

§ 144. Теперь мы оставляем эту область нашего исследования. Чтобы избежать, насколько это возможно, сомнений в ненадежности, которые иногда возникают при употреблении „обобщенных координат“, мы старались в этой главе поставить дело на возможно прочное основание, не считаясь даже с некоторой многословностью в толковании методов.

Некоторым авторам¹⁾ вопрос представлялся сам по себе как один из наиболее простых. Задачи приводились в один прием к обыкновенным формулам динамики мысленным введением неограниченного числа „скрытых координат“, которые должны были бы определять положения различных частиц жидкости. Соответствующие компоненты импульса все предполагались обращающимися в нуль, за исключением (в случае циклической области) тех, которые представлены циркуляциями через различные отверстия.

С физической точки зрения затруднительно будет не согласиться с подобного рода обобщением, в особенности тогда, когда оно образует исходную точку для всего развития этой ветви гидродинамики; хотя оно и будет по меньшей мере законным, все же с гидродинамической точки зрения желательно, чтобы оно было оправдано *a posteriori* независимыми, хотя и громоздкими методами.

Какой бы прием мы ни применяли, в результате имеем следующее: системы, рассмотренные в этой главе, ведут себя как обыкновенные системы с конечным числом степеней свободы (поскольку принимаются во внимание явные координаты q_1, q_2, \dots, q_n). Дальнейшее развитие общей теории принадлежит аналитической динамике, и поэтому его надо искать в соответствующих учебниках и специальных статьях, посвященных этому вопросу. Необходимо, однако, еще отметить, что гидродинамические системы доставляют в высшей степени интересные и прекрасные применения принципа наименьшего действия, теорем взаимности Гельмгольца и других общих теорем динамики,

ГЛАВА СЕДЬМАЯ ВИХРЕВОЕ ДВИЖЕНИЕ

§ 145. Наши исследования до сих пор ограничивались почти исключительно случаем безвихревого движения. Мы переходим теперь к изучению вихревого движения. Эта область была впервые исследована Гельмгольцем²⁾; другие, более простые доказательства некоторых его теорем были даны впоследствии Кельвином в работе о вихревом движении, цитированной уже в главе III.

¹⁾ См. Thomson a. Tait, также Larmor, см. выше, стр. 243.

²⁾ Helmholtz, Über Integrale der hydrodynamischen Gleichung n., welche den Wirbelbewegungen entsprechen, Crelle, LV, 1858 [Wiss. Abh., 1. 101]. Переиздано в Ostwalds Klassiker d. exakten Wissenschaften, Bd. 79.

В этой главе, так же как в главе III, для обозначения компонентов вектора вихря мы применили символы ξ , η , ζ ; это значит

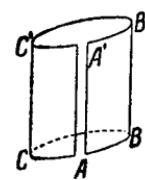
$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \\ \eta &= \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \\ \zeta &= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Линию, направление которой совпадает всюду с мгновенной осью вращения частиц жидкости, называют вихревой линией. Дифференциальные уравнения системы вихревых линий будут

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} = \frac{dz}{\zeta}. \quad (2)$$

Если через каждую точку малой замкнутой кривой провести соответствующую вихревую линию, то получим трубку, которая называется вихревой трубкой. Жидкость внутри такой трубы образует вихревую нить или просто вихрь.

Пусть ABC и $A'B'C'$ (фиг. 33) — две произвольные, проведенные на поверхности вихревой трубы замкнутые кривые, которые окружают вихревую трубку, и AA' пусть будет произвольная соединяющая их линия, которая также лежит на поверхности. Мы применим теперь к замкнутой кривой $ABCAA'C'B'A'A$ и к ограниченной ею части поверхности вихревой трубы теорему § 32. Так как для каждой точки этой поверхности имеем



Фиг. 33.

то криволинейный интеграл, распространенный по замкнутой кривой:

$$\int (u dx + v dy + w dz),$$

должен обращаться в нуль, т. е. в обозначениях § 31

$$J(ABCA) + J(AA') + J(A'C'B'A') + J(A'A) = 0,$$

а это сводится к

$$J(ABCA) = J(A'B'C'A').$$

Следовательно, циркуляция по всем замкнутым кривым вокруг одной и той же вихревой трубы имеет одинаковое значение.

Далее из § 31 следует, что циркуляция вдоль контура произвольного сечения трубы, перпендикулярного к трубке, равна $\omega\sigma$, где

$$\omega = (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^{1/2}$$

означает модуль вихря, а σ — бесконечно малую величину площади сечения.

Сопоставляя эти результаты, мы заключаем, что произведение абсолютного значения вихря на поперечное сечение вихревой трубы имеет одинаковое значение для всех точек вихря. Это произведение удобно взять как меру *напряжения вихря*¹⁾.

Данное здесь доказательство принадлежит Кельвину; сама теорема была впервые дана Гельмгольцем как следствие соотношения

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0, \quad (3)$$

которое непосредственно следует из данных в выражениях (1) значений для ξ, η, ζ . На самом деле, если вставить ξ, η, ζ вместо U, V, W в (1) § 42, то получим

$$\iint (l\xi + m\eta + n\zeta) dS = 0, \quad (4)$$

где интегрирование распространяется по любой лежащей целиком в жидкости замкнутой поверхности. Применив это к замкнутой поверхности, которая образована из двух сечений вихревой трубы и лежащей между ними части трубы, найдем

$$\omega_1 \sigma_1 = \omega_2 \sigma_2,$$

где ω_1, ω_2 суть значения вихря в сечениях σ_1, σ_2 .

Доказательство Кельвина показывает, что теорема имеет место и тогда, когда только u, v, w непрерывны, а ξ, η, ζ разрывны; в этом случае может быть в одной точке вихревой нити острый излом.

Важным следствием вышеизложенной теоремы является теорема о том, что вихревая линия во внутренней точке жидкости не может ни начинаться, ни оканчиваться. Все имеющиеся вихревые линии должны или образовать замкнутые кривые линии, или же, пронизывающая жидкость, начинаться и кончаться на ее границах; ср. § 36.

Формула (3) § 32 может быть теперь сформулирована следующим образом: циркуляция по какой-либо замкнутой кривой равна сумме напряжений всех вихрей, охватываемых этой кривой.

§ 146. В § 33 было доказано, что в идеальной жидкости, находящейся под действием сил с однозначным потенциалом, плотность которой или постоянна во всем объеме, или есть функция только давления, циркуляция по любой движущейся с жидкостью замкнутой кривой постоянна во времени.

Применяя эту теорему к замкнутой кривой, которая охватывает вихревую трубку, мы найдем, что напряжение какой-либо вихревой трубы постоянно во времени.

Возьмем в произвольный момент времени поверхность, состоящую всецело из вихревых линий; согласно § 32 циркуляция по всякой

¹⁾ Циркуляция вокруг вихря есть действительно самая естественная мера его напряжения.

замкнутой кривой, проведенной на ней, равна нулю, так как для каждой точки поверхности имеет место равенство

$$l\xi + m\eta + n\zeta = 0.$$

Вообразим теперь, что поверхность движется с жидкостью, тогда (как было показано в предыдущем параграфе) циркуляция по всякой замкнутой кривой, лежащей на поверхности, всегда будет равна нулю, отсюда следует, что поверхность будет состоять всегда из вихревых линий. Если мы будем рассматривать две такие поверхности, то увидим, что их линия пересечения всегда должна быть вихревой линией, отсюда мы выводим теорему, что вихревые линии движутся вместе с жидкостью.

Эта замечательная теорема была сначала доказана Гельмгольцем для случая несжимаемых жидкостей; вышеизложенное, данное Кельвином доказательство показывает, что оно пригодно и для всякой жидкости, которая удовлетворяет приведенным выше условиям.

Теорема о том, что циркуляция по всякой движущейся с жидкостью замкнутой кривой остается неизменной, составляет единственную и достаточную связь с динамикой, которая необходима для проведения исследований этой главы.

Эта теорема основывается на допущении непрерывного распределения давлений, которое, обратно, опять вытекает из этой теоремы. В самом деле, если в какой-нибудь задаче мы найдем функции u , v , w от x , y , z , t , которые удовлетворяют кинематическим условиям, и если это решение возможно также *динамически*, то соотношение между давлениями жидкости в двух данных движущихся точках A , B должно быть задано с помощью формулы (2) § 33, именно

$$\left[\int \frac{dp}{\rho} + \Omega - \frac{1}{2} q^2 \right]_A^B = - \frac{D}{Dt} \int_A^B (u dx + v dy + w dz). \quad (1)$$

Таким образом необходимо и достаточно, чтобы выражение в правой части равенства (1) оставалось одинаковым для всех путей интегрирования, которые соединяют A и B и движутся с жидкостью. Это бывает тогда и только тогда, когда принятые значения u , v , w таковы, что вихревые линии движутся с жидкостью и что интенсивность каждого вихря постоянна во времени.

Легко видеть, что это заключение ни в какой мере не нарушается, когда допущенные значения u , v , w таковы, что ξ , η , ζ делаются на некоторых поверхностях разрывными, при условии, что u , v , w сами всюду непрерывны.

Вследствие исторического интереса мы изложим кратко некоторые независимые друг от друга доказательства предыдущих теорем и выясним их взаимную связь.

Пожалуй, самое убедительное из этих доказательств основано на простом обобщении некоторых уравнений, которые первоначально были даны

Коши во введении к его классическому трактату о волнах¹⁾ и которые он применил для доказательства теоремы Лагранжа о потенциале скоростей.

Если исключить функцию χ с помощью перекрестного дифференцирования, то уравнения (2) § 15 дают

$$\frac{\partial u}{\partial b} \frac{\partial x}{\partial c} - \frac{\partial u}{\partial c} \frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial v}{\partial b} \frac{\partial y}{\partial c} - \frac{\partial v}{\partial c} \frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial w}{\partial b} \frac{\partial z}{\partial c} - \frac{\partial w}{\partial c} \frac{\partial z}{\partial b} = \frac{\partial w_0}{\partial b} - \frac{\partial v_0}{\partial c}$$

(где u, v, w написаны вместо $\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial t}$) и два других аналогичных уравнения. Заменяя в этих уравнениях производные от u, v, w по a, b, c через их выражения как функции производных от u, v, w по x, y, z , получим

$$\left. \begin{aligned} \xi \frac{\partial (y, z)}{\partial (b, c)} + \eta \frac{\partial (z, x)}{\partial (b, c)} + \zeta \frac{\partial (x, y)}{\partial (b, c)} &= \xi_0, \\ \xi \frac{\partial (y, z)}{\partial (c, a)} + \eta \frac{\partial (z, x)}{\partial (c, a)} + \zeta \frac{\partial (x, y)}{\partial (c, a)} &= \eta_0, \\ \xi \frac{\partial (y, z)}{\partial (a, b)} + \eta \frac{\partial (z, x)}{\partial (a, b)} + \zeta \frac{\partial (x, y)}{\partial (a, b)} &= \zeta_0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Умножив теперь эти уравнения по порядку на $\frac{\partial x}{\partial a}, \frac{\partial x}{\partial b}, \frac{\partial x}{\partial c}$ и сложив их, мы получим, если принять во внимание уравнение неразрывности Лагранжа (1) § 14, первое уравнение следующей симметричной системы:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\xi}{\varrho} &= \frac{\xi_0}{\varrho_0} \frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\eta_0}{\varrho_0} \frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\zeta_0}{\varrho_0} \frac{\partial x}{\partial c}, \\ \frac{\eta}{\varrho} &= \frac{\xi_0}{\varrho_0} \frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\eta_0}{\varrho_0} \frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\zeta_0}{\varrho_0} \frac{\partial y}{\partial c}, \\ \frac{\zeta}{\varrho} &= \frac{\xi_0}{\varrho_0} \frac{\partial z}{\partial a} + \frac{\eta_0}{\varrho_0} \frac{\partial z}{\partial b} + \frac{\zeta_0}{\varrho_0} \frac{\partial z}{\partial c}, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

В частном случае несжимаемой жидкости ($\varrho = \varrho_0$) эти уравнения отличаются только обозначением ξ, η, ζ от уравнений, данных Коши. Из них тотчас же следует, что значения ξ, η, ζ для частицы жидкости всегда будут равны нулю, если начальные значения ξ_0, η_0, ζ_0 компонент вихря для этой частицы обращаются в нуль. Это и составляет доказательство Коши теоремы Лагранжа.

