обратные (инверсионные) точки. Если O есть центр этой сферы и a ее радиус, то находим

$$\frac{A}{B} = \frac{(OP_1)^3}{a^3} = \frac{a^3}{(OP_2)^3}. \qquad (3)$$

Эта сфера может быть принята за неподвижную границу жидкости с обеих сторон, и мы получаем таким образом движение, образованное дублетом (или движением бесконечно малой сферы вдоль Ox) при наличии твердой сферической границы. Возмущающее влияние этой сферы на линии тока таково, как если бы оно происходило от дублета противоположного знака, помещенного в точке инверсии положения первого дублета, причем отношение мощности обоих дублетов дано формулой (3)[2]). Этот воображаемый дублет можно назвать *зеркальным* изображением первоначального.

Существует также простой способ построения зеркального изображения точечного источника относительно неподвижной сферы. Изображение источника мощности m в точке P будет составляться из источника мощности $m\frac{OQ}{a}$, помещенного в точке инверсии Q, и стоков, непрерывно распределен-

---

[1]) То-есть линии тока относительного движения жидкости. *Прим. ред.*

[2]) Этот результат получен Stokes, On the Resistance of a Fluid to two Oscillating Spheres, Brit. Ass. Report, 1847 (Papers, I, 230).

ных с постоянной линейной плотностью $-\frac{m}{a}$ вдоль отрезка, соединяющего P с центром O[1]).

Это можно получить с помощью интеграции из предшествующего результата, но будет проще проверить это непосредственно. Из формулы (2) § 95 как раз получается, что функция тока, соответствующая линии источников с плотностью m, будет равна

$$\psi = m(r - r'), \tag{4}$$

где r, r' суть расстояния двух концов линии от рассматриваемой точки. А тогда указанное выше расположение источников в какой-либо точке R на самой сфере будет давать

$$\psi = -m\cos RPO - m\frac{OQ}{a}\cos OQR - \frac{m}{a}(OR - QR). \tag{5}$$

Так как

$$QR = OR\cos ORQ + OQ\cos OQR \text{ и } RPO = ORQ,$$

то это равенство приводится к $\psi = -m$, т. е. ψ будет постоянной на сфере.

Для вычисления силы, действующей на сферу, обратимся к зональным сферическим функциям. Если возьмем за начало центр O, то потенциал скоростей первоначального источника вблизи самой сферы представится в виде

$$\frac{\varphi}{m} = \frac{1}{c} + \frac{r\cos\theta}{c^2} + \frac{r^2(3\cos^2\theta - 1)}{2c^3} + \ldots \tag{6}$$

Движение, обусловленное присутствием сферы, будет тогда даваться потенциалом скоростей вида

$$\frac{\varphi'}{m} = \frac{a^3\cos\theta}{2c^2r^2} + \frac{a^5(3\cos^2\theta - 1)}{3c^3r^3} + \ldots, \tag{7}$$

так как это дает $\frac{\partial}{\partial r}(\varphi + \varphi') = 0$ для $r = a$. В таком случае скорость на поверхности будет

$$q = -\frac{\partial}{a\,\partial\theta}(\varphi + \varphi') = \frac{3m}{2c^2}\sin\theta + \frac{5ma}{3c^3}\sin\theta\cos\theta + \ldots \tag{8}$$

Для получения приближенного результата мы можем в разложении (8) ограничиться выписанными членами. Тогда результирующая сила, направленная к P, будет равна

$$X = -\int_0^\pi p\cos\theta\, 2\pi a^2\sin\theta\, d\theta = \pi\varrho a^2\int_0^\pi q^2\sin\theta\cos\theta\, d\theta = \frac{4\pi\varrho a^3 m^2}{c^5}; \tag{9}$$

Если f будет ускорением в O в случае, когда сфера удалена, то так как $f = \frac{2m^2}{c^5}$, будем иметь

$$X = 2\pi\varrho a^3 f. \tag{10}$$ [2])

§ 97. Ранкин[3]) применяет метод, подобный методу § 71, для того, чтобы определить формы тел вращения, которые при движе-

---

[1]) Hicks, см. ниже сноску на стр. 168; см. фигуру 10 на стр. 94.

[2]) Проф. G. I. Taylor, Aeronautical Research Committee, R. M., 1166 (1928);

[3]) Rankine, On the Mathematical Theory of Stream Lines, especially those with Four Foci and upwards, Phil. Trans., 1871, стр. 267 (эта работа не содержится в собрании, указанном на стр. 85).

нии в направлении своей оси порождают в окружающей жидкости заданный вид симметричного относительно оси безвихревого движения.

Если обозначить через U скорость твердого тела, а через δs элемент его меридиана, то нормальная компонента скорости для произвольной точки поверхности будет равна $U\frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial s}$, а та же компонента скорости соприкасающейся частицы жидкости равна $\frac{\partial\psi}{\tilde{\omega}\partial s}$. Приравнивая эти значения и интегрируя вдоль меридиана, получим

$$\psi = -\frac{1}{2}U\tilde{\omega}^2 + \text{const}. \tag{1}$$

Вставляя в это уравнение значение ψ, соответствующее какому-нибудь распределению источников вдоль оси симметрии, мы получим уравнение семейства линий тока. Если сумма мощностей источников равна нулю, то одна из этих линий тока будет определять профиль конечного твердого тела вращения, обтекание которого и будет иметь место.

Этим путем мы легко можем проверить решение, полученное для шара; именно, полагая

$$\psi = \frac{A\tilde{\omega}^2}{r^3}, \tag{2}$$

мы найдем, что выражение (1) для $r = a$ будет удовлетворяться при предположении, что

$$A = -\frac{1}{2}Ua^3, \tag{3}$$

что согласуется с выражением (1) § 96.

Оказывается, что с помощью непрерывного распределения источников и стоков вдоль оси можно получить такие формы, которые эмпирически признаны выгодными в качестве профилей дирижаблей. В таких случаях можно вычислить давление жидкости и результаты сравнить с опытом.

§ 98. Движение жидкости, ограниченной *двумя* сферическими поверхностями, в некоторых случаях можно найти с помощью метода последовательных приближений. Для случая двух шаров, движущихся в направлении их линий центров, решение задачи существенно облегчается благодаря результатам, приведенным в конце § 96 относительно „изображения" дублета в сфере.

Пусть a, b суть радиусы, а c — расстояние между центрами A, B (фиг. 29) обоих шаров. Обозначим через U скорость A в направлении к B, а через U' скорость B в направлении к A. Далее, пусть для некоторой произвольной точки P

$$AP = r, \quad BP = r', \quad PAB = \theta, \quad PBA = \theta'.$$

Потенциал скоростей будет иметь следующий вид:

$$U\varphi + U'\varphi', \tag{1}$$

где функции φ и φ' определяются следующими условиями:

1) $$\Delta\varphi=0, \quad \Delta\varphi'=0 \tag{2}$$

во всей жидкости;

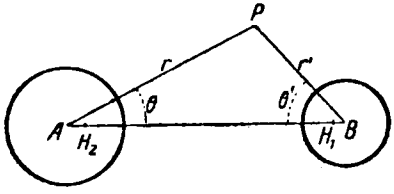
2) их производные по координатам обращаются в нуль в бесконечности;

3) $$\frac{\partial\varphi}{\partial r}=-\cos\theta, \quad \frac{\partial\varphi'}{\partial r}=0 \tag{3}$$

на поверхности шара A, в то время как

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r}=0, \quad \frac{\partial\varphi'}{\partial r'}=-\cos\theta \tag{4}$$

на поверхности шара B. Легко усмотреть, что φ есть значение потенциала скоростей для случая, когда A движется со скоростью, равной единице, по направлению к B, в то время как B находится в покое; такой же смысл имеет и φ'.



Фиг. 29.

Чтобы найти φ, заметим, что при отсутствии B движение жидкости происходило бы таким образом, как если бы оно было обусловлено дублетом, помещенным в A, и ось которого имеет направление AB. Теорема § 96 показывает, что мы можем удовлетворить условию обращения в нуль скорости по нормали на поверхности шара B, если введем второй дублет, а именно „изображение" дублета в A относительно шара B. Это изображение лежит в H_1, точке, являющейся инверсией A по отношению к шару B; его ось имеет направление AB и мощность равна $-\mu_0\frac{b^3}{c^3}$, где μ_0 есть мощность первоначального источника в A, именно

$$\mu_0=2\pi a^3.$$

Движение, происходящее от действия обоих дублетов A и H_1, будет, однако, нарушать условие, которое должно удовлетворяться на поверхности шара A; чтобы уничтожить на сфере B нормальные компоненты скорости, обусловленные дублетом H_1, мы должны взять в H_2 еще дублет, являющийся изображением H_1 относительно шара A. Благодаря этому на поверхности B получается нормальная компонента скорости, которая опять будет уничтожаться прибавлением изображения H_3 относительно B и т. д. Если обозначим через $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ мощности последовательных изображений дублетов, а через $f_1, f_2, f_3, \ldots$ их расстояния от A, то будем иметь

$$\left.\begin{aligned}
&f_1=c-\frac{b^2}{c}, && f_2=\frac{a^2}{f_1}, && \frac{\mu_1}{\mu_0}=-\frac{b^3}{c^3}, && \frac{\mu_2}{\mu_1}=-\frac{a^3}{f_1^3},\\
&f_3=c-\frac{b^2}{c-f_2}, && f_4=\frac{a^2}{f_3}, && \frac{\mu_3}{\mu_2}=-\frac{b^3}{(c-f_2)^3}, && \frac{\mu_4}{\mu_3}=-\frac{a^3}{f_3^3},\\
&f_5=c-\frac{b^2}{c-f_4}, && f_6=\frac{a^2}{f_5}, && \frac{\mu_5}{\mu_4}=-\frac{b^3}{(c-f_4)^3}, && \frac{\mu_6}{\mu_5}=-\frac{a^3}{f_5^3},
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

и т. д.; закон образования изображений очевиден. Интенсивность изображений дублетов все время уменьшается и притом очень быстро, если радиус каждого шара мал по сравнению с кратчайшим расстоянием между обеими поверхностями.

Формула для кинетической энергии будет теперь иметь вид

$$2T=-\varrho\iint(U\varphi+U'\varphi')\left(U\frac{\partial\varphi}{\partial n}+U'\frac{\partial\varphi'}{\partial n}\right)dS=LU^2+2MUU'+NU'^2, \tag{6}$$

где

$$L=-\varrho\iint\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}dS_A,\quad M=-\varrho\iint\varphi\frac{\partial\varphi'}{\partial n}dS_B=-\varrho\iint\varphi'\frac{\partial\varphi}{\partial n}dS_A,$$

$$N=-\varrho\iint\varphi'\frac{\partial\varphi'}{\partial n}dS_B, \tag{7}$$

а индексы указывают, по поверхности какого шара распространяется интегрирование. Равенство обоих выражений для M следует из теоремы Грина (§ 44).

Значение φ вблизи поверхности A можно получить из результатов (7) и (8) § 85; а именно, мы получим

$$4\pi\varphi=(\mu_0+\mu_2+\mu_4+\ldots)\frac{\cos\theta}{r^2}-2\left(\frac{\mu_1}{f_1^3}+\frac{\mu^3}{f_2^3}+\ldots\right)r\cos\theta+\ldots, \tag{8}$$

причем мы опускаем остальные члены, содержащие зональные сферические функции высшего порядка, так как они при последующем интегрировании по поверхности обращаются в нуль вследствие свойства ортогональности (§ 87). Положив

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}=-\cos\theta,$$

мы найдем с помощью уравнений (5)

$$L=\frac{1}{3}\varrho(\mu_0+3\mu_2+3\mu_4+\ldots)=$$
$$=\frac{2}{3}\pi\varrho a^3\left(1+3\frac{a^3b^3}{c^3f_1^3}+3\frac{a^6b^6}{c^3f_1^3(c-f_2)^3f_2^3}+\ldots\right). \tag{9}$$

Получается, что во всех случаях присоединенная масса шара A возрастает от присутствия неподвижного шара B; ср. § 93.

Выражение для N может быть сразу написано из соображений симметрии; оно имеет следующий вид:

$$N=\frac{2}{3}\pi\varrho b^3\left(1+3\frac{a^3b^3}{c^3f_1'^3}+3\frac{a^6b^6}{c^3f_1'^3(c-f_2')^3f_3'^3}+\ldots\right), \tag{10}$$

где

$$\left.\begin{aligned}
f_1'&=c-\frac{a^2}{c}, & f_2'&=\frac{b^2}{f_1'},\\
f_3'&=c-\frac{a^2}{c-f_2'}, & f_4'&=\frac{b^2}{f_3'},\\
f_5'&=c-\frac{a^2}{c-f_4'}, & f_6'&=\frac{b^2}{f_5'}
\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

и т. д.

