щих страницах, и мы видели, что полное воздействие жидкости на движение твердого тела может быть заменено увеличением инертной массы твердого тела. Мы увидим, что аналогичный результат имеет место вообще, если применить выражение „масса" в несколько расширенном смысле.

При принятых условиях движение жидкости характеризуется существованием однозначного потенциала скоростей φ, который удовлетворяет уравнению неразрывности

$$\Delta\varphi = 0; \tag{1}$$

кроме того, должны выполняться еще следующие условия: 1) значение $-\frac{\partial\varphi}{\partial n}$, где δn обозначает по обыкновению элемент нормали в точке поверхности тела, проведенной по направлению к жидкости, должно равняться скорости соответственной точки поверхности по нормали; 2) частные производные $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ должны обращаться в нуль на бесконечности в любом направлении от твердого тела. Это второе условие следует признать необходимым по той причине, что конечная скорость в бесконечности дала бы бесконечно большую кинетическую энергию, которая не может быть получена с помощью конечных сил, действующих на тело в течение конечного промежутка времени. К этому условию мы придем также, если примем, что жидкость заключена в бесконечно большой сосуд, бесконечно удаленный со всех сторон от движущегося твердого тела. Действительно, при этом допущении можно рассматривать пространство, наполненное жидкостью, образованным как бы из трубок тока, которые начинаются и кончаются на поверхности тела, так что полный поток через всякую конечную или бесконечную поверхность, проведенную внутри жидкости, должен быть конечным, а это дает в бесконечности скорость, равную нулю.

В § 41 было показано, что при вышеизложенных условиях движение жидкости определяется однозначно.

§ 118. Для дальнейшего исследования задачи удобнее следовать методу, введенному в динамику твердого тела Эйлером, и взять систему прямоугольных осей Ox, Oy, Oz, неизменно связанных с телом. Если движение тела в произвольный момент времени определить через проекции мгновенной угловой скорости p, q, r и через проекции поступательной скорости u, v, w начала координат на подвижные оси [1]), то, следуя Кирхгофу, мы можем написать

$$\varphi = u\varphi_1 + v\varphi_2 + w\varphi_3 + p\chi_1 + q\chi_2 + r\chi_3, \tag{2}$$

где, как это непосредственно можно усмотреть, φ_1, φ_2 φ_3, χ_1, χ_2, χ_3 суть некоторые функции от x, y, z, зависящие только от формы и

[1]) Мы употребляем теперь обозначения u, v, w, p, q, r не в их прежнем смысле.

положения поверхности тела по отношению к координатным осям. В самом деле, если l, m, n означают направляющие косинусы направленной в жидкость нормали в некоторой точке поверхности, то кинематическое условие на поверхности будет

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial n}=l(u+qz-ry)+m(v+rx-pz)+n(w+py-qx);$$

вставив вместо φ его значение (2), получим

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}=l, && -\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}=m, && -\frac{\partial\varphi_3}{\partial n}=n,\\ &-\frac{\partial\chi_1}{\partial n}=ny-mz, && -\frac{\partial\chi_2}{\partial n}=lz-nx, && -\frac{\partial\chi_3}{\partial n}=mx-ly.\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

Так как эти функции должны удовлетворять также и уравнению (1) и их производные в бесконечности должны обращаться в нуль, то, согласно § 41, они вполне определены [1]).

§ 119. Каковым бы ни было в некоторый момент времени движение твердого тела и жидкости, оно может быть образовано мгновенно из положения равновесия при помощи подходящим образом выбранного импульсивного *динамического винта*, приложенного к твердому телу. Этот импульсивный винт есть тот, который необходим, чтобы уравновесить систему действующих на поверхность импульсивных давлений $\rho\varphi$ и, кроме того, образовать действительное количество движения всех частиц тела. Он был назван Кельвином *импульсом* системы в рассматриваемый момент времени. Необходимо отметить, что определенный таким образом импульс не тождествен с полным количеством движения [2]) системы; это последнее в данном случае фактически неопределимо [3]). Мы сейчас же докажем, однако, что импульс вследствие внешних действующих на тело сил меняется точно таким же образом, как количество движения конечной динамической системы.

Рассмотрим сначала некоторое действительное движение твердого тела с момента t_0 до момента t_1 под действием произвольных сил, приложенных к этому телу, в *конечной* массе жидкости, заключенной в неподвижном сосуде произвольной формы. Вообразим, что движение перед моментом t_0 произошло из положения равновесия с помощью сил, действующих на твердое тело (безразлично, непрерывных или импульсивных), и после момента t_1 опять таким же образом прекращено при помощи сил, действующих на тело. Так как количество движения системы, как в начале, так и в конце

---

[1]) Для частного случая поверхности эллипсоида их значения могут быть получены сразу из результатов § 114, 115.

[2]) Следует иметь в виду, что здесь под полным количеством движения системы подразумевается главный вектор количеств движения вместе с главным моментом количеств движения. *Прим. ред.*

[3]) То-есть попытка его вычислить приводит к „несобственным" интегралам.

этого процесса равно нулю, то интегралы по времени от сил, действующих на тело, вместе с интегралом по времени от давлений, производимых сосудом на жидкость, должны образовать уравновешенную систему сил. Величины этих давлений вычисляются согласно § 20 по формуле

$$\frac{p}{\varrho} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{2} q^2 + F(t). \tag{1}$$

Давления, которые на всей поверхности сосуда имеют одни и те же значения, при суммировании дают результирующую, равную нулю; следовательно, так как, к тому же, φ в начале и в конце постоянно, то единственная эффективная часть интеграла давления $\int p\,dt$ будет дана только одним членом

$$-\frac{1}{2} \varrho \int q^2\,dt. \tag{2}$$

Возвратимся теперь к первоначальной формулировке нашей задачи и предположим, что окружающий сосуд бесконечно велик и в каждом направлении бесконечно удален от движущегося тела. Если рассматривать расположение трубок тока (§ 36), то легко видеть, что скорость q жидкости на большом расстоянии r от начала, лежащего вблизи твердого тела, в конечном счете есть величина самое большее порядка $\frac{1}{r^2}$ [1]); следовательно, подинтегральное выражение (2) будет величиной порядка $\frac{1}{r^4}$. Так как элементы поверхности сосуда суть величины порядка $r^2\,\delta\tilde{\omega}$, причем $\delta\tilde{\omega}$ есть элемент телесного угла, то результирующая и главный момент давлений обращаются в нуль. А тогда указанное выше заключение приводит к тому, что интеграл по времени от сил, действующих на тело, обращается в нуль.

Если мы вообразим, что движение произошло *мгновенно* из положения равновесия в момент t_0 и прекращено *мгновенно* в момент t_1, то результат, к которому мы пришли, можно выразить следующим образом:

„Импульс" движения (в смысле Кельвина) в момент t_1 отличается от „импульса" в момент t_0 на интеграл по времени от внешних сил, которые действовали на тело в течение промежутка времени $t_1 - t_0$ [2]).

Необходимо отметить, что вышеизложенное рассуждение остается в существенных чертах без изменения, если одно тело заменить *группой* тел, которые, кроме того, могут быть не твердыми, а упругими, и даже тогда, когда твердые тела заменены *жидкими массами*, находящимися в вихревом движении.

---

[1]) Она на самом деле будет порядка $\frac{1}{r^3}$ тогда, когда, как в рассматриваемом случае, полный поток наружу равен нулю.

[2]) W. Thomson, см. примечание на стр. 50. Вышеизложенный способ доказательства был любезно сообщен автору Лармором (J. Larmor).

§ 120. Чтобы выразить аналитически изложенный выше результат, предположим, что ξ, η, ζ, λ, μ, ν суть компоненты сил и пар, которые вместе образуют импульс; равным образом X, Y, Z, L, M, N обозначают систему внешних сил. Полное изменение ξ, η, ζ, λ, μ, ν, происходящее отчасти от движения осей, к которым отнесены эти величины, и отчасти от внешних сил, представляется тогда следующими формулами [1]):

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= r\eta - q\zeta + X, & \frac{d\lambda}{dt} &= w\eta - v\zeta + r\mu - q\nu + L, \\ \frac{d\eta}{dt} &= p\zeta - r\xi + Y, & \frac{d\mu}{dt} &= u\zeta - w\xi + p\nu - r\lambda + M, \\ \frac{d\zeta}{dt} &= q\xi - p\eta + Z, & \frac{d\nu}{dt} &= v\xi - u\eta + q\lambda - p\mu + N. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Действительно, в момент $t+\delta t$ подвижные оси образуют с их положениями в момент t углы, косинусы которых суть

$$(1,\ r\,\delta t,\ -q\,\delta t),\quad (-r\,\delta t,\ 1,\ p\,\delta t),\quad (q\,\delta t,\ -p\,\delta t,\ 1).$$

Поэтому для составляющей, параллельной новому положению оси x, будем иметь

$$\xi + \delta\xi = \xi + \eta\cdot r\,\delta t - \zeta\cdot q\,\delta t + X\,\delta t.$$

Если мы затем при составлении моментов относительно нового положения Ox примем во внимание, что O смещено на отрезки $u\,\delta t$, $v\,\delta t$, $w\,\delta t$, параллельные осям, то получим

$$\lambda + \delta\lambda = \lambda + \eta\cdot w\,\delta t - \zeta\cdot v\,\delta t + \mu\cdot r\,\delta t - v\cdot q\,\delta t + L\,\delta t.$$

Эти уравнения вместе с аналогичными, которые могут быть написаны сразу на основании симметрии, и представляют как раз уравнения (1).

Если внешние силы на тело не действуют, то легко получить для этих уравнений следующие интегралы:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \text{const.},\quad \lambda\xi + \mu\eta + \nu\zeta = \text{const.}, \qquad (2)$$

которые выражают то, что сила и момент пары, составляющие импульс [2]), будут постоянными по величине.

§ 121. Теперь мы должны еще выразить ξ, η, ζ, λ, μ, ν через u, v, w, p, q, r. Пусть $\mathbf{T}$ обозначает кинетическую энергию жидкости, так что

$$2\mathbf{T} = -\varrho \iint \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, dS, \qquad (1)$$

---

[1]) Ср. Hayward, On a Direct Method of Estimating Velocities, Accelerations, and all similar Quantities, with respect to Axes moveable in any manner in space, Cambr. Trans., X, 1 (1856).

[2]) То-есть составляющие импульсивный винт. *Прим. ред.*

где интегрирование распространяется по поверхности движущегося тела. Если подставить значение φ из уравнения (2) § 118, то мы получим

$$\left.\begin{aligned} 2\mathbf{T} = \mathbf{A}u^2 + \mathbf{B}v^2 + \mathbf{C}w^2 + 2\mathbf{A}'vw + 2\mathbf{B}'wu + 2\mathbf{C}'uv + \\ + \mathbf{P}p^2 + \mathbf{Q}q^2 + \mathbf{R}r^2 + 2\mathbf{P}'qr + 2\mathbf{Q}'rp + 2\mathbf{R}'pq + \\ + 2p(\mathbf{F}u + \mathbf{G}v + \mathbf{H}w) + 2q(\mathbf{F}'u + \mathbf{G}'v + \mathbf{H}'w) + \\ + 2r(\mathbf{F}''u + \mathbf{G}''v + \mathbf{H}''w); \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

21 коэфициент **A**, **B**, **C** и т. д. суть некоторые постоянные, которые определяются видом и положением поверхности относительно координатных осей. Мы имеем, например,

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{A} &= -\varrho \iint \varphi_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n}\, dS = \varrho \iint \varphi_1 l\, dS, \\ \mathbf{A}' &= -\frac{1}{2}\varrho \iint \left(\varphi_2 \frac{\partial \varphi_3}{\partial n} + \varphi_3 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n}\right) dS = \\ &= -\varrho \iint \varphi_2 \frac{\partial \varphi_3}{\partial n}\, dS = -\varrho \iint \varphi_3 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n}\, dS = \\ &= \varrho \iint \varphi_2 n\, dS = \varrho \iint \varphi_3 m\, dS, \\ \mathbf{P} &= -\varrho \iint \chi_1 \frac{\partial \chi_1}{\partial n}\, dS = \varrho \iint \chi_1 (ny - mz)\, dS, \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

причем преобразования основываются на равенствах (3) § 118 и на частном случае теоремы Грина [§ 44 (2)]. Эти выражения для коэфициентов были даны Кирхгофом.

Фактические значения коэфициентов в выражении для 2T были найдены в предшествующей главе для случая эллипсоида; именно, из § 114 и 115 получается

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{\alpha_0}{2-\alpha_0}\,\frac{4}{3}\,\pi\varrho abc, \\ \mathbf{P} &= \frac{1}{5}\,\frac{(b^2-c^2)^2(\gamma_0-\beta_0)}{2(b^2-c^2)+(b^2+c^2)(\beta_0-\gamma_0)}\,\frac{4}{3}\,\pi\varrho abc, \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

с аналогичными выражениями для **B**, **C**, **Q**, **R**. Все остальные коэфициенты в этом случае равны нулю, что легко показать. Мы заметим, что

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \frac{2(\alpha_0-\beta_0)}{(2-\alpha_0)(2-\beta_0)}\,\frac{4}{3}\,\pi\varrho abc, \quad (5)$$

так что $\mathbf{A} < \mathbf{B} < \mathbf{C}$, когда $a > b > c$, как и следовало ожидать.

Формулы для эллипсоида вращения получаются отсюда, если положить $b = c$; их можно получить также независимо от этого по методу § 104—109. Так, например, для круглого диска ($a = 0$, $b = c$) мы получаем

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{8}{3}\varrho c^3, & \mathbf{P} &= 0, \\ \mathbf{B} &= 0, & \mathbf{Q} &= \frac{16}{45}\varrho c^5, \\ \mathbf{C} &= 0, & \mathbf{R} &= \frac{16}{45}\varrho c^5. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

§ 121a. Когда движение тела состоит только из одного поступательного перемещения, то формула для кинетической энергии жидкости принимает следующий вид:

$$2T = Au^2 + Bv^2 + Cw^2 + 2A'vw + 2B'wu + 2C'uv. \tag{1}$$

Мы можем теперь показать, что на большом удалении от тела во всех случаях весь эффект сводится к эффекту, создаваемому соответственным дублетом, и что характер этого дублета целиком определяется коэфициентами формулы (1).

Для этого мы прибегнем к формуле (12) § 58

$$4\pi\varphi_P = \iint (\varphi - \varphi') \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) dS. \tag{2}$$

Мы можем рассматривать границу тела как тонкую твердую оболочку, содержащую внутри себя жидкость. Допустим, что φ и φ' суть потенциалы скоростей, отнесенные соответственно к внешней и внутренней области. Пусть (x_1, y_1, z_1) будут координаты точки P, которая предполагается удаленной на расстояние, большое по сравнению с размерами тела, и (x, y, z) — координаты элемента поверхности δS. Тогда, полагая

$$r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}, \qquad r = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2},$$

приближенно будем иметь

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{xx_1 + yy_1 + zz_1}{r_1^3}, \quad \frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r} = \frac{lx_1 + my_1 + nz_1}{r_1^3}.$$

Предположим теперь, что оболочка движется с единичной скоростью параллельно оси x без вращения. Полагая

$$\varphi = \varphi_1, \quad \varphi' = -x, \tag{3}$$

получим

$$\iint \varphi \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) dS = \frac{Ax_1 + C'y_1 + B'z_1}{\varrho r_1^3} \tag{4}$$

и

$$\iint \varphi' \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) dS = -\frac{Qx_1}{r_1^3}, \tag{5}$$

где Q обозначает объем тела. В самом деле, мы имеем

$$\iint xl\, dS = Q, \quad \iint xm\, dS = 0, \quad \iint xn\, dS = 0. \tag{6}$$

Отсюда

$$4\pi\varphi_P = \frac{(A + \varrho Q)\, x_1 + C'y_1 + B'z_1}{\varrho r_1^3}. \tag{7}$$ [1]

[1] Из работы On Wave Resistance Proc. Roy. Soc., CXI, 15 (1926).

Таким образом, эффект на большом удалении совпадает с эффектом от дублета, но ось дублета не обязательно должна совпадать с направлением перемещения тела. Однако, если тело движется параллельно оси своего установившегося движения (§ 124), то коэфициенты $\mathbf{C}'$ и $\mathbf{B}'$ исчезают, и тогда

$$4\pi\varphi_P = \frac{(A+\varrho Q)\,x_1}{\varrho r_1^3}. \tag{8}$$

Например, в случае сферы мы имеем $\mathbf{A} = \frac{2}{3}\pi\varrho a^3$, $Q = \frac{4}{3}\pi a^3$ и

$$\varphi_P = \frac{a^3 x_1}{2r_1^3}, \tag{9}$$

как и в § 92.

В общем же случае, когда тело имеет скорость (u, v, w), формула (7) должна быть заменена следующей:

$$4\pi r_1^3 \varrho\varphi_P = (\mathbf{A}u + \mathbf{C}'v + \mathbf{B}'w)\,x_1 + (\mathbf{C}'u + \mathbf{B}v + \mathbf{A}'w)\,y_1 + \\ + (\mathbf{B}'u + \mathbf{A}'v + \mathbf{C}w)\,z_1 + \varrho Q\,(ux_1 + vy_1 + wz_1). \tag{10}$$

Обратно, знание вида потенциала скоростей на бесконечности, обусловленного установившимся движением тела, приводит к знанию соответствующих коэфициентов инерции.