Чтобы интерпретировать уравнения (3) для общего случая, рассмотрим линейный элемент, который для момента $t=0$ лежит на вихревой линии; тогда имеем

$$\delta a = \varepsilon \frac{\xi_0}{\varrho_0},$$

$$\delta b = \varepsilon \frac{\eta_0}{\varrho_0},$$

$$\delta c = \varepsilon \frac{\zeta_0}{\varrho_0},$$

где ε бесконечно мало. Если мы вообразим, что этот элемент движется с жидкостью, то согласно уравнениям (3) его проекции на координатные оси

¹⁾ См. сноску на стр. 33.

для некоторого другого момента будут

$$\delta x = \varepsilon \frac{\xi}{\varrho},$$

$$\delta y = \varepsilon \frac{\eta}{\varrho},$$

$$\delta z = \varepsilon \frac{\zeta}{\varrho};$$

это значит, что элемент будет все еще принадлежать вихревой линии и его длина, назовем ее через δs , будет пропорциональна $\frac{\omega}{\varrho}$, где ω — модуль вектора вихря. Обозначив через σ поперечное сечение вихревой нити, ось которой есть δs , мы видим, что произведение $\varrho\sigma$ δs постоянно во времени. Следовательно, напряжение $\omega\sigma$ вихря будет постоянно¹⁾.

Первоначально данное Гельмгольцем доказательство исходит из системы трех уравнений, которые могут быть так обобщены, что будут пригодны и для произвольной жидкости, для которой ϱ есть функция только от p : они тогда примут вид²⁾

$$\left. \begin{aligned} \frac{D}{Dt} \left(\frac{\xi}{\varrho} \right) &= \frac{\xi}{\varrho} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\eta}{\varrho} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\zeta}{\varrho} \frac{\partial u}{\partial z}, \\ \frac{D}{Dt} \left(\frac{\eta}{\varrho} \right) &= \frac{\xi}{\varrho} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\eta}{\varrho} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\zeta}{\varrho} \frac{\partial v}{\partial z}, \\ \frac{D}{Dt} \left(\frac{\zeta}{\varrho} \right) &= \frac{\xi}{\varrho} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\eta}{\varrho} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\zeta}{\varrho} \frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Эти уравнения можно получить следующим образом. При существовании потенциала сил Ω динамические уравнения § 6 можно представить в такой форме:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - v\xi + w\eta &= -\frac{\partial \chi'}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} - w\xi + u\zeta &= -\frac{\partial \chi'}{\partial y}, \\ \frac{\partial w}{\partial t} - u\eta + v\xi &= -\frac{\partial \chi'}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

где

$$\chi' = \int \frac{dp}{\varrho} + \frac{1}{2} q^2 + \Omega \quad (6)$$

и

$$q^2 = u^2 + v^2 + w^2.$$

Из второго и третьего уравнений (5), исключая χ' при помощи перекрестного дифференцирования, получим

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + v \frac{\partial \xi}{\partial y} + w \frac{\partial \xi}{\partial z} - u \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) = \eta \frac{\partial u}{\partial y} + \zeta \frac{\partial u}{\partial z} - \xi \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right).$$

Принимая во внимание соотношение

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0 \quad (7)$$

¹⁾ См. Nanson, Mess. of Math., III, 120 (1874); Kirschhoff, Mechanik, 15-я лекция (1876); Stokes, Papers, II, 47 (1883).

²⁾ Nanson, см. выше.

и уравнение неразрывности

$$\frac{D\varrho}{Dt} + \varrho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0, \quad (8)$$

мы легко получаем первое из уравнений (4).

Чтобы интерпретировать эти уравнения, рассмотрим элемент линии, проекции которого на координатные оси в момент t равны

$$\left. \begin{aligned} \delta x &= \varepsilon \frac{\xi}{\varrho}, \\ \delta y &= \varepsilon \frac{\eta}{\varrho}, \\ \delta z &= \varepsilon \frac{\zeta}{\varrho}, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

где ε бесконечно мало. Если мы предположим, что этот элемент линии движется с жидкостью, то величина, на которую δx возрастает в единицу времени, равна разности значений u на обоих концах, откуда

$$\frac{D}{Dt} (\delta x) = \varepsilon \frac{\xi}{\varrho} \frac{\partial u}{\partial x} + \varepsilon \frac{\eta}{\varrho} \frac{\partial u}{\partial y} + \varepsilon \frac{\zeta}{\varrho} \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Из уравнения (4) тогда следует

$$\left. \begin{aligned} \frac{D}{Dt} \left(\delta x - \varepsilon \frac{\xi}{\varrho} \right) &= 0, \\ \frac{D}{Dt} \left(\delta y - \varepsilon \frac{\eta}{\varrho} \right) &= 0, \\ \frac{D}{Dt} \left(\delta z - \varepsilon \frac{\zeta}{\varrho} \right) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Гельмгольц заключает отсюда дальше: если соотношения (9) имеют место в момент t , то они сохраняются также и в момент $t + \delta t$ и т. д. Это заключение, однако, не является вполне строгим: оно может быть подвержено возражениям, которые и сделал Стокс¹⁾ против некоторых ошибочных доказательств теоремы Лагранжа о потенциале скоростей²⁾.

Чтобы установить связь с исследованием Кельвина, заметим, что уравнения (2) выражают следующее: циркуляция по каждой из трех бесконечно малых замкнутых кривых, плоскости которых первоначально были перпендикулярны к трем координатным осям, постоянна. Если мы возьмем, например, замкнутую кривую, которая первоначально ограничивала прямоуголь-

¹⁾ См. примечание на стр. 33.

²⁾ Необходимо упомянуть, что для случая несжимаемой жидкости Лагранж установил уравнения, которые довольно похожи на уравнения (4), *Miscell. Taur.*, II (1760) [Oeuvres, I, 442]. Автор выражает благодарность за это указание и вышеизложенное замечание об исследованиях Гельмгольца профессору Лармору. Уравнения, эквивалентные уравнениям, данным Лагранжем, были независимо установлены Стоксом (см. примечание выше) и положены в основание строгого доказательства теоремы о потенциале скоростей.

ник $\delta b \delta c$, и обозначим через A, B, C величины площадей его проекций на координатные плоскости в момент t , то получим

$$A = \frac{\partial(y, z)}{\partial(b, c)} \delta b \delta c,$$

$$B = \frac{\partial(z, x)}{\partial(b, c)} \delta b \delta c,$$

$$C = \frac{\partial(x, y)}{\partial(b, c)} \delta b \delta c;$$

тогда первое из уравнений (2) напишется ¹⁾

$$\xi A + \eta B + \zeta C = \xi_0 \delta b \delta c. \quad (11)$$

В качестве применения уравнений (4) рассмотрим движение жидкости, заключенной в эллипсоидальном сосуде, причем вектор вихря этого движения постоянен в пространстве ²⁾. Формулы

$$\left. \begin{array}{l} u = qz - ry, \\ v = rx - pz, \\ w = py - qx \end{array} \right\} \quad (12)$$

представляют, очевидно, равномерное вращение жидкости как твердого тела внутри сферической границы. Преобразуя координаты и соответствующие скорости с помощью однородного растяжения, получим формулы

$$\left. \begin{array}{l} \frac{u}{a} = \frac{qz}{c} - \frac{ry}{b}, \\ \frac{v}{b} = \frac{rx}{a} - \frac{pz}{c}, \\ \frac{w}{c} = \frac{py}{b} - \frac{qx}{a}, \end{array} \right\} \quad (13)$$

представляющие некоторое движение внутри неподвижной эллипсоидальной оболочки, уравнение которой есть

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (14)$$

Теперь будем иметь

$$\left. \begin{array}{l} \xi = \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \right) p, \\ \eta = \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c} \right) q, \\ \zeta = \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) r. \end{array} \right\} \quad (15)$$

¹⁾ Написано, Mess. of Math., VII, 182 (1878). Подобная же интерпретация гельмгольцевых уравнений была дана автором этой книги Mess. of Math., VII, 41 (1877).

Наконец, необходимо еще вспомнить, что другое доказательство теоремы Лагранжа, которое основывается на элементарных динамических принципах, без ссылки на гидрокинетические уравнения, было намечено Стоксом. (Camb. Trans., VIII [Papers, I, 113]) и проведено Кельвином в его работе о движении вихрей.

²⁾ Ср. Voigt, Beiträge zur Hydrodynamik. Gött. Nachr., 1891, стр. 71; Tedone, Nuovo Cimento, XXIII (1893). Прием, употребленный в тексте, взят из работы Poincaré, Sur la precession des corps déformables, Bull. Astr., 1910.

Подставляя в уравнение (4), мы получим уравнение

$$(b^2 + c^2) \frac{dp}{dt} = (b^2 - c^2) qr, \quad (6)$$

которое может быть представлено в форме

$$a^2 (b^2 + c^2) \frac{dp}{dt} = \{ b^2 (c^2 + a^2) - c^2 (a^2 + b^2) \} qr. \quad (7)$$

Так же получим два других аналогичных уравнения. Таким образом полученные уравнения тождественны по форме с уравнениями Эйлера для свободного движения твердого тела около неподвижной точки.

Мы можем легко найти интегралы

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} = \text{const.} \quad (18)$$

и

$$\frac{b^2 c^2 \xi^2}{b^2 + c^2} + \frac{c^2 a^2 \eta^2}{c^2 + a^2} + \frac{a^2 b^2 \zeta^2}{a^2 + b^2} = \text{const.}; \quad (19)$$

первый из этих интегралов является подтверждением одной из теорем Гельмгольца, в то время как второй следует из постоянства энергии.

§ 147. Рассуждением, аналогичным рассуждению § 41, находим, что непрерывное безвихревое движение невозможно в несжимаемой жидкости, наполняющей неограниченное пространство и подверженной условию, что скорость в бесконечности обращается в нуль. Это тотчас же приводит к следующей теореме:

Движение жидкости, наполняющей неограниченное пространство и покоящейся в бесконечности, будет вполне определено, если мы знаем значения объемного расширения (θ) и компоненты вихря ξ , η , ζ для всех точек области.

В самом деле, предположим, что существуют две тройки значений u_1 , v_1 , w_1 и u_2 , v_2 , w_2 компонент скорости, из которых каждая тройка внутри неограниченного пространства удовлетворяет уравнениям

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \theta, \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} &= \xi, \\ \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} &= \eta, \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} &= \zeta, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

а в бесконечности обращается в нуль. Величины

$$u' = u_1 - u_2,$$

$$v' = v_1 - v_2,$$

$$w' = w_1 - w_2,$$

тогда будут удовлетворять уравнениям (1) и (2) и обращаться в нуль в бесконечности, кроме того,

$$\theta = \xi = \eta = \zeta = 0.$$

А тогда они должны, в силу ранее изложенных результатов, всюду обращаться в нуль; следовательно, существует только *одно* возможное движение, удовлетворяющее данным условиям.

Тем же способом можно показать, что движение жидкости, заключенной в произвольную, *ограниченную*, односвязную область, будет определено, если мы знаем значения объемного расширения и компонент вихря для всякой точки области, а также значения нормальных компонент скорости во всякой точке границы. В случае *n*-связной области необходимо к этим данным прибавить еще значения циркуляций по различным независимым контурам этой области.

§ 148. Если в случае неограниченного пространства величины θ , ξ , η , ζ все обращаются в нуль вне некоторой конечной области, то полное определение u , v , w через значения этих величин внутри области может быть достигнуто следующим образом¹⁾.