Чтобы определить M, необходимо знать значение φ' вблизи поверхности A; этот потенциал обусловлен дублетами μ_0', μ_1', μ_2', μ_3', ..., удаленными от A на расстояниях c, $c-f_1'$, $c-f_3'$, ..., причем $\mu_0'=-2\pi b^3$, и

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\mu_1'}{\mu_0'}&=-\frac{a^3}{c^3}, & \frac{\mu_2'}{\mu_1'}&=-\frac{b^3}{f_1'^3},\\
\frac{\mu_3'}{\mu_2'}&=-\frac{a^3}{(c-f_2')^3}, & \frac{\mu_4'}{\mu_3'}&=-\frac{b^3}{f_3'^3},\\
\frac{\mu_5'}{\mu_4'}&=-\frac{a^3}{(c-f_4')^3}, & \frac{\mu_6'}{\mu_5'}&=-\frac{b^3}{f_5'^3}
\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

и т. д. Это дает для точек вблизи поверхности A

$$4\pi\varphi' = (\mu_1' + \mu_3' + \mu_5' + \ldots)\frac{\cos\theta}{r^2} -$$

$$-2\left(\frac{\mu_0'}{c^3} + \frac{\mu_2'}{(c-f_2')^3} + \frac{\mu_4'}{(c-f_4')^3} + \ldots\right) r\cos\theta + \text{ и т. д.} \tag{13}$$

Отсюда следует

$$M = -\varrho\iint \varphi'\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dS_A = \varrho(\mu_1' + \mu_3' + \mu_5' + \ldots) =$$

$$= 2\pi\varrho\frac{a^3b^3}{c^3}\left\{1 + \frac{a^3b^3}{f_1'^3(c-f_2')^3} + \frac{a^6b^6}{f_1'^3f_3'^3(c-f_2')^3(c-f_4')^3} + \ldots\right\}. \tag{14}$$

Если отношения $\frac{a}{c}$ и $\frac{b}{c}$ оба малы, то будем иметь приближенно[1])

$$\left.\begin{aligned} L &= \frac{2}{3}\pi\varrho a^3\left(1 + 3\frac{a^3b^3}{c^6}\right), \quad M = 2\pi\varrho\frac{a^3b^3}{c^3}, \\ N &= \frac{2}{3}\pi\varrho b^3\left(1 + 3\frac{a^3b^3}{c^6}\right). \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Если в приведенных выше результатах положить $b = a$, $U' = U$, то плоскость, перпендикулярная к AB и делящая пополам отрезок AB, есть плоскость симметрии и поэтому может рассматриваться как твердая граница жидкости, находящейся по обеим ее сторонам. Если положить $c = 2h$, то мы найдем тогда для кинетической энергии жидкости, в которой движется шар на расстоянии h от твердой плоской границы перпендикулярно к ней, следующее выражение:

$$2T = \frac{2}{3}\pi\varrho a^3\left(1 + \frac{3}{8}\frac{a^3}{h^3} + \ldots\right)U^2. \tag{16}$$

Этот результат принадлежит Стоксу.

§ 99. Если шары движутся перпендикулярно к направлению линии их центров, то задача значительно усложняется; поэтому мы довольствуемся первыми приближениями и за более обстоятельным исследованием отошлем к сочинениям, приведенным на стр. 168.

Пусть шары двигаются со скоростями V и V' параллельно друг другу и перпендикулярно к AB; обозначим через r, θ, ω и r', θ', ω' две системы полярных координат, полюсы которых лежат в A и B, а полярные оси имеют направление скоростей V, V'. Потенциал скоростей будет иметь тогда вид

$$V\varphi + V'\varphi',$$

при соблюдении следующих условий на границах:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = -\cos\theta, \quad \frac{\partial\varphi'}{\partial r} = 0 \qquad \text{для } r = a \tag{1}$$

и

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r'} = 0, \qquad \frac{\partial\varphi'}{\partial r'} = -\cos\theta' \text{ для } r' = b. \tag{2}$$

---

[1]) Вплоть до этой степени приближения результаты могут быть найдены более простым способом, не вводя „изображений", а именно с помощью приема, подобного изложенному в следующем параграфе.

При отсутствии шара B потенциал скоростей, соответствующий движению шара A со скоростью, равной единице, равен

$$\frac{1}{2}\frac{a^3}{r^2}\cos\theta.$$

Так как $r\cos\theta = r'\cos\theta'$, то вблизи B значение этого потенциала приближенно равно

$$\frac{1}{2}\frac{a^3}{c^3}r'\cos\theta'.$$

Этот потенциал скоростей на поверхности B создает нормальные компоненты скорости, которые могут быть погашены прибавлением к потенциалу выражения

$$\frac{1}{4}\frac{a^3b^3}{c^3}\frac{\cos\theta'}{r'^2},$$

которое вблизи A приближенно равно

$$\frac{1}{4}\frac{a^3b^3}{c^6}r\cos\theta.$$

Чтобы погасить появившиеся теперь нормальные компоненты скорости на поверхности A, мы должны еще прибавить член

$$\frac{1}{8}\frac{a^6b^3}{c^6}\frac{\cos\theta}{r^2}.$$

Если мы прервем здесь наш процесс и соберем наши результаты, то для поверхности шара A получим

$$\varphi = \frac{1}{2}a\left(1+\frac{3}{4}\frac{a^3b^3}{c^6}\right)\cos\theta, \tag{3}$$

а для поверхности B

$$\varphi = \frac{3}{4}b\frac{a^3}{c^3}\cos\theta'. \tag{4}$$

Обозначая через P, Q, R коэфициенты в выражении для кинетической энергии

$$2T = PV^2 + 2QVV' + RV'^2, \tag{5}$$

мы будем тогда иметь

$$\left.\begin{aligned} P &= -\varrho\iint\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}dS_A = \frac{2}{3}\pi\varrho a^3\left(1+\frac{3}{4}\frac{a^3b^3}{c^6}\right),\\ Q &= -\varrho\iint\varphi\frac{\partial\varphi'}{\partial n}dS_B = \pi\varrho\frac{a^3b^3}{c^3},\\ R &= -\varrho\iint\varphi'\frac{\partial\varphi'}{\partial n}dS_B = \frac{2}{3}\pi\varrho b^3\left(1+\frac{3}{4}\frac{a^3b^3}{c^6}\right).\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Случай шара, который движется на расстоянии h параллельно неподвижной граничной плоскости, мы получим, если положим $b=a$, $V=V'$

$c=2h$ и полученное значение T разделим пополам; тогда будем иметь

$$2T=\frac{2}{3}\pi\varrho a^3\left(1+\frac{3}{16}\frac{a^3}{h^3}\right)V^2. \tag{7}$$

Этот результат, тоже данный Стоксом, можно сравнить с результатом (16) § 98 [1]).

Цилиндрические функции

§ 100. Если мы введем цилиндрические координаты x, $\tilde{\omega}$, ω, то уравнение $\Delta\varphi=0$ принимает следующий вид:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\tilde{\omega}^2}+\frac{1}{\tilde{\omega}}\frac{\partial\varphi}{\partial\tilde{\omega}}+\frac{1}{\tilde{\omega}}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega^2}=0. \tag{1}$$

Это уравнение можно получить непосредственным преобразованием координат или, еще проще, выражая по способу § 83, что полный поток через поверхность, ограничивающую элемент $\delta x\,\delta\tilde{\omega}\,\tilde{\omega}\,\delta\omega$, равен нулю.

В случае симметрии относительно оси x уравнение приводится к виду (4) § 94. Частное решение его тогда будет

$$\varphi=e^{\pm kx}\chi(\tilde{\omega}),$$

где $\chi(\tilde{\omega})$ удовлетворяет диференциальному уравнению

$$\chi''(\tilde{\omega})+\frac{1}{\tilde{\omega}}\chi'(\tilde{\omega})+k^2\chi(\tilde{\omega})=0. \tag{2}$$

Это есть диференциальное уравнение бесселевых функций нулевого порядка.

Общее решение этого диференциального уравнения состоит, конечно, из суммы двух определенных функций от $\tilde{\omega}$, из которых каждая умножается на произвольную постоянную. Решение, конечное для $\tilde{\omega}=0$, легко находится в виде степенного ряда с положительными показателями; оно обыкновенно обозначается через $CJ_0(k\tilde{\omega})$, где

$$J_0(\zeta)=1-\frac{\zeta^2}{2^2}+\frac{\zeta^4}{2^4\cdot 4^2}-\ldots \tag{3}$$

---

[1]) Для более полного рассмотрения математической задачи движения двух шаров укажем на следующие работы: W. M. Hicks, On the Motion of two Spheres in a Fluid, Phil. Trans., 1880, стр. 455; R. A. Herman, On the Motion of two Spheres in Fluid, Quart. Journ. Math., XXII (1887); Basset, On the Motion of two Spheres in a Liquid, etc. Proc. Lond. Math. Soc., XVIII, 369 (1887); см. также Carl Neumann, Hydrodynamische Untersuchungen, Leipzig, 1883; Basset, Hydrodynamics, Cambridge, 1888. Взаимодействие „пульсирующих" шаров, т. е. шаров, которые периодически меняют свой объем, исследовано С. А. Бьеркнесом, и им дано механическое толкование с помощью электрических и других сил. Полное изложение этих исследований дано его сыном В. Бьеркнесом (V. Bjerknes, Vorlesungen über Hydrodynamische Fernkräfte, Leipzig 1900—1902). Задача была исследована также Hicks, Camb. Proc. III, 276 (1879); IV, 29 (1880) и Voigt, Gött. Nachrichten, 1891, стр. 37.

Решение уравнения $\Delta\varphi = 0$ имеет таким образом вид[1])

$$\varphi = e^{\pm kx} J_0(k\tilde{\omega}). \tag{4}$$

Из § 94 легко видеть, что соответствующее значение функции тока равно

$$\psi = \mp \tilde{\omega} e^{\pm kx} J_0'(k\tilde{\omega}). \tag{5}$$

Формулу (4) можно рассматривать как частный случай формулы (6) § 89; она эквивалентна формуле

$$\varphi = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{\pm k(x+i\tilde{\omega}\cos\vartheta)} d\vartheta, \tag{6}$$

так как

$$J_0(\zeta) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(\zeta\cos\vartheta)\,d\vartheta = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{i\zeta\cos\tau}\,d\vartheta, \tag{7}$$

что легко проверить, если косинус разложить в ряд и почленно проинтегрировать.

Кроме того, выражение (4) можно рассматривать как предельную форму, к которой стремится объемная зональная сферическая функция, когда порядок (n) и одновременно расстояние начала от рассматриваемой точки делается бесконечно большим, причем обе стремящиеся к бесконечности величины должны удовлетворять определенному соотношению[2]).

Итак, мы можем написать

$$\varphi = \frac{r^n}{a^n} P_n(\mu) = \left(1 + \frac{x}{a}\right)^n \chi_n(\tilde{\omega}), \tag{8}$$

где мы временно заменили значения x и $\tilde{\omega}$, полагая

$$r = a + x, \quad \tilde{\omega} = 2a\sin\frac{1}{2}\theta,$$

в то время как

$$\chi_n(\tilde{\omega}) = 1 - \frac{n(n+1)}{2^2}\frac{\tilde{\omega}^2}{a^2} + \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{2^2\cdot 4^2}\frac{\tilde{\omega}^4}{a^4} - \ldots \tag{9}$$

[см. уравнение (4) § 85]. Если мы положим теперь $k = \frac{n}{a}$ и предположим, что a и n делаются бесконечно большими, в то время как k остается конечным, то символы x и $\tilde{\omega}$ принимают опять их прежние значения, и мы опять получаем формулу (4) с верхним знаком в показателе; нижний знак получится, если исходить от выражения

$$\varphi = \frac{a^{n+1}}{r^{n+1}} P_n(\mu).$$

---

[1]) С другими обозначениями эти решения можно найти у Пуассона, см. примечание на стр. 34.

[2]) Этот прием был указан, не ограничиваясь случаем симметрии, Thomson and Tait, § 783 (1867).

Этот же прием позволяет выразить произвольную функцию от $\tilde{\omega}$ через бесселевы функции нулевого порядка[1]). Согласно § 88 произвольную функцию угла широты на сферической поверхности можно разложить по зональным сферическим функциям в виде

$$F(\mu)=\sum\left(n+\frac{1}{2}\right)P_n(\mu)\int_{-1}^{+1}F(\mu')\,P_n(\mu')\,d\mu'. \tag{10}$$

Обозначив через $\tilde{\omega}$ длину хорды, проведенной от полюса ($\theta=0$) сферы к переменной точке, получим

$$\tilde{\omega}=2a\sin\frac{1}{2}\theta,\quad \tilde{\omega}\,\delta\tilde{\omega}=-a^2\,\delta\mu,$$

где a есть радиус; формулу (10) можно теперь написать так:

$$f(\tilde{\omega})=\frac{1}{a^2}\sum\left(n+\frac{1}{2}\right)H_n(\tilde{\omega})\int_0^{2a}f(\tilde{\omega}')\,H_n(\tilde{\omega}')\,\tilde{\omega}'\,d\tilde{\omega}'. \tag{11}$$

Если мы теперь положим

$$k=\frac{n}{a},\quad \delta k=\frac{1}{a}$$

и затем заставим a стремиться к бесконечности, то получим важную теорему[2])

$$f(\tilde{\omega})=\int_0^\infty J_0(k\tilde{\omega})\,k\,dk\int_0^\infty f(\tilde{\omega}')\,J_0(k\tilde{\omega}')\,\tilde{\omega}'\,d\tilde{\omega}'. \tag{12}$$

§ 101. Если предположить в (1) функцию φ разложенной в тригонометрический ряд, расположенный по $\cos s\omega$ и $\sin s\omega$, то коэфициент такого члена будет удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\tilde{\omega}^2}+\frac{1}{\tilde{\omega}}\frac{\partial\varphi}{\partial\tilde{\omega}}-\frac{s^2}{\tilde{\omega}^2}\varphi=0. \tag{13}$$

Это уравнение удовлетворяется функцией

$$\varphi=e^{\pm kx}\chi(\tilde{\omega}),$$

причем $\chi(\tilde{\omega})$ удовлетворяет уравнению

$$\chi''(\tilde{\omega})+\frac{1}{\tilde{\omega}}\chi'(\tilde{\omega})+\left(k^2-\frac{s^2}{\tilde{\omega}^2}\right)\chi(\tilde{\omega})=0. \tag{14}$$

Это уравнение есть диференциальное уравнение бесселевых функций порядка s[3]). Решение, конечное для $\tilde{\omega}=0$, может быть написано

---

[1]) Этот прием принадлежит, повидимому, в существенных чертах К. Нейману (1862).