Например, в случае овалов Ранкина, на которые были ссылки в § 97, мы имеем непрерывное распределение источников вдоль оси x, подчиненное тому условию, что полное „напряжение" всех источников есть нуль. Если линейная плотность этого распределения есть m, то получаем

$$\varphi = \int \frac{m\,d\xi}{\sqrt{(x_1-\xi)^2 + y_1^2 + z_1^2}} = \int \left(\frac{1}{r_1} + \frac{\xi x_1}{r_1^3} + \ldots\right) m\,d\xi,$$

или

$$\varphi = \frac{x_1}{r_1^3}\int m\xi\,d\xi + \ldots, \tag{11}$$

так как $\int m\,d\xi = 0$. Отсюда

$$\frac{\mathbf{A}}{\varrho} + Q = 4\pi\int m\xi\,d\xi. \tag{12}$$ [1]

§ 122. Кинетическая энергия только одного тела, обозначим ее через $\mathbf{T}_1$, выражается следующим образом:

$$2\mathbf{T}_1 = \mathbf{m}(u^2+v^2+w^2) + \mathbf{P}_1 p^2 + \mathbf{Q}_1 q^2 + \mathbf{R}_1 r^2 + \\ + 2\mathbf{P}_1' qr + 2\mathbf{Q}_1' rp + 2\mathbf{R}_1' pq + \\ + 2\mathbf{m}\{\alpha(vr - wq) + \beta(wp - ur) + \gamma(uq - vp)\}, \tag{1}$$

[1] G. J. Taylor, Proc. Roy. Soc., CXX, 13 (1928).

Следовательно, полная энергия системы $T+T_1$, мы ее обозначим через T, будет представляться выражением того же общего вида, как и в § 121,

$$\begin{aligned}2T = Au^2 + Bv^2 + Cw^2 + 2A'vw + 2B'wu + 2C'uv + \\ + Pp^2 + Qq^2 + Rr^2 + 2P'qr + 2Q'rp + 2R'pq + \\ + 2p(Fu + Gv + Hw) + 2q(F'u + G'v + H'w) + \\ + 2r(F''u + G''v + H''w),\end{aligned} \tag{2}$$

где коэфициенты все обозначены единообразными буквами, хотя шесть из них имеют, конечно, те же самые значения, как в формуле (2) § 121.

Значения различных составляющих импульса, выраженные через скорости u, v, w, p, q, r, можно теперь найти при помощи известного метода динамики [1]). Допустим, что некоторая система бесконечно больших сил (X, Y, Z, L, M, N) действует на твердое тело в течение бесконечно малого промежутка времени τ, так что импульс изменяется от (ξ, η, ζ, λ, μ, ν) до ($\xi+\delta\xi$, $\eta+\delta\eta$, $\zeta+\delta\zeta$, $\lambda+\delta\lambda$, $\mu+\delta\mu$, $\nu+\delta\nu$). Работа, произведенная силой X,

$$\int_0^\tau Xu\,dt,$$

по своему значению лежит между

$$u_1\int_0^\tau X\,dt \quad \text{и} \quad u_2\int_0^\tau X\,dt,$$

причем u_1 и u_2 суть наибольшее и наименьшее значения u в течение промежутка τ, т. е. она лежит между $u_1\,\delta\xi$ и $u_2\,\delta\xi$. Если введем теперь допущение, что $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$, $\delta\lambda$, $\delta\mu$, $\delta\nu$ бесконечно малы, то каждая из величин u_1 и u_2 равна u, и произведенная работа равна $u\,\delta\xi$. Подобным же образом мы можем вычислить работу, произведенную остальными силами и парами сил. Полный результат должен равняться приращению кинетической энергии; мы имеем, следовательно,

$$\begin{aligned}u\,\delta\xi + v\,\delta\eta + w\,\delta\zeta + p\,\delta\lambda + q\,\delta\mu + r\,\delta\nu = \\ = \delta T = \frac{\partial T}{\partial u}\delta u + \frac{\partial T}{\partial v}\delta v + \frac{\partial T}{\partial w}\delta w + \frac{\partial T}{\partial p}\delta p + \frac{\partial T}{\partial q}\delta q + \frac{\partial T}{\partial r}\delta r.\end{aligned} \tag{3}$$

Если изменить теперь скорости в некотором данном отношении, то импульсы изменятся в том же отношении. Поэтому, полагая

$$\frac{\delta u}{u} = \frac{\delta v}{v} = \frac{\delta w}{w} = \frac{\delta p}{p} = \frac{\delta q}{q} = \frac{\delta r}{r} = k,$$

---

[1]) См. Thomson и Tait, § 313, или Maxwell, Electricity and Magnetism, часть IV, гл. 5.

будем иметь

$$\frac{\delta\xi}{\xi}=\frac{\delta\eta}{\eta}=\frac{\delta\zeta}{\zeta}=\frac{\delta\lambda}{\lambda}=\frac{\delta\mu}{\mu}=\frac{\delta\nu}{\nu}=k.$$

Подставляя эти отношения в формулу (1), получим

$$u\xi+v\eta+w\zeta+p\lambda+q\mu+r\nu=$$
$$=u\frac{\partial T}{\partial u}+v\frac{\partial T}{\partial v}+w\frac{\partial T}{\partial w}+p\frac{\partial T}{\partial p}+q\frac{\partial T}{\partial q}+r\frac{\partial T}{\partial r}=2T, \quad (4)$$

так как T есть однородная функция второй степени. Если взять теперь произвольную вариацию δ от обеих частей (4) и опустить члены, которые сокращаются согласно (3), то мы получим

$$\xi\,\delta u+\eta\,\delta v+\zeta\,\delta w+\lambda\,\delta p+\mu\,\delta q+\nu\,\delta r=\delta T.$$

Так как вариации δu, δv, δw, δp, δq, δr все независимы друг от друга, то мы получаем искомые формулы

$$\left.\begin{aligned}\xi&=\frac{\partial T}{\partial u}, & \lambda&=\frac{\partial T}{\partial p},\\ \eta&=\frac{\partial T}{\partial v}, & \mu&=\frac{\partial T}{\partial q},\\ \zeta&=\frac{\partial T}{\partial w}, & \nu&=\frac{\partial T}{\partial r}.\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Необходимо отметить следующее: так как ξ, η, ζ, ... — линейные функции от u, v, w, ..., то эти последние можно представить так же, как линейные функции первых, и T можно рассматривать так же, как однородную функцию второй степени от ξ, η, ζ, λ, μ, ν. Когда T представлено таким образом, мы его обозначим через T'. Уравнение (3) дает тогда сразу

$$u\,\delta\xi+v\,\delta\eta+w\,\delta\zeta+p\,\delta\lambda+q\,\delta\mu+r\,\delta\nu=$$
$$=\frac{\partial T'}{\partial\xi}\delta\xi+\frac{\partial T'}{\partial\eta}\delta\eta+\frac{\partial T'}{\partial\zeta}\delta\zeta+\frac{\partial T'}{\partial\lambda}\delta\lambda+\frac{\partial T'}{\partial\mu}\delta\mu+\frac{\partial T'}{\partial\nu}\delta\nu;$$

отсюда следует

$$\left.\begin{aligned}u&=\frac{\partial T'}{\partial\xi}, & p&=\frac{\partial T'}{\partial\lambda},\\ v&=\frac{\partial T'}{\partial\eta}, & q&=\frac{\partial T'}{\partial\mu},\\ w&=\frac{\partial T'}{\partial\zeta}, & r&=\frac{\partial T'}{\partial\nu}.\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Эти формулы в известном смысле взаимны с формулами (5).

Последние результаты мы можем использовать для того, чтобы в случае, когда не действуют внешние силы, кроме интегралов уравнений движения, найденных в § 120, найти еще новый интеграл. Именно имеем

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial T'}{\partial\xi}\frac{d\xi}{dt}+\ldots+\frac{\partial T'}{\partial\lambda}\frac{d\lambda}{dt}+\ldots=u\frac{d\xi}{dt}+\ldots+p\frac{d\lambda}{dt}+\ldots,$$

а это выражение тождественно обращается в нуль, согласно (1) § 120. Отсюда мы получаем уравнение энергии

$$T = \text{const}. \tag{7}$$

§ 123. В формуле (5) положим, согласно обозначениям § 121,

$$T = \mathbf{T} + \mathbf{T}_1 .$$

Из динамики твердого тела известно, что члены, выраженные через $\mathbf{T}_1$, представляют количество движения и момент количеств движения самого тела. Следовательно, остальные, представленные через $\mathbf{T}$, члены должны представлять систему тех импульсивных давлений, которые испытывает жидкость со стороны поверхности тела, когда движение предполагается мгновенно вызванным из состояния покоя.

Это легко может быть проверено. Например, составляющая по оси x указанной выше системы импульсивных давлений, согласно § 118 и 121, равна

$$\iint \varrho\varphi l\, dS = -\varrho \iint \varphi \frac{\partial \varphi_1}{\partial n}\, dS =$$
$$= \mathbf{A}u + \mathbf{C}'v + \mathbf{B}'w + \mathbf{F}p + \mathbf{F}'q + \mathbf{F}''r = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial u}. \tag{8}$$

Аналогично момент импульсивных давлений относительно оси Ox равен

$$\iint \varrho\varphi (ny - mz)\, dS = -\varrho \iint \varphi \frac{\partial \chi_1}{\partial n}\, dS =$$
$$= \mathbf{F}u + \mathbf{G}v + \mathbf{H}w + \mathbf{P}p + \mathbf{R}'q + \mathbf{Q}'r = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial p}. \tag{9}$$

§ 124. Уравнения движения могут быть теперь представлены в следующей форме [1]):

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial u} &= r\frac{\partial T}{\partial v} - q\frac{\partial T}{\partial w} + X,\\
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial v} &= p\frac{\partial T}{\partial w} - r\frac{\partial T}{\partial u} + Y,\\
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial w} &= q\frac{\partial T}{\partial u} - p\frac{\partial T}{\partial v} + Z,\\
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial p} &= w\frac{\partial T}{\partial v} - v\frac{\partial T}{\partial w} + r\frac{\partial T}{\partial q} - q\frac{\partial T}{\partial r} + L,\\
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q} &= u\frac{\partial T}{\partial w} - w\frac{\partial T}{\partial u} + p\frac{\partial T}{\partial r} - r\frac{\partial T}{\partial p} + M,\\
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial r} &= v\frac{\partial T}{\partial u} - u\frac{\partial T}{\partial v} + q\frac{\partial T}{\partial p} - p\frac{\partial T}{\partial q} + N.
\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

---

[1]) Kirchhoff, см. примечание на стр. 200; далее W. Thomson, Hydrokinetic Solutions and Observations, Phil. Mag. (5), XIII, 362 (1871) (перепечатано в Baltimore Lectures, Cambridge, 1904, стр. 584).

Если мы здесь положим

$$T = \mathbf{T} + \mathbf{T}_1$$

и выделим члены, относящиеся к $\mathbf{T}$, то получим выражения для воздействия давления окружающей жидкости на движущееся тело; так, составляющая результирующей давлений жидкости, параллельная оси x, назовем ее через X, будет равна

$$\mathbf{X} = -\frac{d}{dt}\frac{d\mathbf{T}}{du} + r\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial v} - q\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial w}, \tag{2}$$

и момент $\mathbf{L}$ этих давлений относительно оси x будет равен [1])

$$\mathbf{L} = -\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial p} + w\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial v} - v\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial w} + r\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial q} - q\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial r}. \tag{3}$$

Если, например, твердое тело вынуждено двигаться без вращения с постоянной скоростью (u, v, w), то имеем

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{X} = \mathbf{Y} = \mathbf{Z} = 0, \\ &\mathbf{L} = w\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial v} - v\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial w}, \\ &\mathbf{M} = u\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial w} - w\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial u}, \\ &\mathbf{N} = v\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial u} - u\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial v}, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

где

$$2\mathbf{T} = \mathbf{A}u^2 + \mathbf{B}v^2 + \mathbf{C}w^2 + 2\mathbf{A}'vw + 2\mathbf{B}'wu + 2\mathbf{C}'uv.$$

Давления жидкости приводятся таким образом к паре сил, которая только тогда обращается в нуль, когда имеем

$$\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial u} : u = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial v} : v = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial w} : w,$$

т. е. когда скорость (u, v, w) совпадет с направлением одной из главных осей эллипсоида,

$$\mathbf{A}x^2 + \mathbf{B}y^2 + \mathbf{C}z^2 + 2\mathbf{A}'yz + 2\mathbf{B}'zx + 2\mathbf{C}'xy = \text{const}. \tag{5}$$

Таким образом, как впервые заметил Кирхгоф, для каждого твердого тела существуют три перпендикулярные друг к другу направления установившегося поступательного перемещения; это значит, что если телу дано движение параллельно одному из этих направлений без вращения и затем тело предоставлено самому себе, то оно будет и в дальнейшем сохранять это движение. Само собой понятно, что

---

[1]) Если только вид этих выражений известен, то нетрудно проверить их прямым вычислением из уравнения давления (5) § 20. См. Lamb, On the Forces experienced by a Solid moving through a Liquid, Quart. Journ. Math., XIX, 66 (1883).

эти три направления определяются исключительно формой поверхности тела. Необходимо, однако, заметить, что импульс, необходимый для образования одного из этих установившихся поступательных движений, в общем случае не сводится к одной только силе. Если, например, для простоты, выбрать координатные оси параллельными трем названным направлениям, так что

$$A' = B' = C' = 0,$$

то мы будем иметь при движении, при котором только u отлично от нуля,

$$\begin{aligned} \xi &= Au, & \lambda &= Fu, \\ \eta &= 0, & \mu &= F'u, \\ \zeta &= 0; & \nu &= F''u; \end{aligned}$$

импульс состоит таким образом из винта с шагом $\frac{F}{A}$.

При указанном выборе координатных осей составляющие пары сил, эквивалентной давлениям жидкости на тело, в случае произвольного равномерного поступательного перемещения (u, v, w) будут равны

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{L} &= (\mathbf{B} - \mathbf{C})\, vw, \\ \mathbf{M} &= (\mathbf{C} - \mathbf{A})\, wu, \\ \mathbf{N} &= (\mathbf{A} - \mathbf{B})\, uv. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Если мы, следовательно, в эллипсоиде

$$\mathbf{A}x^2 + \mathbf{B}y^2 + \mathbf{C}z^2 = \text{const}. \tag{7}$$

проведем радиус-вектор в направлении скорости (u, v, w) и опустим из центра перпендикуляр h на касательную плоскость в конце r, то плоскость пары сил есть та плоскость, которая определена через h и r; величина момента пары сил пропорциональна $\frac{\sin(hr)}{h}$ и сама она стремится вращать тело в направлении от h к r. Таким образом, если направление (u, v, w) только немного отличается от направления оси x, то пара сил стремится уменьшить отклонение, если $\mathbf{A}$ есть наибольшая из трех величин $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, и, наоборот, увеличить его, если $\mathbf{A}$ есть наименьшая из этих величин, в то время как для случая, когда $\mathbf{A}$ лежит между $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$, действие пары зависит от относительного положения r по отношению к круговым сечениям указанного эллипсоида. Тогда получается, что из трех стационарных поступательных перемещений только одно единственное вполне устойчиво, именно то, которое соответствует наибольшему из трех коэфициентов $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$. Например, единственное устойчивое направление поступательного перемещения эллипсоида есть направление наименьшей оси; см. § 121 [1]).

[1]) Физическая причина этой тенденции удлиненного тела становиться широкой стороной против относительного движения легко может быть усмотрена на фиг. 18, стр. 110. Некоторое число интересных практических примеров было дано Томсоном и Тэтом, § 325.

§ 125. Вышеописанные движения представляют собою хотя и самые простые, однако не единственные установившиеся движения, возможные для твердого тела, когда на него не действуют внешние силы. Мгновенное движение тела в некоторый произвольный момент, согласно хорошо известной теореме кинематики, представляет некоторое винтовое движение; для того, чтобы это движение было установившимся, необходимо, чтобы при движении не менялось положение импульса (которое неизменно в пространстве) относительно тела. Для этого необходимо, чтобы ось винтового движения совпадала с осью соответствующего импульсивного винта. Так как общие уравнения прямой линии содержат четыре независимых постоянных, то это условие приводится к четырем линейным соотношениям, которые должны удовлетворяться пятью отношениями $u:v:w:p:q:r$. При рассмотренных здесь обстоятельствах для всякого тела существует, таким образом, просто бесконечная система возможных установившихся движений.