Компоненты скорости, обусловленные изменением плотности, можно сейчас же написать, согласно (1) § 56, так как объемное расширение θ' в элементе $dx' dy' dz'$, очевидно, эквивалентно простому источнику с напряжением $\theta' dx' dy' dz'$. Мы получаем, таким образом,

$$\left. \begin{array}{l} u = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \\ v = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}, \\ w = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}, \end{array} \right\} \quad (1)$$

где

$$\Phi = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\theta'}{r} dx' dy' dz', \quad (2)$$

а r обозначает расстояние между точкой (x', y', z') , в которой лежит элемент объема интеграла, и точкой (x, y, z) , для которой ищутся значения u , v , w , т. е.

$$r = \{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2\}^{1/2}.$$

Интегрирование распространяется на все части пространства, для которых θ' отлично от нуля.

Чтобы найти компоненты скорости, обусловленные *вихрями*, примем во внимание следующее: при отсутствии расширения поток через две произвольные незамкнутые поверхности, ограниченные

¹⁾ Изложенное здесь исследование в основном дано Гельмгольцем. Соответствующая кинематическая задача была впервые решена в несколько другом роде Стоксом, On the Dynamical Theory of Diffraction, Camb. Trans., IX (1849) [Papers, II, 254...].

одной и той же кривой по краям, имеет одно и то же значение и, следовательно, определяется только видом и положением этой кривой. Это указывает на то, что поток через произвольную поверхность, опирающуюся на замкнутую кривую, может быть выражен через криволинейный интеграл, распространенный по этой кривой, т. е. через

$$\int (F dx + G dy + H dz). \quad (3)$$

При этом допущении согласно методу § 31 будет

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}, \\ v &= \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x}, \\ w &= \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Необходимо и, как мы видели, достаточно, чтобы функции F , G , H удовлетворяли уравнению

$$\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} \right) - \Delta F$$

и двум аналогичным. Эти три функции всякий раз будут определяться соответственно только с точностью до трех аддитивных функций вида

$$\frac{\partial \chi}{\partial x}, \frac{\partial \chi}{\partial y}, \frac{\partial \chi}{\partial z},$$

и мы можем, если пожелаем, подобрать χ таким образом, чтобы

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = 0. \quad (5)$$

В таком случае будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \Delta F &= -\xi, \\ \Delta G &= -\eta, \\ \Delta H &= -\zeta. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Частные решения этих уравнений получим, положив F , G , H равными потенциалам распределения масс с объемными плотностями $\frac{\xi}{4\pi}$, $\frac{\eta}{4\pi}$, $\frac{\zeta}{4\pi}$ соответственно; тогда

$$\left. \begin{aligned} F &= \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\xi'}{r} dx' dy' dz', \\ G &= \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\eta'}{r} dx' dy' dz', \\ H &= \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\zeta'}{r} dx' dy' dz', \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

где штрихи при буквах ξ , η , ζ служат для обозначения этих величин в точке (x', y', z') . Интегрирования естественно необходимо распространить по всем местам, для которых ξ , η , ζ отличны от нуля. Мы должны теперь показать только, что значения F , G , H в действительности удовлетворяют уравнению (5). Так как

$$\frac{\partial}{\partial x} r^{-1} = - \frac{\partial}{\partial x'} r^{-1},$$

то формулы (7) дают

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = - \frac{1}{4\pi} \iiint \left(\xi' \frac{\partial}{\partial x'} \frac{1}{r} + \eta' \frac{\partial}{\partial y'} \frac{1}{r} + \zeta' \frac{\partial}{\partial z'} \frac{1}{r} \right) dx' dy' dz'.$$

Выражение в правой части обращается в нуль согласно обобщению теоремы (4) § 42¹⁾, так как всюду

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0,$$

в то время как

$$l\xi + m\eta + n\zeta = 0$$

на поверхности вихря (где ξ , η , ζ могут быть разрывны) и ξ , η , ζ в бесконечности обращаются в нуль.

Полное решение нашей задачи получается сложением решений (1) и (4), и оно будет

$$\left. \begin{array}{l} u = - \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}, \\ v = - \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x}, \\ w = - \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}, \end{array} \right\} \quad (8)$$

где Φ , F , G , H имеют данные в формулах (2) и (7) значения.

Заметим еще, что ограничение, что θ , ξ , η , ζ вне некоторой области должны обращаться в нуль, несущественно. Достаточно предположить данные такими, что интегралы в (2) и (7), распространенные на бесконечные объемы, сходятся. Это будет наверное в том случае, когда θ , ξ , η , ζ для бесконечно возрастающего R имеют порядок R^{-n} , где R означает расстояние от начала, а $n > 3$ ²⁾. Если область, наполненная жидкостью полностью или частично ограничена поверхностями, на которых дана нормальная компонента скорости и (в случае n -связной области) заданы значения циркуляции для каждой из n независимых замкнутых кривых, то задачу можно аналогичным приемом свести к задаче одного безвихревого движения, именно к задаче типа, исследованного в главе III, одно-

¹⁾ С особенностью, встречающейся в точке $r=0$, здесь и раньше следуют поступать так же, как и в теории тяготения. Результат благодаря этому не изменяется.

²⁾ Ср. Leathem, Camb. Tracts. № 1, 2-е изд., стр. 44.

значную определенность которой мы там показали. Мы предоставляем читателю провести это, используя следующее замечание. Если вихри пронизывают область и начинаются и кончаются на ее границе, то целесообразно считать их продолженными за или вдоль границы таким образом, чтобы они образовали замкнутые нити, и интегралы (7) отнести к полной системе полученных таким образом вихрей. При таком представлении условие (5) все еще будет выполняться.

Существует полная аналогия между только что изложенными аналитическими соотношениями и соотношениями, имеющими место в теории электромагнетизма. Если мы напишем в уравнениях (1) и (2) § 147

$$a, \beta, \gamma, \varrho, u, v, w, \varrho$$

вместо

$$u, v, w, \theta, \xi, \eta, \zeta, \theta,$$

то получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} &= \varrho, \\ \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z} &= u, \\ \frac{\partial a}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x} &= v, \\ \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y} &= w, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

а это как раз и есть основное соотношение названной теории; a, β, γ означают тогда компоненты магнитной силы, u, v, w — компоненты электрического тока и ϱ есть плотность гипотетического магнитного вещества, с помощью которого может быть представлено всякое имеющееся в поле явление магнетизма¹⁾. Отсюда, вихревые нити соответствуют электрическим контурам, напряжение этого вихря — силам токов по этим контурам, источники и стоки — положительным и отрицательным магнитным полюсам и, наконец, скорость жидкости — магнитной силе²⁾.

Аналогия простирается, конечно, на все результаты, выведенные из основных уравнений; так, Φ в уравнениях (8) соответствует магнитному потенциалу, а F, G, H компонентам „электромагнитного момента количества движения“.

§ 149. Чтобы интерпретировать результат, содержащийся в уравнениях (8) § 148, вычислим значения u, v, w , обусловленные изолированной замкнутой вихревой нитью, находящейся в неограниченной несжимаемой жидкости, покоящейся в бесконечности.

Так как $\theta = 0$, то $\Phi = 0$. Чтобы вычислить значения F, G, H , мы можем заменить элемент объема $dx' dy' dz'$ через $\sigma' ds'$, где ds'

¹⁾ Ср. Maxwell, Electricity and Magnetism, § 607. Аналогия была улучшена применением рациональной системы электрических единиц, которую предложил Хэвисайд — Heaviside, Electrical Papers, London, 1892, I, 199.

²⁾ На эту аналогию впервые указал Гельмгольц; она была широко использована Кельвином в его работе об электричестве и магнетизме.

есть элемент длины нити, а σ' — ее поперечное сечение. Далее имеем

$$\xi' = \omega' \frac{dx'}{ds'},$$

$$\eta' = \omega' \frac{dy'}{ds'},$$

$$\zeta' = \omega' \frac{dz'}{ds'},$$

где ω' означает длину вектора вихря. Формулы (7) § 148 дают тогда

$$\left. \begin{aligned} F &= \frac{\kappa}{4\pi} \int \frac{dx'}{r}, \\ G &= \frac{\kappa}{4\pi} \int \frac{dy'}{r}, \\ H &= \frac{\kappa}{4\pi} \int \frac{dz'}{r}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где $\kappa = \omega' \sigma'$ измеряет напряжение вихря и интегралы распространяются по всей длине нити.

Следовательно, согласно (4) § 148 будем иметь

$$u = \frac{\kappa}{4\pi} \int \left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{z} dz' - \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r} dy' \right)$$

и аналогичные выражения для v и w . Мы найдем таким образом¹⁾

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\kappa}{4\pi} \int \left(\frac{dy' z - z'}{ds' r} - \frac{dz' y - y'}{ds' r} \right) \frac{ds'}{r^2}, \\ v &= \frac{\kappa}{4\pi} \int \left(\frac{dz' x - x'}{ds' r} - \frac{dx' z - z'}{ds' r} \right) \frac{ds'}{r^2}, \\ w &= \frac{\kappa}{4\pi} \int \left(\frac{dx' y - y'}{ds' r} - \frac{dy' x - x'}{ds' r} \right) \frac{ds'}{r^2}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Обозначив через δu , δv , δw части этих выражений, соответствующие элементу ds' нити, увидим, что результирующая δu , δv , δw перпендикулярна к плоскости, определяемой вихревой линией в точке (x', y', z') и отрезком r , а направление ее совпадает с направлением, в котором двигалась бы точка (x, y, z) , если вообразить жидкость отвердевшей и вращающейся вокруг элемента вихря в (x', y', z') . Величина результирующей будет равна

$$\{(\delta u)^2 + (\delta v)^2 + (\delta w)^2\}^{1/2} = \frac{\kappa \sin \chi \delta s'}{4\pi r^2}, \quad (3)$$

где χ есть угол между r и вихревой линией в (x', y', z') .

¹⁾ Эти выражения эквивалентны формулам, полученным Стоксом, см. примечание на стр. 260.

При изменении значений символов в смысле, данном в предыдущем параграфе, этот результат тождествен с законом о действии электрического тока на магнитный полюс¹⁾.

Потенциал скоростей, обусловленный вихревой нитью

§ 150. В точках вне вихря существует потенциал скоростей, который можно найти следующим образом. Возьмем для простоты случай одной замкнутой вихревой нити, здесь мы будем иметь для несжимаемой жидкости согласно предыдущему параграфу

$$u = \frac{\alpha}{4\pi} \int \left(\frac{\partial}{\partial z'} \frac{1}{r} dy' - \frac{\partial}{\partial y'} \frac{1}{r} dz' \right). \quad (1)$$

Согласно теореме Стокса (4) § 32 мы можем заменить криволинейный интеграл, распространенный по замкнутой кривой, через поверхностный интеграл, распространенный по произвольной поверхности, которая ограничена этой замкнутой кривой. Таким образом при небольших изменениях обозначений мы имеем

$$\begin{aligned} \int (P dx' + Q dy' + R dz') &= \\ &= \int \int \left\{ l \left(\frac{\partial R}{\partial y'} - \frac{\partial Q}{\partial z'} \right) + m \left(\frac{\partial P}{\partial z'} - \frac{\partial R}{\partial x'} \right) + n \left(\frac{\partial Q}{\partial x'} - \frac{\partial P}{\partial y'} \right) \right\} dS. \end{aligned}$$

Положим

$$P = 0, \quad Q = \frac{\partial}{\partial z'} \frac{1}{r}, \quad R = - \frac{\partial}{\partial y'} \frac{1}{r},$$

тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial y'} - \frac{\partial Q}{\partial z'} &= \frac{\partial^2}{\partial x'^2} \frac{1}{r}, \\ \frac{\partial P}{\partial z'} - \frac{\partial R}{\partial x'} &= \frac{\partial^2}{\partial x' \partial y'} \frac{1}{r}, \\ \frac{\partial Q}{\partial x'} - \frac{\partial P}{\partial y'} &= \frac{\partial^2}{\partial x' \partial z'} \frac{1}{r}; \end{aligned}$$

следовательно, выражение (1) примет вид

$$u = \frac{\alpha}{4\pi} \int \int \left(l \frac{\partial}{\partial x'} + m \frac{\partial}{\partial y'} + n \frac{\partial}{\partial z'} \right) \frac{\partial}{\partial x'} \frac{1}{r} dS'.$$

Так как

$$\frac{\partial}{\partial x'} (r^{-1}) = - \frac{\partial}{\partial x} (r^{-1}),$$

¹⁾ Ampère, Théorie mathématique des phénomènes électro-dynamiques, Paris, 1826.