[2]) Более строгое доказательство и историю вопроса см. Ватсон.

[3]) Forsyth, § 100; Уиттекер и Ватсон, гл. XVII.

в форме

$$\chi(\tilde{\omega}) = CJ_s(k\tilde{\omega}),$$

где

$$J_s(\zeta) = \frac{\zeta^s}{2^s\Pi(s)}\left\{1 - \frac{\zeta^2}{2(2s+2)} + \frac{\zeta^4}{2\cdot 4(2s+2)(2s+4)} - \ldots\right\}. \qquad (15)$$

Общее решение уравнения (14) дополнительно содержит бесселеву функцию „второго рода", которой мы займемся в одном из следующих отделов нашего исследования[1]).

Итак, мы получили решения уравнения $\Delta\varphi = 0$ следующего вида:

$$\varphi = \left\{\begin{array}{l} e^{\pm kx} J_s(k\tilde{\omega}) \cos s\omega \\ e^{\pm kx} J_s(k\tilde{\omega}) \sin s\omega. \end{array}\right\} \qquad (16)$$

Можно было бы также получить их, как предельные формы объемных сферических функций

$$\frac{r^n}{a^n} P_n^s(\mu) \begin{cases}\cos s\omega \\ \sin s\omega\end{cases}, \quad \frac{a^{n+1}}{r^{n+1}} P_n^s(\mu) \begin{cases}\cos s\omega \\ \sin s\omega\end{cases},$$

если применить разложение (6) § 86[2]).

§ 102. Формула (12) § 100 позволяет нам, что иногда бывает целесообразно, выразить значение φ по одну сторону безграничной плоскости ($x = 0$) через значения φ или $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ в точках этой плоскости,

---

[1]) Относительно дальнейшей теории бесселевых функций обоих родов мы укажем на Gray and Mathews, Treatise on Bessel-Functions, изд. 2-е, London (1922) и на G. N. Watson, Theory of Bessel-Functions, Cambridge, (1923), где находятся также дальнейшие подробные литературные указания. Обстоятельное исследование по этому вопросу с физической точки зрения можно найти у Rayleigh, Theory of Sound, гл. IX, XVIII, где указаны также многие важные применения.

Числовые таблицы функции $J_s(\zeta)$ составлены Бесселем и Гансеном, а позднее Meissel (Berl. Abh. 1888). Эти последние перепечатаны у Грейя и Матеуса, а также с ценными дополнениями — в учебнике Ватсона. Сокращенные таблицы находятся в цитированных на стр. 114 сборниках Дале, Янке и Эмде.

[2]) Связь между поверхностными сферическими функциями и бесселевыми функциями была указана Mehler, Über die Vertheilung der statischen Elektricität in einem von zwei Kugelkalotten begrenzten Körper, Crelle, LXVIII (1868). Независимо это соотношение было исследовано Rayleigh, On the Relation between the Functions of Laplace and Bessell, Proc. Lond. Math. Soc. IX, 61 [Papers, 338]; см. также Theory of Sound, § 336—338. Существуют также методы представления бесселевых функций „второго рода" как предельные формы объемных сферических функций

$$Q_n(\mu), \quad Q_n^s(\mu) \begin{cases}\cos s\omega \\ \sin s\omega\end{cases},$$

см. об этом Heine, I, стр. 184, 232.

при условии, что имеет место симметрия относительно перпендикулярной к плоскости оси (ox) *). Итак, если имеем

$$\varphi = F(\tilde{\omega}) \quad \text{для } x = 0, \tag{1}$$

то по ту сторону, для которой $x > 0$, будем иметь

$$\varphi = \int_0^\infty e^{-kx} J_0(k\tilde{\omega}) k\, dk \int_0^\infty F(\tilde{\omega}') J_0(k\tilde{\omega}') \tilde{\omega}'\, d\tilde{\omega}. \tag{2}$$

Далее, если имеем

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial x} = f(\tilde{\omega}) \quad \text{для } x = 0, \tag{3}$$

то будем иметь

$$\varphi = \int_0^\infty e^{-kx} J_0(k\tilde{\omega})\, dk \int_0^\infty f(\tilde{\omega}') J_0(k\tilde{\omega}') \tilde{\omega}'\, d\omega'. \tag{4}$$

Показательные функции выбраны таким образом, чтобы они обращались в нуль для $x = \infty$.

Другое решение этой задачи дано уже в § 58; из уравнений (12) и (11) этого параграфа мы заключаем, что

$$\varphi = \frac{1}{2\pi} \iint \varphi \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) dS, \tag{5}$$

и соответственно

$$\varphi = -\frac{1}{2\pi} \iint \frac{\partial\varphi}{\partial x} \frac{dS}{r}, \tag{6}$$

где r обозначает расстояние точки, для которой вычисляется φ, от элемента δS плоскости.

Переходим теперь к некоторым применениям общих формул (2) и (4).

1) Если мы примем в уравнении (4), что функция $f(\tilde{\omega})$ обращается в нуль для всех значений $\tilde{\omega}$ за исключением бесконечно малых значений, для которых она становится бесконечно большой и именно таким образом, что

$$\int_0^\infty f(\tilde{\omega}) 2\pi\tilde{\omega}\, d\tilde{\omega} = \frac{1}{2},$$

то получим

$$4\pi\varphi = \int_0^\infty e^{-kx} J_0(k\tilde{\omega})\, dk; \tag{7}$$

*) Метод можно распространить таким образом, что он будет свободен от этого ограничения.

отсюда, так как $J_0' = -J_1$, следует, согласно (5) § 100,

$$4\pi\varphi = -\tilde{\omega}\int_0^\infty e^{-kx} J_1(k\tilde{\omega})\,dk. \tag{8}$$

Сравнивая эти формулы с соответствующими элементарными выражениями для точечного источника в начале (§ 95), мы видим, что

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^\infty e^{-kx} J_0(k\tilde{\omega})\,dk = \frac{1}{r}, \\ &\int_0^\infty e^{-kx} J_1(k\tilde{\omega})\,dk = \frac{\tilde{\omega}}{r(r+x)}, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

где $r = \sqrt{x^2+\omega^2}$; эти формулы представляют на самом деле известные результаты [1]).

2) Далее, предположим, что источники распределены с равномерной плотностью по части плоскости, заключенной внутри круга $\tilde{\omega} = a$, $x = 0$. Если мы воспользуемся рядами для J_0 и J_1 или будем действовать как-нибудь иначе, то найдем

$$\int_0^a J_0(k\tilde{\omega})\,\tilde{\omega}\,d\tilde{\omega} = \frac{a}{k} J_1(ka); \tag{10}$$

отсюда следует [2])

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{\pi a}\int_0^\infty e^{-kx} J_0(k\tilde{\omega}) J_1(ka)\frac{dk}{k}, \\ \psi &= -\frac{\tilde{\omega}}{\pi a}\int_0^\infty e^{-kx} J_1(k\tilde{\omega}) J_1(ka)\frac{dk}{k}, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

причем постоянный множитель выбран таким образом, что полный поток через круг равен единице.

3) Далее, если плотность источников внутри того же самого круга меняется как $\frac{1}{\sqrt{a^2-\omega^2}}$, то приходим к интегралу [3])

$$\int_0^a J_0(k\tilde{\omega})\frac{\tilde{\omega}\,d\tilde{\omega}}{\sqrt{a^2-\tilde{\omega}^2}} = a\int_0^{\frac{\pi}{2}} J_0(ka\sin\vartheta)\sin\vartheta\,d\vartheta = \frac{\sin ka}{k}. \tag{12}$$

---

[1]) Первый результат принадлежит Lipschitz, Crelle, LVI, 189 (1859); см. Watson, стр. 384. Последний результат получается диференцированием по $\tilde{\omega}$ и интегрированием по x.

[2]) Ср. H. Weber, Crelle, LXXV, 88; Heine, II, 180.

[3]) Формула (12) дана различными авторами; см. Rayleigh, Papers III, 98; Hobson, Proc. Lond. Math. Soc., XXV, 71 (1893).

Для вычисления последнего интеграла заменяют J_0 его разложением в ряд и с каждым членом оперируют отдельно. Отсюда мы получаем

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{2\pi a}\int_0^\infty e^{-kx} J_0(k\tilde{\omega}) \sin ka \frac{dk}{k}, \\ \psi &= -\frac{\tilde{\omega}}{2\pi a}\int_0^\infty e^{-kx} J_1(k\tilde{\omega}) \sin ka \frac{dk}{k}, \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

где постоянный множитель определяется тем же условием, как выше [1]).

Существует известная теорема электростатики, что при распределении плотности заряда, согласно вышепринятому закону, потенциал φ для площади круга постоянен. Независимо от этого можно показать, что

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^\infty J_0(k\tilde{\omega}) \sin ka \frac{dk}{k} = \frac{1}{2}\pi, \quad \text{или} \quad \arcsin\frac{a}{\tilde{\omega}}, \\ &\int_0^\infty J_1(k\tilde{\omega}) \sin ka \frac{dk}{k} = \frac{a-\sqrt{a^2-\tilde{\omega}^2}}{\tilde{\omega}}, \quad \text{или} \quad \frac{a}{\tilde{\omega}}, \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

смотря по тому, будет ли $\tilde{\omega} \lesseqgtr a$ [2]). Формулы (13) дают таким образом течение жидкости через круглое отверстие в тонкой плоской неподвижной стенке. Другое решение мы получим в § 108. Соответствующая двухмерная задача была решена в § 66, п. 1.

4) Предположим, что для $x=0$

$$\varphi = C\sqrt{a^2-\tilde{\omega}^2}, \quad \text{когда} \quad \tilde{\omega} < a,$$

и

$$\varphi = 0, \qquad \text{когда} \quad \tilde{\omega} > a.$$

Тогда найдем

$$\int_0^a J_0(k\tilde{\omega})\sqrt{a^2-\tilde{\omega}^2}\,\tilde{\omega}\,d\tilde{\omega} = a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} J_0(ka\sin\vartheta)\sin\vartheta\cos^2\vartheta\,d\vartheta = a^3\psi_1(ka), \tag{15}$$

где

$$\psi_1(\zeta) = \frac{1}{3}\left(1-\frac{\zeta^2}{2\cdot 5}+\frac{\zeta^4}{2\cdot 4\cdot 5\cdot 7}-\ldots\right) = -\frac{d}{\zeta\,d\zeta}\frac{\sin\zeta}{\zeta}. \tag{16}$$

Поэтому, согласно выражению (2), имеем

$$\varphi = -C\int_0^\infty e^{-kx} J_0(k\tilde{\omega})\frac{d}{dk}\left(\frac{\sin ka}{k}\right)dk. \tag{17}$$

---

[1]) Weber H., Crelle, LXXV (1873); Heine, II, 192.

[2]) Weber H., Crelle, LXXV; Watson, стр. 405; см. также Proc. Lond. Math. Soc., XXXIV, 282.

Отсюда получаем для $x=0$ после интегрирования по частям

$$-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_0 = C\int_0^\infty J_0(k\tilde{\omega}_1)\sin ka\,\frac{dk}{k} + C\tilde{\omega}\int_0^\infty J_0'(k\tilde{\omega})\sin ka\,dk. \tag{18}$$

Значение первого интеграла дано в формулах (14), а что касается второго интеграла, то его значение может быть получено оттуда диференцированием по $\tilde{\omega}$. Мы получим

$$-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_0 = \frac{1}{2}\pi C, \quad \text{или} \quad C\left(\arcsin\frac{a}{\tilde{\omega}} - \frac{a}{\sqrt{\tilde{\omega}^2 - a^2}}\right), \tag{19}$$

смотря по тому, будет ли $\tilde{\omega} \lesseqgtr a$. Если $C = \frac{2}{\pi}U$, то формула (17) представляет случай, когда тонкий круглый диск движется в неограниченной жидкости со скоростью U перпендикулярно к своей плоскости. Выражение для кинетической энергии имеет тогда вид

$$2T = -\varrho\iint\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dS = \pi\varrho C^2\int_0^a\sqrt{a^2-\tilde{\omega}^2}\,2\pi\tilde{\omega}\,d\tilde{\omega} = \frac{2}{3}\pi^2\varrho a^3C^2,$$

или

$$2T = \frac{8}{3}\varrho a^3U^2. \tag{20}$$

Кажущееся увеличение инертной массы диска равно, следовательно, произведению $\frac{2}{\pi}$ ($=0{,}6366$) на массу сферической части жидкости радиуса, равного радиусу диска. Другое исследование этой задачи будет изложено в § 108.

Эллипсоидальные функции

§ 103. Метод сферических функций применим также для решения уравнения

$$\Delta\varphi = 0 \tag{1}$$

при граничных условиях, относящихся к эллипсоидам вращения[1]).

Начнем со случая удлиненного эллипсоида вращения и положим

$$\left.\begin{aligned} x &= k\cos\theta\,\mathrm{ch}\,\eta = k\mu\zeta,\\ y &= \tilde{\omega}\cos\omega,\\ z &= \tilde{\omega}\sin\omega,\\ \text{где}\quad \tilde{\omega} &= k\sin\theta\,\mathrm{sh}\,\eta = k(1-\mu^2)^{1/2}(\zeta^2-1)^{1/2}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

---

[1]) Heine, Über einige Aufgaben, welche auf partielle Differentialgleichungen führen, Crelle, XXVI, 185 (1843) и Kugelfunktionen, II, § 38. См. также Ferrers, гл. VI.