Установившиеся движения, которые по важности наиболее близко подходят к трем установившимся поступательным перемещениям, суть те, для которых импульс приводится к *паре сил*. Уравнения (1) § 120 показывают, что $\xi=\eta=\zeta=0$ и λ, μ, ν могут быть постоянны, при условии, что

$$\frac{\lambda}{p}=\frac{\mu}{q}=\frac{\nu}{r}=k. \tag{1}$$

Если координатные оси имеют специальные направления, принятые в предыдущем параграфе, то мы можем из условий

$$\xi=\eta=\zeta=0$$

сразу выразить u, v, w через p, q, r; именно, имеем

$$u=-\frac{Fp+F'_q+F''_r}{A},\quad v=-\frac{Gp+G'_q+G''_r}{B},\quad w=-\frac{Hp+H'_q+H''_r}{C}. \tag{2}$$

Подставляя эти значения в выражения (5) § 122 для λ, μ, ν, мы получим

$$\lambda=\frac{\partial\Theta}{\partial p},\quad \mu=\frac{\partial\Theta}{\partial q},\quad \nu=\frac{\partial\Theta}{\partial r}, \tag{3}$$

где

$$2\Theta(p,q,r)=\mathfrak{P}p^2+\mathfrak{Q}q^2+\mathfrak{R}r^2+2\mathfrak{P}'qr+2\mathfrak{Q}'rp+2\mathfrak{R}'pq, \tag{4}$$

и коэфициенты этого выражения определяются формулами следующего вида:

$$\mathfrak{P}=P-\frac{F^2}{A}-\frac{G^2}{B}-\frac{H^2}{C},\quad \mathfrak{P}'=P'-\frac{F'F''}{A}-\frac{G'G''}{B}-\frac{H'H''}{C}. \tag{5}$$

Эти формулы имеют место для всякого случая, в котором сила — составляющая импульса — обращается в нуль. Если использовать условие (1) стационарного движения, то отношения $p:q:r$ будут определяться из трех уравнений

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{P}p+\mathfrak{R}'q+\mathfrak{Q}'r&=kp,\\ \mathfrak{R}'p+\mathfrak{Q}q+\mathfrak{P}'r&=kq,\\ \mathfrak{Q}p+\mathfrak{P}'q+\mathfrak{R}r&=kr.\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Вид этих уравнений показывает, что прямая, направление которой определяется отношениями $p:q:r$, должна быть параллельна одной из главных осей эллипсоида.

$$\Theta(x, y, z) = \text{const}. \tag{7}$$

Существует, следовательно, три таких стационарных винтовых движения, что соответствующий импульсивный винт приводится во всех случаях только к импульсивной паре. Оси этих трех винтов перпендикулярны друг другу. Однако вообще они не пересекают друг друга.

Можно теперь показать, что во всех случаях, когда импульс приводится только к импульсивной паре, движение может быть вполне определено. При этом удобнее, сохраняя те же направления осей, перенести начало координат. Перенесем начало координат в произвольную точку (x, y, z), причем вместо u, v, w пишем соответственно

$$\Theta + ry - qz, \quad v + pz - rx, \quad w + qx - py.$$

Коэфициент при $2vr$ в выражении для кинетической энергии (2) § 122 будет равен тогда $-Bx + G''$, коэфициент при $2wq$ равен $Cx + H'$ и т. д. Если принять

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}\left(\frac{G''}{B} - \frac{H'}{C}\right), \\ y &= \frac{1}{2}\left(\frac{H}{C} - \frac{F''}{A}\right), \\ z &= \frac{1}{2}\left(\frac{F'}{A} - \frac{G}{B}\right), \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

то коэфициенты в преобразованном выражении для $2T$ будут удовлетворять соотношениям

$$\frac{G''}{B} = \frac{H'}{C}, \quad \frac{H}{C} = \frac{F''}{A}, \quad \frac{F'}{A} = \frac{G}{B}. \tag{9}$$

Обозначая каждую из этих пар одинаковых величин через α, β, γ, можно переписать формулы (2) в следующем виде:

$$u = -\frac{\partial\Psi}{\partial p}, \quad v = -\frac{\partial\Psi}{\partial q}, \quad w = -\frac{\partial\Psi}{\partial r}, \tag{10}$$

где

$$2\Psi(p, q, r) = \frac{F}{A}p^2 + \frac{G'}{B}q^2 + \frac{H''}{C}r^2 + 2\alpha qr + 2\beta rp + 2\gamma pq. \tag{11}$$

Движение тела во всякий момент времени можно вообразить состоящим из двух частей: поступательного движения, которое эквивалентно движению начала, и вращения около мгновенной оси, проходящей через начало. Так как $\xi = \eta = \zeta = 0$, то эта последняя часть определяется из уравнений

$$\frac{d\lambda}{dt} = r\mu - q\nu, \quad \frac{d\mu}{dt} = p\nu - r\lambda, \quad \frac{d\nu}{dt} = q\lambda - p\mu,$$

которые показывают, что вектор (λ, μ, ν) постоянен по величине и имеет неподвижное направление в пространстве. После подстановки λ, μ, ν из

уравнений (3) мы получим

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial\Theta}{\partial p} &= r\frac{\partial\Theta}{\partial q} - q\frac{\partial\Theta}{\partial r}, \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial\Theta}{\partial q} &= p\frac{\partial\Theta}{\partial r} - r\frac{\partial\Theta}{\partial p}, \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial\Theta}{\partial r} &= q\frac{\partial\Theta}{\partial p} - p\frac{\partial\Theta}{\partial q}. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Эти уравнения по виду тождественны с уравнениями движения твердого тела около неподвижной точки, так что можно применить хорошо известное решение этой задачи, данное Пуансо. Вращательное движение тела мы получим, если заставим эллипсоид (7), неподвижно связанный с телом, катиться по неподвижной в пространстве плоскости

$$\lambda x + \mu y + \nu z = \text{const},$$

с угловой скоростью, пропорциональной длине OI радиуса-вектора, проведенного из начала в точку касания I. Представление действительного движения достигается тогда тем, что всей системе катящегося эллипсоида совместно с плоскостью дается поступательная скорость, компоненты которой даны формулами (10). Направление этой скорости совпадает с направлением нормали OM к касательной плоскости поверхности второго порядка

$$\Psi(x, y, z) = -\varepsilon^2 \tag{13}$$

в точке P, в которой OI пересекает поверхность; величина же скорости равна отношению

$$\frac{\varepsilon^2}{OP \cdot OM}, \text{ умноженному на угловую скорость тела.} \tag{14}$$

Если OI пересекает не поверхность (13), а сопряженную поверхность, которая получается, если изменить знак у ε, то поступательная скорость имеет противоположное направление [1]).

§ 126. Проблема интегрирования уравнений движений твердого тела в общем случае привлекала внимание различных математиков, однако, как и следовало ожидать при всей сложности этой проблемы, физическое значение результатов не легко усмотреть [2]).

В дальнейшем мы сначала исследуем, какие упрощения получаются в формуле для кинетической энергии, когда рассматриваются специальные классы твердых тел; затем мы перейдем к исследованию одного или двух особенно интересных частных случаев, которые могут быть изучены без математических трудностей.

Общее выражение для кинетической энергии содержит, как мы видели, двадцать один коэфициент, но при специальном выборе ко-

---

[1]) Содержание этого параграфа заимствовано из следующей работы: Lamb, On the Free Motion of a Solid through an Infinite Mass of Liquid, Proceed. London Math. Society., VIII (1877). Независимо от этого Graig получил аналогичные результаты, The Motion of a Solid in a Fluid, American Journ. of Math., II (1879).

[2]) Литературные указания см. Wien, Lehrbuch der Hydrodynamik, Leipzig, 1900, стр. 164.

ординатных осей и их начала это число сводится к пятнадцати [1]) Напишем общее выражение кинетической энергии в наиболее симметрическом виде

$$\begin{aligned}2T = {} & Au^2 + Bv^2 + Cw^2 + 2A'vw + 2B'wu + 2C'uv + \\ & + Pp^2 + Qq^2 + Rr^2 + 2P'qr + 2Q'rp + 2R'pq + \\ & + 2Lup + 2Mvq + 2Nwr + \\ & + 2F(vr + wq) + 2G(wp + ur) + 2H(uq + vp) + \\ & + 2F'(vr - wq) + 2G'(wp - ur) + 2H'(uq - vp). \end{aligned} \tag{1}$$

Мы уже видели, что можно так выбрать направление осей, что

$$A' = B' = C' = 0,$$

и можно легко показать, что перемещением начала можно сделать также

$$F' = G' = H' = 0.$$

Мы примем отныне, что эти упрощения уже произведены.

1. Если тело имеет плоскость симметрии, то из возможного вида линий тока относительного движения заключаем, что поступательное перемещение, перпендикулярное к этой плоскости, должно быть одним из стационарных поступательных перемещений § 124. Если эту плоскость взять в качестве плоскости xy, то, очевидно, что энергия движения должна оставаться без изменения, если изменить знак при w, p, q. Это же требует, чтобы P', Q', L, M, N, H обращались в нуль. Три винтовых движения § 125 представляют теперь чистые вращения, но их оси вообще не пересекают друг друга.

2. Если тело имеет вторую плоскость симметрии, перпендикулярную к первой, то эту вторую плоскость мы можем принять за плоскость xz. Мы найдем, что в этом случае R' и G также обращаются в нуль, так что

$$2T = Au^2 + Bv^2 + Cw^2 + Pp^2 + Qq^2 + Rr^2 + 2F(vr + wq). \tag{2}$$

Ось x есть ось одного из установившихся вращений, а оси двух других стационарных вращений пересекают ее под прямым углом, но не обязательно в одной точке.

3. Если тело имеет третью плоскость симметрии, перпендикулярную к двум другим, например плоскость yz, то мы будем иметь

$$2T = Au^2 + Bv^2 + Cw^2 + Pp^2 + Qq^2 + Rr^2. \tag{3}$$

4. Возвращаясь к п. 2, заметим, что в случае тела *вращения* с осью Ox выражение для $2T$ должно остаться без изменения, если

---

[1]) Ср. Clebsch, Über die Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit, Math. Ann., III, 238 (1870). Эта работа рассматривает „взаимную“ форму уравнений движения, которая получается, если подставить (6) § 122 в (I) § 120.

написать v, q, $-w$, $-r$ вместо w, r, v, q соответственно, так как это равносильно повороту осей y и z на 90°; поэтому имеем

$$B = C, \quad Q = R, \quad F = 0$$

и, следовательно,

$$2T = Au^2 + B(v^2 + w^2) + Pp^2 + Q(q^2 + r^2). \qquad (4)\ ^{1)}$$

Аналогичное приведение получается также в некоторых других случаях, например, в случае прямой призмы, поперечное сечение которой есть некоторый правильный многоугольник [2]). Это видно тотчас же, если принять во внимание, что когда ось x совпадает с осью призмы, то невозможно дать осям y и z какие-то направления, которые бы не были направлениями симметрии.

5. Если, наконец, форма тела находится в одинаковом отношении к каждой координатной плоскости (как, например, для шара или куба), то выражение (3) принимает следующий вид:

$$2T = A(u^2 + v^2 + w^2) + P(p^2 + q^2 + r^2). \qquad (5)$$

Этот результат по тем же основаниям распространяется также и на другие случаи, например, на случай правильного многогранника. Тело такого рода с гидродинамической точки зрения практически „изотропно", и его движение будет происходить в точности так же, как движение шара при тех же условиях.

6. Рассмотрим теперь другой класс случаев. Предположим, что тело имеет разновидность косой симметрии относительно определенной оси (например относительно оси x), т. е. оно может совпасть само с собой, если его повернуть на 180° вокруг этой оси, но оно, однако, не обладает обязательно плоскостью симметрии [3]). Выражение для $2T$ должно оставаться неизменяемым, если изменить знак перед v, w, q, r; поэтому должны обращаться в нуль коэфициенты Q', R', G, H. Мы имеем тогда

$$2T = Au^2 + Bv^2 + Cw^2 + Pp^2 + Qq^2 + Rr^2 + 2P'qr + \\ + 2Lup + 2Mvq + 2Nwr + 2F(vr + wq). \qquad (6)$$

Ось x есть одно из направлений установившегося поступательного движения; она есть также ось одного из трех винтовых движений § 125, причем шаг будет равен $-\frac{L}{A}$. Оси двух других винтовых движений пересекают эту ось под прямым углом, но вообще не в одной и той же точке.

---

[1]) Относительно решения уравнений движения в этом случае см. Greenhill, The Motion of a Solid in Infinite Liquid under no Forces, Americ. Journ. of Math., XX (1897).

[2]) См. Larmor, On Hydrokinetic Symmetry, Quart. Journ. Math., XX 261 (1885) (Papers, 1, 77).

[3]) (Пример такого тела есть двухлопастный корабельный винт.

7. Если тело приходит в совпадение с самим собой при повороте на 90° вокруг вышерассмотренной оси, то выражение (6) должно остаться без изменения, если написать v, q, $-w$, $-r$ вместо w, r, v, q соответственно. Это требует, чтобы

$$B=C, \quad Q=R, \quad P'=0, \quad M=N, \quad F=0.$$

Отсюда следует [1])

$$2T=Au^2+B(v^2+w^2)+Pp^2+Q(q^2+r^2)+ \\ +2Lup+2M(vq+wr). \tag{7}$$

Вид этого выражения остается без изменения, если повернуть ось y и ось z в их плоскости на некоторый произвольный угол. Говорят поэтому, что тело в этом случае обладает винтообразной симметрией относительно оси x.

8. Если тело обладает аналогичными свойствами косой симметрии еще относительно другой оси, которая пересекает первую под прямым углом, то, очевидно, будем иметь

$$2T=A(u^2+v^2+w^2)+P(p^2+q^2+r^2)+2L(pu+qv+rw). \tag{8}$$

Всякое произвольное направление есть теперь направление установившегося поступательного перемещения и всякая произвольная прямая, проходящая через начало, есть ось некоторого винтового движения вида, рассмотренного в § 125, с шагом $-\frac{L}{A}$. Форма выражения (8) остается без изменения при всяком изменении направления координатных осей. Поэтому тело называют в этом случае „винтообразно изотропным“.

§ 127. Для случая тела вращения или другого какого-нибудь тела, для которого имеет место формула

$$2T=Au^2+B(v^2+w^2)+Pp^2+Q^2(q^2+r^2), \tag{1}$$

Кирхгофом [2]) было проведено интегрирование уравнений движения с помощью эллиптических функций.

Частный случай, когда тело, не вращаясь около своей оси, движется таким образом, что эта ось всегда остается в той же самой плоскости, можно исследовать очень просто [3]), и при этом получаются очень интересные результаты.

---

[1]) Этот результат допускает аналогичное обобщение как и в формуле (4); например, он имеет место для некоторого тела, имеющего форму корабельного винта с *тремя* симметрично расположенными лопастями. Интегрирование уравнений движения было разобрано Greenhill, The Motion of a Solid in Infinite Liquid, Amer. Journ. of Math., XXVIII, 71 (1906).

[2]) См. примечание на стр. 200.

[3]) См. Thomson и Tait, § 332; Greenhill, On the Motion of a Cylinder through a Frictionless Liquid under no Forces, Mess. of Math., IX, 117 (1880).

Если указанную неподвижную плоскость принять за плоскость xy, то будем иметь

$$p=q=w=0,$$

так что уравнения движения (1) § 124 приводятся к

$$A\frac{du}{dt}=rBv, \qquad B\frac{dv}{dt}=-rAu, \qquad Q\frac{dr}{dt}=(A-B)\,uv. \tag{2}$$

Обозначим через $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ координаты движущегося начала относительно неподвижных осей в плоскости (xy), в которой движется ось твердого тела, причем ось $\mathbf{x}$ должна совпадать с осью результирующего импульса движения, который назовем через I; через θ назовем угол, который прямая Ox (она связана неизменным образом с телом) образует с осью $\mathbf{x}$. Мы имеем тогда

$$Au=I\cos\theta, \quad Bv=-I\sin\theta, \quad r=\dot\theta.$$

Первые два уравнения (2) просто указывают на то, что направление импульса в пространстве неизменно; третье уравнение дает

$$Q\ddot\theta+\frac{A-B}{AB}I^2\sin\theta\cos\theta=0. \tag{3}$$

Мы можем, не нарушая общности, принять $A>B$. Если положим $2\theta=\vartheta$, то уравнение (3) напишется

$$\ddot\vartheta+\frac{(A-B)\,I^2}{ABQ}\sin\vartheta=0, \tag{4}$$

а это есть уравнение обыкновенного маятника. Поэтому вращательное движение тела совпадает с движением „квадрантного маятника", т. е. тела, движение которого относительно квадранта следует тому же закону, как и движение обыкновенного маятника относительно полуокружности. Когда θ будет определено из уравнения (3) и начальных условий, то $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ определятся из уравнений

$$\left.\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}&=u\cos\theta-v\sin\theta=\frac{I}{A}\cos^2\theta+\frac{I}{B}\sin^2\theta,\\ \dot{\mathbf{y}}&=u\sin\theta+v\cos\theta=\left(\frac{I}{A}-\frac{I}{B}\right)\sin\theta\cos\theta=\frac{Q}{I}\ddot\theta;\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

второе уравнение дает

$$\mathbf{y}=\frac{Q}{I}\dot\theta. \tag{6}$$

Этот результат непосредственно очевиден, так как аддитивная постоянная равна нулю вследствие того, что ось $\mathbf{x}$ взята таким образом, что она не только параллельна направлению импульса I, но и совпадает с ним.

Предположим сначала, что тело совершает полные обороты; тогда первый интеграл уравнения (3) имеет вид

$$\dot\theta^2=\omega^2(1-k^2\sin^2\theta), \tag{7}$$

где

$$k^2=\frac{A-B}{ABQ}\,\frac{I^2}{\omega^2}. \tag{8}$$

Отсюда следует, если отсчитывать t от значения $\theta=0$, что

$$\omega t=\int_0^\theta \frac{d\theta}{(1-k^2\sin^2\theta)^{1/2}}=F(k,\theta), \tag{9}$$

где для эллиптического интеграла принято обычное обозначение. Если исключить t из (5) и (7) и полученные таким образом уравнения интегрировать по θ, то будем иметь

$$\left.\begin{aligned} x&=\left(\frac{I}{A\omega}+\frac{Q\omega}{I}\right)F(k,\theta)-\frac{Q\omega}{I}E(k,\theta),\\ y&=\frac{Q}{I}\,\dot\theta=\frac{Q\omega}{I}(1-k^2\sin^2\theta)^{1/2}, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

причем нулевое значение x выбрано таким образом, что оно соответствует положению $\theta=0$. Траектория может быть тогда в каждом отдельном случае вычерчена с помощью таблиц Лежандра. См. отмеченную цифрой *I* кривую на фиг. 31.