то мы получаем отсюда первое из уравнений (2); два других получаются аналогичными рассуждениями,

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ v &= -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \\ w &= -\frac{\partial \varphi}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где

$$\varphi = \frac{x}{4\pi} \int \int \left(l \frac{\partial}{\partial x'} + m \frac{\partial}{\partial y'} + n \frac{\partial}{\partial z'} \right) \frac{1}{r} dS'. \quad (3)$$

Здесь l, m, n обозначают направляющие косинусы нормали к элементу dS' поверхности, ограниченной вихревой нитью.

Формулу (3) можно написать иначе,

$$\varphi = \frac{x}{4\pi} \int \int \frac{\cos \vartheta}{r^2} dS', \quad (4)$$

где ϑ обозначает угол между r и нормалью (l, m, n) . Так как $\cos \vartheta \frac{dS'}{r^2}$ измеряет элементарный телесный угол, под которым dS' видна из точки (x, y, z) , то получаем следующее: потенциал скоростей, обусловленный одной замкнутой вихревой нитью, имеет в любой точке значение, равное $\frac{x}{4\pi}$, умноженное на телесный угол, под которым из этой точки видна поверхность, ограниченная вихрем.

Так как телесный угол изменяется на 4π , когда рассматриваемая точка описывает замкнутую кривую, охватывающую вихревую нить, то мы снова убеждаемся в том, что значение φ , данное формулой (4), является циклической постоянной x ; ср. § 145.

Заметим, что выражение (4) равно расходу жидкости (взятому с отрицательным знаком) через промежуточное отверстие вихревой нити, обусловленному точечным источником с мощностью x в точке (x, y, z) .

Сравнивая выражение (4) с (4) § 56, видим, что вихревая нить в известном смысле эквивалентна равномерному распределению дублетов по ограниченной ею поверхности. Оси этих дублетов должны предполагаться всюду перпендикулярными к поверхности, а плотность распределения — равной напряжению вихря. Мы принимаем здесь, что положительное направление нормали и положительное направление оси вихревой нити образуют „правую систему“; см. § 31.

Обратно, можно показать, что всякое распределение дублетов по замкнутой поверхности, при котором оси имеют направление нормалей, может быть заменено системой замкнутых вихревых нитей¹⁾,

¹⁾ Ср. Maxwell, Electricity and Magnetism, § 485, 652.

лежащих на этой поверхности. То же заключение будет получено независимо от предыдущего из исследований следующего параграфа.

Вихревой слой

§ 151. До сих пор мы предполагали, что u , v , w непрерывны. Теперь покажем, каким образом случаи, в которых встречаются поверхности разрыва, могут быть включены в круг действия наших теорем.

Случай, когда разрывна только *нормальная* компонента скорости, был уже рассмотрен в § 58. Если u , v , w означают компоненты скорости на одной стороне, u' , v' , w' — на другой стороне, то, как было показано, этот случай может быть осуществлен распределением простых источников с поверхностью плотностью

$$l(u' - u) + m(v' - v) + n(w' - w),$$

где l , m , n означают направляющие косинусы нормалей, проведенных к той стороне поверхности, скорости на которой отмечены штрихом.

Теперь рассмотрим случай, когда будет разрывной только *тангенциальная* компонента скорости, так что

$$l(u' - u) + m(v' - v) + n(w' - w) = 0. \quad (1)$$

Мы будем предполагать, что линии тока *относительного* движения, определяемые дифференциальными уравнениями

$$\frac{dx}{u' - u} = \frac{dy}{v' - v} = \frac{dz}{w' - w}, \quad (2)$$

а также система к ним ортогональных траекторий проведены на поверхности. Пусть PQ , $P'Q'$ будут элементы линий, которые проведены в непосредственной близости к поверхности с обеих ее сторон параллельно к некоторой линии системы (2), а PP' , QQ' представляют элементы нормалей к поверхности, бесконечно малые сравнительно с PQ и $P'Q'$. Циркуляция по замкнутой кривой $P'Q'QP$ будет равна тогда

$$(q' - q) PQ,$$

где q и q' означают абсолютные значения скоростей на обеих сторонах. Здесь происходит совершенно так, как если бы на месте поверхности находился бесконечно тонкий слой вихрей; при этом вышеупомянутые ортогональные траектории служили бы вихревыми линиями, а модуль вихря ω и (переменная) толщина δp слоя были бы связаны соотношением

$$\omega \delta p = q' - q. \quad (3)$$

Тот же самый результат получается, если исследовать те разрывности, которые встречаются в значениях u , v , w , определяемых по формулам (4) и (7) § 148, когда последние применяются к случаю слоя плотности δp , внутри которого ξ , η , ζ становятся бесконечными, но так, что $\xi \delta p$, $\eta \delta p$, $\zeta \delta p$ остаются конечными¹⁾.

В § 147, 148 мы показали, что всякое непрерывное движение жидкости, наполняющей неограниченное пространство и покоящейся в бесконечности, можно рассматривать как вызванное соответствующим распределением источников и вихрей с конечной плотностью. Мы только что видели, как можно получить непрерывным переходом к пределу случай, когда источники и вихри распределены по поверхностям с бесконечной объемной плотностью, но конечной поверхностью плотностью. Мы можем, в частности, рассматривая случай, когда соответствующая неограниченная жидкость является несжимаемой, предполагать ее разделенной на две части замкнутой поверхностью, на которой нормальные компоненты скорости будут непрерывными, а тангенциальные компоненты скорости будут разрывными, как в (12) § 58. Этот случай эквивалентен вихревому слою; мы заключаем теперь следующее: всякое непрерывное, безвихревое циклическое или нециклическое движение несжимаемой жидкости, наполняющей произвольную область, может рассматриваться как вызванное некоторым распределением вихрей по ограничивающей поверхности, которая отделяет область от остального неограниченного пространства. В случае области, простирающейся в бесконечность, это распределение относится к конечной части ограничивающей поверхности при условии, что жидкость поконится в бесконечности.

Эта теорема представляет дополнение к полученным в § 58 результатам.

Только что приведенные заключения могут быть иллюстрированы результатами § 91. Именно, если задана нормальная компонента S_n скорости для всей сферической поверхности $r = a$, то значения потенциала скоростей для внутреннего и внешнего пространства были представлены формулами

$$\varphi = \frac{a}{n} \left(\frac{r}{a} \right)^n S_n \quad \text{и} \quad \varphi = -\frac{a}{n+1} \left(\frac{a}{r} \right)^{n+1} S_n.$$

Отсюда, если δe означает угол, под которым виден из центра элемент линии, проведенной на поверхности, то относительная скорость, взятая в направлении этого элемента, будет выражаться через

$$\frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{\partial S_n}{\partial e}.$$

Таким образом результирующая относительной скорости направлена тангенциально к поверхности и перпендикулярно к линиям уровня ($S_n = \text{const.}$) поверхности сферической функции S_n ; последние линии образуют, следовательно, вихревые линии.

¹⁾ Helmholtz, см. сноску на стр. 251.

Если, например, тонкая сферическая оболочка, наполненная жидкостью и окруженная жидкостью, движется подобно тому, как и в § 92, параллельно оси x , то движение жидкости как внутри, так снаружи таково, как если бы оно было вызвано системой вихрей, распределенных на сфере по параллельным кругам; при этом напряжение элементарного вихря пропорционально проекции ширины соответствующей сферической зоны на ось x ¹⁾.

Импульс и энергия системы вихрей

§ 152. Последующие исследования относятся к случаю системы вихрей конечных размеров в жидкости, наполняющей неограниченное пространство и покоящейся в бесконечности.

Задача найти распределение импульсивных сил с компонентами X' , Y' , Z' , отнесенных к единице массы, которое породило бы мгновенно из положения равновесия действительное движение с компонентами скорости u , v , w , является до известной степени неопределенной; однако решение, достаточное для наших целей, можно получить следующим образом. Предположим, что проведена односвязная поверхность S , заключающая все вихри. Мы обозначим через φ однозначный потенциал скоростей, который имеется вне S , и через φ_1 — то решение $\Delta\varphi = 0$, которое конечно всюду внутри S , а на поверхности связано непрерывно с φ . Другими словами, φ_1 есть потенциал скоростей того движения, которое возникает внутри S , когда на поверхности S приложены импульсивные давления $\varrho\varphi$. Если мы предположим теперь, что для внутренних точек имеют место равенства

$$X' = u + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, \quad Y' = v + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}, \quad Z' = w + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \quad (1)$$

и для внешних точек

$$X' = 0, \quad Y' = 0, \quad Z' = 0, \quad (2)$$

то видим согласно § 11, что эти силы действительно вызвали бы мгновенное движение из состояния покоя; при этом распределение импульсивных давлений для внешних точек выражалось бы через $\varrho\varphi$, а для внутренних точек — через $\varrho\varphi_1$. Силы были бы разрывны на поверхности, но разрывность имеет место только для нормальных компонент, тангенциальные же компоненты обращаются в нуль как при подходе изнутри, так и снаружи, так как φ на поверхности переходит непрерывно в φ_1 . Поэтому для точек, лежащих на внутренней стороне поверхности, будем иметь

$$mZ' - nY' = 0, \quad nX' - lZ' = 0, \quad lY' - mX' = 0, \quad (3)$$

где l , m , n означают направляющие косинусы нормалей, проведенных внутрь.

¹⁾ Те же самые заключения пригодны также и для эллиптической оболочки, которая движется параллельно главной оси; см. § 114.

Интегрируя по внутреннему объему, ограниченному поверхностью S , получим

$$\begin{aligned} \iiint (y\zeta - z\eta) dx dy dz &= \\ &= \iiint \left\{ y \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) - z \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right\} dx dy dz = \\ &= \iiint \left\{ y \left(\frac{\partial Y'}{\partial x} - \frac{\partial X'}{\partial y} \right) - z \left(\frac{\partial X'}{\partial z} - \frac{\partial Z'}{\partial x} \right) \right\} dx dy dz = \\ &= - \iiint \{ y(lY' - mX') - z(nX' - lZ') \} dS + \\ &\quad + 2 \iiint X' dx dy dz, \quad (4) \end{aligned}$$

где поверхностный интеграл обращается в нуль вследствие (3). Далее мы получим

$$\begin{aligned} - \iiint (y^2 + z^2) \xi dx dy dz &= \\ &= - \iiint (y^2 + z^2) \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) dx dy dz = \\ &= - \iiint (y^2 + z^2) \left(\frac{\partial Z'}{\partial y} - \frac{\partial Y'}{\partial z} \right) dx dy dz = \\ &= \iint (y^2 + z^2) (mZ' - nY') dS + \\ &\quad + 2 \iiint (yZ' - zY') dx dy dz, \quad (5) \end{aligned}$$

где опять поверхностный интеграл обращается в нуль.

Таким образом для силы и пары, составляющих полный импульс системы вихрей, мы имеем выражения

$$\left. \begin{aligned} P &= \frac{1}{2} \varrho \iiint (y\zeta - z\eta) dx dy dz, \\ Q &= \frac{1}{2} \varrho \iiint (z\xi - x\zeta) dx dy dz, \\ R &= \frac{1}{2} \varrho \iiint (x\eta - y\xi) dx dy dz, \\ L &= -\frac{1}{2} \varrho \iiint (y^2 + z^2) \xi dx dy dz, \\ M &= -\frac{1}{2} \varrho \iiint (z^2 + x^2) \eta dx dy dz, \\ N &= -\frac{1}{2} \varrho \iiint (x^2 + y^2) \zeta dx dy dz. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Чтобы эти выражения применить к случаю одной замкнутой вихревой нити с бесконечно малым сечением σ , заменим элемент объема через $\sigma \delta s$ и напишем

$$\xi = \omega \frac{dx}{ds}; \quad \eta = \omega \frac{dy}{ds}, \quad \zeta = \omega \frac{dz}{ds}; \quad (7)$$

тогда получим

$$P = \frac{1}{2} \varrho \omega \sigma \int (y dz - z dy) = \varrho \int \int l' dS', \quad (8)$$

$$L = -\frac{1}{2} \varrho \omega \sigma \int (y^2 + z^2) dx = -\varrho \int \int (m' z - n' y) dS' \quad (9)$$

и дальнейшие аналогичные формулы. Криволинейный интеграл берется вдоль вихревой нити, поверхностный — по поверхности диафрагмы, юю стягиваемой, а l' , m' , n' суть направляющие косинусы, нормали к элементу dS' диафрагмы. Тождество различных видов следует из теоремы Стокса. Мы писали χ вместо $\omega \sigma$, т. е. χ есть циркуляция по контуру, охватывающему вихревую нить¹⁾.