Поверхности $\zeta = \text{const.}$, $\mu = \text{const.}$ представляют соответственно софокусные эллипсоиды и двухполостные гиперболоиды, общие фокусы которых лежат в точках $(\pm k, 0, 0)$. Значение ζ изменяется от 1 до ∞, в то время как μ лежит между -1 и $+1$. Координаты μ, ζ, ω образуют ортогональную систему, и линейные элементы δs_μ, δs_ζ, δs_ω, которые описывает точка (x, y, z) при изменении одной только из величин μ, ζ, ω, имеют следующие значения:

$$\left.\begin{aligned} &\delta s_\mu = k\left(\frac{\zeta^2-\mu^2}{1-\mu^2}\right)^{1/2}\delta\mu, \quad \delta s_\zeta = k\left(\frac{\zeta^2-\mu^2}{\zeta^2-1}\right)^{1/2}\delta\zeta, \\ &\delta s_\omega = k(1-\mu^2)^{1/2}(\zeta^2-1)^{1/2}\delta\omega. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Чтобы выразить уравнение (1) через наши новые переменные, мы должны полный поток через поверхность элемента объема $\delta s_\mu\, \delta s_\zeta\, \delta s_\omega$ положить равным нулю; мы получаем тогда

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s_\mu}\delta s_\zeta\,\delta s_\omega\right)\delta\mu + \frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s_\zeta}\delta s_\mu\,\delta s_\omega\right)\delta\zeta + \frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s_\omega}\delta s_\mu\,\delta s_\zeta\right)\delta\omega = 0,$$

или, если подставить значения из (3),

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\left\{(1-\mu^2)\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\right\} + \frac{\partial}{\partial\zeta}\left\{(\zeta^2-1)\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\right\} + \frac{\zeta^2-\mu^2}{(1-\mu^2)(\zeta^2-1)}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega^2} = 0.$$

Это может быть написано также в виде

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\left\{(1-\mu^2)\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\right\} + \frac{1}{1-\mu^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega^2} = \frac{\partial}{\partial\zeta}\left\{(1-\zeta^2)\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\right\} + \frac{1}{1-\zeta^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega^2}. \tag{4}$$

§ 104. Если φ есть конечная функция от μ и ω для значений от $\mu = -1$ до $\mu = +1$ и от $\omega = 0$ до $\omega = 2\pi$, то она может быть разложена в ряд поверхностных сферических функций целого порядка, которые имеют вид (7) § 86, причем коэфициенты суть функции ζ.

После подстановки в уравнение (4) мы увидим, что каждый член ряда в отдельности должен удовлетворять этому уравнению. Возьмем сначала случай зональной сферической функции и положим

$$\varphi = P_n(\mu)Z. \tag{5}$$

После подстановки находим, пользуясь уравнением (1) § 84,

$$\frac{d}{d\zeta}\left\{(1-\zeta^2)\frac{dZ}{d\zeta}\right\} + n(n+1)Z = 0, \tag{6}$$

а это уравнение имеет тот же самый вид, как и только что упомянутое.

Мы получаем, таким образом, решения в виде

$$\varphi = P_n(\mu)P_n(\zeta) \tag{7}$$

и

$$\varphi = P_n(\mu)Q_n(\zeta), \tag{8}$$

где

$$Q_n(\zeta) = P_n(\zeta)\int\limits_{\zeta}^{\infty}\frac{d\zeta}{\{P_n(\zeta)\}^2(\zeta^2-1)} =$$

$$= \frac{1}{2}P_n(\zeta)\ln\frac{\zeta+1}{\zeta-1} - \frac{2n-1}{1\cdot n}P_{n-1}(\zeta) - \frac{2n-5}{3(n-1)}P_{n-3}(\zeta) - \ldots =$$

$$= \frac{n!}{1\cdot 3\ldots(2n+1)}\left\{\zeta^{-n-1} + \frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)}\zeta^{-n-3} + \right.$$

$$\left. + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2\cdot 4(2n+3)(2n+5)}\zeta^{-n-5} + \ldots\right\}. \quad (9)^{1)}$$

Решение (7) конечно, когда $\zeta = 1$, и поэтому оно годится для пространства *внутри* эллипсоида вращения; выражение (8), наоборот, бесконечно для $\zeta = 1$, но обращается в нуль для $\zeta = \infty$ и годится поэтому для внешней области. Отметим частные случаи формулы (9)

$$Q_0(\zeta) = \frac{1}{2}\ln\frac{\zeta+1}{\zeta-1},$$

$$Q_1(\zeta) = \frac{1}{2}\zeta\ln\frac{\zeta+1}{\zeta-1} - 1,$$

$$Q_2(\zeta) = \frac{1}{4}(3\zeta^2-1)\ln\frac{\zeta+1}{\zeta-1} - \frac{3}{2}\zeta.$$

Из интегрального представления Q_n мы получаем

$$P_n(\zeta)\frac{dQ_n(\zeta)}{d\zeta} - \frac{dP_n(\zeta)}{d\zeta}Q_n(\zeta) = -\frac{1}{\zeta^2-1}. \quad (10)$$

Легко найти выражения для функций тока, соответствующих потенциалам скоростей (7) и (8); именно, согласно определению § 94, имеем

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial s_\zeta} &= -\frac{1}{\tilde{\omega}}\frac{\partial\psi}{\partial s_\mu}, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial s_\mu} &= \frac{1}{\tilde{\omega}}\frac{\partial\psi}{\partial s_\zeta}; \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

отсюда следует

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\psi}{\partial\mu} &= -k(\zeta^2-1)\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}, \\ \frac{\partial\psi}{\partial\zeta} &= k(1-\mu^2)\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}. \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Таким образом в случае решения (7) получаем

$$\frac{\partial\psi}{\partial\mu} = -k(\zeta^2-1)\frac{dP_n(\zeta)}{d\zeta}P_n(\mu) =$$

$$= \frac{k}{n(n+1)}(\zeta^2-1)\frac{dP_n(\zeta)}{d\zeta}\frac{d}{d\mu}\left\{(1-\mu^2)\frac{dP_n(\mu)}{d\mu}\right\}$$

---

1) Ferrers, глава V; Todhunter, гл. VI; Forsyth, § 96—99.

и отсюда

$$\psi = \frac{k}{n(n+1)}(1-\mu^2)\frac{dP_n(\mu)}{d\mu}(\zeta^2-1)\frac{dP_n(\zeta)}{d\zeta}. \tag{13}$$

Тот же самый результат можно получить, конечно, также из второго уравнения (12).

Таким же образом для функции тока, соответствующей решению (8), находим

$$\psi = \frac{k}{n(n+1)}(1-\mu^2)\frac{dP_n(\mu)}{d\mu}(\zeta^2-1)\frac{dQ_n(\zeta)}{d\zeta}. \tag{14}$$

§ 105. Вышеизложенное мы можем применить к случаю, когда удлиненный эллипсоид вращения движется параллельно своей оси в безграничной массе жидкости. Эллиптические координаты должны быть выбраны таким образом, чтобы этот эллипсоид принадлежал софокусному семейству; пусть он соответствует, например, значению $\zeta = \zeta_0$. Если произвести сравнение с уравнениями (2) § 103, то мы видим, что если a, c суть полярная и экваториальная полуоси, а e — эксцентриситет меридионального сечения, то мы должны иметь

$$k = ae, \quad \zeta_0 = \frac{1}{e}, \quad k(\zeta_0^2-1)^{1/2} = c.$$

Условие на поверхности дано уравнением (1) § 97; именно, должно быть

$$\psi = -\frac{1}{2}Uk^2(1-\mu^2)(\zeta^2-1) + \text{const}. \tag{1}$$

для $\zeta = \zeta_0$. Отсюда, если мы положим $n = 1$ в формуле (14) § 104 и введем произвольный множитель A, будем иметь

$$\psi = \frac{1}{2}Ak(1-\mu^2)(\zeta^2-1)\left\{\frac{1}{2}\ln\frac{\zeta+1}{\zeta-1} - \frac{\zeta}{\zeta^2-1}\right\} \tag{2}$$

с условием

$$A = \frac{Uk}{\dfrac{\zeta_0}{\zeta_0^2-1} - \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{\zeta_0+1}{\zeta_0-1}} = \frac{Ua}{\dfrac{1}{1-e^2} - \dfrac{1}{2e}\ln\dfrac{1+e}{1-e}}. \tag{3}$$

Соответствующая формула для потенциала скоростей будет

$$\varphi = A\mu\left\{\frac{1}{2}\zeta\ln\frac{\zeta+1}{\zeta-1} - 1\right\}. \tag{4}$$

Кинетическая энергия, а также и коэфициент инерции[1]), обусловленный жидкостью, легко могут быть вычислены из формулы (5) § 94.

§ 106. Если мы отбросим случай симметрии, то решения $\Delta\varphi = 0$, когда φ есть тессеральная или секториальная сферическая функция

[1]) Присоединенная масса. *Прим. ред*

от μ и ω, могут быть определены подобным же способом; они имеют следующий вид

$$\varphi = P_n^s(\mu)\, P_n^s(\zeta) \left.\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\} s\omega, \tag{1}$$

$$\varphi = P_n^s(\mu)\, Q_n^s(\zeta) \left.\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\} s\omega, \tag{2}$$

где, как и в § 86,

$$P_n^s(\mu) = (1-\mu^2)^{\frac{1}{2}s} \frac{d^s P_n(\mu)}{d\mu^s}, \tag{3}$$

и во избежание мнимых величин полагаем

$$P_n^s(\zeta) = (\zeta^2-1)^{\frac{1}{2}s} \frac{d^s P_n(\zeta)}{d\zeta^s}, \tag{4}$$

и

$$Q_n^s(\zeta) = (\zeta^2-1)^{\frac{1}{2}s} \frac{d^s Q_n(\zeta)}{d\zeta^s}. \tag{5}$$

Можно показать, что

$$Q_n^s(\zeta) = (-1)^s \frac{(n+s)!}{(n-s)!} P_n^s(\zeta) \int_\zeta^\infty \frac{d\zeta}{\{P_n^s(\zeta)\}^2 (\zeta^2-1)}. \tag{6}$$

Отсюда имеем

$$P_n^s(\zeta) \frac{dQ_n^s(\zeta)}{d\zeta} - \frac{dP_n^s(\zeta)}{d\zeta} Q_n^s(\zeta) = (-1)^{s+1} \frac{(n+s)!}{(n-s)!} \frac{1}{\zeta^2-1}. \tag{7}$$

В качестве примеров мы рассмотрим удлиненный эллипсоид вращения, который движется параллельно одной из осей экватора, например, параллельно оси y, или вращается около этой оси.

1. В первом случае условие на поверхности будет

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta} = -V \frac{\partial y}{\partial\zeta}$$

для $\zeta = \zeta_0$, причем V есть скорость поступательного движения, или

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta} = -V \frac{k\zeta_0}{(\zeta_0^2-1)^{1/2}} (1-\mu^2)^{1/2} \cos\omega. \tag{8}$$

Это уравнение удовлетворяется, если в выражении (2) положить $n=1$, $s=1$; мы получим тогда

$$\varphi = A(1-\mu^2)^{1/2}(\zeta^2-1)^{1/2} \left\{ \frac{1}{2} \ln \frac{\zeta+1}{\zeta-1} - \frac{\zeta}{\zeta^2-1} \right\} \cos\omega, \tag{9}$$

причем постоянная A дана уравнением

$$A \left\{ \frac{1}{2} \ln \frac{\zeta_0+1}{\zeta_0-1} - \frac{\zeta_0^2-2}{\zeta_0(\zeta_0^2-1)} \right\} = -kV. \tag{10}$$

2. В случае вращения около Oy мы имеем, если обозначить через Ω_y угловую скорость,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta} = -\Omega_y\left(z\frac{\partial x}{\partial\zeta} - x\frac{\partial z}{\partial\zeta}\right)$$

для $\zeta=\zeta_0$, или

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta} = k^2\Omega_y\frac{1}{(\zeta_0^2-1)^{1/2}}\mu(1-\mu^2)^{1/2}\sin\omega. \tag{11}$$

Если мы теперь положим в выражении (2) $n=2$, $s=1$, то получим

$$\varphi = A\mu(1-\mu^2)^{1/2}(\zeta^2-1)^{1/2}\left\{\frac{3}{2}\zeta\ln\frac{\zeta+1}{\zeta-1} - 3 - \frac{1}{\zeta^2-1}\right\}\sin\omega; \tag{12}$$

при этом постоянная A определяется из условия (11).

§ 107. Если эллипсоид сжатый или „планетовидный", то соответствующие координаты вводим таким образом:

$$\left.\begin{aligned} &x = k\cos\theta\,\mathrm{sh}\,\eta = k\mu\zeta, \quad y = \tilde{\omega}\cos\omega, \quad z = \tilde{\omega}\sin\omega, \\ &\text{где} \\ &\tilde{\omega} = k\sin\theta\,\mathrm{ch}\,\eta = k(1-\mu^2)^{1/2}(\zeta^2+1)^{1/2}. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

При этом ζ изменяется от 0 до ∞ (или в некоторых приложениях от $-\infty$ через 0 до $+\infty$), в то время как μ лежит между -1 и $+1$. Поверхности второго порядка

$$\zeta = \text{const.}, \quad \mu = \text{const.}$$

будут соответственно представлять сжатые эллипсоиды вращения и однополостные гиперболоиды вращения, которые имеют общую фокальную окружность $x=0$, $\tilde{\omega}=k$.

В качестве предельных форм получаем: 1) эллипсоид $\zeta=0$, который совпадает с той частью плоскости $x=0$, для которой $\tilde{\omega}<k$, 2) гиперболоид $\mu=0$, который совпадает с остальной частью этой плоскости.