Если, напротив, тело не совершает полного оборота, но колеблется с угловой амплитудой α около положения $\theta=0$, то соответствующая форма первого интеграла от (3) напишется

$$\dot\theta^2=\omega^2\left(1-\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\alpha}\right), \tag{11}$$

где

$$\sin^2\alpha=\frac{ABQ}{A-B}\,\frac{\omega^2}{I^2}. \tag{12}$$

Если положить

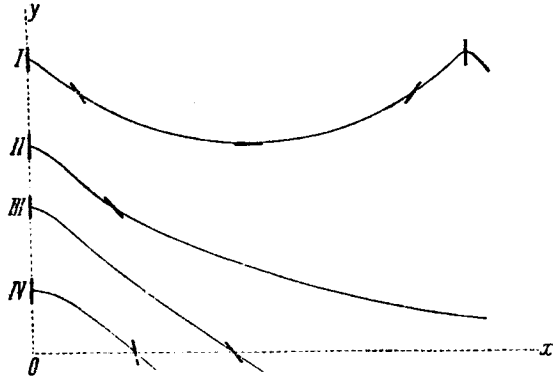
$$\sin\theta=\sin\alpha\sin\psi,$$

то это дает

$$\dot\psi^2=\frac{\omega^2}{\sin^2\alpha}(1-\sin^2\alpha\sin^2\psi)$$

отсюда следует

$$\frac{\omega t}{\sin\alpha}=F(\sin\alpha,\psi). \tag{13}$$



Фиг. 31.

Рассматривая ψ в качестве независимого переменного в уравнении (5) и интегрируя, получим

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{I}{B\omega}\sin\alpha F(\sin\alpha,\psi)-\frac{Q\omega}{I}\operatorname{cosec}\alpha E(\sin\alpha,\psi),\\ y&=\frac{Q\omega}{I}\cos\psi. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Траектория точки O есть теперь синусоидальная кривая, пересекающая ось импульсов в промежутки времени, равные половине периода вращательного движения. Такое движение представлено кривыми *III* и *IV* фиг. 31.

Существует еще критический случай между двумя только что рассмотренными случаями, который будем иметь тогда, когда тело совершает как раз половину оборота, при этом θ имеет асимптотические предельные зна-

чения $\pm \frac{1}{2}\pi$. Этот случай можно получить, полагая $k=1$ в (7) или $\alpha=\frac{1}{2}\pi$ (11); мы найдем тогда

$$\dot{\theta}=\omega\cos\theta, \tag{15}$$

$$\omega t=\ln\operatorname{tg}\left(\frac{1}{5}\pi+\frac{1}{2}\theta\right), \tag{16}$$

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{I}{B\omega}\ln\operatorname{tg}\left(\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{2}\theta\right)-\frac{Q\omega}{I}\sin\theta,\\ y&=\frac{Q\omega}{I}\cos\theta.\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

См. кривую *II* на фиг. 31 [1]).

Мы обращаем внимание на то, что вышеизложенное исследование не ограничивается только случаем тела вращения; оно годится также и для тела с двумя взаимно перпендикулярными плоскостями симметрии, которое движется параллельно одной из этих плоскостей, предполагая при этом, что начало выбрано надлежащим образом. Если упомянутая плоскость есть плоскость xy, то при перенесении начала в точку

$$\left(\frac{F}{B},\ 0,\ 0\right)$$

последний член в формуле (2) § 126 обращается в нуль и уравнения движения принимают указанный вид (2). Если же, с другой стороны, движение будет параллельно плоскости zx, то мы должны перенести начало в точку $\left(-\frac{F}{C},\ 0,\ 0\right)$.

Результаты этого параграфа, а также относящаяся к этому фигура служат для иллюстрации утверждений, высказанных в конце § 124. Так, кривая *IV* с преувеличенной амплитудой иллюстрирует случай слегка возмущенного *устойчивого* движения, параллельного одной из осей установившегося поступательного движения. Случай возмущенного неустойчивого стационарного движения представился бы кривой, которая, смотря по роду возмущения, находится с одной или с другой стороны в соседстве с кривой *II*.

§ 128. Если требуется исследовать только устойчивость движения тела, параллельного оси симметрии, то, конечно, можно проще достигнуть цели, пользуясь приближенными методами. Если, например, тело с тремя плоскостями симметрии, рассмотренное в § 126 п. 3,

---

[1]) Чтобы сделать наиболее отчетливыми характерные признаки движения, кривые нарисованы для несколько крайнего случая $A=5B$. В случае бесконечно тонкого диска, лишенного собственной инерции, мы имели бы $\frac{A}{B}=\infty$; кривые имели бы тогда *точки заострения*, в которых они пересекали бы ось y. Из уравнения (5) видно, что $\dot{x}$ всегда имеет тот же самый знак, так что ни в каком случае не могут появиться *петли*.

В различных случаях, представленных на фиг. 31, тело всегда приведено в движение с одним и тем же импульсом, но с различными степенями вращения. Для кривой *I* максимальная угловая скорость в $\sqrt{2}$ раз больше той, которая имеется в предельном случае *II*, в то время как кривые *III* и *IV* представляют колебания с амплитудами 45 и 18°.

слегка выведено из положения стационарного движения, параллельного оси x, то, полагая

$$u = u_0 + u'$$

и принимая u', v, w, p, q, r все очень малыми, мы получим

$$\left.\begin{aligned} &A\frac{du'}{dt}=0, \quad B\frac{dv}{dt}=-Au_0r, \quad C\frac{dw}{dt}=Au_0q,\\ &P\frac{dp}{dt}=0, \quad Q\frac{dq}{dt}=(C-A)\,u_0w, \quad R\frac{dr}{dt}=(A-B)\,u_0v. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Отсюда получается

$$B\frac{d^2v}{dt^2}+\frac{A(A-B)}{R}u_0^2v=0$$

и аналогичное уравнение для r, и

$$C\frac{d^2w}{dt^2}+\frac{A(A-C)}{Q}u_0^2w=0 \tag{2}$$

и аналогичное уравнение для q. Движение, таким образом, только тогда будет устойчиво, когда A есть наибольшая из трех величин A, B, C.

Известно из обыкновенной динамики, что устойчивость тела, которое движется параллельно оси симметрии, увеличивается, а неустойчивость соответственно уменьшается, если сообщить ему вращение около этой оси. Этот вопрос был исследован Гренхиллем [1]).

Итак, если тело вращения получает малое возмущение своего состояния, при котором оно движется с постоянными u и p, в то время как остальные компоненты скорости равны нулю, то первое и четвертое из уравнений (1) § 124 дают, если пренебречь квадратами и произведениями малых величин,

$$\frac{du}{dt}=0, \quad \frac{dp}{dt}=0;$$

отсюда следует

$$u=u_0, \qquad p=p_0, \tag{3}$$

где u_0, p_0 суть некоторые постоянные. Остальные уравнения получают после подстановки из (3) § 126 следующий вид:

$$B\left(\frac{dv}{dt}-p_0w\right)=-Au_0r, \quad B\left(\frac{dw}{dt}+p_0v\right)=Au_0q, \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned} &Q\frac{dq}{dt}+(P-Q)\,p_0r=-(A-B)\,u_0w,\\ &Q\frac{dr}{dt}-(P-Q)\,p_0q=(A-B)\,u_0v. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Если мы предположим, что v, w, q, r пропорциональны $e^{i\sigma t}$, и исключим их отношения, то найдем

$$Q\sigma^2 \pm (P-2Q)\,p_0\sigma-\left\{(P-Q)\,p_0^2+\frac{A}{B}(A-B)\,u_0^2\right\}=0. \tag{6}$$

---

[1]) Greenhill, Fluid Motion between Confocal Elliptic Cylinders, etc. Quart. Journ. Math., XVI, 227 (1879).

Условие того, что корни этого уравнения будут действительны, состоит в том, что

$$P^2p_0^2+4\frac{A}{B}(A-B)Qu_0^2$$

должно быть положительно. Это получается всегда, когда $A>B$, а в случае $A<B$ может быть достигнуто, если дать p_0 достаточно большое значение.

Этот пример объясняет устойчивость полета, которую получает продолговатый снаряд благодаря винтовой нарезке.

§ 129. В исследованиях § 125 применялось выражение „установившееся", чтобы характеризовать движения, при которых кинематический винт сохраняет постоянное положение относительно движущегося тела. Однако в случае тела вращения мы будем применять это выражение в несколько расширенном смысле, именно мы распространим его на движения, при которых векторы поступательной и вращательной скорости имеют постоянную величину и составляют как с осью симметрии, так и между собой постоянные углы, хотя их положение относительно точек твердого тела, не лежащих на оси, может непрерывно меняться.

Условия, которые при этом должны быть выполнены, можно легко получить из уравнений движения § 124; эти последние после подстановки из (4) § 126 будут иметь вид

$$\left.\begin{aligned} &A\frac{du}{dt}=B(rv-qw), && P\frac{dp}{dt}=0,\\ &B\frac{dv}{dt}=Bpw-Aru, && Q\frac{dq}{dt}=-(A-B)uw-(P-Q)pr,\\ &B\frac{dw}{dt}=Aqu-Bpv, && Q\frac{dr}{dt}=(A-B)uv+(P-Q)pq. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Получается, что p во всех случаях постоянно и что q^2+r^2 также постоянно, если, например,

$$\frac{v}{q}=\frac{w}{r}=k. \tag{2}$$

Это дает

$$\frac{du}{dt}=0 \quad \text{и} \quad v^2+w^2=\text{const}.$$

Отсюда следует, что k также постоянно; необходимо только удовлетворить еще уравнениям

$$kB\frac{dq}{dt}=(kBp-Au)r,$$

$$Q\frac{dq}{dt}=-\{(A-B)ku+(P-Q)p\}r.$$

Эти уравнения будут совместны друг с другом, если

$$kB\{(A-B)ku+(P-Q)p\}+Q(kBp-Au)=0,$$

а это дает

$$\frac{u}{p}=\frac{kBP}{AQ-k^2B(A-B)}. \tag{3}$$

Изменяя k, мы получаем таким образом бесконечное множество случаев возможных стационарных движений указанного выше рода. В каждом из этих

случаев мгновенная ось вращения и направление поступательного движения начала лежат в одной плоскости с осью тела. Легко видеть, что начало описывает винтовую линию около оси импульса. Этими результатами мы обязаны Кирхгофу.

§ 130. Единственный случай винтообразного тела, в котором могут быть получены простые результаты, есть случай „изотропного винтового тела", о котором шла речь в пункте 8 § 126.

Пусть O есть центр тела; за координатные оси в произвольный момент мы возьмем следующие три прямые: прямую Ox, параллельную оси импульса, проведенную от оси импульса наружу, прямую Oy и прямую Oz, перпендикулярную к плоскости этих двух прямых. Если через I и K обозначить силу и момент пары, составляющие импульс, то получим

$$\left.\begin{aligned} &Au+Lp=\xi=I, \quad Av+Lq=\eta=0, \quad Aw+Lv=\zeta=0,\\ &Pp+Lu=\lambda=K, \quad Pp+Lv=\mu=0, \quad Pr+Lw=\nu=I\tilde{\omega}, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где $\tilde{\omega}$ обозначает расстояние точки O от оси импульса.

Так как

$$AP-L^2\neq 0,$$

то второе и пятое из этих уравнений показывают, что

$$v=0, \quad q=0.$$

Поэтому $\tilde{\omega}$ будет постоянно во время всего движения и остальные величины также постоянны; в частности, будем иметь

$$u=\frac{PI-LK}{AP-L^2}, \quad w=-\frac{LI\tilde{\omega}}{AP-L^2}. \tag{2}$$

Начало O описывает, таким образом, винтовую линию около оси импульса с шагом, равным

$$\frac{K}{I}-\frac{P}{L}.$$

Этот пример принадлежит Кельвину [1]).

§ 131. Прежде чем оставить эту часть наших исследований, заметим еще, что только что рассмотренная теория с очень малыми изменениями годится также и для ациклического движения жидкости, заполняющей полость в движущемся теле. Если взять начало в центре

---

[1]) См. примечание на стр. 210. Там указано, что может быть построено твердое тело рассматриваемого вида при помощи прикрепления к шару лопастей в средних точках двенадцати четвертей сферических дуг, которые получаются при делении сферы на октанты. Лопасти должны быть перпендикулярны к поверхности, и их плоскости должны образовывать угол в 45° с соответствующими дугами. Лармор (см. примечание на стр. 217) дает другой пример: „... Если взять правильный тетраедр (или другое правильное тело) и отрезать углы косыми поверхностями, которые таковы, что если рассматривать их из какого-либо угла, они кажутся все наклоненными в том же самом направлении, то мы получим пример изотропного геликонда".

Относительно дальнейших исследований в связи с данным вопросом см. работу Miss Fawcett, On the Motion of Solids in a Liquid, Quart. Journ. Math., XXVI (1893).

массы жидкости, то формула для кинетической энергии движения жидкости будет иметь следующий вид:

$$2\mathbf{T} = \mathbf{m}(u^2 + v^2 + w^2) + \mathbf{P}p^2 + \mathbf{Q}q^2 + \mathbf{R}r^2 + 2\mathbf{P}'qr + 2\mathbf{Q}'rp + 2\mathbf{R}'pq. \quad (1)$$

В самом деле, кинетическая энергия будет равна кинетической энергии всей жидкой массы ($\mathbf{m}$), предполагая ее сосредоточенной в центре тяжести и движущейся вместе с этой точкой, плюс кинетическая энергия движения относительно центра тяжести. Методом § 118, 121 легко показать, что эта вторая часть энергии есть однородная квадратичная функция от p, q, r.

Следовательно, жидкость можно заменить твердым телом той же массы и с тем же центром тяжести, при условии, что его главные оси инерции и моменты инерции подобраны подходящим образом.

В случае эллипсоидальной полости значения коэфициентов в формуле (1) могут быть вычислены по § 110. Мы найдем этим путем, если оси координат совпадают с главными осями эллипсоида, что

$$\mathbf{P} = \frac{1}{5}\mathbf{m}\frac{(b^2-c^2)^2}{b^2+c^2},$$
$$\mathbf{Q} = \frac{1}{5}\mathbf{m}\frac{(c^2-a^2)^2}{c^2+a^2},$$
$$\mathbf{R} = \frac{1}{5}\mathbf{m}\frac{(a^2-b^2)^2}{a^2+b^2},$$
$$\mathbf{P}' = \mathbf{Q}' = \mathbf{R}' = 0.$$

Случай тела с отверстием

§ 132. Когда движущееся тело имеет одно или несколько отверстий или пробоин, так что пространство, его окружающее, будет многосвязно, то жидкость может иметь самостоятельное движение, независимое от движения твердого тела, именно циклическое движение, при котором циркуляция по различным неприводимым замкнутым кривым, которые могут быть проведены через отверстия, могут иметь произвольно заданные постоянные значения. Мы покажем кратко, как вышеизложенные методы могут быть приложены к этому случаю.

Пусть $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$, ... суть циркуляции по различным контурам и $\delta\sigma$, $\delta\sigma'$, $\delta\sigma''$, ... — элементы соответствующих перегородок, проведенных как указано в § 48. Далее, l, m, n суть направляющие косинусы нормалей, направленных в сторону жидкости, в некоторой точке поверхности твердого тела или нормалей в некоторой точке положительной стороны перегородки.

Тогда потенциал скоростей имеет вид

$$\varphi + \varphi_0,$$

где

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= u\varphi_1 + v\varphi_2 + w\varphi_3 + p\chi_1 + q\chi_2 + r\chi_3, \\ \varphi_0 &= \varkappa\omega + \varkappa'\omega' + \varkappa''\omega'' + \ldots \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Функции φ_1, φ_2, φ_3, χ_1, χ_2, χ_3 определяются теми же условиями, как в § 118. Для определения функции ω мы имеем следующие условия: 1) она должна для всех точек жидкости удовлетворять уравнению $\Delta\omega = 0$; 2) ее производные должны в бесконечности обращаться в нуль; 3) на поверхности тела должно быть $\frac{\partial\omega}{\partial n} = 0$; 4) ω должна быть циклическая функция, которая уменьшается на единицу, когда соответствующая точка описывает всю замкнутую кривую, пересекающую первую перегородку в положительном направлении один и только один раз, напротив, ω возвращается к первоначальному значению, когда соответствующая точка описывает замкнутую кривую, которая не встречает этой перегородки. Из § 52 следует, что эти условия определяют ω с точностью до аддитивной постоянной. Подобным же образом определяются и остальные функции ω', ω'', ...