Все исследование относится, конечно, к мгновенному состоянию системы, но мы напоминаем, что импульс согласно доказательству § 119 будет постоянен во всех отношениях, если только внешние силы отсутствуют.

§ 153. Рассмотрим теперь энергию системы вихрей. Легко показать, что при предположенных условиях эта энергия постоянна, если не действуют внешние силы. В самом деле, если T есть энергия жидкости, ограниченной произвольной замкнутой поверхностью S , то, полагая в (5) § 10 $V = 0$, будем иметь

$$\frac{DT}{dt} = \int \int (lu + mv + nw) p dS. \quad (1)$$

Если поверхность S заключает все вихри, то мы можем положить

$$\frac{p}{\varrho} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{2} q^2 + F(t), \quad (2)$$

и из (4) § 150 следует непосредственно, что на большом расстоянии R от вихрей p будет конечным, а $lu + mv + nw$ будет порядка R^{-3} ; в то время когда поверхность S расширяется до бесконечности, δS будет пропорциональна R^2 . Поэтому в конечном счете правая часть (1) обращается в нуль, и мы имеем

$$T = \text{const.} \quad (3)$$

¹⁾ Выражения (8) и (9) найдены с помощью элементарных рассуждений J. J. Thomson, On the Motion of Vortex Rings (Adams Prize Essay), London, 1882, стр. 5, 6; формулы (6) были затем выведены из них, однако, с обратным знаком для L, M, N . Исправление принадлежит Welsh. Интересное подтверждение формул в том виде, как они здесь даны, доставляет случай шарообразной массы, вращающейся, как твердое тело, в покоящейся жидкости при условии, что принят во внимание сферический вихревой слой, обусловливающий разрыв скорости.

Перейдем теперь к изучению некоторых важных кинематических выражений для T , причем для простоты все еще будем ограничиваться случаем, когда несжимаемая жидкость простирается в бесконечность и там находится в покое, а все вихри находятся на конечном расстоянии от начала.

Первое из этих выражений указано электромагнитной аналогией, отмеченной в § 148. Так как $\theta = 0$ и, следовательно, $\Phi = 0$, то мы имеем по (4) § 148

$$\begin{aligned} 2T &= \rho \iiint (u^2 + v^2 + w^2) dx dy dz = \\ &= \rho \iiint \left\{ u \left(\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z} \right) + v \left(\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x} \right) + w \left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} \right) \right\} dx dy dz. \end{aligned}$$

Правая часть этого выражения может быть представлена суммой поверхностного интеграла

$$\rho \iint \{ F(mw - nv) + G(nu - lw) + H(w - mu) \} dS$$

и объемного интеграла

$$\rho \iiint \left\{ F \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) + G \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + H \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right\} dx dy dz.$$

Для бесконечно удаленных точек F , G , H в конечном счете порядка R^{-2} , а u , v , w порядка R^{-3} , так что поверхностный интеграл обращается в нуль, и мы имеем

$$T = \frac{1}{2} \rho \iiint (F\xi + G\eta + H\zeta) dx dy dz, \quad (4)$$

или, вставляя значения F , G , H из (7) § 148,

$$T = \frac{\rho}{8\pi} \iiint \iint \frac{\xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta'}{r} dx dy dz dx' dy' dz', \quad (5)$$

причем каждое интегрирование по объему распространяется по всему пространству, наполненному вихрями.

Этому выражению можно дать несколько другой вид. Предположим, что система вихрей составлена из нитей, пусть ds , ds' означают элементы длины двух произвольных нитей; σ , σ' — соответствующие поперечные сечения, а ω , ω' — соответствующие значения модуля вихря. За элементы объема мы возьмем σds и $\sigma' ds'$, тогда выражение под знаком интеграла в (5) будет равно

$$\frac{\cos \varepsilon}{r} \cdot \omega \sigma ds \cdot \omega' \sigma' ds',$$

где ε означает угол между ds и ds' . Положив

$$\omega\sigma = \kappa, \quad \omega'\sigma' = \kappa',$$

будем иметь

$$T = \frac{\varrho}{4\pi} \sum \kappa \kappa' \iint \frac{\cos \varepsilon}{r} ds ds', \quad (6)$$

причем двойной интеграл берется вдоль осей нитей, а суммирование \sum включает все наличные пары нитей (и каждую только один раз).

Множитель при ϱ в формуле (6) тождествен с выражением для энергии некоторой системы электрических токов, распространяющихся в проводниках, положения которых совпадают с положениями вихревых нитей, а их силы есть κ, κ', \dots ¹⁾.

Вышеизложенное исследование в действительности есть только обращение употребительного в учебниках электромагнетизма приема рассуждения, которым доказывается равенство

$$\frac{1}{4\pi} \sum ii' \iint \frac{\cos \varepsilon}{r} ds ds' = \frac{1}{2} \iiint (a^2 + b^2 + c^2) dx dy dz,$$

где i, i' означают силу тока в линейных проводниках, элементы которых обозначены через ds, ds' и a, b, c представляют компоненты магнитной силы в произвольной точке поля.

Рассматриваемая в этом параграфе теорема чисто кинематической природы и основывается только на предположении, что функции u, v, w внутри всего пространства удовлетворяют уравнению неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

и обращаются в нуль в бесконечности. Поэтому она с помощью простого обобщения распространяется на случай, рассмотренный в § 144; там мы принимали, что жидкость, лишенная вихрей, циркулирует через отверстия в неподвижных телах; теперь можно считать, что u, v, w во всех точках пространства, не занятого жидкостью, равны нулю. Исследование § 151 показывает, что полученное таким образом распределение скоростей может рассматриваться как происходящее от системы вихревых слоев, которые совпадают с граничными поверхностями. Энергия этой системы получается простым изменением формулы (6), и она, следовательно, пропорциональна энергии соответствующей системы электропроводящих поверхностей.

Этим самым высказанная перед этим в § 144 теорема доказана

При условиях, указанных в начале § 152, мы получаем еще другое употребительное выражение для T

$$T = \varrho \iint \{u(y\xi - z\eta) + v(z\xi - x\eta) + w(x\eta - y\xi)\} dx dy dz \quad (7)$$

Чтобы проверить его, преобразуем правую часть уравнения с помощью уже часто применявшегося приема, причем поверхностные интегралы мы можем опустить, исходя из тех же соображений, как и в предыдущем параграфе. Первый из трех членов дает

$$\begin{aligned} \varrho \iint \left\{ u \left(y \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) - z \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right) \right\} dx dy dz = \\ = -\varrho \iint \left\{ (vy + wz) \frac{\partial u}{\partial x} - u^2 \right\} dx dy dz. \end{aligned}$$

¹⁾ При этом в основу кладется рациональная система электрических единиц; см. стр. 263

²⁾ Lamb, Motion of fluids, § 136 (1879).

Если преобразовать таким же образом два других члена и затем сложить, то получим, используя уравнения неразрывности:

$$\rho \iiint (u^2 + v^2 + w^2 + xu \frac{\partial u}{\partial x} + yv \frac{\partial v}{\partial y} + zw \frac{\partial w}{\partial z}) dx dy dz,$$

или, наконец, если еще преобразовать последние три члена

$$\frac{1}{2} \rho \iiint (u^2 + v^2 + w^2) dx dy dz.$$

В случае конечной области поверхностные интегралы должны сохраниться¹⁾. Поэтому мы должны к правой части (7) прибавить еще выражение

$$\rho \iint \left\{ (lu + mv + nw)(xu + yv + zw) - \frac{1}{2}(lx + my + nz)q^2 \right\} dS, \quad (8)$$

где $q^2 = u^2 + v^2 + w^2$. Это упрощается в случае *неподвижной* границы.

Значение выражения (7) должно оставаться без изменения при всяком переносе начала координат. Поэтому должны иметь место уравнения

$$\left. \begin{aligned} \iint (v\zeta - w\eta) dx dy dz &= 0, \\ \iint (w\xi - u\zeta) dx dy dz &= 0, \\ \iint (u\eta - v\xi) dx dy dz &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Эти уравнения, которые легко могут быть установлены интегрированием по частям, получаются также из того соображения, что при отсутствии внешних сил компоненты импульса, параллельные координатным осям, должны быть постоянны. Если взять сначала случай жидкости, заключенной в неподвижный сосуд конечной величины, то мы будем иметь в обозначениях § 152

$$P = \rho \iiint u dx dy dz - \rho \iint l\varphi dS; \quad (10)$$

при этом φ обозначает потенциал скоростей вблизи стенки сосуда, где движение безвихревое.

Поэтому согласно (5) § 146 имеем

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= \rho \iiint \frac{\partial u}{\partial t} dx dy dz - \rho \iint l \frac{\partial \varphi}{\partial t} dS = \\ &= -\rho \iiint \frac{\partial \chi'}{\partial x} dx dy dz + \rho \iiint (v\zeta - w\eta) dx dy dz - \rho \iint l \frac{\partial \varphi}{\partial t} dS. \end{aligned} \quad (11)$$

Первый и третий члены последних выражений исчезают, так как согласно (4) § 20 и (6) § 146 на границе $\chi' = \frac{\partial \varphi}{\partial t}$. Поэтому для всякой системы замкнутых вихрей, которая заключена в неподвижный сосуд, будем иметь.

$$\frac{dP}{dt} = \rho \iint (v\zeta - w\eta) dx dy dz \quad (12)$$

¹⁾ J. J. Thomson, см. примечание на стр. 271.

и два аналогичных уравнения. В § 119 мы показали, что P будет постоянно, когда сосуд бесконечно велик и стенки его находятся на бесконечном расстоянии от вихрей. Это дает первое из трех уравнений (9).

Если мы уравнения (9) получили бы другим путем, то мы могли бы обратно заключить из них о постоянстве компонент импульса P, Q, R ¹⁾.

Прямолинейные вихри

§ 154. Если движение происходит только в двух измерениях x, y , то $w=0$, а u, v будут функциями только от x, y . Поэтому

$$\xi = 0, \quad \eta = 0,$$

и вихревые линии суть прямые, параллельные оси z . Теория принимает тогда очень простой вид.

Формулы (8) § 148 переходят в следующие:

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ v &= -\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x}; \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

функции φ, ψ должны удовлетворять уравнениям

$$\Delta_1 \varphi = -\theta, \quad \Delta_1 \psi = \zeta, \quad (2)$$

где

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

а также соответствующим граничным условиям.

В случае несжимаемой жидкости, которой мы теперь ограничимся,

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (3)$$

где ψ есть функция тока § 59. Известно из теории логарифмического потенциала, что решение уравнения

$$\Delta_1 \psi = \zeta, \quad (4)$$

где ζ есть данная функция от x, y , есть

$$\psi = \frac{1}{2\pi} \iint \zeta' \ln r dx' dy' + \psi_0, \quad (5)$$

причем ζ' есть значение ζ в точке (x', y') , а

$$r = \{(x - x')^2 + (y - y')^2\}^{1/2}.$$

„Добавочная функция“ ψ_0 есть какое-либо решение уравнения

$$\Delta_1 \psi_0 = 0; \quad (6)$$

она позволяет нам удовлетворить граничным условиям.

¹⁾ J. J. Thomson, см. примечание на стр. 271.