Применяя те же обозначения, как и выше, мы находим

$$\left.\begin{aligned} \delta s_\mu &= k\left(\frac{\zeta^2+\mu^2}{1-\mu^2}\right)^{1/2}\delta\mu, \\ \delta s_\zeta &= k\left(\frac{\zeta^2+\mu^2}{\zeta^2+1}\right)^{1/2}\delta\zeta, \\ \delta s_\omega &= k(1-\mu^2)^{1/2}(\zeta^2+1)^{1/2}\,\delta\omega; \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

а уравнение неразрывности запишется в виде

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\left\{(1-\mu^2)\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\right\} + \frac{\partial}{\partial\zeta}\left\{(\zeta^2+1)\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\right\} + \frac{\zeta^2+\mu^2}{(1-\mu^2)(\zeta^2+1)}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega^2} = 0,$$

или

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\left\{(1-\mu^2)\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\right\} + \frac{1}{1-\mu^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega^2} = -\frac{\partial}{\partial\zeta}\left\{(\zeta^2+1)\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\right\} + \frac{1}{\zeta^2+1}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega^2}. \tag{3}$$

Это уравнение имеет тот же самый вид, как и (4) § 103, только ζ заменено через $i\zeta$; подобное соответствие будет иметь место и в последующих формулах.

В случае симметрии относительно оси мы будем иметь следующие решения:

$$\varphi = P_n(\mu)\cdot p_n(\zeta) \tag{4}$$

и

$$\varphi = P_n(\mu)\cdot q_n(\zeta), \tag{5}$$

где

$$p_n(\zeta) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{n!}\left\{\zeta^n + \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}\zeta^{n-2} + \right.$$
$$\left. + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4(2n-1)(2n-3)}\zeta^{n-4} + \ldots\right\} \tag{6}$$

и

$$q_n(\zeta) = p_n(\zeta)\int\limits_{\zeta}^{\infty}\frac{d\zeta}{\{p_n(\zeta)\}^2(\zeta^2+1)} =$$
$$= (-1)^n\left\{p_n(\zeta)\operatorname{arcctg}\zeta - \frac{2n-1}{1\cdot n}p_{n-1}(\zeta) + \frac{2n-5}{3(n-1)}p_{n-3}(\zeta) - \ldots\right\} =$$
$$= \frac{n!}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n+1)}\left\{\zeta^{-n-1} - \frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)}\zeta^{-n-3} + \right.$$
$$\left. + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2\cdot 4(2n+3)(2n+5)}\zeta^{-n-5} - \ldots\right\}, \tag{7}$$

причем, однако, последнее разложение только тогда сходится, когда $\zeta > 1$ [1]). Как и выше, решение (4) годится для пространства, лежащего внутри некоторого эллипсоида семейства $\zeta = \text{const}$, а решение (5) — для внешнего пространства.

Заметим, что

$$p_n(\zeta)\frac{dq_n(\zeta)}{d\zeta} - \frac{dp_n(\zeta)}{d\zeta}q_n(\zeta) = -\frac{1}{\zeta^2+1}. \tag{8}$$

Как частный случай формулы (7) имеем

$$q_0(\zeta) = \operatorname{arcctg}\zeta, \quad q_1(\zeta) = 1 - \zeta\operatorname{arcctg}\zeta,$$
$$q_2(\zeta) = \frac{1}{2}(3\zeta^2+1)\operatorname{arcctg}\zeta - \frac{3}{2}\zeta.$$

Формулы для функции тока, соответствующие выражениям (4) и (5), представятся в виде

$$\psi = \frac{k}{n(n+1)}(1-\mu^2)\frac{dP_n(\mu)}{d\mu}(\zeta^2+1)\frac{dp_n(\zeta)}{d\zeta} \tag{9}$$

и

$$\psi = \frac{k}{n(n+1)}(1-\mu^2)\frac{dP_n(\mu)}{d\mu}(\zeta^2+1)\frac{dq_n(\zeta)}{d\zeta}. \tag{10}$$

---

[1]) Доказательства, приведенные в литературе § 104, читатель легко может применить к настоящему случаю.

§ 108. 1. Простейший случай (5) § 107 получим, если положим $n=0$; тогда будем иметь

$$\varphi = A \operatorname{arcctg} \zeta, \tag{1}$$

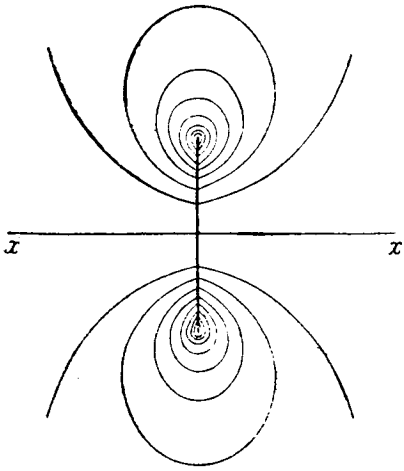
причем ζ может принимать все значения от $-\infty$ до $+\infty$. Формула (10) предыдущего параграфа становится неопределенной, но, применяя метод § 104, мы найдем

$$\psi = Ak\mu, \tag{2}$$

где μ изменяется от 0 до 1. Это решение представляет течение жидкости через круглое отверстие в неограниченной плоской стене; отверстие есть как раз та часть плоскости yz, для которой $\tilde{\omega} < k$. Скорость в произвольной точке отверстия ($\zeta = 0$) равна

$$u = -\frac{1}{\tilde{\omega}} \frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{\omega}} = \frac{A}{(k^2 - \tilde{\omega}^2)^{1/2}},$$

так как $k\mu = \sqrt{k^2 - \tilde{\omega}^2}$ для $x = 0$. Скорость на краях отверстия, следовательно, становится бесконечно большой, ср. § 102, 3.



Фиг. 30.

2. Движение безграничной жидкости, обусловленное движением сжатого эллипсоида ($\zeta = \zeta_0$) со скоростью U параллельно своей оси, представляется формулами

$$\varphi = A\mu(1 - \zeta \operatorname{arcctg} \zeta),$$
$$\psi = \frac{1}{2} Ak(1 - \mu^2)(\zeta^2 + 1)\left\{\frac{\zeta}{\zeta^2 + 1} - \operatorname{arcctg} \zeta\right\}, \tag{3}$$

где

$$A = \frac{-kU}{\dfrac{\zeta_0}{\zeta_0^2 + 1} - \operatorname{arcctg} \zeta_0}.$$

Если обозначим радиусы, направленные к полюсу и к экватору, через a и c, а эксцентриситет меридионального сечения — через e, то получим

$$a = k\zeta_0^2,$$
$$c = k(\zeta_0^2 + 1)^{1/2},$$
$$e = (\zeta_0^2 + 1)^{-1/2}.$$

Если мы выразим A через эти величины, то получим

$$A = \frac{-Uc}{(1 - e^2)^{1/2} - \dfrac{1}{e} \arcsin e}. \tag{4}$$

Форма линий тока для равноотстоящих значений ψ показана на фиг. 30; ср. § 71, п. 3.

Наиболее интересен случай круглого диска, для которого $e=1$ и, следовательно, $A=\frac{2Uc}{\pi}$. Значение φ, данное уравнением (3), будет равно $\pm A\mu$ или $\pm A\left(1-\frac{\tilde{\omega}^2}{c^2}\right)^{1/2}$ для обеих сторон диска, а нормальная компонента скорости равна $\pm U$. Формула (4) § 44 дает поэтому

$$2T=\frac{8}{3}\varrho c^3U^2, \tag{5}$$

как и в выражении (20) § 102.

§ 109. Решения уравнения (3) § 107 в тессеральных функциях напишутся

$$\varphi=P_n^s(\mu)\,p_n^s(\zeta)\left.\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}s\omega \tag{1}$$

и

$$\varphi=P_n^s(\mu)\,q_n^s(\zeta)\left.\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}s\omega, \tag{2}$$

где

$$p_n^s(\zeta)=(\zeta^2+1)^{\frac{s}{2}}\frac{d^sp_n(\zeta)}{d\zeta^s}, \tag{3}$$

и

$$q_n^s(\zeta)=(\zeta^2+1)^{\frac{s}{2}}\frac{d^sq_n(\zeta)}{d\zeta^s}=(-1)^s\frac{(n+s)!}{(n-s)!}p_n^s(\zeta)\int\limits_{\zeta}^{\infty}\frac{d\zeta}{\{p_n^s(\zeta)\}^2(\zeta^2+1)}. \tag{4}$$

Эти функции обладают свойством

$$p_n^s(\zeta)\frac{dq_n^s(\zeta)}{d\zeta}-\frac{dp_n^s(\zeta)}{d\zeta}q_n^s(\zeta)=(-1)^{s+1}\frac{(n+s)!}{(n-s)!}\frac{1}{\zeta^2+1}. \tag{5}$$

Мы можем применить эти результаты таким же образом, как и в § 108.

1. Для движения сжатого эллипсоида ($\zeta=\zeta_0$) параллельно оси y полагаем $n=1$, $s=1$ и, следовательно,

$$\varphi=A(1-\mu^2)^{1/2}(\zeta^2+1)^{1/2}\left\{\frac{\zeta}{\zeta^2+1}-\operatorname{arcctg}\zeta\right\}\cos\omega \tag{6}$$

с условием

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}=-V\frac{\partial y}{\partial\zeta}$$

для $\zeta=\zeta_0$, где V обозначает скорость твердого тела. Отсюда получаем

$$A\left\{\frac{\zeta_0^2+2}{\zeta_0(\zeta_0^2+1)}-\operatorname{arcctg}\zeta_0\right\}=-kV. \tag{7}$$

В случае диска ($\zeta_0=0$) имеем $A=0$, как и следовало ожидать.

2. Для сжатого эллипсоида, который вращается с угловой скоростью Ω_y около оси y, полагаем $n=2$, $s=1$, и тогда получаем

$$\varphi = A\mu(1-\mu^2)^{1/2}(\zeta^2+1)^{1/2}\left\{3\zeta \operatorname{arcctg}\zeta - 3 + \frac{1}{\zeta^2+1}\right\}\sin\omega \qquad (8)$$

с условием на поверхности

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta} = -\Omega_y\left(z\frac{\partial x}{\partial\zeta} - x\frac{\partial z}{\partial\zeta}\right) = -\frac{k^2\Omega_y}{(\zeta_0^2+1)^{1/2}}\mu(1-\mu^2)^{1/2}\sin\omega. \qquad (9)$$

Для круглого диска ($\zeta_0=0$) из последнего получим

$$\frac{3}{2}\pi A = -k^2\Omega_y. \qquad (10)$$

На обеих сторонах диска будем иметь

$$\varphi = \mp 2A\mu(1-\mu^2)^{1/2}\sin\omega,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \mp k\Omega_y(1-\mu^2)^{1/2}\sin\omega.$$

Если подставить эти значения в формулу

$$2T = -\varrho\iint\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,\tilde{\omega}\,d\tilde{\omega}\,d\omega,$$

то получим

$$2T = \frac{16}{45}\varrho c^5\Omega_y^2 \text{ [1]}. \qquad (11)$$

§ 110. В вопросах, относящихся к эллипсоидам с тремя неравными осями, мы можем применить более общий вид эллипсоидальных функций, известных под именем функций Ламэ [2]). Не вдаваясь в формальное изложение этих функций, мы изучим, имея в виду гидродинамические применения, некоторые решения уравнения

$$\Delta\varphi = 0 \qquad (1)$$

в эллиптических координатах, именно решения, которые аналогичны сферическим функциям первого и второго рода.

Желательно этому предпослать исследование о движении жидкости, находящейся в эллипсоидальном сосуде, которое впрочем может быть проведено в декартовых координатах.

---

[1]) Другие решения, представленные в этих координатах, смотреть Nicholson, Phil. Trans. A, CCXXIV, 49 (1924).

[2]) См., например, Ferrers, Spherical Harmonics, гл. VI; W. D. Niven, Phil. Trans. A, CLXXXII, 183 (1891) и Proceedings Royal Soc. A, LXXIX, 458 (1906); Poincaré, Figures d'Equilibre d'une Masse Fluide, Paris, 1902, VI, гл. VI; Darwin, Phil. Trans. A, CXCVII, 461 (1901) [Scientific Papers, Cambridge, 1907—1911, III, 186]; Уиттекер и Ватсон, гл. 23. Очерк теории дал Wangerin, см. сноску на стр. 137.

Когда сосуд движется параллельно оси x со скоростью U, то заключенная в нем жидкость движется, как твердое тело, и потенциал скоростей просто равен

$$\varphi = -Ux.$$

Предположим теперь, что сосуд вращается вокруг одной из главных осей (например, около оси x) с угловой скоростью Ω_x. Если написать уравнение поверхности сосуда в виде

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{2}$$

то условие на поверхности будет

$$-\frac{x}{a^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{y}{b^2}\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{z}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial z} = -\frac{y}{b^2}\Omega_x z + \frac{z}{c^2}\Omega_x y.$$

Следовательно, можно положить

$$\varphi = Ayz,$$

что, очевидно, будет решением уравнения (1); определяя постоянное из условия на поверхности, получим

$$\varphi = -\frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2}\Omega_x yz.$$

Следовательно, если центр движется со скоростью, компоненты которой суть U, V, W, и если угловые скорости около главных осей будут Ω_x, Ω_y, Ω_z, то мы получим путем наложения [1])

$$\varphi = -Ux - Vy - Wz - \frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2}\Omega_x yz - \\ - \frac{c^2 - a^2}{c^2 + a^2}\Omega_y zx - \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\Omega_z xy. \tag{3}$$

Можно также рассмотреть случай, когда сосуд меняет к тому же и свою форму, оставаясь все время эллипсоидом. Если длины осей (только) меняются со скоростями $\dot{a}$, $\dot{b}$, $\dot{c}$, то общее граничное условие (3) § 9 напишется в виде

$$\frac{x^2}{a^3}\dot{a} + \frac{y^2}{b^3}\dot{b} + \frac{z^2}{c^3}\dot{c} + \frac{x}{a^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{y}{b^2}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{z}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0. \tag{4}$$

Это условие удовлетворяется выражением [2])

$$\varphi = -\frac{1}{2}\left(\frac{\dot{a}}{a}x^2 + \frac{\dot{b}}{b}y^2 + \frac{\dot{c}}{c}z^2\right). \tag{5}$$

---

[1]) Повидимому Бельтрами, Бьеркнес и Максвелл в 1873 г. независимо друг от друга опубликовали этот результат. См. Hicks, Report on Recent Progress in Hydrodynamics, Brit. Ass. Rep., 1882 и Kelvin's Papers IV, 197.