Согласно формуле (5) § 55 удвоенная кинетическая энергия жидкости равна

$$-\varrho \iint (\varphi + \varphi_0) \frac{\partial}{\partial n} (\varphi + \varphi_0)\, dS -$$
$$-\varrho\varkappa \iint \frac{\partial}{\partial n} (\varphi + \varphi_0)\, d\sigma - \varrho\varkappa' \iint \frac{\partial}{\partial n} (\varphi + \varphi_0)\, d\sigma' - \ldots \qquad (2)$$

Так как циклические постоянные от φ равны нулю и так как $\frac{\partial\varphi_0}{\partial n}$ на поверхности тела обращается в нуль, то согласно (4) § 54 м еем

$$\iint \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, dS + \varkappa \iint \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, d\sigma + \varkappa' \iint \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, d\sigma' + \ldots = \iint \varphi \frac{\partial\varphi_0}{\partial n}\, dS = 0.$$

Поэтому формула (2) сводится к

$$-\varrho \iint \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, dS - \varrho\varkappa \iint \frac{\partial\varphi_0}{\partial n}\, d\sigma - \varrho\varkappa' \iint \frac{\partial\varphi_0}{\partial n}\, d\sigma' - \ldots \qquad (3)$$

Подставляя значения φ, φ_0 из уравнений (1), найдем, что энергия жидкости будет равна

$$\mathrm{T} + K, \qquad (4)$$

где T есть однородная квадратическая функция от u, v, w, p, q, r определенного в (2), (3) § 121 вида, и

$$2K = (\varkappa, \varkappa)\varkappa^2 + (\varkappa', \varkappa')\varkappa'^2 + \ldots + 2(\varkappa, \varkappa')\varkappa\varkappa' + \ldots \qquad (5)$$

Здесь, например, имеем

$$\left.\begin{aligned} (\varkappa, \varkappa) &= -\varrho \iint \frac{\partial\omega}{\partial n}\, d\sigma, \\ (\varkappa, \varkappa') &= -\frac{1}{2}\varrho \iint \frac{\partial\omega'}{\partial n}\, d\sigma - \frac{1}{2}\varrho \iint \frac{\partial\omega}{\partial n}\, d\sigma' = \\ &= -\varrho \iint \frac{\partial\omega'}{\partial n}\, d\sigma = -\varrho \iint \frac{\partial\omega}{\partial n}\, d\sigma'. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Тождественность различных форм $(\varkappa, \varkappa')$ следует из (4) § 54.

Таким образом полная энергия жидкости и твердого тела равняется

$$T = \mathfrak{T} + K, \tag{7}$$

где $\mathfrak{T}$ есть однородная квадратичная функция от u, v, w, p, q, r того же вида, как в (8) § 121, а K определяется вышенаписанными уравнениями (5) и (6).

§ 133. „Импульс" движения состоит теперь частью из импульсивных действующих на тело сил и частью из импульсивных давлений $\varrho\varkappa$, $\varrho\varkappa'$, $\varrho\varkappa''$, ..., которые действуют равномерно (как разъяснено в § 54) на различные мембраны, предполагаемые на мгновение помещенными на месте перегородок. Мы обозначим через ξ_1, η_1, ζ_1, λ_1, μ_1, ν_1 компоненты внешнего, действующего на тело импульса. Выражая то, что компонента по оси x количества движения твердого тела равна соответствующей компоненте полного импульса, действующего на тело, мы получим

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathrm{T}_1}{\partial u} &= \xi_1 - \varrho \iint (\varphi + \varphi_0)\, l\, dS = \\ &= \xi_1 + \varrho \iint (u\varphi_1 + \ldots + p\chi_1 + \ldots + \varkappa\omega + \ldots) \frac{\partial \varphi_1}{\partial n}\, dS = \\ &= \xi_1 - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial u} + \varrho\varkappa \iint \omega \frac{\partial \varphi_1}{\partial n}\, dS + \varrho\varkappa' \iint \omega' \frac{\partial \varphi_1}{\partial n}\, dS + \ldots,\end{aligned} \tag{1}$$

причем, как и выше, T_1 обозначает кинетическую энергию твердого тела, а T ту часть энергии жидкости, которая независима от циклического движения. Далее мы находим, если будем рассматривать момент количества движения твердого тела около оси x,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathrm{T}_1}{\partial p} &= \lambda_1 - \varrho \iint (\varphi + \varphi_0)(ny - mz)\, dS = \\ &= \lambda_1 + \varrho \iint (u\varphi_1 + \ldots + p\chi_1 + \ldots + \varkappa\omega + \ldots) \frac{\partial \chi_1}{\partial n}\, dS = \\ &= \lambda_1 - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial p} + \varrho\varkappa \iint \omega \frac{\partial \chi_1}{\partial n}\, dS + \varrho\varkappa' \iint \omega' \frac{\partial \chi_1}{\partial n}\, dS + \ldots\end{aligned} \tag{2}$$

Отсюда, так как

$$\mathfrak{T} = \mathrm{T} + \mathrm{T}_1,$$

будем иметь

$$\left.\begin{aligned}\xi_1 &= \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial u} - \varrho\varkappa \iint \omega \frac{\partial \varphi_1}{\partial n}\, dS - \varrho\varkappa' \iint \omega' \frac{\partial \varphi_1}{\partial n}\, dS - \ldots, \\ \lambda_1 &= \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial p} - \varrho\varkappa \iint \omega \frac{\partial \chi_1}{\partial n}\, dS - \varrho\varkappa' \iint \omega' \frac{\partial \chi_1}{\partial n}\, dS - \ldots\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Согласно ранее разобранному обобщению Кельвина теоремы Грина уравнения (3) могут быть написаны также следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}\xi_1 &= \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial u} + \varrho\varkappa \iint \frac{\partial \varphi_1}{\partial n}\, d\sigma + \varrho\varkappa' \iint \frac{\partial \varphi_1}{\partial n}\, d\sigma' + \ldots,\\ \lambda_1 &= \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial p} + \varrho\varkappa \iint \frac{\partial \chi_1}{\partial n}\, d\sigma + \varrho\varkappa' \iint \frac{\partial \chi_1}{\partial n}\, d\sigma' + \ldots\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Если прибавить к этому члены, обусловленные импульсивными давлениями, действующими на перегородки, то мы получим в конечном счете для компонент полного импульса движения [1])

$$\left.\begin{aligned}\xi &= \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial u} + \xi_0, & \lambda &= \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial p} + \lambda_0,\\ \eta &= \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial v} + \eta_0, & \mu &= \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial q} + \mu_0,\\ \zeta &= \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial w} + \zeta_0, & \nu &= \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial r} + \nu_0,\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

где, например,

$$\left.\begin{aligned}\xi_0 &= \varrho\varkappa \iint \left(l + \frac{\partial \varphi_1}{\partial n}\right) d\sigma + \varrho\varkappa' \iint \left(l + \frac{\partial \varphi_1}{\partial n}\right) d\sigma' + \ldots,\\ \lambda_0 &= \varrho\varkappa \iint \left(ny - mz + \frac{\partial \chi_1}{\partial n}\right) d\sigma +\\ &\qquad + \varrho\varkappa' \iint \left(ny - mz + \frac{\partial \chi_1}{\partial n}\right) d\sigma' + \ldots.\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Ясно, что постоянные ξ_0, η_0, ζ_0, λ_0, μ_0, ν_0 суть компоненты импульса того циклического движения жидкости, которое осталось бы, если тело привести в равновесие силами, действующими только на него.

Согласно рассуждениям § 119, полный импульс будет подчиняться тому же самому закону, как и количество движения конечной динамической системы. Таким образом, если значения (5) вставить в уравнения (1) § 120 [2]), то мы получим уравнения движения твердого тела.

§ 134. В качестве простого примера возьмем случай кольцеобразного тела вращения.

Если ось x совпадает с осью кольца, то мы можем в силу того же рассуждения, как в § 126 п. 4, написать

$$2T = Au^2 + B(v^2 + w^2) + Pp^2 + Q(q^2 + r^2) + (\varkappa, \varkappa)\varkappa^2, \tag{1}$$

---

[1]) Ср. W. Thomson, см. сноску на стр. 210.

[2]) Этот результат может быть получен из формулы давления § 20 прямым вычислением; см. Bryan, Hydrodynamical Proof of the Equations of Motion of a Perforated Solid. . . ., Phil. Mag., Mai, 1893.

предполагая, что положение начала координат и направление осей выбраны соответственным образом. Отсюда следует

$$\left.\begin{aligned} \xi &= Au+\xi_0, & \lambda &= Pp, \\ \eta &= Bv, & \mu &= Qq, \\ \zeta &= Bw, & \nu &= Qr. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Если эти значения подставить в уравнения § 120, то мы найдем

$$\frac{dp}{dt}=0, \text{ или } p=\text{const.},$$

что впрочем и непосредственно очевидно. Предположим, что движение кольца мало отличается от состояния, при котором v, w, p, q, r равны нулю, т. е. состояния установившегося движения, параллельного оси симметрии. В начале возмущенного движения v, w, p, q, r будут малыми величинами, произведениями которых можно пренебречь. Первое из указанных уравнений дает тогда

$$\frac{du}{dt}=0, \text{ или } u=\text{const.},$$

а остальные уравнения получают следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} B\frac{dv}{dt} &= -(Au+\xi_0)\,r, & Q\frac{dq}{dt} &= -\{(A-B)\,u+\xi_0\}\,w, \\ B\frac{dw}{dt} &= (Au+\xi_0)\,q, & Q\frac{dr}{dt} &= \{(A-B)\,u+\xi_0\}\,v. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Исключая r, найдем

$$BQ\frac{d^2v}{dt^2}=-(Au+\xi_0)\{(A-B)\,u+\xi_0\}\,v. \tag{4}$$

Точно такому же уравнению удовлетворяет и w. Таким образом для устойчивости необходимо и достаточно, чтобы коэфициент при v в правой части уравнения (4) был бы отрицательным; когда это условие удовлетворено, то период малого колебания [1]) будет равен

$$2\pi\left[\frac{BQ}{(Au+\xi_0)\{(A-B)u+\xi_0\}}\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{5}$$

Мы укажем еще другой случай установившегося движения кольца, именно тот, при котором импульс приводится к паре сил относительно диаметра. Легко видеть, что уравнения движения удовлетворяются с помощью

$$\xi=\eta=\zeta=\lambda=\mu=0, \text{ и } \nu=\text{const.};$$

в этом случае имеем

$$u=-\frac{\xi_0}{A}, \quad r=\text{const.}$$

Кольцо вращается тогда около оси, которая лежит в плоскости yz, параллельна оси z и находится от нее на расстоянии $\frac{u}{r}$ [2]).

---

[1]) W. Thomson, см. сноску на стр. 210.

[2]) Что касается дальнейших исследований по этому вопросу, мы укажем на работы Basset, On the Motion of a Ring in an Infinite Liquid, Proc. Camb. Phil. Soc., VI (1887) и Miss Fawcett, см. сноску на стр. 224.

Силы, действующие на цилиндр в плоском потоке.

§ 134a. Плоская задача о движении цилиндрического тела, в частности, и тогда, когда имеет место циркуляция вокруг последнего, может быть сравнительно просто исследована непосредственным подсчетом давлений на поверхность [1]). Мы допускаем при этом по обыкновению, что жидкость на бесконечности находится в покое.

Выбирая оси, связанные с поперечным сечением, обозначим через $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ скорость начала, через $\mathbf{r}$ — угловую скорость. Символы u, v будут теперь иметь свой первоначальный смысл как компоненты скорости жидкости. В таком случае уравнение для давления представится в виде

$$\frac{p}{\varrho} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} - (\mathbf{u} - \mathbf{r}y)\frac{\partial\varphi}{\partial x} - (\mathbf{v} + \mathbf{r}x)\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{1}{2}q^2 + \text{const.}, \tag{1}$$

где

$$q^2 = u^2 + v^2.$$

Сила $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ и пара $(\mathbf{N})$, к которым приводятся давления на поверхности, будут

$$\mathbf{X} = -\int pl\,ds, \quad \mathbf{Y} = -\int pm\,ds, \quad \mathbf{N} = -\int p(mx - ly)\,ds, \tag{2}$$

где l, m суть направляющие косинусы нормали, проведенной от элемента δs контура наружу, и интеграция совершается по всему периметру. В силу соотношений

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

будем иметь

$$\frac{1}{2}\int q^2 l\,ds = -\iint\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right)dx\,dy = \int(lu + mv)u\,ds,$$

$$\frac{1}{2}\int q^2 m\,ds = -\iint\left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right)dx\,dy = \int(lu + mv)v\,ds. \tag{3}$$

При этом мы здесь опустили различные криволинейные интегралы, взятые по бесконечно большому охватывающему контуру, так как на большом расстоянии r скорость будет по крайней мере порядка $\frac{1}{r}$, тогда как δs — порядка $r\,\delta\theta$. На поверхности же самого цилиндра имеем

$$lu + mv = l(\mathbf{u} - \mathbf{r}y) + m(\mathbf{v} + \mathbf{r}x). \tag{4}$$

Подставляя из (1) в (2), мы найдем

$$\frac{\mathbf{X}}{\varrho} = -\int\frac{\partial\varphi}{\partial t}l\,ds + \int(mu - lv)(\mathbf{v} + \mathbf{r}x)\,ds =$$

$$= -\int\frac{\partial\varphi}{\partial t}l\,ds + \int(\mathbf{v} + \mathbf{r}x)\frac{\partial\varphi}{\partial s}\,ds \tag{5}$$

---

[1]) Aeronautical Research Committee, R. and M., 1218 (1929). Относительно другого способа изучения см. Glauert, R. and M., 1215 (1929).

и аналогично

$$\frac{\mathbf{Y}}{\varrho} = -\int \frac{\partial\varphi}{\partial t} m\, ds - \int (\mathbf{u} - \mathbf{r}y) \frac{\partial\varphi}{\partial s} ds. \tag{6}$$

Кроме того, будем иметь

$$\frac{1}{2}\int q^2 (mx - ly)\, ds = \int (lu + mv)(xv - yu)\, ds. \tag{7}$$

Здесь криволинейный интеграл по бесконечно удаленной границе также опущен, так как мы можем допустить, что на этой границе $\frac{l}{x} = \frac{m}{y}$, а $lu + mv$ имеет порядок $\frac{1}{r^2}$. Формула (2) для $\mathbf{N}$ тогда представится в виде

$$\frac{\mathbf{N}}{\varrho} = -\int \frac{\partial\varphi}{\partial t}(mx - ly) ds + \int (\mathbf{u}x + \mathbf{v}y)(lv - mu)\, ds =$$

$$= -\int \frac{\partial\varphi}{\partial t}(mx - ly)\, ds - \int (\mathbf{u}x + \mathbf{v}y) \frac{\partial\varphi}{\partial s} ds. \tag{8}$$

По аналогии с § 118, 132 мы теперь положим

$$\varphi = \mathbf{u}\varphi_1 + \mathbf{v}\varphi_2 + \mathbf{r}\chi + \varphi_0, \tag{9}$$

где функция φ_0 представляет циркуляционное движение, которое продолжало бы существовать и тогда, когда цилиндр был бы остановлен. Она, следовательно, есть циклическая функция с циклической постоянной, которую назовем через k. Сравнивая с выражением (4), на поверхности цилиндра будем иметь

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} = -l, \quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} = -m, \quad \frac{\partial\chi}{\partial n} = -(mx - ly), \quad \frac{\partial\varphi_0}{\partial n} = 0. \tag{10}$$

При отсутствии циркуляции энергия жидкости была бы равна

$$\mathbf{T} = -\frac{1}{2}\varrho \int (\varphi - \varphi_0) \frac{\partial\varphi}{\partial n} ds. \tag{11}$$

Подставляя из (9) и (10) в (11), получим

$$2\mathbf{T} = \mathbf{A}\mathbf{u}^2 + 2\mathbf{H}\mathbf{u}\mathbf{v} + \mathbf{B}\mathbf{v}^2 + \mathbf{R}\mathbf{r}^2 + 2(\mathbf{L}\mathbf{u} + \mathbf{M}\mathbf{v})\mathbf{r}, \tag{12}$$

где

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{A} = \varrho \int l\varphi_1\, ds, \quad \mathbf{H} = \varrho \int l\varphi_2\, ds = \varrho \int m\varphi_1\, ds, \\ &\mathbf{B} = \varrho \int m\varphi_2\, ds, \quad \mathbf{R} = \varrho \int (mx - ly)\chi\, ds, \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

$$\mathbf{L} = \varrho \int l\chi\, ds = \varrho \int (mx - ly)\varphi_1\, ds,$$

$$\mathbf{M} = \varrho \int m\chi\, ds = \varrho \int (mx - ly)\varphi_2\, ds.$$

Первые члены в правых частях выражений (5), (6) и (8) теперь принимают вид

$$\left.\begin{aligned} -\frac{d}{dt}(\mathbf{Au}+\mathbf{Hv}+\mathbf{Lr}) &= -\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{u}}, \\ -\frac{d}{dt}(\mathbf{Hu}+\mathbf{Bv}+\mathbf{Mr}) &= -\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{v}}, \\ -\frac{d}{dt}(\mathbf{Rr}+\mathbf{Lu}+\mathbf{Mv}) &= -\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{r}}. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Кроме того, мы будем иметь

$$\begin{aligned} \varrho\int x\frac{\partial(\varphi-\varphi_0)}{\partial s}\,ds &= \varrho\int m(\varphi-\varphi_0)\,ds = \mathbf{Hu}+\mathbf{Bv}+\mathbf{Mr} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{v}}, \\ \varrho\int y\frac{\partial(\varphi-\varphi_0)}{\partial s}\,ds &= -\varrho\int l(\varphi-\varphi_0)\,ds = \\ &= -(\mathbf{Au}+\mathbf{Hv}+\mathbf{Lr}) = -\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{u}}. \end{aligned} \tag{15}$$

Если мы положим

$$\int x\frac{\partial\varphi_0}{\partial s}\,ds = \alpha, \quad \int y\frac{\partial\varphi_0}{\partial s}\,ds = \beta, \tag{16}$$

то выражения для сил примут тогда вид

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{X} &= -\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{u}} + \mathbf{r}\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{v}} - k\varrho\mathbf{v} + \varrho\alpha\mathbf{r}, \\ \mathbf{Y} &= -\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{v}} - \mathbf{r}\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{u}} + k\varrho\mathbf{u} + \varrho\beta\mathbf{r}, \\ \mathbf{N} &= -\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{v}\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{u}} - \mathbf{u}\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{v}} - \varrho(\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v}). \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Поворачивая оси координат на соответствующий угол, коэфициент $\mathbf{H}$ можно обратить в нуль. А соответствующим выбором начала координат мы можем или обратить в нуль коэфициенты $\mathbf{L}$, $\mathbf{M}$, или сделать $\alpha=0$, $\beta=0$. Эти два предположения *вообще* несовместимы, и ни то, ни другое выбранное начало не может предполагаться совпадающим со средним центром площади сечения.