В случае безграничной жидкости, которая покоятся в бесконечности, ψ_0 сводится к постоянной. Формулы (3) и (5) тогда дают

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{1}{2\pi} \iint \zeta' \frac{y-y'}{r^2} dx' dy', \\ v &= \frac{1}{2\pi} \iint \zeta' \frac{x-x'}{r^2} dx' dy'. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Вихревая нить с координатами x' , y' и напряжением κ сообщает таким образом жидкости в точке (x, y) скорость, компоненты которой равны

$$-\frac{\kappa}{2\pi} \frac{y-y'}{r^2} \quad \text{и} \quad \frac{\kappa}{2\pi} \frac{x-x'}{r^2}.$$

Эта скорость перпендикулярна к прямой, соединяющей точки (x, y) и (x', y') , и ее величина равна $\frac{\kappa}{2\pi r}$.

Вычислим теперь интегралы

$$\iint u\zeta dx dy \quad \text{и} \quad \iint v\zeta dx dy,$$

в которых интегрирование распространяется на все части плоскости xy , для которой ζ отлично от нуля. Мы имеем

$$\iint u\zeta dx dy = -\frac{1}{2\pi} \iiint \iint \zeta \zeta' \frac{y-y'}{r^2} dx dy dx' dy',$$

причем интегрирование по поверхности каждый раз распространяется по поперечным сечениям всех вихрей. Каждому члену

$$\zeta \zeta' \frac{y-y'}{r^2} dx dy dx' dy'$$

этого интеграла соответствует другой член

$$\zeta \zeta' \frac{y'-y}{r^2} dx dy dx' dy',$$

и они взаимно друг друга уничтожают. Отсюда получаем

$$\left. \begin{aligned} \iint u\zeta dx dy &= 0, \\ \iint v\zeta dx dy &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Обозначив, как выше, напряжение вихря через κ , эти результаты можно написать так

$$\sum \kappa u = 0, \quad \sum \kappa v = 0. \quad (9)$$

Так как напряжение каждого вихря от времени не зависит, то уравнения (9) выражают, что точка с координатами

$$\bar{x} = \frac{\sum x_x}{\sum x}, \quad \bar{y} = \frac{\sum x_y}{\sum x} \quad (10)$$

в течение всего движения остается неподвижной.

Эта точка совпадает с центром инерции тонкого слоя вещества, распределенного на плоскости xy с поверхностной плотностью ζ , и мы можем назвать ее центром системы вихрей; прямую, параллельную оси z , проекцией которой служит эта точка, мы назовем осью системы. Если $\sum x = 0$, то центр лежит в бесконечности или он неопределенен.

§ 155. Некоторые интересные примеры можно получить в случаях, в которых имеется один или несколько изолированных вихрей с бесконечно малым сечением.

1) Предположим, что мы имеем только одну вихревую нить и что вектор вихря ζ имеет всюду внутри бесконечно малого сечения один и тот же знак. Центр вихря в только что определенном смысле лежит теперь или внутри нити или бесконечно близко к ней. Так как этот центр находится в покое, то и нить, как целое, будет сохраняться, хотя ее части могут совершать относительные движения и ее центр не обязательно должен всегда лежать в том же самом элементе жидкости.

Каждая частица на конечном расстоянии r от центра нити будет описывать окружность около нити, как оси, с постоянной скоростью $\frac{x}{2\pi r}$. Область вне вихря двусвязная, и циркуляция по всякой простой замкнутой кривой, заключающей вихрь, равна, конечно, x . Безвихревое движение окружающей жидкости то же самое, как и в (2) § 27.

2) Предположим, что мы имеем два вихря с напряжениями x_1, x_2 ; A и B означают их центры, O означает центр системы. Движение каждой из двух нитей, как целого, обусловлено вполне действием другой и поэтому всегда перпендикулярно к AB . Поэтому обе нити сохраняют всегда одинаковое расстояние друг от друга и врачаются с постоянной угловой скоростью около точки O , которая будет неподвижной. Эту угловую скорость легко найти; разделив скорость точки A , равную $\frac{x_2}{2\pi AB}$, на расстояние AO , где

$$AO = \frac{x_2}{x_1 + x_2} AB;$$

мы получим тогда

$$\frac{x_1 + x_2}{2\pi \cdot AB^2}.$$

Если x_1, x_2 имеют одинаковый знак, т. е. направления вращения в обоих вихрях совпадают, то O лежит между A и B ; если же оба

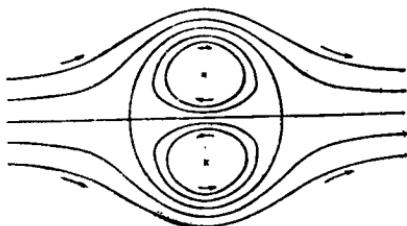
вращения имеют противоположные направления, то O лежит на продолжении AB и BA .

Если $\kappa_1 = -\kappa_2$, то O будет лежать в бесконечности, но легко видеть, что A и B движутся теперь с одинаковой скоростью $\frac{\kappa_1}{2\pi \cdot AB}$ перпендикулярно к AB , в то время как AB само сохраняет свое направление. Подобного рода комбинация двух одинаковых, но противоположно направленных вихрей называется „парой вихрей“. Она представляет двумерную аналогию к круглому вихревому кольцу (§ 160) и обладает многими свойствами последнего.

Линии тока вихревой пары образуют систему соосных окружностей, как показывает фиг. 9 (стр. 93); вихри находятся в обеих пограничных точках ($\pm a, 0$). Чтобы найти *относительные* линии тока, мы сообщим этой системе общую скорость, которая равна и противоположна скорости вихря; получим таким образом в качестве функции тока *относительного* движения в обозначениях п. 2 § 64

$$\psi = \frac{\kappa_1}{2\pi} \left(\frac{x}{2a} + \ln \frac{r_1}{r_2} \right). \quad (1)$$

Фиг. 34, которая для удобства повернута на 90° , показывает некоторые из этих линий. Линия $\psi = 0$ состоит частично из оси y и частично из овала, окружающего оба вихря.



Фиг. 34.

Ясно, что заключенная в этом овале жидкость сопровождает вихревую пару в ее движении, в то время как движение вне овала в точности совпадает с движением, которое было бы вызвано твердым цилиндром с таким же контуром; ср. § 71.

Полусоси овала приблизительно имеют длину $2,09 a$ и $1,73 a$ ¹⁾.

В этом примере и в аналогичном примере с вихревыми кольцами иногда трудно осознать, почему вихри не могут быть неподвижными. Если заменить на фиг. 9 (стр. 93) нити твердыми цилиндрами с малым круглым сечением, то цилиндры могут действительно оставаться в покое, при предположении, что они будут связаны независимой от движения жидкости жесткой связью; если же такое соединение отсутствует, то оба цилиндра в первый момент будут притягиваться, согласно принципу, рассмотренному в § 23. Это притяжение, однако, прекращается, если наложить общую скорость V соответствующей величины, направление которой противоположно тому циклическому движению, которое существует в середине между обоими цилиндрами. Чтобы найти величину V , заметим, что скорости жидкости в обеих точках ($a \pm c, 0$), при малых значениях c , приблизительно будут

¹⁾ Ср. Thomson W., On Vortex Atoms, Phil. Mag. (4), XXXIV, 20 (1867) [Papers, IV, 1] и Riecke, Göttinger Nachr., 1888, где нарисованы также траектории частиц жидкости.

равны по абсолютной величине при условии, если V выбрано таким образом, что

$$V + \frac{\kappa}{2\pi c} - \frac{\kappa}{4\pi a} = \frac{\kappa}{2\pi c} + \frac{\kappa}{4\pi a} - V,$$

где κ означает циркуляцию. Поэтому имеем

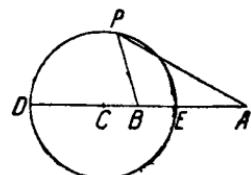
$$V = \frac{\kappa}{4\pi a},$$

а это есть в точности скорость поступательного движения вихревой пары в первоначальной форме задачи¹⁾.

Так как скорость жидкости во всех точках плоскости симметрии всюду к ней касательна, то мы можем предположить, что эта плоскость образует с обеих сторон твердую границу для жидкости; таким образом получаем случай одного прямолинейного вихря вблизи твердой плоской стенки, к которой он параллелен. Нить движется параллельно этой плоской стенке со скоростью $\frac{\kappa}{4\pi h}$, где h означает расстояние от стенки.

Так как линии тока суть окружности, то мы можем получить также решение и для случая, когда единственная вихревая нить находится в пространстве, ограниченном изнутри или снаружи неподвижным круговым цилиндром.

Пусть, например, EPD на фиг. 35 есть поперечное сечение цилиндра, A — положение вихря (он находится в этом случае во внешнем пространстве) и B будет „зеркальное изображение“ A относительно окружности EPD , т. е.



Фиг. 35.

$$CB \cdot CA = c^2,$$

где C есть центр круга, а c означает радиус круга. Если P есть произвольная точка окружности, то будем иметь

$$\frac{AP}{BP} = \frac{AE}{BE} = \frac{AD}{BD} = \text{const.},$$

так что окружность занимает положение одной из линий тока, обусловленных вихревой парой в A , B . Так как движение вихря A перпендикулярно к AB , то, очевидно, все условия задачи будут выполняться, если мы предположим, что A описывает окружность около оси цилиндра с постоянной скоростью:

$$-\frac{\kappa}{2\pi \cdot AB} = -\frac{\kappa \cdot CA}{2\pi (CA^2 - c^2)};$$

κ обозначает при этом напряжение вихря A .

¹⁾ Более точное исследование дал Hicks, On the Condition of Steady Motion of two Cylinders in a Fluid, Quart. Journ. Math., XVII, 194 (1881).

Точно так же вихрь напряжением κ , который находится внутри неподвижного круглого цилиндра, например в B , будет описывать окружность с постоянной скоростью

$$\frac{\kappa CB}{2\pi(c^2 - CB^2)}.$$

Необходимо, однако, заметить ¹⁾, что в случае внешнего вихря движение только тогда определяется вполне, когда, кроме напряжения κ , задано также значение циркуляции по замкнутой кривой, окружающей цилиндр (но не вихрь).

При вышесказанном решении эта циркуляция происходит от зеркального изображения вихря в B и равна $-\kappa$. Эта циркуляция может быть уничтожена присоединением вихря напряжения $+\kappa$ в C ; мы будем иметь тогда для скорости вихря A

$$-\frac{\kappa CA}{2\pi(CA^2 - c^2)} + \frac{\kappa}{2\pi CA} = -\frac{\kappa c^2}{2\pi CA(CA^2 - c^2)}.$$

В случае заданной наперед циркуляции κ' мы должны прибавить еще к этому член $\frac{\kappa'}{2\pi} CA$.

Фёппль ²⁾ применил метод изображений для исследования случая, когда цилиндр, сопровождаемый вихревой парой, расположенной симметрично относительно линии движения центра цилиндра, движется в жидкости со скоростью U . Оказывается, что вихри могут сохранять свое положение относительно цилиндра, когда они лежат на кривой

$$2ry = r^2 - a^2,$$

и напряжения вихрей для данного положения на этой кривой равны

$$\pm 2Uy \left(1 - \frac{a^4}{r^4} \right).$$

Фёппль нашел, однако, что это положение будет неустойчиво при несимметричных возмущениях.

Некоторые траектории вихрей в потоке, обтекающем цилиндр (с циркуляцией), были построены Уэйльтоном ³⁾. Траектория вихря в полукруговой области была исследована К. Де ⁴⁾ по методу Раута, на который будет ссылка на стр. 281.

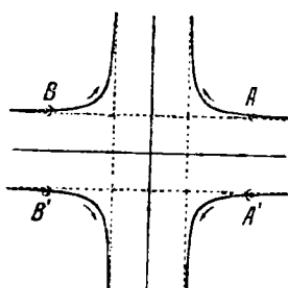
3) Если мы имеем четыре параллельных прямолинейных вихря, центры которых образуют прямоугольник $ABB'A'$ и напряжения которых для вихрей A' и B равны κ , а для вихрей A и B' равны $-\kappa$, то непосредственно ясно, что центры будут всегда образовывать прямоугольник. Из рассмотрения направлений вращений, указанных на фиг. 36, видно, что действие пары AA' и BB' состоит в том,

¹⁾ Tarleton F. A., On a Problem in Vortex Motion, Proc. R. I. A., 12 дек. 1892.

²⁾ Föppl L., Wirbelbewegung hinter einem Kreiszylinder. Sitzb. d. k. Bayr. Akad. d. Wiss., 1913.