[2]) C. A. Bjerknes, Verallgemeinerung des Problems von den Bewegungen, welche in einer ruhenden unelastischen Flüssigkeit die Bewegung eines Ellipsoids hervorbringt, Göttinger Nachrichten, 1873, стр. 448, 829.

Уравнение (1) требует при этом, чтобы

$$\frac{\dot{a}}{a}+\frac{\dot{b}}{b}+\frac{\dot{c}}{c}=0. \tag{6}$$

А это и есть в действительности условие того, что переменный эллипсоид заключает всегда тот же самый объем жидкости $\left(\frac{4}{3}\pi abc\right)$.

§ 111. Решения соответствующих задач для безграничной жидкости, ограниченной изнутри эллипсоидом, требуют применения особой системы ортогональных криволинейных координат.

Если x, y, z означают такого рода функции трех параметров λ, μ, ν, что поверхности

$$\lambda=\text{const.},\quad \mu=\text{const.},\quad \nu=\text{const.} \tag{1}$$

ортогональны друг к другу вдоль их линий пересечения, и если, кроме того,

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{h_1^2}&=\left(\frac{\partial x}{\partial\lambda}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\lambda}\right)^2+\left(\frac{dz}{d\lambda}\right)^2,\\ \frac{1}{h_2^2}&=\left(\frac{\partial x}{\partial\mu}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\mu}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\mu}\right)^2,\\ \frac{1}{h_3^2}&=\left(\frac{\partial x}{\partial\nu}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\nu}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\nu}\right)^2,\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

то направляющие косинусы нормалей к трем поверхностям, проходящим через точку (x, y, z), будут соответственно

$$\left.\begin{aligned}&\left(h_1\frac{\partial x}{\partial\lambda},\ h_1\frac{\partial y}{\partial\lambda},\ h_1\frac{\partial z}{\partial\lambda}\right),\quad \left(h_2\frac{\partial x}{\partial\mu},\ h_2\frac{\partial y}{\partial\mu},\ h_2\frac{\partial z}{\partial\mu}\right),\\ &\left(h_3\frac{\partial x}{\partial\nu},\ h_3\frac{\partial y}{\partial\nu},\ h_3\frac{\partial z}{\partial\nu}\right).\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Отсюда следует, что длины линейных элементов, проведенных по направлению этих нормалей, равны соответственно

$$\frac{\delta\lambda}{h_1},\quad \frac{\delta\mu}{h_2},\quad \frac{\delta\nu}{h_3}.$$

Таким образом, если φ есть потенциал скоростей некоторого движения жидкости, то полный поток через прямоугольный параллелепипед, заключенный между шестью поверхностями

$$\lambda\pm\frac{1}{2}\delta\lambda,\quad \mu\pm\frac{1}{2}\delta\mu,\quad \nu\pm\frac{1}{2}\delta\nu,$$

выражается в виде

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(h_1\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\frac{\delta\mu}{h_2}\frac{\delta\nu}{h_3}\right)\delta\lambda+\frac{\partial}{\partial\mu}\left(h_2\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\frac{\delta\nu}{h_3}\frac{\delta\lambda}{h_1}\right)\delta\mu+$$
$$+\frac{\partial}{\partial\nu}\left(h_3\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\frac{\delta\lambda}{h_1}\frac{\delta\mu}{h_2}\right)\delta\nu.$$

Из формулы (3) § 42 следует, что тот же самый поток выражается через $\Delta\varphi$, умноженное на объем параллелепипеда, т. е. на $\frac{\delta\lambda\,\delta\mu\,\delta\nu}{h_1h_2h_3}$.

Отсюда следует[1])

$$\Delta\varphi = h_1h_2h_3\left\{\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{h_1}{h_2h_3}\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\right)+\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\frac{h_2}{h_3h_1}\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\right)+\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{h_3}{h_1h_2}\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right)\right\}. \quad (4)$$

Полагая это выражение равным нулю, получим общее уравнение неразрывности в ортогональных криволинейных координатах, специальные случаи которого уже исследованы в § 83, 103, 107.

Теория триортогональных систем поверхностей математически очень привлекательна и богата интересными и изящными формулами. Мы заметим еще следующее: если рассматривать λ, μ, ν как функции от x, y, z, то направляющие косинусы трех выше рассмотренных линейных элементов могут быть выражены также в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial\lambda}{\partial x},\ \frac{1}{h_1}\frac{\partial\lambda}{\partial y},\ \frac{1}{h_1}\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right),\\ &\left(\frac{1}{h_2}\frac{\partial\mu}{\partial x},\ \frac{1}{h_2}\frac{\partial\mu}{\partial y},\ \frac{1}{h_2}\frac{\partial\mu}{\partial z}\right),\\ &\left(\frac{1}{h_3}\frac{\partial\nu}{\partial x},\ \frac{1}{h_3}\frac{\partial\nu}{\partial y},\ \frac{1}{h_3}\frac{\partial\nu}{\partial z}\right).\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Отсюда и из выражений (3) могут быть получены многие интересные соотношения. Однако данные выше формулы вполне достаточны для наших целей.

§ 112. В приложениях, к которым мы теперь переходим, тройная ортогональная система поверхностей состоит из софокусных поверхностей второго порядка

$$\frac{x^2}{a^2+\theta}+\frac{y^2}{b^2+\theta}+\frac{z^2}{c^2+\theta}-1=0, \quad (1)$$

свойства которых излагаются в учебниках геометрии.

Через всякую произвольную данную точку (x, y, z) проходят три поверхности системы, соответственно трем корням θ уравнения (1), если рассматривать его как кубическое уравнение для θ. Если (как мы большей частью будем предполагать) $a>b>c$, то один из корней, скажем λ, будет лежать между ∞ и $-c^2$, второй μ—

[1]) Вышеизложенный метод был дан в работе W. Thomson, On the Equations of Motion of Heat referred to Curvilinear Coordinates, Cambridge Math. Journ., IV, 179, (1843) (Papers, 1, 25). Мы укажем также Jacobi, Über eine particuläre Lösung d. partiellen Differentialgleichung..., Crelle, XXXVI, 113 (1847) [Werke, II, 198]. Преобразование $\Delta\varphi$ к общим ортогональным координатам было впервые проведено Lamé, Sur les lois de l'équilibre du fluide éthéré, Journ. de l'Ecole Polyt., XIV, 191 (1834). См. также его Leçons sur les Coordonnées Curvilignes, Paris., 1859, стр. 22.

между $-c^2$ и $-b^2$ и третий ν — между $-b^2$ и $-a^2$. Поверхности λ, μ, ν, следовательно, будут представлять соответственно эллипсоиды, однополостные и двуполостные гиперболоиды.

Из этого определения λ, μ, ν непосредственно следует, что

$$\frac{x^2}{a^2+\theta}+\frac{y^2}{b^2+\theta}+\frac{z^2}{c^2+\theta}-1=\frac{(\lambda-\theta)(\mu-\theta)(\nu-\theta)}{(a^2+\theta)(b^2+\theta)(c^2+\theta)} \tag{2}$$

удовлетворяется тождественно для всех значений θ. Если (2) умножить на $a^2+\theta$ и положить затем $\theta=-a^2$, то получим первое из следующих уравнений:

$$\left.\begin{aligned} x^2&=\frac{(a^2+\lambda)(a^2+\mu)(a^2+\nu)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)},\\ y^2&=\frac{(b^2+\lambda)(b^2+\mu)(b^2+\nu)}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)},\\ z^2&=\frac{(c^2+\lambda)(c^2+\mu)(c^2+\nu)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Отсюда получается

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial\lambda}&=\frac{1}{2}\,\frac{x}{a^2+\lambda},\\ \frac{\partial y}{\partial\lambda}&=\frac{1}{2}\,\frac{y}{b^2+\lambda},\\ \frac{\partial z}{\partial\lambda}&=\frac{1}{2}\,\frac{z}{c^2+\lambda}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

А из этого следует в обозначениях (2) § 111

$$\frac{1}{h_1^2}=\frac{1}{4}\left\{\frac{x^2}{(a^2+\lambda)^2}+\frac{y^2}{(b^2+\lambda)^2}+\frac{z^2}{(c^2+\lambda)^2}\right\}. \tag{5}$$

Если уравнение (2) мы продиференцируем по θ и положим затем $\theta=\lambda$, то получим первое из следующих трех уравнений:

$$\left.\begin{aligned} h_1^2&=4\,\frac{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)},\\ h_2^2&=4\,\frac{(a^2+\mu)(b^2+\mu)(c^2+\mu)}{(\mu-\nu)(\mu-\lambda)},\\ h_3^2&=4\,\frac{(a^2+\nu)(b^2+\nu)(c^2+\nu)}{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Остальные выражения систем (3) и (6) написаны из соображений симметрии [1]).

---

[1]) Отметим, что h_1, h_2, h_3 суть удвоенные перпендикуляры, опущенные из начала на касательные плоскости трех поверхностей λ, μ, ν.

Если вставить эти результаты в уравнение (4) § 111, то получим [1])

$$\Delta\varphi = -\frac{4}{(\mu-\nu)(\nu-\lambda)(\lambda-\mu)}\Big[(\mu-\nu)\left\{(a^2+\lambda)^{1/2}(b^2+\lambda)^{1/2}(c^2+\lambda)^{1/2}\frac{\partial}{\partial\lambda}\right\}^2 + \\ +(\nu-\lambda)\left\{(a^2+\mu)^{1/2}(b^2+\mu)^{1/2}(c^2+\mu)^{1/2}\frac{\partial}{\partial\mu}\right\}^2 + \\ +(\lambda-\mu)\left\{(a^2+\nu)^{1/2}(b^2+\nu)^{1/2}(c^2+\nu)^{1/2}\frac{\partial}{\partial\nu}\right\}^2\Big]\varphi. \quad (7)$$

§ 113. Частные решения преобразованного уравнения $\Delta\varphi=0$, которые мы сначала разберем, это — те, у которых φ есть функция одного (и только одного) из переменных λ, μ, ν. Так, например, φ может быть функцией только от λ, если

$$(a^2+\lambda)^{1/2}(b^2+\lambda)^{1/2}(c^2+\lambda)^{1/2}\frac{d\varphi}{d\lambda}=\text{const.};$$

отсюда следует

$$\varphi = C\int_{\lambda}^{\infty}\frac{d\lambda}{D}, \quad (1)$$

где

$$D=\{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)\}^{1/2}, \quad (2)$$

причем аддитивная постоянная, содержащаяся в φ, выбрана таким образом, что φ равна нулю для $\lambda=\infty$.

При этом решении, которое соответствует решению $\varphi=\frac{A}{r}$ в сферических функциях, эквипотенциальные поверхности суть софокусные эллипсоиды, и движение в пространстве вне одного из них (например того, для которого $\lambda=0$) таково, как если бы оно происходило от некоторого распределения простых источников на его поверхности. Скорость в какой-либо точке дается формулой

$$-h_1\frac{d\varphi}{d\lambda}=C\frac{h_1}{D}. \quad (3)$$

На большом расстоянии от начала эллипсоиды λ приближаются к сфере радиуса $\lambda^{1/2}$, и скорость становится равной $\frac{2C}{r^2}$, где r означает расстояние от начала. На каждой отдельной поверхности уровня λ скорость меняется пропорционально длине перпендикуляра, опущенного из начала на касательную плоскость.

Чтобы найти на поверхности $\lambda=0$ то распределение источников, которое производило бы указанное движение во внешнем пространстве, мы подставим вместо φ значение (1) в формулу (11) § 58

[1]) Ср. Lamé, Sur les surfaces isothermes dans les corps solides homogènes en équilibre de température, Liouville, II, 147 (1837).

и вместо φ' (это относится к внутреннему пространству) — постоянное значение

$$\varphi' = C \int_0^\infty \frac{d\lambda}{D}. \tag{4}$$

Тогда эта формула дает на поверхности искомое значение распределения плотности

$$\frac{C}{abc} h_1. \tag{5}$$

Решение (1) может также рассматриваться как представляющее движение, обусловленное изменением размеров эллипсоида, при котором поверхность остается подобной себе самой, а главные оси сохраняют свое направление. Если мы положим

$$\frac{\dot{a}}{a} = \frac{\dot{b}}{b} = \frac{\dot{c}}{c} = k,$$

то условие на поверхности (4) § 110 представится в виде

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \frac{1}{2} k h_1,$$

которое будет тождественно с условием (3), если положить

$$C = \frac{1}{2} kabc.$$

Частным случаем (5) является распределение источников по *эллиптическому диску*, для которого $\lambda = -c^2$, и, следовательно, $z^2 = 0$. Этот случай важен для электростатики, а с гидродинамической точки зрения находит интересное применение для течения через *эллиптическое отверстие*. Если плоскость xy, кроме области, заключенной внутри эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad z = 0,$$

состоит из тонкой твердой стенки, то мы будем иметь, полагая в вышенаписанных формулах $c = 0$,

$$\varphi = \mp A \int_0^\lambda \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)^{1/2}(b^2+\lambda)^{1/2}\lambda^{1/2}}, \tag{6}$$

где верхний предел есть положительный корень уравнения

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{\lambda} = 1, \tag{7}$$

а отрицательный или положительный знак следует взять, смотря по тому, лежит ли точка, для которой мы ищем φ, на положительной или отрицательной стороне плоскости xy. Оба эти значения φ на

отверстии, где $\lambda=0$, непрерывно связаны между собой. Как и раньше, скорость на большом расстоянии приближенно равна $\frac{2A}{r^2}$, и полный поток через площадь $2\pi r^2$ будет равен тогда $4\pi A$. Полное изменение φ при изменении λ от $-\infty$ до $+\infty$ равно

$$2A\int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)^{1/2}(b^2+\lambda)^{1/2}\lambda^{1/2}}=4A\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}}.$$

Следовательно „проводимость" отверстия (термин заимствуем из электричества) будет равна

$$\frac{\pi}{\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}}}. \tag{8}$$

Для круглого отверстия это равно $2a$.