Наиболее интересен тот случай, однако, когда сечение будет симметричным относительно двух перпендикулярных осей. Если их выбрать за оси координат, то мы будем иметь

$$\mathbf{H}=0,\ \mathbf{L}=0,\ \mathbf{M}=0,\ \alpha=0,\ \beta=0, \tag{18}$$

и формулы (17) приводятся к виду

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{X} &= -\mathbf{A}\frac{d\mathbf{u}}{dt} + \mathbf{Brv} - k\varrho\mathbf{v}, \\ \mathbf{Y} &= -\mathbf{B}\frac{d\mathbf{v}}{dt} - \mathbf{Aru} + k\varrho\mathbf{u}, \\ \mathbf{N} &= -\mathbf{R}\frac{d\mathbf{r}}{dt} - (\mathbf{A}-\mathbf{B})\mathbf{uv}. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Чтобы составить уравнения движения, в этом случае мы должны только видоизменить коэфициенты инерции, так же как в § 122. Если распределение масс будет также симметричным, то мы можем положить

$$A = \mathbf{A} + M, \quad B = \mathbf{B} + M, \quad R = \mathbf{R} + L, \tag{20}$$

где M представляет массу самого цилиндра, а L — его момент инерции. Тогда получим

$$\left.\begin{aligned} A\frac{d\mathbf{u}}{dt} - B\mathbf{r}\mathbf{v} + k\varrho\mathbf{v} &= X, \\ B\frac{d\mathbf{v}}{dt} + A\mathbf{r}\mathbf{u} - k\varrho\mathbf{u} &= Y, \\ L\frac{d\mathbf{r}}{dt} - (A - B)\mathbf{u}\mathbf{v} &= N, \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

где X, Y, N представляют действие внешних сил. Когда последние отсутствуют и циркуляция равна нулю, решение уравнений проводится, как и в § 127.

В случае круглого сечения нет необходимости предполагать оси координат вращающимися. Полагая тогда $A = B$, $\mathbf{r} = 0$, мы получим, как и в § 69,

$$A\frac{d\mathbf{u}}{dt} + k\varrho\mathbf{u} = X, \quad A\frac{d\mathbf{v}}{dt} - k\varrho\mathbf{u} = Y. \tag{22}$$

Если сечение будет симметричным только относительно одной оси, например оси x, то мы будем иметь $\mathbf{H} = 0$, $\mathbf{L} = 0$, $B = 0$. Смещая начало вдоль оси симметрии, мы можем сделать $\mathbf{M} = 0$, но одновременно a вообще не может обратиться в нуль. В случае отсутствия циркуляции новое начало представляет „центр реакции“, введенный Томсоном и Тэтом [1]).

Уравнения движения в обобщенных координатах

§ 135. Когда в жидкости движутся несколько тел или когда жидкость ограничена целиком или частично неподвижными стенками, то мы можем применить метод *обобщенных координат* Лагранжа. Этот метод к гидродинамическим задачам был впервые применен Томсоном и Тэтом [2]).

Системы, которые обыкновенно рассматриваются в аналитической динамике, имеют конечное число степеней свободы, т. е. положение каждой частицы вполне определено, если известны значения конечного числа независимых переменных или обобщенных координат q_1, $q_2, \ldots, q_n$. Кинетическая энергия T может быть представлена как квадратичная функция обобщенных компонент скорости $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$.

Согласно методу Гамильтона действительное движение системы между моментами t_0 и t_1 сравнивается с виртуальным движением. Если

[1]) Natural Philosophy, § 321.

[2]) Thomson и Tait, Natural Philosophy (1-е изд.) Oxford (1867), § 331.

ξ, η, ζ означают декартовы координаты произвольной частицы m и X, Y, Z — компоненты полной силы, действующей на нее, то оказывается, что

$$\int_{t_0}^{t_1} \{\Delta T + \sum (X\Delta\xi + Y\Delta\eta + Z\Delta\zeta)\}\, dt = 0, \tag{1}$$

при условии, что для сравниваемого движения имеем

$$\left[\sum m(\dot{\xi}\Delta\xi + \dot{\eta}\Delta\eta + \dot{\zeta}\Delta\zeta)\right]_{t_0}^{t_1} = 0. \tag{2}$$

Знак суммы $\sum$ распространяется на все частицы системы. Виртуальное движение обыкновенно выбирается таким образом, что начальное и конечное положения каждой частицы те же самые, что и при действительном движении. Величины $\Delta\xi$, $\Delta\eta$, $\Delta\zeta$ обращаются тогда в нуль при обоих пределах интегрирования, и условие (2) будет соблюдено.

Для консервативной системы, свободной от внешних сил, уравнение (1) принимает вид

$$\Delta \int_{t_0}^{t_1} (T - V)\, dt = 0. \tag{3}$$

Словами это выражается так: если сравнивать действительное движение системы между двумя произвольными ее положениями со всеми возможными движениями между теми же положениями ее, причем возможные движения (при приложении соответствующих сил) совершаются *в течение того же промежутка времени*, то получается, что интеграл по времени от *кинетического потенциала* [1]), именно $V - T$, будет иметь стационарное значение.

В обобщенных координатах уравнение (1) принимает вид

$$\int_{t_0}^{t_1} (\Delta T + Q_1\Delta q_1 + Q_2\,\Delta q_2 + \ldots + Q_n\,\Delta q_n)\, dt = 0, \tag{4}$$

отсюда можно получить известным способом уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial T}{\partial q_r} = Q_r. \tag{5}$$

§ 136. Перейдем теперь к гидродинамической задаче. Пусть q_1, $q_2, \ldots, q_n$ обозначают систему обобщенных координат, которая служит для определения положений твердых тел. Мы предположим пока, что движение жидкости зависит только от движения твердых тел и, следовательно, свободно от вихрей и ациклично.

---

[1]) Это название введено Гельмгольцем, Die physikalische Bedeutung des Prinzips der kleinsten Wirkung, Crelle, 137, 213 (1886) (Wiss. Abh., III, 203).

В этом случае потенциал скоростей в произвольный момент будет иметь вид

$$\varphi = \dot{q}_1\varphi_1 + \dot{q}_2\varphi_2 + \ldots + \dot{q}_n\varphi_n, \tag{1}$$

где $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ определяются аналогично тому, как это сделано в § 118. Формула для кинетической энергии жидкости представится тогда

$$2\mathbf{T} = -\varrho \iint \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, dS = \mathbf{A}_{11}\dot{q}_1^2 + \mathbf{A}_{22}\dot{q}_2^2 + \ldots + 2\mathbf{A}_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + \ldots, \tag{2}$$

где

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{A}_{rr} &= -\varrho \iint \varphi_r \frac{\partial\varphi_r}{\partial n}\, dS, \\ \mathbf{A}_{rs} &= -\varrho \iint \varphi_r \frac{\partial\varphi_s}{\partial n}\, dS = -\varrho \iint \varphi_s \frac{\partial\varphi_r}{\partial n}\, dS, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

и интегрирования распространяются по мгновенному положению ограничивающих жидкость поверхностей. Тождественность обоих видов $\mathbf{A}_{rs}$ следует из теоремы Грина. Коэфициенты $\mathbf{A}_{rr}$, $\mathbf{A}_{rs}$ будут вообще функциями координат $q_1 q_2 \ldots q_n$.

Если мы к (2) прибавим удвоенную кинетическую энергию $\mathbf{T}_1$ самих тел, то получим выражение того же вида, но с измененными коэфициентами

$$2T = A_{11}\dot{q}_1^2 + A_{22}\dot{q}_2^2 + \ldots + 2A_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + \ldots \tag{4}$$

Остается только еще показать, что хотя наша система и имеет бесконечное число степеней свободы, все же при предположенных условиях можно получить уравнения движения тел, подставляя это значение T в уравнения Лагранжа (5) § 135. Мы не имеем права это принять без дальнейшего исследования, так как положения различных частиц жидкости *не* определяются мгновенными значениями $q_1, q_2, \ldots, q_n$ координат тел. Когда, например, тела, после того как они совершили различные движения, все вернулись в свои первоначальные положения, тогда отдельные частицы жидкости окажутся смещенными, вообще говоря, на конечные расстояния [1]).

Вернемся теперь к общей формуле (1) § 135 и предположим, что для возможного сравнимого движения, к которому относится символ Δ, тела не испытывают изменений в размерах или формах и что, кроме того, жидкость остается несжимаемой и на ограничивающих поверхностях получает такое же перемещение в направлении нормалей, как

---

[1]) Как простой пример рассмотрим случай круглого диска, который движется без вращения таким образом, что его центр описывает прямоугольник, две стороны которого перпендикулярны к плоскости диска; исследуем теперь смещение частицы, которая первоначально находилась в центре диска.

и тело, с которым оно соприкасается. Известно,что при этих обстоятельствах члены суммы

$$\sum (X\Delta\xi + Y\Delta\eta + Z\Delta\zeta),$$

зависящие от внутренних реакций тел, исчезают.

Члены, зависящие от взаимных давлений элементов жидкости, равны

$$-\iiint \left(\frac{\partial p}{\partial x}\Delta\xi + \frac{\partial p}{\partial y}\Delta\eta + \frac{\partial p}{\partial z}\Delta\zeta\right) dx\,dy\,dz,$$

или

$$\iint p(l\Delta\xi + m\Delta\eta + n\Delta\zeta)\,dS + \iiint p\left(\frac{\partial\Delta\xi}{\partial x} + \frac{\partial\Delta\eta}{\partial y} + \frac{\partial\Delta\zeta}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz,$$

где первый интеграл распространяется по ограничивающим поверхностям, а l, m, n означают направляющие косинусы нормалей, направленных в сторону жидкости. Объемный интеграл обращается в нуль вследствие условия несжимаемости

$$\frac{\partial\Delta\xi}{\partial x} + \frac{\partial\Delta\eta}{\partial y} + \frac{\partial\Delta\zeta}{\partial z} = 0. \tag{5}$$

Интеграл по поверхности обращается в нуль на неподвижной границе, на которой имеем

$$l\Delta\xi + m\Delta\eta + n\Delta\zeta = 0,$$

а в случае движущихся тел он сокращается с теми членами, которые представляют результирующие давлений тел на жидкость. Таким образом можно предположить, что символы X, Y, Z относятся только к остальным силам, действующим на систему, и мы можем написать

$$\sum (X\Delta\xi + Y\Delta\eta + Z\Delta\zeta) = Q_1\Delta q_1 + Q_2\Delta q_2 + \ldots + Q_n\Delta q_n, \tag{6}$$

где $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ суть обобщенные компоненты внешних сил.

Сравниваемое движение жидкости имеет все еще большую степень общности. Мы ограничим ее теперь в дальнейшем следующим допущением. В то время когда твердые тела вынуждены совершать с помощью соответствующих сил произвольное движение, жидкость должна быть предоставлена самой себе и совершать то движение, которое вызывается движением твердых тел. Возможное движение жидкости можно, следовательно, предположить безвихревым, благодаря чему измененная кинетическая энергия системы $T + \Delta T$ будет той же самой функцией измененных координат $q_r + \Delta q_r$ и измененных скоростей $\dot{q}_r + \Delta\dot{q}_r$, какой функцией от q_r и $\dot{q}_r$ была первоначальная кинетическая энергия T.

Если же мы рассмотрим далее только частицы жидкости, то будем иметь при том же предположении

$$-\sum m(\dot{\xi}\Delta\xi+\dot{\eta}\Delta\eta+\dot{\zeta}\Delta\zeta)=-\varrho\iiint\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Delta x+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\Delta z\right)dx\,dy\,dz=\varrho\iint\varphi(l\Delta\xi+m\Delta\eta+n\Delta\zeta)dS,$$

причем опять использовано условие несжимаемости (5). Удовлетворяя кинематическим условиям на границах, будем иметь

$$l\Delta\xi+m\Delta\eta+n\Delta\zeta=-\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\Delta q_1-\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\Delta q_2-\ldots-\frac{\partial\varphi_n}{\partial n}\Delta q_n,$$

и, следовательно, применяя формулы (1), (2), (3), получим

$$\sum m(\dot{\xi}\Delta\xi+\dot{\eta}\Delta\eta+\dot{\zeta}\Delta\zeta)=$$
$$=\varrho\iint\varphi\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\Delta q_1+\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\Delta q_2+\ldots+\frac{\partial\varphi_n}{\partial n}\Delta q_n\right)dS=$$
$$=(\mathbf{A}_{11}\dot{q}_1+\mathbf{A}_{12}\dot{q}_2+\ldots+\mathbf{A}_{1n}\dot{q}_n)\Delta q_1+$$
$$+(\mathbf{A}_{21}\dot{q}_1+\mathbf{A}_{22}\dot{q}_2+\ldots+\mathbf{A}_{2n}\dot{q}_n)\Delta q_2+$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+$$
$$+(\mathbf{A}_{n1}\dot{q}_1+\mathbf{A}_{n2}\dot{q}_2+\ldots+\mathbf{A}_{nn}\dot{q}_n)\Delta q_n=$$
$$=\frac{\partial\mathbf{T}}{\partial\dot{q}_1}\Delta q_1+\frac{\partial\mathbf{T}}{\partial\dot{q}_2}\Delta q_2+\ldots+\frac{\partial\mathbf{T}}{\partial\dot{q}_n}\Delta q_n. \tag{7}$$

Если мы прибавим члены, зависящие от твердых тел, то найдем, что условие (2) § 135 все еще будет иметь место; вывод уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_r}-\frac{\partial T}{\partial q_r}=Q_r \tag{8}$$

проводится тогда обычным путем.

§ 137. В качестве первого применения изложенной теории рассмотрим пример, данный Томсоном и Тэтом [1]), где предполагается, что шар движется в жидкости, ограниченной только бесконечной плоской стенкой.

Возьмем для простоты случай, когда центр шара движется в плоскости, перпендикулярной к стенке, и будем определять его положение в этой плоскости в момент t прямоугольными координатами x и y, причем y обозначает расстояние от стенки. Мы имеем тогда

$$2T=A\dot{x}^2+B\dot{y}^2 \tag{1}$$

где A и B суть функции только от y; член $\dot{x}\dot{y}$ не может, очевидно, входить, так как энергия должна остаться без изменения, когда знак при $\dot{x}$ меняется

[1]) Thomson a. Tait, Natural Philosophy, § 321.

на обратный. Значения A и B могут быть получены из результатов § 98, 99; именно, если m обозначает массу шара, a — его радиус, то будем иметь приближенно

$$\left.\begin{aligned} A &= m+\frac{2}{3}\pi\varrho a^3\left(1+\frac{3}{16}\frac{a^3}{y^3}\right), \\ B &= m+\frac{2}{3}\pi\varrho a^3\left(1+\frac{3}{8}\frac{a^3}{y^3}\right), \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

при условии, что y велико сравнительно с a.

Уравнения движения получаются

$$\frac{d}{dt}(A\dot{x})=X, \quad \frac{d}{dt}(B\dot{y})-\frac{1}{2}\left(\frac{dA}{dy}\dot{x}^2+\frac{dB}{dy}\dot{y}^2\right)=Y, \tag{3}$$

где X и Y суть компоненты внешней силы, относительно которой предполагаем, что ее линия действия проходит через центр шара.

Если внешняя сила отсутствует и скорость шара направлена перпендикулярно к стенке, то мы имеем $\dot{x}=0$ и

$$B\dot{y}^2=\text{const}. \tag{4}$$

Так как B убывает, когда y возрастает, то шар будет получать ускорение в направлении *от* стенки.

Если же, напротив, шар принужден двигаться параллельно стенке, тогда имеем $y=0$, и сила, необходимая для этого, будет равна

$$Y=-\frac{1}{2}\frac{dA}{dy}\dot{x}^2. \tag{5}$$

Так как $\frac{dA}{dy}$ отрицательна, то оказывается, что шар будет словно *притягиваться* стенкой. Причину этого легко усмотреть, если свести задачу к случаю стационарного движения. На той стороне шара, которая лежит ближе к стенке, скорость жидкости, очевидно, больше и давление, следовательно, меньше, чем на стороне, более удаленной от стенки; см. § 23.

Вышеизложенное исследование пригодно также и для случая, когда два шара движутся в безграничной массе жидкости таким образом, что плоскость $y=0$ во всех отношениях будет плоскостью симметрии.

§ 138. В качестве следующего случая мы рассмотрим тот, когда два шара движутся в направлении их линий центров.