³⁾ Walton, Proc. R. I. Acad., XXXVIII, A (1928).

⁴⁾ De K., Bull. of the Calcutta Math. Soc., XXI, 197 (1929).



Фиг. 36.

чтобы удалить B и B' друг от друга и одновременно уменьшить их скорость, перпендикулярную к линии, их соединяющей. Плоскости, перпендикулярные и делящие пополам AB и AA' , могут (или одна, или обе) быть взяты как неподвижные твердые границы; мы получаем, следовательно, случай движения вихревой пары с одинаковыми, но противоположными по знаку напряжениями по направлению к твердой плоской стенке (или от нее) или случай движения одного вихря в углу между двумя перпендикулярными друг к другу стенками.

Если x и y означают координаты вихря A относительно плоскости симметрии, то легко находим

$$\dot{x} = -\frac{x}{4\pi} \frac{x^2}{yr^2}, \quad \dot{y} = \frac{x}{4\pi} \frac{y^2}{xr^2}, \quad (2)$$

где

$$r^2 = x^2 + y^2.$$

После деления мы получаем дифференциальное уравнение траектории

$$\frac{dx}{x^3} + \frac{dy}{y^3} = 0,$$

откуда следует

$$a^2(x^2 + y^2) = 4x^2y^2,$$

где a есть произвольная постоянная, или, введя полярные координаты,

$$r = \frac{a}{\sin 2\theta}. \quad (3)$$

Так как

$$x\dot{y} - y\dot{x} = \frac{x}{4\pi},$$

то вихрь движется таким образом, как если бы он находился под действием отталкивающей центральной силы с центром в начале координат, действующей по закону обратной пропорциональности третьей степени расстояния¹⁾.

§ 156. Если положим, как в главе IV,

$$z = x + iy, \quad w = \varphi + i\psi, \quad (1)$$

то потенциальную функцию и функцию тока, представляющие ряд равнотостоящих вихрей, каждый из которых имеет напряжение χ и координаты которых соответственно равны

$$(0, 0), (\pm a, 0), (\pm 2a, 0), \dots,$$

¹⁾ Greenhill, On Plane Vortex Motion, Quart. Journ. Math., XV (1887); Gröbli, Die Bewegung paralleler geradliniger Wirbelfäden, Zürich, 1877. Эти работы содержат другие интересные примеры прямолинейных вихревых систем. Случай системы одинаковых и параллельных вихрей, точки пересечения которых с плоскостью образуют вершины правильного многоугольника, был рассмотрен J. J. Thomson, Motion of Vortex Rings, стр. 94. Он нашел, что такая конфигурация тогда и только тогда будет устойчива, когда число вихрей не превосходит шести. Дальнейшие литературные указания относительно специальных проблем см. Hicks, Brit. Ass. Rep., 1882, стр. 41 и т. д.; Love, см. примечание на стр. 240.

Остроумный метод преобразования плоских проблем вихревого движения принадлежит Routh, Some Applications of Conjugate Functions, Proc. Lond. Math. Soc., XII, 73 (1881).

получим из выражения

$$w = \frac{ix}{2\pi} \ln \sin \frac{\pi z}{a}; \quad (2)$$

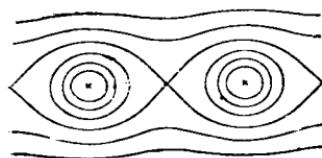
ср. § 64, п. 4. Это дает

$$u - iv = -\frac{dw}{dz} = -\frac{ix}{2a} \operatorname{ctg} \frac{\pi z}{a} \quad (3)$$

и затем

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{x}{2a} \frac{\operatorname{sh} \left(\frac{2\pi y}{a} \right)}{\operatorname{ch} \left(\frac{2\pi y}{a} \right) - \cos \left(\frac{2\pi x}{a} \right)}, \\ v &= \frac{x}{2a} \frac{\sin \left(\frac{2\pi x}{a} \right)}{\operatorname{ch} \left(\frac{2\pi y}{a} \right) - \cos \left(\frac{2\pi x}{a} \right)}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Эти выражения для $y = \pm\infty$ дают $u = \mp \frac{1}{2} \frac{x}{a}$, $v = 0$; для отдаленных точек ряд вихрей действительно эквивалентен вихревому слою с равномерным напряжением $\frac{x}{a}$ (§ 151).

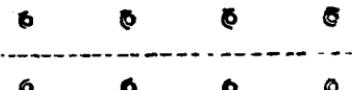


Фиг. 37.

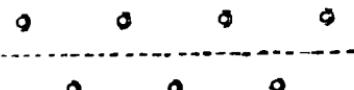
Фиг. 37 показывает расположение линий тока.

Легко теперь убедиться, что если мы имеем два параллельных ряда равноотстоящих вихрей, симметричных относительно плоскости $y = 0$, причем напряжение вихря для верхнего ряда обозначено через x , а для нижнего ряда через $-x$ (см. фиг. 38), то вся система как целое движется поступательно с постоянной скоростью, причем b есть расстояние между двумя рядами. Средняя скорость в

$$U = \frac{x}{2a} \operatorname{cth} \frac{\pi b}{a}; \quad (5)$$



Фиг. 38.



Фиг. 39.

плоскости симметрии равна $\frac{x}{a}$. Скорость с увеличением расстояния вне обоих рядов стремится к нулю.

Если расположение изменено таким образом, что каждый вихрь одного ряда помещен против середины интервала между двумя соседними вихрями другого ряда, как показывает фиг. 39, то общая

поступательная скорость будет равна

$$V = \frac{\kappa}{2a} \operatorname{th} \frac{\pi b}{a}. \quad (6)$$

Средняя скорость в срединной плоскости равна опять $\frac{\kappa}{a}$.

Устойчивость этих различных расположений была исследована Карманом¹⁾. Возьмем сначала случай одного вихревого ряда и предположим, что вихрь, невозмущенные координаты которого суть $(ta, 0)$, смещен в точку $(ta + x_m, y_m)$. Формулы § 154 для начального движения вихря в начале координат дают

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_0}{dt} &= -\frac{\kappa}{2\pi} \sum_m \frac{y_0 - y_m}{r_m^2}, \\ \frac{dy_0}{dt} &= \frac{\kappa}{2\pi} \sum_m \frac{x_0 - x_m - ta}{r_m^2}, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

где

$$r_m^2 = (x_0 - x_m - ta)^2 + (y_0 - y_m)^2, \quad (8)$$

а m под знаком суммы пробегает все положительные и отрицательные целые значения за исключением нуля. Если пренебречь членами второго порядка относительно перемещений, то мы получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_0}{dt} &= -\frac{\kappa}{2\pi a^2} \sum_m \frac{y_0 - y_m}{m^2}, \\ \frac{dy_0}{dt} &= -\frac{\kappa}{2\pi a^2} \sum_m \frac{1}{m} - \frac{\kappa}{2\pi a^2} \sum_m \frac{x_0 - x_m}{m^2}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Первый член в выражении для $\frac{dy_0}{dt}$ может быть опущен, так как он не зависит от возмущения²⁾.

Рассмотрим теперь возмущение типа

$$x_m = a e^{im\varphi}, \quad y_m = \beta e^{im\varphi}, \quad (10)$$

где предполагается, что φ лежит между 0 и 2π . Если φ будет мало, то возмущение имеет характер волны с длиной $\frac{2\pi a}{\varphi}$. Мы получаем тогда

$$\frac{da}{dt} = -\lambda\beta, \quad \frac{d\beta}{dt} = -\lambda a, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\kappa}{\pi a^2} \left(\frac{1 - \cos \varphi}{1^2} + \frac{1 - \cos 2\varphi}{2^2} + \frac{1 - \cos 3\varphi}{3^2} + \dots \right) = \\ &= \frac{\kappa}{4\pi a^2} \varphi (2\pi - \varphi). \end{aligned} \quad (12)$$

¹⁾ v. Kármán, Flüssigkeits- und Luftwiderstand, Phys. Zeitschr., XIII (1912); Gött. Nachr., стр. 547 (1912). Исследование в этих работах дано только в общих чертах. Я сделал различные дополнения.

²⁾ При суммировании вихри должны быть взяты попарно равноотстоящими от начала, так как иначе результат был бы неопределенным. Исследование относится в сущности к средним частям очень длинного, но не бесконечно длинного ряда; тогда можно пренебречь упомянутым членом.

Расположение это, следовательно, неустойчиво, так как возмущение в конце концов растет как $e^{\lambda t}$. Если длина волны велика по сравнению с a , то мы имеем приближенно

$$\lambda = \frac{1}{2} - \frac{\kappa\varphi}{a^2}; \quad (13)$$

ср. § 234.

Перейдем к случаю симметричного двойного ряда; положения вихрей в верхнем и нижнем ряду (фиг. 38) в момент t могут быть заданы соответственно через

$$(ma + Ut + x_m, \frac{1}{2}b + y_m),$$

$$(na + Ut + x'_n, -\frac{1}{2}b + y'_n),$$

где U означает общую скорость поступательного движения системы и на чало координат лежит в плоскости симметрии.

Компоненты скорости какого-нибудь вихря *верхнего* ряда, например, вихря, для которого $m=0$, зависящие от остальных вихрей самого этого ряда, даны, как выше, формулой (9), причем $\sum m^{-1}$ может быть отброшена. Компоненты же, обусловленные вихрем n *нижнего* ряда, будут таковы:

$$\frac{\kappa}{2\pi} \cdot \frac{b + y_0 - y'_n}{r_n^2}, \quad -\frac{\kappa}{2\pi} \cdot \frac{x_0 - x'_n - na}{r_n^2},$$

где

$$r_n^2 = (x_0 - x'_n - na)^2 + (y_0 - y'_n + b)^2.$$

Если пренебречь членами второго порядка относительно возмущений, то мы находим после небольшого приведения

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{\kappa} \left(\frac{dx_0}{dt} + U \right) = & - \sum_m \frac{y_0 - y_m}{m^2 a^2} + \sum_n \frac{b}{n^2 a^2 + b^2} + \\ & + \sum_n \frac{n^2 a^2 - b^2}{(n^2 a^2 + b^2)^2} (y_0 - y'_n) + \sum_n \frac{2nab}{(n^2 a^2 + b^2)^2} (x_0 - x'_n), \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{\kappa} \frac{dy_0}{dt} = & - \sum_m \frac{x_0 - x_m}{m^2 a^2} + \sum_n \frac{n^2 a^2 - b^2}{(n^2 a^2 + b^2)^2} (x_0 - x'_n) - \\ & - \sum_n \frac{2nab}{(n^2 a^2 + b^2)^2} (y_0 - y'_n), \end{aligned} \quad (15)$$

где суммирование по n распространяется от $-\infty$ до $+\infty$, включая нуль. Те члены (14), которые независимы от возмущения, сокращаются, так как согласно (5)

$$U = \frac{\kappa}{2a} \operatorname{cth} \frac{\pi b}{a} = \frac{\kappa}{2\pi} \sum_n \frac{b}{n^2 a^2 + b^2}.$$

Если положить теперь

$$\left. \begin{aligned} x_m &= a e^{im\varphi}, & y_m &= \beta e^{im\varphi}, \\ x'_n &= a' e^{in\varphi}, & y'_n &= \beta' e^{in\varphi}, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

где $0 < \varphi < 2\pi$, то уравнения (14), (15) принимают следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{2\pi a^2}{\kappa} \frac{da}{dt} &= -A\beta - Ba' - C\beta' \\ \frac{2\pi a^2}{\kappa} \frac{d\beta}{dt} &= -Aa - Ca' + B\beta'. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Если положить для краткости

$$k = \frac{b}{a}, \quad (18)$$

то значения коэффициентов ¹⁾ будут

$$A = \sum_m \frac{1 - e^{im\varphi}}{m^2} - \sum_n \frac{n^2 - k^2}{(n^2 + k^2)^2} = \frac{1}{2} \varphi (2\pi - \varphi) + \frac{\pi^2}{\sinh^2 k\pi}, \quad (19)$$

$$B = \sum_n \frac{2nk e^{in\varphi}}{(n^2 + k^2)^2} = i \left\{ \frac{\pi\varphi \operatorname{ch} k(\pi - \varphi)}{\sinh k\pi} - \frac{\pi^2 \operatorname{sh} k\varphi}{\sinh^2 k\pi} \right\}, \quad (20)$$

$$C = \sum_n \frac{(n^2 - k^2)e^{in\varphi}}{(n^2 + k^2)^2} = -\frac{\pi^2 \operatorname{ch} k\varphi}{\sinh^2 k\pi} - \frac{\pi\varphi \operatorname{sh} k(\pi - \varphi)}{\sinh k\pi}. \quad (21)$$

Чтобы вывести теперь уравнение для *нижнего* ряда, мы должны только изменить знак κ и b и переставить буквы со штрихом и без него друг с другом.