Для точек в отверстии скорость может быть определена прямо из уравнений (6) и (7); именно, мы можем, так как λ мало, положить приближенно

$$\delta z=\pm\lambda^{1/2}\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)^{1/2},\quad \delta\varphi=\mp\frac{2A\lambda^{1/2}}{ab}.$$

Отсюда следует

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\frac{2A}{ab}\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)^{-\frac{1}{2}}. \tag{9}$$

Это выражение, как и следовало ожидать, обращается на краях отверстия в бесконечность. Частный случай *круглого* отверстия был уже изучен другим путем в § 102, 108.

§ 114. Мы переходим теперь к изучению решения уравнения $\Delta\varphi=0$, которое конечно в бесконечности и для пространства вне эллипсоида, а для внутреннего пространства соответствует решению $\varphi=x$. Следуя аналогии со сферическими функциями, мы можем положить в виде пробы

$$\varphi=x\chi, \tag{1}$$

что дает

$$\Delta\chi+\frac{2}{x}\frac{\partial\chi}{\partial x}=0. \tag{2}$$

Поставим теперь вопрос, нельзя ли удовлетворить этому уравнению (2) функцией χ, зависящей только от λ. При этом допущении согласно § 111 мы будем иметь

$$\frac{\partial\chi}{\partial x}=h_1\frac{\partial\chi}{\partial\lambda}h_1\frac{\partial x}{\partial\lambda},$$

и, следовательно, по (4), (6) § 112

$$\frac{2}{x}\frac{\partial\chi}{\partial x}=4\frac{(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}\frac{d\chi}{d\lambda}.$$

Если выразить $\Delta\chi$ через λ, то уравнение (2) представится в виде

$$\left\{(a^2+\lambda)^{1/2}(b^2+\lambda)^{1/2}(c^2+\lambda)^{1/2}\frac{d}{d\lambda}\right\}^2\chi=-(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)\frac{d\chi}{d\lambda},$$

а это может быть написано так:

$$\frac{d}{d\lambda}\ln\left\{(a^2+\lambda)^{1/2}(b^2+\lambda)^{1/2}(c^2+\lambda)^{1/2}\frac{d\chi}{d\lambda}\right\}=-\frac{1}{a^2+\lambda}.$$

Отсюда следует

$$\chi=C\int_\lambda^\infty\frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)^{3/2}(b^2+\lambda)^{1/2}(c^2+\lambda)^{1/2}},\tag{3}$$

причем произвольное постоянное, которое появляется при втором интегрировании, выбрано, как и раньше, так, чтобы χ обращалось в нуль в бесконечности.

Решение, содержащееся в выражениях (1) и (3), позволяет нам найти движение жидкости, покоящейся в бесконечности, вызванное движением в жидкости твердого эллипсоида параллельно одной из главных осей. Если мы употребим те же обозначения, как и выше, и предположим, что эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\tag{4}$$

движется параллельно оси x со скоростью U, то условие на поверхности напишется

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}=-U\frac{\partial x}{\partial\lambda}\quad\text{для }\lambda=0.\tag{5}$$

Для краткости положим

$$\left.\begin{aligned}\alpha_0&=abc\int_0^\infty\frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)D},\\ \beta_0&=abc\int_0^\infty\frac{d\lambda}{(b^2+\lambda)D},\\ \gamma_0&=abc\int_0^\infty\frac{d\lambda}{(c^2+\lambda)D},\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

где

$$D=\{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)\}^{1/2}.\tag{7}$$

Легко видеть, что величины α_0, β_0, γ_0 суть просто числа. Условиям нашей задачи удовлетворяет функция

$$\varphi = Cx \int_{\lambda}^{\infty} \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda) D}, \tag{8}$$

если положить

$$C = \frac{abc}{2-\alpha_0} U. \tag{9}$$

Соответствующее решение для движения эллипсоида параллельно оси y или оси z может быть написано сразу из соображений симметрии. Сложение этих движений дает случаи любого поступательного движения эллипсоида [1]).

В большом удалении от начала формула (8) будет равнозначна с

$$\varphi = \frac{2}{3} C \frac{x}{r^3}, \tag{10}$$

а это есть потенциал скоростей дублета в начале мощности $\frac{8}{3}\pi C$ или

$$\frac{8}{3} \frac{\pi}{2-\alpha_0} abcU;$$

ср. § 92.

Кинетическая энергия жидкости выражается так:

$$2T = -\varrho \iint \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial n} dS = \frac{\alpha_0}{2-\alpha_0} \varrho U^2 \iint xl\, dS,$$

где l есть косинус угла между нормалью к поверхности и осью x. Так как второй интеграл равен объему эллипсоида, то получаем

$$2T = \frac{\alpha_0}{2-\alpha_0} \frac{4}{3} \pi abc\varrho U^2. \tag{11}$$

Коэфициент инерции равен, следовательно, дроби

$$k = \frac{\alpha_0}{2-\alpha_0} \tag{12}$$

от массы жидкости, вытесненной твердым телом. Для случая шара ($a=b=c$) мы находим $\alpha_0 = \frac{2}{3}$, $k = \frac{1}{2}$ в согласии с § 92. Если положить $a=b$, то получим случай эллипсоида вращения.

---

[1]) Эта задача была решена впервые Green, Researches on the Vibration of Pendulums in Fluid Media, Trans. R. S. Edin. 1883 (Papers, стр. 315). Решение будет более коротким, если принять во внимание заранее, исходя из теории притяжения, что функция (8) есть решение $\Delta\varphi = 0$, так как оно (с точностью до некоторого постоянного множителя) в действительности представляет компоненту по оси x притяжения, которое производит однородный эллипсоид на внешнюю точку.

Для вытянутого эллипсоида вращения ($b=c$, $a>b$) получаем

$$\alpha_0=\frac{2(1-e^2)}{e^3}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1+e}{1-e}-e\right), \tag{13}$$

$$\beta_0=\gamma_0=\frac{1}{e^2}-\frac{1-e^2}{2e^3}\ln\frac{1+e}{1-e}, \tag{14}$$

где e есть эксцентриситет меридионального сечения. Соответствующие формулы для сплющенного эллипсоида даны в § 373. Значения k для вытянутого эллипсоида вращения, который движется вперед соответственно узкой или широкой стороной, равные

$$k_1=\frac{\alpha_0}{2-\alpha_0},\quad k_2=\frac{\beta_0}{2-\beta_0}, \tag{15}$$

приведены в таблице на стр. 196 для ряда значений отношения $\frac{a}{b}$.

Для эллиптического диска ($a\to 0$) формула (11) становится неверной, так как $\alpha_0\to 2$. Отдельное исследование, отправляясь от формул (1) и (3), приводит к результату

$$2T=\frac{4}{3}\pi\varrho b^2c^2U^2\frac{1}{\int\limits_0^{\pi/2}\sqrt{b^2\sin^2\theta+c^2\cos^2\theta}\,d\theta}. \tag{16}$$

В случае $b=c$ эта формула воспроизводит результат (20) § 102.

§ 115. Мы исследуем теперь, может ли уравнение $\Delta\varphi=0$ удовлетвориться выражением

$$\varphi=yz\chi, \tag{1}$$

где χ есть функция только от λ. Это приводит к уравнению

$$\Delta\chi+\frac{2}{y}\frac{\partial\chi}{\partial y}+\frac{2}{z}\frac{\partial\chi}{\partial z}=0. \tag{2}$$

При этом из уравнений (4) и (6) § 112 следует

$$\frac{2}{y}\frac{\partial\chi}{\partial y}+\frac{2}{z}\frac{\partial\chi}{\partial z}=2h_1^2\left(\frac{1}{y}\frac{\partial y}{\partial\lambda}+\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial\lambda}\right)\frac{d\chi}{d\lambda}=$$
$$=4\frac{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}\left(\frac{1}{b^2+\lambda}+\frac{1}{c^2+\lambda}\right)\frac{d\chi}{d\lambda}.$$

Подставив это в уравнение (2), мы находим из уравнения (7) § 112

$$\frac{d}{d\lambda}\ln\left\{(a^2+\lambda)^{1/2}(b^2+\lambda)^{1/2}(c^2+\lambda)^{1/2}\frac{d\chi}{d\lambda}\right\}=-\frac{1}{b^2+\lambda}-\frac{1}{c^2+\lambda}.$$

Отсюда следует

$$\chi=C\int\limits_\lambda^\infty\frac{d\lambda}{(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)D}, \tag{3}$$

причем вторая постоянная интегрирования выбрана, как и выше.

Для твердого эллипсоида, вращающегося около оси x с угловой скоростью Ω_x, условием на поверхности будет

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda} = \Omega_x\left(z\,\frac{\partial y}{\partial\lambda} - y\,\frac{\partial z}{\partial\lambda}\right) \tag{4}$$

при $\lambda = 0$. Если допустить, что[1])

$$\varphi = Cyz\int\limits_{\lambda}^{\infty}\frac{d\lambda}{(b^2+\lambda)\,(c^2+\lambda)\,D}\,, \tag{5}$$

то мы найдем, что условие на поверхности (4) будет выполнено, когда

$$-\frac{C}{ab^3c^3} + \frac{1}{2}\,C\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\frac{\gamma_0-\beta_0}{abc\,(b^2-c^2)} = \frac{1}{2}\,\Omega_x\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right),$$

или

$$C = \frac{(b^2-c^2)^2}{2\,(b^2-c^2)+(b^2+c^2)\,(\beta_0-\gamma_0)}\,abc\Omega_x. \tag{6}$$

Формулы для случая вращения около оси y или оси z могут быть написаны сразу из соображений симметрии [2]).

Формула для кинетической энергии будет

$$2T = -\varrho\iint\varphi\,\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dS =$$

$$= \varrho C\Omega_x^2\int\limits_0^{\infty}\frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)^{1/2}\,(b^2+\lambda)^{3/2}\,(c^2+\lambda)^{3/2}}\cdot\iint(ny-mz)\,yz\,dS,$$

причем (l, m, n) суть направляющие косинусы нормали эллипсоида. Последний интеграл равен

$$\iiint(y^2-z^2)\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{5}\,(b^2-c^2)\,\frac{4}{3}\,\pi abc.$$

Отсюда мы находим

$$2T = \frac{1}{5}\,\frac{(b^2-c^2)^2\,(\gamma_0-\beta_0)}{2\,(b^2-c^2)+(b^2+c^2)\,(\beta_0-\gamma_0)}\cdot\frac{4}{3}\,\pi abc\varrho\Omega_x^2. \tag{7}$$

---

[1]) Выражение (5) отличается только множителем от

$$y\,\frac{\partial\Phi}{\partial z} - z\,\frac{\partial\Phi}{\partial y}\,,$$

где Φ — потенциал притяжения однородного твердого эллипсоида для внешней точки (x, y, z). Так как $\Delta\Phi = 0$, то вышенаписанная функция, как легко показать, также удовлетворяет уравнению $\Delta\varphi = 0$.

[2]) Решение, содержащееся в (5) и (6), принадлежит Clebsch, Über die Bewegung eines Ellipsoides in einer tropfbaren Flüssigkeit, Crelle, LII, 103; LIII, 287 (1854—1856).

В случае вытянутого эллипсоида вращения, который вращается около экваториального диаметра, для отношения коэфициента инерции [1]) к моменту инерции вытесненной массы жидкости относительно того же диаметра находим выражение

$$k' = \frac{e^4 (\beta_0 - \alpha_0)}{(2-e^2)\{2e^2 - (2-e^2)(\beta_0 - \alpha_0)\}}. \tag{8}$$

Значения k_1, k_2 (определенные в § 114) и k' дает следующая таблица:

$\frac{a}{b}$	k_1	k_2	k'	$\frac{a}{b}$	k_1	k_2	k'
1	0,5	0,5	0	6,01	0,045	0,918	0,764
1,50	0,305	0,621	0,094	6,97	0,036	0,933	0,805
2,00	0,209	0,702	0,240	8,01	0,029	0,945	0,840
2,51	0,156	0,763	0,367	9,02	0,024	0,954	0,865
2,99	0,122	0,803	0,485	9,97	0,021	0,960	0,883
3,99	0,082	0,860	0,608	∞	0	1	1
4,99	0,059	0,895	0,701				

Два другие вида эллипсоидных функций второго порядка, конечных в начале координат, даются выражением

$$\frac{x^2}{a^2+\theta} + \frac{y^2}{b^2+\theta} + \frac{z^2}{c^2+\theta} = 1, \tag{9}$$

где θ — один из трех корней уравнения

$$\frac{1}{a^2+\theta} + \frac{1}{b^2+\theta} + \frac{1}{c^2+\theta} = 0, \tag{10}$$

которое и есть условие того, что (9) будет удовлетворять уравнению $\Delta\varphi = 0$.