Кинематическая часть этой задачи была рассмотрена в § 98. Если обозначим теперь через x, y расстояния центров A, B шаров от неподвижного начала O, лежащего на прямой, соединяющей эти точки, то мы будем иметь

$$2T=L\dot{x}^2-2M\dot{x}\dot{y}+N\dot{y}^2, \tag{1}$$

где коэфициенты L, M, N суть функции от $y-x$ или c, т. е. расстояния между центрами. Поэтому уравнения движения напишутся

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}(L\dot{x}-M\dot{y})+\frac{1}{2}\left(\frac{dL}{dc}\dot{x}^2-2\frac{dM}{dc}\dot{x}\dot{y}+\frac{dN}{dc}\dot{y}^2\right)&=X, \\ \frac{d}{dt}(-M\dot{x}+N\dot{y})-\frac{1}{2}\left(\frac{dL}{dc}\dot{x}^2-2\frac{dM}{dc}\dot{x}\dot{y}+\frac{dN}{dc}\dot{y}^2\right)&=Y, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

где X, Y суть силы, действующие на шары в направлении линии центров. Если радиусы a, b оба малы сравнительно с c и если принять во внимание

только важнейшие члены, то, согласно (15) § 98, мы будем иметь приближенно

$$\left.\begin{aligned} L &= m + \frac{2}{3}\pi\varrho a^3, \\ M &= 2\pi\varrho\,\frac{a^3b^3}{c^3}, \\ N &= m' + \frac{2}{3}\pi\varrho b^3, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

где m и m' суть массы обоих шаров. С той же степенью приближения имеем, следовательно,

$$\frac{dL}{dc} = 0,$$
$$\frac{dM}{dc} = -6\pi\varrho\,\frac{a^3b^3}{c^4},$$
$$\frac{dN}{dc} = 0.$$

Если каждый из обоих шаров принужден двигаться с постоянной скоростью, то сила, которая должна действовать на A, чтобы поддерживать движение, равна

$$X = -\frac{dM}{dc}\,\dot{y}(\dot{y}-\dot{x}) - \frac{dM}{dc}\,\ddot{x}y = 6\pi\varrho\,\frac{a^3b^3}{c^4}\,\dot{y}^2. \tag{4}$$

Эта сила направлена к B и зависит только от скорости B. Получается, таким образом, так, как если бы оба шара отталкивали друг друга; необходимо заметить, что кажущиеся силы вообще только тогда равны и противоположны, когда $\dot{x} = \pm y$.

Если шары совершают малые периодические колебания одинакового периода около некоторого среднего положения, то средние значения первых членов в (2) обращаются в нуль; таким образом оказывается, что шары действуют друг на друга с силами, которые равны

$$6\pi\varrho\,\frac{a^3b^3}{c^4}\,[\ddot{x}y], \tag{5}$$

где $[\ddot{x}y]$ обозначает среднее значение от $\ddot{x}y$. Если разность фаз $\dot{x}$, $\dot{y}$ меньше четверти периода, то сила будет отталкивающей, а если больше четверти периода, то — притягивающей.

Пусть теперь B совершает малые периодические колебания, в то время как A остается в покое. Среднее значение силы, которая должна быть приложена к шару A, чтобы препятствовать его движению, будет равна

$$X = \frac{1}{2}\,\frac{dN}{dc}\,[\dot{y}^2], \tag{6}$$

где $[\dot{y}^2]$ обозначает среднее значение квадрата скорости B. При выше принятой степени точности $\frac{dN}{dc}$ равно нулю; принимая во внимание § 98, мы находим, что наиболее важный член здесь равен $-12\pi\varrho\,\frac{a^3b^3}{c^7}$, так что сила, действующая на A, притягивающая и равна

$$6\pi\varrho\,\frac{a^3b^3}{c^7}\,[\dot{y}^2]. \tag{7}$$

Этот результат можно получить из общего принципа, высказанного Кельвином. Если рассматривать два погруженных в жидкость тела, из которых одно (A) совершает малые колебания, в то время как другое (B) удерживается в покое, то скорость жидкости на поверхности B в общем будет больше на той стороне, которая обращена к A, чем на противоположной стороне. Поэтому среднее давление на первую сторону будет меньше, чем на вторую, так что B в общем будет испытывать притяжение к A. В качестве практических иллюстраций этой теоремы мы можем привести кажущееся притяжение подвешенной тонкой карточки в воздухе колеблющимся камертоном, а также другие подобные явления, исследованные экспериментально Гутрие [1]) и объясненные вышеуказанным способом Кельвином [2]).

Преобразование уравнений Лагранжа в случае циклического движения

§ 139. Мы возвратимся теперь к исследованиям в § 136 с целью применить их к случаю, когда жидкость независимо от движения, вызванного телами, совершает циклическое безвихревое движение через каналы, которые находятся в движущихся телах или в заключающем ее сосуде.

Предположим, что различные отверстия загорожены поверхностными перегородками. Мы допускаем, что у каналов, которые находятся в заключающем жидкость сосуде, эти воображаемые поверхности неподвижны в пространстве; напротив, у каналов, находящихся в движущемся теле, мы будем считать их неподвижно связанными с телом. Обозначим через $\dot{\chi}, \dot{\chi}', \dot{\chi}'', \ldots$ *относительные* расходы в момент t через отдельные перегородки; пусть $\chi, \chi', \chi'', \ldots$ будут интегралами по времени от этих расходов, считая от произвольного момента; эти величины определяют, следовательно, объемы жидкости, протекшей до момента t через соответствующие перегородки. Оказывается тогда, что аналогия с динамической системой с конечным числом степеней свободы все еще будет сохраняться, если только рассматривать величины χ, χ', χ'' в дополнение к величинам $(q_1, q_2, \ldots, q_n)$, которые определяют положения движущихся тел как обобщенные координаты системы. Заранее видно, что значения $\chi, \chi', \chi'', \ldots$ войдут не сами в выражение кинетической энергии, а только через скорости их изменений, т. е. их производные по времени.

Сначала покажем, что движение жидкости при всяком данном положении тел определяется однозначно мгновенными значениями $q_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n, \dot{\chi}, \dot{\chi}', \dot{\chi}'', \ldots$ В самом деле, если два различных вида безвихревого движения были бы совместимы с этими значениями, тогда границы жидкости при том движении, которое есть *разность* этих двух движений, должны были бы оставаться в покое и расход

---

[1]) Guthrie, On Approach caused by Vibration, Phil. Mag. (4), XL (1870).

[2]) Kelvin, Reprint of Papers on Electrostatics etc., § 741. Литературные указания об экспериментальных и теоретических исследованиях Бьеркнеса и других относительно взаимного влияния колеблющихся в жидкости шаров, см. Hicks, Report on Recent Researches in Hydrodynamics, Brit. Ass. Rep., 1882, стр. 52; Love, Encycl. d. math. Wiss., IV (3), стр. 111, 112.

через каждую перегородку должен был бы равняться нулю. Формула (5) § 55 показывает, что при этих обстоятельствах кинетическая энергия должна была бы обращаться в нуль.

Потенциал скоростей может быть выражен, следовательно, в форме

$$\varphi = \dot{q}_1\varphi_1 + \dot{q}_2\varphi_2 + \ldots + \dot{q}_n\varphi_n + \dot{\chi}\Omega + \dot{\chi}'\Omega' + \ldots \tag{1}$$

При этом φ_r есть потенциал скоростей того движения, при котором изменяется только q_r, и расход через каждую перегородку тем самым равен нулю. Далее, Ω есть потенциал скоростей движения, при котором твердые тела все находятся в покое, в то время как расход через первое отверстие равен единице, а через всякое другое отверстие равен нулю. Необходимо при этом принять во внимание, что φ_1, $\varphi_2, \ldots, \varphi_n$, Ω, $\Omega', \ldots$, вообще говоря, суть циклические функции, которые, однако, согласно принятым в § 50 ограничениям, могут рассматриваться как однозначные.

Кинетическая энергия жидкости определяется выражением

$$2\mathrm{T} = \varrho \iiint \left\{ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 \right\} dx\,dy\,dz, \tag{2}$$

где интеграл распространяется по области, которая в рассматриваемый момент наполнена жидкостью. Если вставить в (2) вместо φ значение из (1), то мы получим T в виде однородной квадратичной функции от $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n, \ldots, \dot{\chi}, \dot{\chi}', \dot{\chi}''$ с коэфициентами, зависящими от мгновенного положения тел, и поэтому они представляют функции только от $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Кроме того, согласно (1) § 53, найдем

$$\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial\dot{\chi}} = \varrho \iiint \left\{ \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\Omega}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\Omega}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\Omega}{\partial z} \right\} dx\,dy\,dz =$$
$$= -\varrho \iint \varphi \frac{\partial\Omega}{\partial n}\,dS - \varrho\varkappa \iint \frac{\partial\Omega}{\partial n}\,d\sigma - \varrho\varkappa' \iint \frac{\partial\Omega}{\partial n}\,d\sigma' - \ldots,$$

где $\varkappa, \varkappa', \ldots$ означают циклические постоянные φ, первый поверхностный интеграл распространяется по поверхностям тел, а остальные — по различным перегородкам. При помощи условий, которыми определяется Ω, это выражение сводится к первому уравнению следующей системы:

$$\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial\dot{\chi}} = \varrho\varkappa, \quad \frac{\partial\mathrm{T}}{\partial\dot{\chi}'} = \varrho\varkappa', \ldots \tag{3}$$

Эти уравнения показывают, что $\varrho\varkappa$, $\varrho\varkappa', \ldots$ могут рассматриваться в качестве тех обобщенных компонент импульса, которые соответствуют компонентам скорости $\dot{\chi}, \dot{\chi}', \ldots$

Воспользуемся общей формулой Гамильтона (1) § 135. Мы предположим, что сравниваемое движение твердых тел подчинено только условию, что начальные и конечные положения тел те же самые, как и при действительном движении; далее предполагается, что

начальное положение каждой частицы жидкости у обоих движений будет одним и тем же. Следовательно, выражение

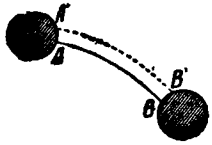
$$\sum m(\dot{\xi}\,\Delta\xi + \dot{\eta}\,\Delta\eta + \dot{\zeta}\,\Delta\zeta) \tag{4}$$

обращается в нуль в момент t_0, но, вообще говоря, не обращается в нуль в момент t_1, если нет налицо дальнейших ограничений.

Мы предположим теперь, что сравниваемое движение жидкости есть безвихревое; оно определяется тогда мгновенными значениями измененных обобщенных координат и скоростей. Если рассматривать частицы только жидкости, то будем иметь

$$\begin{aligned}
&\sum m(\dot{\xi}\,\Delta\xi + \dot{\eta}\,\Delta\eta + \dot{\zeta}\,\Delta\zeta) = \\
&= -\varrho \iiint \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Delta\xi + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\Delta\eta + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\Delta\zeta\right) dx\,dy\,dz = \\
&= \varrho \iint \varphi\,(l\,\Delta\xi + m\,\Delta\eta + n\,\Delta\zeta)\,dS + \\
&\qquad + \varrho\varkappa \iint (l\,\Delta\xi + m\,\Delta\eta + n\,\Delta\zeta)\,d\sigma + \\
&\qquad + \varrho\varkappa' \iint (l\,\Delta\xi + m\,\Delta\eta + n\,\Delta\zeta)\,d\sigma' + \ldots,
\end{aligned} \tag{5}$$

где l, m, n обозначают направляющие косинусы нормали к некоторому элементу ограничивающей поверхности, направленной в сторону жидкости, или нормали элемента перегородки, проведенной в направлении, в котором взята соответствующая циркуляция.



Фиг. 32.

В момент t_1 мы будем иметь тогда

$$l\,\Delta\xi + m\,\Delta\eta + n\,\Delta\zeta = 0$$

как на поверхностях тел, так и на неподвижных границах. Если, далее, AB (фиг. 32) обозначает одну из перегородок в момент t_1, $A'B'$ изображает то место, которое занято в тот же самый момент теми частицами сравниваемого движения, которые при действительном движении занимают положение AB, тогда объем, заключенный между AB и $A'B'$, равен соответствующему значению $\Delta\chi$. Отсюда следует

$$\left.\begin{aligned}
&\iint (l\,\Delta\xi + m\,\Delta\eta + n\,\Delta\zeta)\,d\sigma = \Delta\chi, \\
&\iint (l\,\Delta\xi + m\,\Delta\eta + n\,\Delta\zeta)\,d\sigma' = \Delta\chi', \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Варьированные циркуляции для отдельных моментов находятся еще в нашем распоряжении. Мы можем допустить, что они выбраны таким образом, что $\Delta\chi$, $\Delta\chi'$, ... в момент t_1 обращаются в нуль.

При этом выражение (4) будет обращаться в нуль, и если мы еще дальше предположим, что при произвольных относительных перемещениях частиц жидкости внешние силы в их совокупности не совершают работы, когда граница жидкости находится в покое, то будем иметь

$$\int_{t_0}^{t_1}\left\{\Delta T+Q_1\Delta q_1+Q_2\Delta q_2+\ldots+Q_n\Delta q_n\right\}dt=0, \tag{7}$$

как и выше.

Интегрируя по частям и принимая во внимание, что при нашем допущении

$$\Delta q_1,\ \Delta q_2,\ldots,\ \Delta q_n,\ \Delta\chi,\ \Delta\chi',\ldots$$

при пределах t_0, t_1 обращаются в нуль, но в остальном независимы, мы получаем n уравнений вида

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_r}-\frac{\partial T}{\partial q_r}=Q_r \tag{8}$$

и затем уравнения

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\chi}}=0,\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\chi}'}=0. \tag{9}$$

§ 140. Уравнения типа (8) и (9) встречаются в различных задачах обыкновенной динамики, например, когда вопрос касается гироскопов, где координаты χ, χ', абсолютные значения которых не влияют на кинетическую или потенциальную энергию системы, суть угловые координаты гироскопов относительно их рам. Общая теория таких систем была разобрана Раусом[1]), Томсоном и Тэтом[2]) и другими авторами.

Мы видели, что имеют место уравнения

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{\chi}}=\varrho\varkappa,\quad \frac{\partial T}{\partial\dot{\chi}'}=\varrho\varkappa',\ldots, \tag{10}$$

и интегрирование уравнений (9) показывает, что величины $\varkappa$, $\varkappa'$,... постоянны по отношению ко времени, что уже известно было ранее (§ 50). Для дальнейшего полагаем

$$R=T-\varrho\varkappa\dot{\chi}-\varrho\varkappa'\dot{\chi}'\ldots \tag{11}$$

---

[1]) Routh, On the Stability of a Given State of Motion (Adams Prize Essay), London, 1877; Advanced Rigid Dynamics, 6-е изд., London, 1905.

[2]) Thomson a. Tait, Natural Philosophy, 2-е изд., § 319 (1879). См. также Helmholtz, Prinzipien der Statik Monozyklischen Systeme, Crelle, XCVII (1884) (Wiss. Abh., III, 179); Larmor, On the Direct Application of the Principle of Least Action to the Dynamics of Solid. and Fluid Sistems, Proc. Lond. Math. Soc. (2), XV (1884) (Papers, I, 31); Basset, Proc. Camb. Soc., VI, 117 (1889).

Уравнения (10) определяют, как сразу видно, если их написать полностью, $\dot{\chi}$, $\dot{\chi}'$, ... в виде линейных функций от $\varkappa$, $\varkappa'$, ... и $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$, ..., $\dot{q}_n$; вставляя в (11), мы можем представить R как однородную квадратичную функцию тех же величин с коэфициентами, которые, вообще говоря, содержат координаты q_1, q_2, ..., q_n. При этом предположении, если к обеим частям уравнения (11) применить произвольную вариацию δ и опустить члены, которые исчезают согласно (10), будем иметь

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_1}\delta\dot{q}_1+\ldots+\frac{\partial R}{\partial q_1}\delta q_1+\ldots+\frac{\partial R}{\partial \varkappa}\delta\varkappa+\ldots=$$
$$=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\delta\dot{q}_1+\ldots+\frac{\partial T}{\partial q_1}\delta q_1+\ldots+-\varrho\dot{\chi}\,\delta\varkappa-\ldots, \tag{12}$$

где для краткости написан только один член каждого вида. Мы получаем отсюда $2n$ уравнений типа

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_r}=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}, \quad \frac{\partial R}{\partial q_r}=\frac{\partial T}{\partial q_r} \tag{13}$$

вместе с

$$\frac{\partial R}{\partial \varkappa}=-\varrho\dot{\chi}, \quad \frac{\partial R}{\partial \varkappa'}=-\varrho\dot{\chi}'. \tag{14}$$

Поэтому уравнения (8) могут быть написаны в следующей форме:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_r}-\frac{\partial R}{\partial q_r}=Q_r, \tag{15}$$

где скорости $\dot{\chi}$, $\dot{\chi}'$, ..., которые соответствуют циклическим координатам χ, χ', ..., теперь исключены[1]).

§ 141. Чтобы показать более ясно, каким образом меняются динамические уравнения в случае циклических движений, мы поступим следующим образом.

Подставляя (14) в (11), мы получим

$$T=R-\left(\varkappa\frac{\partial R}{\partial \varkappa}+\varkappa'\frac{\partial R}{\partial \varkappa'}+\ldots\right). \tag{16}$$

Если вспомнить о содержании R, то мы можем на мгновение написать

$$R=R_{2,0}+R_{1,1}+R_{0,2}, \tag{17}$$

где $R_{2,0}$ есть однородная квадратичная функция от $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$, ..., $\dot{q}_n$; $R_{0,2}$ — однородная квадратичная функция от $\varkappa$, $\varkappa'$, ... и $R_{1,1}$ есть билинейная функция этих двух рядов переменных. Поэтому уравнение (16) принимает вид

$$T=R_{2,0}-R_{0,2}, \tag{18}$$

---

[1]) Это исследование принадлежит Routh, см. сноску на стр. 243; ср. Уиттекер, Аналитическая динамика, § 38, ОНТИ, 1937.

или, как мы будем писать в дальнейшем,

$$T = \mathfrak{T} + K, \tag{19}$$

где $\mathfrak{T}$ и K суть однородные квадратичные функции от $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$ и $\varkappa, \varkappa', \ldots$ соответственно. Из (17) следует тогда, что

$$R = \mathfrak{T} - K - \beta_1 \dot{q}_1 - \beta_2 \dot{q}_2 - \ldots - \beta_n \dot{q}_n, \tag{20}$$

где $\beta_1, \beta_2, \ldots$ суть линейные функции от $\varkappa, \varkappa', \ldots$

$$\left.\begin{aligned} \beta_1 &= a_1\varkappa + a_1'\varkappa' + \ldots, \\ \beta_2 &= a_2\varkappa + a_2'\varkappa' + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \beta_n &= a_n\varkappa + a_n'\varkappa' + \ldots \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Значения коэфициентов a (для гидродинамической задачи) находим из (14) и (20).

$$\left.\begin{aligned} \varrho\dot{\chi} &= \frac{\partial K}{\partial \varkappa} + a_1\dot{q}_1 + a_2\dot{q}_2 + \ldots + a_n\dot{q}_n, \\ \varrho\dot{\chi}' &= \frac{\partial K}{\partial \varkappa'} + a_1'\dot{q}_1 + a_2'\dot{q}_2 + \ldots + a_n'\dot{q}_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Эти уравнения показывают, что a_r есть та часть потока массы через первую перегородку, которая приходится на единицу скорости изменения координаты q_r, и т. д.

Если подставить теперь значение (20) в уравнения (15), то получим общие уравнения „гиростатической системы" в форме[1])

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial q_1} + (1, 2)\dot{q}_2 + (1, 3)\dot{q}_3 + \ldots + (1, n)\dot{q}_n + \frac{\partial K}{\partial q_1} = Q_1, \\ &\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial q_2} + (2, 1)\dot{q}_1 + (2, 3)\dot{q}_3 + \ldots + (2, n)\dot{q}_n + \frac{\partial K}{\partial q_2} = Q_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \dot{q}_n} - \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial q_n} + (n, 1)\dot{q}_1 + (n, 2)\dot{q}_2 + (n, 3)\dot{q}_3 + \ldots + \frac{\partial K}{\partial q_n} = Q_n, \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

где

$$(r, s) = \frac{\partial \beta_s}{\partial q_r} - \frac{\partial \beta_r}{\partial q_s}. \tag{24}$$

Важно заметить, что

$$(r, s) = -(s, r) \quad \text{и} \quad (r, r) = 0.$$

---

[1]) Эти уравнения появились впервые в работе В. Томсона, On the Motion of Rigid Solids in a Liquid circulating irrotationally through perforations in them or in a Fixed Solid, Phil. Mag. (4), XLV, 332 (873) (Papers, IV, 101). См. также C. Neumann, Hydrodynamische Untersuchungen (1883).

Если в уравнениях движения вполне определенной системы с конечным числом степеней свободы (4) § 135 изменить знак элемента времени δt, то уравнения остаются без изменения. Движение, таким образом, обратимо, т. е. если при прохождении системы через некоторое определенное положение скорости $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$ все будут обращены, то система (если силы в одинаковых положениях будут всегда одинаковы) пройдет свой первоначальный путь в противоположном направлении. Важно заметить, что сказанное не всегда имеет место для гиростатической системы; именно, те члены в (23), которые линейны относительно $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$, меняют свой знак одновременно с δt, в то время как другие члены не делают этого. Следовательно, в рассматриваемом нами случае движение тел будет необратимо, если только мы не предположим, что циркуляции $\varkappa, \varkappa', \ldots$ также меняют свой знак одновременно со скоростями $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$ [1]).

Если мы умножим уравнения (23) соответственно на $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$ и затем их сложим, то мы найдем при помощи небольшого изменения обычного приема

$$\frac{d}{dt}(\mathfrak{T}+K)=Q_1\dot{q}_1+Q_2\dot{q}_2+\ldots+Q_n\dot{q}_n, \tag{25}$$

или, если система будет консервативной,

$$\mathfrak{T}+K+V=\text{const}. \tag{26}$$

§ 142. Результаты § 141 могут быть применены к установлению условий равновесия системы тел, окруженных жидкостью, находящейся в циклическом движении. Эта задача „кинетостатики", как ее можно назвать, однако, может быть рассмотрена с помощью более простого приема.

Выражение для φ при настоящих условиях может быть написано в двух видах

$$\varphi=\dot{\chi}\Omega+\dot{\chi}'\Omega'+\ldots, \tag{1}$$

$$\varphi=\varkappa\omega+\varkappa'\omega'+\ldots, \tag{2}$$

и кинетическая энергия получается как однородная квадратичная форма либо от $\dot{\chi}, \dot{\chi}', \ldots$, либо от $\varkappa, \varkappa', \ldots$ с коэфициентами, которые в обоих случаях суть функции координат $q_1, q_2, \ldots, q_n$, определяющих положения твердых тел. Эти два выражения для энергии мы будем различать с помощью двух символов T_0 и K. Далее, согласно (5) § 55 мы имеем еще третью формулу для T, именно

$$2T=\varrho\varkappa\dot{\chi}+\varrho\varkappa'\dot{\chi}'+\ldots \tag{3}$$

---

[1]) Совершенно так же, как нельзя переменить движение оси волчка на обратное, если не изменить направления вращения.

Если воспользоваться исследованием в начале § 139, учитывая при этом, что теперь члены, содержащие $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$, исчезают, то замечаем, что

$$\varrho\varkappa = \frac{\partial T_0}{\partial \dot{\chi}}, \quad \varrho\varkappa' = \frac{\partial T_0}{\partial \dot{\chi}'}, \ldots \tag{4}$$

Далее, формула в явном виде для K будет

$$\begin{aligned} 2K &= -\varrho\varkappa \iint \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, d\sigma - \varrho\varkappa' \iint \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, d\sigma' - \ldots = \\ &= (\varkappa, \varkappa)\varkappa^2 + (\varkappa', \varkappa')\varkappa'^2 + \ldots + 2(\varkappa, \varkappa')\varkappa\varkappa' + \ldots, \end{aligned} \tag{5}$$

где

$$\begin{aligned} (\varkappa, \varkappa) &= -\varrho \iint \frac{\partial\omega}{\partial n}\, d\sigma, \\ (\varkappa, \varkappa') &= -\varrho \iint \frac{\partial\omega'}{\partial n}\, d\sigma = -\varrho \iint \frac{\partial\omega}{\partial n}\, d\sigma' \end{aligned} \tag{6}$$

и т. д. Отсюда следует

$$\frac{\partial K}{\partial \varkappa} = (\varkappa, \varkappa)\varkappa + (\varkappa, \varkappa')\varkappa' + \ldots = -\varrho \iint \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, d\sigma.$$

Мы получаем таким образом

$$\varrho\dot{\chi} = \frac{\partial K}{\partial \varkappa}, \quad \varrho\dot{\chi}' = \frac{\partial K}{\partial \varkappa'}, \ldots \tag{7}$$

Если, далее, напишем $T_0 + K$ вместо $2T$ в уравнении (3) и применим к обеим частям полученного таким образом тождества полную вариацию δ, то найдем, если опустить члены, которые уничтожаются согласно (4) и (7)[1],

$$\frac{\partial T_0}{\partial q_r} + \frac{\partial K}{\partial q_r} = 0. \tag{8}$$

Это уравнение содержит ряд необходимых аналитических формул[2].

Предположим теперь, что тела из состояния покоя в положении $(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ переведены в другое соседнее состояние покоя, в положение

$$(q_1 + \Delta q_1,\ q_2 + \Delta q_2, \ldots,\ q_n + \Delta q_n);$$

тогда необходимая для этого работа будет равна

$$Q_1 \Delta q_1 + Q_2 \Delta q_2 + \ldots + Q_n \Delta q_n,$$

где $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ означают компоненты тех внешних сил, которые должны быть приложены, чтобы нейтрализовать давления жидкости на тела. Эта работа должна равняться приращению ΔK кинетической

---

[1]) Достаточно взять либо (4), либо (7); рассматриваемый способ приводит тогда к независимому доказательству другого ряда формул.

[2]) Заметим, что функция R § 140 приводится теперь к $-K$.

энергии, которое вычисляется при допущении, что циркуляции $\varkappa$, $\varkappa'$, ... будут постоянны. Отсюда следует

$$Q'_r = \frac{\partial K}{\partial q_r}. \tag{9}$$

Силы, эквивалентные давлениям жидкости на тела (когда последние находятся в покое), получаются изменением знака; они имеют вид

$$Q'_r = -\frac{\partial K}{\partial q_r}; \tag{10}$$

Следовательно, тела стремятся двигаться таким образом, что кинетическая энергия циклического движения убывает.

Вследствие (8) будем иметь также

$$Q'_r = \frac{\partial T_0}{\partial q_r}. \tag{11}$$

§ 143. Формула (19) § 141 может быть использована для определения приближенного выражения для сил воздействия на тело, погруженное в неравномерный поток[1]).

Предположим, что мы имеем тело, удерживаемое в состоянии покоя в циклической области, в которой жидкость находится в циркуляционном безвихревом движении. Пусть K есть энергия жидкости, которая изменяется с изменением положения тела. Мы будем предполагать, что размеры тела настолько малы по сравнению с расстоянием от стенок области, что его положение может быть определено заданными координатами точки (x, y, z). Тогда для компонент сил воздействия на него давлений жидкости мы будем иметь

$$\mathbf{X} = -\frac{\partial K}{\partial x}, \quad \mathbf{Y} = -\frac{\partial K}{\partial y}, \quad \mathbf{Z} = -\frac{\partial K}{\partial z}. \tag{1}$$

Остается найти приближенно вид функции K от x, y, z. Пусть (u, v, w) будет скорость, которую имела бы жидкость в точке (x, y, z), если бы тело отсутствовало. Если тело было бы вынуждено двигаться с этой скоростью и если бы оно имело плотность, совпадающую с плотностью окружающей жидкости, то энергия была бы приближенно той же самой, как если бы все пространство было заполнено жидкостью. Из формулы (19) § 141 следует, что в этом случае энергия жидкости была бы $\mathfrak{T} + K$, где согласно § 124

$$2\mathfrak{T} = \mathbf{A}u^2 + \mathbf{B}v^2 + \mathbf{C}w^2 + 2\mathbf{A}'vw + 2\mathbf{B}'wu + 2\mathbf{C}'uv, \tag{2}$$

а энергия тела была бы равна

$$\frac{1}{2}\varrho Q(u^2 + v^2 + w^2), \tag{3}$$

---

[1]) G. I. Taylor, The Forces on a Body placed in a Curved or Converging Stream of Fluid, Proc. Roy. Soc., CXX, 260 (1928).

где Q есть вытесненный объем. Выражение

$$\mathfrak{T}+\frac{1}{2}\varrho Q(u^2+v^2+w^2)+K \tag{4}$$

имеет, таким образом, постоянное значение, так как оно представляет энергию жидкости, заполняющей область и имеющей заданную циркуляцию. Это выражение определяет вид K.

Следовательно,

$$\left.\begin{aligned}
\mathbf{X}&=\frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial x}+\frac{1}{2}\varrho Q\frac{\partial}{\partial x}(u^2+v^2+w^2),\\
\mathbf{Y}&=\frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial y}+\frac{1}{2}\varrho Q\frac{\partial}{\partial y}(u^2+v^2+w^2),\\
\mathbf{Z}&=\frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial z}+\frac{1}{2}\varrho Q\frac{\partial}{\partial z}(u^2+v^2+w^2).
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Так как силы воздействия на тело должны зависеть только от движения жидкости в непосредственной близости к нему, то эти выражения будут общими и независимыми от тех частных предположений, которые принимаются в отношении вывода этих уравнений.

Если направление невозмущенного потока вблизи тела будет принято за направление оси x, то результаты упрощаются. Полагая $v=0$, $w=0$, мы будем иметь

$$\left.\begin{aligned}
\mathbf{X}&=\left\{(\mathbf{A}+\varrho Q)\frac{\partial u}{\partial x}+\mathbf{B}'\frac{\partial w}{\partial x}+\mathbf{C}'\frac{\partial v}{\partial x}\right\}u,\\
\mathbf{Y}&=\left\{(\mathbf{A}+\varrho Q)\frac{\partial u}{\partial y}+\mathbf{B}'\frac{\partial w}{\partial y}+\mathbf{C}'\frac{\partial v}{\partial y}\right\}u,\\
\mathbf{Z}&=\left\{(\mathbf{A}+\varrho Q)\frac{\partial u}{\partial z}+\mathbf{B}'\frac{\partial w}{\partial z}+\mathbf{C}'\frac{\partial v}{\partial z}\right\}u.
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Если к тому же поток будет симметричен относительно плоскостей $y=0$, $z=0$, то мы будем иметь $\frac{\partial u}{\partial y}=0$, $\frac{\partial u}{\partial z}=0$, а в силу допущения о безвихревом характере движения будет также $\frac{\partial v}{\partial x}=0$, $\frac{\partial w}{\partial x}=0$. Симметрия также требует, чтобы $\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial z}=0$. Отсюда

$$\left.\begin{aligned}
\mathbf{X}&=(\mathbf{A}+\varrho Q)\,u\,\frac{\partial u}{\partial x},\\
\mathbf{Y}&=\mathbf{C}'u\frac{\partial v}{\partial y},\\
\mathbf{Z}&=\mathbf{B}'u\frac{\partial w}{\partial z}.
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Вначале предположим, что одна из осей установившегося поступательного движения (§ 124) совпадает с направлением потока. Тогда $\mathbf{C}'=0$, $\mathbf{B}'=0$ и

$$\mathbf{X}=(\mathbf{A}+\varrho Q)f,\quad \mathbf{Y}=0,\quad \mathbf{Z}=0, \tag{8}$$

где f есть ускорение в невозмущенном потоке. Таким образом, если тело представляет шар, то $\mathbf{A}=\frac{2}{3}\pi\varrho a^3$, $Q=\frac{4}{3}\pi a^3$, $\mathbf{X}=2\pi\varrho a^3 f$. Для круглого цилиндра, относя все величины к единице длины его, получим

$$\mathbf{A}=\pi\varrho a^2,\quad Q=\pi\varrho a^2,\quad \mathbf{X}=2\pi\varrho a^2 f.$$

Теперь предположим, что только две оси установившегося поступательного движения лежат в одной плоскости с направлением потока. Если данная плоскость принята за плоскость xy, то мы будем иметь $\mathbf{A}'=0$, $\mathbf{B}'=0$. Если поток будет симметричным относительно оси x, то будем иметь

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x},$$

и силы приводятся к

$$\mathbf{X}=(\mathbf{A}+\varrho Q)f,\quad \mathbf{Y}=\frac{1}{2}\mathbf{C}'f,\quad \mathbf{Z}=0. \tag{9}$$

В случае круглого диска

$$\mathbf{A}=\frac{8}{3}\varrho a^3\cos^2\alpha,\quad \mathbf{C}'=-\frac{8}{3}\varrho a^3\sin\alpha\cos\alpha,\quad Q=0,$$

где α есть угол, который составляет направление потока с осью симметрии.

В случае плоского движения эллиптического цилиндра

$$\mathbf{A}=\pi\varrho\,(b^2\cos^2\alpha+a^2\sin^2\alpha),\quad \mathbf{C}'=\pi\varrho\,(a^2-b^2)\sin\alpha\cos\alpha,\quad Q=\pi ab,$$

где α есть угол наклона направления потока к большой оси [1]).

Приведенная теория имеет интерес в связи с „перепадом давления" в аэродинамической трубе, которая используется для измерения лобового сопротивления моделей аэропланов. Поток воздуха немного суживается по направлению к вентилятору на заднем конце трубы, а возрастание скорости предполагает падение давления. Мы тогда имеем

$$\varrho f=-\frac{\partial p}{\partial x}. \tag{10}$$

Предыдущие формулы показывают, что было бы неправильно вычислять значение $\mathbf{X}$ на основании только измеренных градиентов давления, как если бы это была статическая задача, когда мы имели бы просто $x=\varrho Qf$ *).

Некоторые дальнейшие интересные примеры кинетостатики (невоспроизводимые в настоящем издании) были исследованы Томсоном [2]), Кирхгофом [3]) и Больцманом [4]).

---

[1]) Эти частные случаи были подтверждены непосредственным вычислением воздействия давлений жидкости: Aeronautical Research Committee, R. and M. 1164 (1928).

*) Taylor G. I. см. сноску на стр. 248.

[2]) Thomson W., On the Forces experienced by Solids immersed in a Moving Liquid, Proc. R. S. Edin., 1870 (Reprint, § XLI).

[3]) См. сноску на стр. 74.

[4]) Boltzman, Über die Druckkräfte, welche auf Ringe wirksam sind die in bewegte Flüssigkeit tauchen, Crelle, LXXIII (1871) (Wiss. Abh. I, 200).