Метод для нахождения соответствующих решений для внешнего пространства разобран в книге Ферерса. Эти решения позволяют представить движение жидкости, окружающей эллипсоид, вызванное изменением длин его осей при условии, что эллипсоид сохраняет постоянный объем:

$$\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c} = 0. \tag{11}$$

В § 113 мы нашли уже решение для случая, когда эллипсоид расширяется (или стягивается) и при этом остается всегда себе подобным; таким же образом мы можем сложением получить случай внутренней границы, которая произвольно меняет свое положение и размеры и подчинена единственному ограничению — всегда оставаться эллипсоидом. Это расширение результатов, найденных Грином и Клебшем, дано было впервые Бьеркнесом [2]) в форме, несколько отличающейся от изложенной здесь.

§ 116. Исследования этой главы относились почти исключительно к случаю сферических или эллипсоидальных границ.

Само собой понятно, что решения уравнения $\Delta\varphi = 0$, относящиеся к другим видам границ, могут быть получены более или менее ана-

[1]) Здесь под коэфициентом инерции следует понимать присоединенный момент инерции. *Прим. ред.*

[2]) См. сноску на стр. 185.

логично. Поверхность, которую с точки зрения нашего предмета следует рассматривать далее в первую очередь, есть кольцо или тор; этот случай весьма искусно трактовался различными методами Хиксом и Дайсоном [1]). Мы можем еще указать на математически интересную задачу, связанную с движением оболочки, вырезанной из сферической поверхности, которая была исследована Бассе [2]).

ДОБАВЛЕНИЕ К ГЛАВЕ V

ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ, ОТНЕСЕННЫЕ К ОБЩИМ ОРТОГОНАЛЬНЫМ КООРДИНАТАМ

Сохраняя обозначения § 111, будем диференцирование x, y, z по независимым переменным λ, μ, ν соответственно обозначать индексами 1, 2, 3. Так, например, направляющие косинусы нормали к поверхности $\lambda = \text{const}$. будут h_1x_1, h_1y_1, h_1z_1 и т. п.

Если u, v, w будут компоненты скорости по трем нормалям, то полный поток наружу через квазипрямоугольный параллелепипед, ребра которого суть $\frac{\delta\lambda}{h_1}$, $\frac{\delta\mu}{h_2}$, $\frac{\delta\nu}{h_3}$, будет равен

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{u\,\delta\mu\,\delta\nu}{h_2h_3}\right)\delta\lambda+\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\frac{v\,\delta\nu\,\delta\lambda}{h_3h_1}\right)\delta\mu+\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{w\,\delta\lambda\,\delta\mu}{h_1h_2}\right)\delta\nu;$$

отсюда получим выражение для коэфициента кубического расширения в виде

$$\Delta = h_1h_2h_3\left\{\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{u}{h_2h_3}\right)+\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\frac{v}{h_3h_1}\right)+\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{w}{h_1h_2}\right)\right\}; \tag{1}$$

ср. (4) § 111.

Циркуляция по прямоугольному контуру на поверхности $\lambda = \text{const.}$, стороны которого суть $\frac{\delta\mu}{h_2}$, $\frac{\delta\nu}{h_3}$, будет выражаться в виде

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\frac{w\,\delta\nu}{h_3}\right)\delta\mu-\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{v\,\delta\mu}{h_2}\right)\delta\nu. \tag{2}$$

Разделяя полученное на площадь контура, получим первую из следующих формул для компонент вихря по трем нормалям:

$$\left.\begin{aligned}
\xi &= h_2h_3\left\{\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\frac{w}{h_3}\right)-\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{v}{h_2}\right)\right\},\\
\eta &= h_3h_1\left\{\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{u}{h_1}\right)-\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{w}{h_3}\right)\right\},\\
\zeta &= h_1h_2\left\{\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{v}{h_2}\right)-\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\frac{u}{h_1}\right)\right\}.
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

---

[1]) Hicks, On Toroidal Functions, Phil. Trans., CLXXII, 609, 1881; Dyson, On the Potential of on Anchor-Ring, Phil. Trans., CLXXXIV, 43, 1892; см. также C. Neumann, прим. на стр. 168.

[2]) Basset, On the of an Electrified Spherical Bowl etc., Proc. Lond. Math. Soc. (1), XVI, 286 (1885); Hydrodynamics, I, 149.

Чтобы найти выражения для компонент ускорения, мы заметим, что за время δt частица изменит свои параметры от (λ, μ, ν) до $(\lambda+\delta\lambda, \mu+\delta\mu, \nu+\delta\nu)$, где

$$\frac{\delta\lambda}{h_1} = u\,\delta t, \quad \frac{\delta\mu}{h_2} = v\,\delta t, \quad \frac{\delta\nu}{h_3} = w\,\delta t.$$

А тогда компоненты скорости становятся равными

$$u+\left(\frac{\partial u}{\partial t}+h_1 u\,\frac{\partial u}{\partial\lambda}+h_2 v\,\frac{\partial u}{\partial\mu}+h_3 w\,\frac{\partial u}{\partial\nu}\right)\delta t \text{ и т. д.,} \tag{4}$$

но мы должны отнести их к первоначальным направлениям u, v, w. За промежуток времени δt направляющие косинусы нового направления v станут

$$h_2 x_2+\frac{\partial}{\partial\lambda}\,(h_2 x_2)\,h_1 u\,\delta t+\frac{\partial}{\partial\mu}\,(h_2 x_2)\,h_2 v\,\delta t+\frac{\partial}{\partial\nu}\,(h_2 x_2)\,h_3 w\,\delta t \quad \text{и т. д.}$$

причем в ненаписанных двух выражениях производные x заменяются соответственно через производные y и z. Отсюда косинус угла между новым направлением v и первоначальным направлением u, т. е. $(h_1 x_1, h_1 y_1, h_1 z_1)$, будет равен

$$\{(x_1 x_{12}+y_1 y_{12}+z_1 z_{12})\,h_1 u+(x_1 x_{22}+y_1 y_{22}+z_1 z_{22})\,h_2 v+ \\ +(x_1 x_{23}+y_1 y_{23}+z_1 z_{23})\,h_3 w\}\,h_1 h_2\,\delta t. \tag{5}$$

Некоторые члены из этого выражения опущены в силу соотношения

$$x_1 x_2+y_1 y_2+z_1 z_2=0, \tag{6}$$

которое следует из условия ортогональности координат. Кроме того, диференцируя (6) по ν и сравнивая с подобными результатами [1]), мы заключаем, что

$$x_1 x_{23}+y_1 y_{23}+z_1 z_{23}=0. \tag{7}$$ [2])

Точно так же диференцируя тождество

$$x_1^2+y_1^2+z_1^2=\frac{1}{h_1^2} \tag{8}$$

по μ, получим

$$x_1 x_{12}+y_1 y_{12}+z_1 z_{12}=\frac{1}{h_1}\,\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\frac{1}{h_1}\right). \tag{9}$$

Далее,

$$x_1 x_{22}+y_1 y_{22}+z_1 z_{22}=\frac{\partial}{\partial\mu}\,(x_1 x_2+y_1 y_2+z_1 z_2)-(x_2 x_{12}+y_2 y_{12}+z_2 z_{12})= \\ =-\frac{1}{h_2}\,\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{1}{h_2}\right). \tag{10}$$

Таким образом выражение (5) приводится к виду

$$\left\{u\,\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\frac{1}{h_1}\right)-v\,\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{1}{h_2}\right)\right\}h_1 h_2\,\delta t. \tag{11}$$

Тем же способом можно показать, что косинус угла между новым направлением w и первоначальным направлением u есть

$$\left\{u\,\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{h_1}\right)-w\,\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{1}{h_3}\right)\right\}h_1 h_3\,\delta t. \tag{12}$$

---

[1]) Которые получаются при диференцировании по μ и λ других соотношений ортогональности. *Прим. ред.*

[2]) Forsyth, Differential Geometry, Cambridge, 1912, стр. 412.

Следовательно, ускорение в первоначальном направлении u оказывается равным

$$\frac{\partial u}{\partial t}+h_1u\frac{\partial u}{\partial\lambda}+h_2v\frac{\partial u}{\partial\mu}+h_3w\frac{\partial u}{\partial\nu}+$$
$$+h_1h_2v\left\{u\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\frac{1}{h_1}\right)-v\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{1}{h_2}\right)\right\}+$$
$$+h_1h_3w\left\{u\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{h_1}\right)-w\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{1}{h_3}\right)\right\}, \qquad (13)\ ^{1)}$$

или, в более симметричном виде

$$\frac{\partial u}{\partial t}+h_1u\frac{\partial u}{\partial\lambda}+h_2v\frac{\partial u}{\partial\mu}+h_3w\frac{\partial u}{\partial\nu}+$$
$$+h_1u\left\{h_1u\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{1}{h_1}\right)+h_2v\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\frac{1}{h_1}\right)+h_3w\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{h_1}\right)\right\}-$$
$$-h_1\left\{h_1u^2\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{1}{h_1}\right)+h_2v^2\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{1}{h_2}\right)+h_3w^2\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{1}{h_3}\right)\right\}. \qquad (14)$$

Выражения для ускорений в направлении v и w можно написать из соображений симметрии. Например, в цилиндрических координатах мы имеем

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,\quad z=z.$$

Полагая

$$\lambda=r,\quad \mu=\theta,\quad \nu=z,$$

получим

$$h_1=1,\quad h_2=\frac{1}{r},\quad h_3=1.$$

Коэфициент кубического расширения будет равен

$$\Delta=\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{u}{r}+\frac{\partial v}{r\,\partial\theta}+\frac{\partial w}{\partial z}, \qquad (15)$$

а компоненты вихря

$$\xi=\frac{\partial w}{r\,\partial\theta}-\frac{\partial v}{\partial z},\quad \eta=\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial r},\quad \zeta=\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{v}{r}-\frac{\partial u}{r\,\partial\theta}. \qquad (16)$$

Компоненты же ускорения будут выражаться в виде

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial r}+v\frac{\partial u}{r\,\partial\theta}-\frac{v^2}{r}+w\frac{\partial u}{\partial z},\\&\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial r}+v\frac{\partial v}{r\,\partial\theta}+\frac{uv}{r}+w\frac{\partial v}{\partial z},\\&\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial r}+v\frac{\partial w}{r\,\partial\theta}+w\frac{\partial w}{\partial z}.\end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

Если в этих формулах положить $w=0$, то получим результаты в полярных координатах на плоскости (§ 16а).

В сферических координатах имеем

$$x=r\sin\theta\cos\omega,\quad y=r\sin\theta\sin\omega,\quad z=r\cos\theta.$$

Полагая

$$\lambda=r,\quad \mu=\theta,\quad \nu=\omega,$$

---

[1]) G. B. Jeffery, Phil. Mag. (6), XXIX, 445 (1915).

будем иметь

$$h_1 = 1, \quad h_2 = \frac{1}{r}, \quad h_3 = \frac{1}{r \sin\theta}.$$

Отсюда

$$\Delta = \frac{\partial u}{\partial r} + 2\frac{u}{r} + \frac{\partial v}{r\,\partial\theta} + \frac{v}{r}\operatorname{ctg}\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial w}{\partial\omega}, \tag{18}$$

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{\partial w}{r\,\partial\theta} - \frac{\partial v}{r\sin\theta\,\partial\omega} - \frac{w}{r}\operatorname{ctg}\theta, \\ \eta &= \frac{\partial u}{r\sin\theta\,\partial\omega} - \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r}, \\ \zeta &= \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} - \frac{\partial u}{r\,\partial\theta}. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Компоненты ускорения будут иметь вид

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial r} + v\frac{\partial u}{r\,\partial\theta} + w\frac{\partial u}{r\sin\theta\,\partial\omega} - \frac{v^2+w^2}{r}, \\ &\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial r} + v\frac{\partial v}{r\,\partial\theta} + w\frac{\partial v}{r\sin\theta\,\partial\omega} + \frac{uv}{r} - \frac{w^2}{r}\operatorname{ctg}\theta, \\ &\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial r} + v\frac{\partial w}{r\,\partial\theta} + w\frac{\partial w}{r\sin\theta\,\partial\omega} + \frac{uw}{r} + \frac{vw}{r}\operatorname{ctg}\theta; \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

ср. § 16а.

ГЛАВА ШЕСТАЯ.

О ДВИЖЕНИИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ В ЖИДКОСТИ; ДИНАМИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ.

§ 117. В этой главе мы предполагаем изучить интересную динамическую задачу о движении одного или нескольких твердых тел в жидкости, лишенной трения. Развитие этой теории обязано главным образом Томсону и Тэту [1]), а также и Кирхгофу [2]). Сущность методов этих авторов состоит в том, что твердые тела и жидкость рассматриваются вместе как *одна* динамическая система, благодаря чему становится излишним утомительное вычисление результирующей давления жидкости на поверхности тел.

Мы начнем со случая, когда только одно тело движется в неограниченной несжимаемой жидкости; предположим сначала, что движение жидкости обусловлено только движением твердого тела и есть, следовательно, безвихревое и ацикличное. Некоторые частные случаи этой задачи были уже попутно разобраны на предшествую-

---

[1]) Thomson and Tait, Natural Philosophy, § 320. Дальнейшие исследования Кельвина будут указаны позже.

[2]) Kirchhoff, Über die Bewegung eines Rotationskörpers in einer Flüssigkeit, Crelle, LXXI, 237 (1869). (Ges. Abh., стр. 376); Mechanik, 19-я лекция.