Тогда получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{2\pi a^2}{\kappa} \frac{da'}{dt} &= A\beta' - Ba + C\beta, \\ \frac{2\pi a^2}{\kappa} \frac{d\beta'}{dt} &= Aa' + Ca + B\beta. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Формулы (17) и (22) представляют уравнения движения вихревой системы при нормальном — если можно его так назвать — ее возмущении.

Решения получаются двух типов. При первом типе мы имеем

$$a = a', \quad \beta = -\beta', \quad (23)$$

и поэтому

$$\left. \begin{aligned} \frac{2\pi a^2}{\kappa} \frac{da}{dt} &= -Ba - (A - C)\beta, \\ \frac{2\pi a^2}{\kappa} \frac{d\beta}{dt} &= -(A + C)a - B\beta. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Решение содержит в качестве множителя показательную функцию $e^{\lambda t}$, причем значения λ определяются из уравнения

$$\frac{2\pi a^2}{\kappa} \lambda = -B \pm \sqrt{A^2 - C^2}. \quad (25)$$

При втором типе имеем

$$a = -a', \quad \beta = \beta', \quad (26)$$

¹⁾ Значения сумм по n могут быть получены из ряда Фурье:

$$\frac{\operatorname{ch} k(\pi - \varphi)}{\sinh k\pi} = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{1}{k} + \frac{2k \cos \varphi}{1^2 + k^2} + \frac{2k \cos 2\varphi}{2^2 + k^2} + \dots \right\}.$$

и, следовательно,

$$\left. \begin{aligned} \frac{2\pi a^2}{x} \frac{da}{dt} &= Ba - (A + C) \beta, \\ \frac{2\pi a^2}{x} \frac{d\beta}{dt} &= -(A - C)a + B\beta. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Соответствующие значения λ даны уравнением

$$\frac{2\pi a^2}{x} \lambda = B \pm \sqrt{A^2 - C^2}. \quad (28)$$

Так как B является чисто мнимым, в то время как A и C действительны, то для устойчивости в каждом из обоих случаев необходимо, чтобы для допускаемых значений φ величина A^2 не была бы больше, чем C^2 . Если $\varphi = \pi$, то получим

$$A + C = \frac{1}{2} \pi^2 \operatorname{th}^2 \frac{1}{2} k\pi, \quad A - C = \frac{1}{2} \pi^2 \operatorname{cth}^2 \frac{1}{2} k\pi, \quad (29)$$

и $A^2 - C^2$ будет положительно. Отсюда мы заключаем, что оба типа неустойчивы.

Переходим теперь к *несимметрическому* случаю; обозначим положения смещенных вихрей соответственно через

$$\begin{aligned} &\left(ma + Vt + x_m, \quad \frac{1}{2} b + y_m \right), \\ &\left[\left(n + \frac{1}{2} \right) a + Vt + x'_n, \quad -\frac{1}{2} b + y'_n \right], \end{aligned}$$

где V дается формулой (6). Необходимые формулы мы получим, если в предыдущих результатах напишем $n + \frac{1}{2}$ вместо n .

Уравнения (17) и (22) будут таким образом иметь место, если 1) мы положим

$$\begin{aligned} A &= \sum_m \frac{1 - e^{im\varphi}}{m^2} - \sum_n \frac{\left(n + \frac{1}{2} \right)^2 - k^2}{\left\{ \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 + k^2 \right\}^2} = \\ &= \frac{1}{2} \varphi (2\pi - \varphi) - \frac{\pi^2}{\operatorname{ch}^2 k\pi}, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} B &= \sum_n \frac{(2n+1) ke^{i(n+\frac{1}{2})\varphi}}{\left\{ \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 + k^2 \right\}^2} = \\ &= i \left\{ \frac{\pi \varphi \operatorname{sh} k(\pi - \varphi)}{\operatorname{ch} k\pi} + \frac{\pi^2 \operatorname{sh} k\varphi}{\operatorname{ch}^2 k\pi} \right\}, \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} C &= \sum_n \frac{\left\{ \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 - k^2 \right\} e^{i(n+\frac{1}{2})\varphi}}{\left\{ \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 + k^2 \right\}^2} = \\ &= \frac{\pi^2 \operatorname{ch} k\varphi}{\operatorname{ch}^2 k\pi} - \frac{\pi \varphi \operatorname{ch} k(\pi - \varphi)}{\operatorname{ch} k\pi}. \end{aligned} \quad (32)$$

1) Значения сумм по n могут быть получены из ряда Фурье

$$\frac{\operatorname{sh} k(\pi - \varphi)}{\operatorname{ch} k\pi} = \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{k \cos \frac{1}{2}\varphi}{(1/2)^2 + k^2} + \frac{k \cos \frac{3}{2}\varphi}{(3/2)^2 + k^2} + \dots \right\}.$$

Эти значения для A , B , C должны быть подставлены в (25) и (28). Как и в предшествующем случае, для устойчивости необходимо, чтобы A^2 было не больше, чем C^2 . Если теперь положить

$$\operatorname{ch} \pi = 1, \quad C = 0,$$

то A тоже должно обращаться в нуль или мы должны иметь

$$\operatorname{ch}^2 k\pi = 2, \quad k\pi = 0,8814, \quad \frac{b}{a} = k = 0,281. \quad (33)$$

Расположение, таким образом, является неустойчивым, если только отношение расстояния между обоими рядами к расстоянию между двумя соседними вихрями не будет иметь в точности указанное значение.

Чтобы решить, будет ли это расположение при указанных выше условиях на самом деле устойчивым для всех значений φ между 0 и 2π , положим на мгновение

$$k(\pi - \varphi) = x, \quad k\pi = \mu,$$

так что

$$\left. \begin{aligned} k^2 A &= -\frac{1}{2} x^2, \\ k^2 C &= -\frac{1}{2} (\mu x \operatorname{ch} \mu x \operatorname{ch} x - \mu^2 \operatorname{sh} \mu \operatorname{sh} x), \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

где x изменяется от $-\mu$ до $+\mu$. Так как A есть четная, а C — нечетная функция от x , то для сравнения абсолютных значений достаточно предположить x положительным. Отсюда, полагая

$$y = \mu \operatorname{ch} \mu \operatorname{ch} x - \mu^2 \operatorname{sh} \mu \frac{\operatorname{sh} x}{x} - x, \quad (35)$$

мы должны определить, будет ли это выражение положительно для $0 < x < \mu$. Так как

$$\mu = 0,8814, \quad \operatorname{ch} \mu = \sqrt{2}, \quad \operatorname{sh} \mu = 1,$$

то y будет положительным для $x = 0$ и обращается в нуль для $x = \mu$. Далее имеем

$$\frac{dy}{dx} = \mu \operatorname{ch} \mu \operatorname{sh} x + \mu^2 \operatorname{sh} \mu \frac{\operatorname{sh} x}{x^2} - \mu^2 \operatorname{sh} \mu \frac{\operatorname{ch} x}{x} - 1, \quad (36)$$

и это равно -1 для $x = 0$ и обращается в нуль для $x = \mu$. Наконец, имеем

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \mu \operatorname{ch} \mu \operatorname{ch} x - \mu^2 \operatorname{sh} \mu \frac{\operatorname{sh} x}{x^3} + 2\mu^2 \operatorname{sh} \mu \frac{\operatorname{ch} x}{x^3} - 2\mu^2 \operatorname{sh} \mu \frac{\operatorname{sh} x}{x^3}. \quad (37)$$

Легко определить, что это выражение для всех значений x будет положительным, так как $\frac{\operatorname{th} x}{x} < 1$. Если, таким образом, x возрастает от 0 до μ ,

то $\frac{dy}{dx}$ возрастает непрерывно от -1 до 0 и поэтому будет отрицательным. Отсюда следует, что y убывает от своего первоначального положительного значения до нуля, т. е. оно будет положительным.

Мы заключаем отсюда, что данное расположение всегда будет устойчивым¹⁾, за исключением случаев, в которых

$$x = \pm \mu, \text{ а } \varphi = 0 \text{ или } 2\pi;$$

в этих исключительных случаях $B = 0$, согласно (31), и, следовательно, $\lambda = 0$. Так как возмущенные частицы в этом случае все имеют одинаковую фазу, то причина того, почему период возмущения является бесконечным, легко может быть усмотрена.

Эти последние вихревые цепочки с несимметричным расположением вихрей представляют особый интерес потому, что они являются прообразом тех следов вихрей, которые часто наблюдают позади цилиндрического тела, перемещающегося в жидкости. Это обстоятельство и вызывает дальнейшие исследования.

То влияние, которое оказывают на устойчивость цепочек боковые твердые границы, равноотстоящие от средней линии, было исследовано Розенхайдом²⁾. Он нашел, что когда отношение $\frac{a}{h}$ интервала a между двумя соседними вихрями одного ряда к расстоянию h между стенками возрастает от 0 до 0,815, несимметричное расположение вихрей является устойчивым только для определенных значений отношения $\frac{b}{a}$, которое непрерывно уменьшается от 0,281 до 0,256. Но если $\frac{a}{h} > 0,815$, то устойчивость имеет-
ся для ряда значений $\frac{b}{a}$. А когда $\frac{a}{h} > 1,419$, то это расположение вихрей будет устойчивым для всех значений $\frac{b}{a}$.

Симметричное же расположение, с другой стороны, всегда будет неустойчивым.

§ 157. Если, как в случае вихревой пары или системы вихревых пар, алгебраическая сумма напряжений всех вихрей равна нулю, то мы можем разработать двухмерную теорию „импульса“ аналогично теории, данной в § 119, 152 для случаев конечной вихревой системы. Более подробный вывод предоставляем сделать читателю. Если P и Q обозначают компоненты импульса, соответственно параллельные оси x и оси y , и N обозначает момент импульса относительно оси Oz , причем все взято для слоя жидкости с толщиной по оси z , равной единице, то мы найдем, что

$$\left. \begin{aligned} P &= \varrho \iint y \zeta \, dx \, dy, & Q &= -\varrho \iint x \zeta \, dx \, dy, \\ N &= -\frac{1}{2} \varrho \iint (x^2 + y^2) \zeta \, dx \, dy. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Если, например, в случае одной вихревой пары напряжение вихрей будет равно $\pm \mu$, а их расстояние друг от друга равно c , то им-

¹⁾ Эта теорема была высказана Карманом без доказательства.

²⁾ Rosenhead, Phil. Trans., CCVIII, 275 (1929), см. также Glaeger, Proc. Roy. Soc. A, CXX, 34 (1928).

пульс будет равен ϱx и направлен вдоль прямой, делящей под прямым углом отрезок c пополам.

Постоянство импульса дает

$$\sum \kappa x = \text{const.}, \quad \sum \kappa y = \text{const.}, \quad \sum \kappa (x^2 + y^2) = \text{const.} \quad (2)$$

Можно также показать, что в рассматриваемом случае кинетическая энергия движения будет

$$T := -\frac{1}{2} \varrho \int \psi dx dy = -\frac{1}{2} \varrho \sum \kappa \psi. \quad (3)$$

Если $\sum \kappa$ не равна нулю, то тогда как энергия, так и момент импульса оба будут бесконечны, что легко можно проверить в случае одного прямолинейного вихря.

Теория системы изолированных прямолинейных вихрей была приведена в очень изящный вид Кирхгофом ¹⁾.

Если обозначить положения центров соответствующих вихрей через $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots$, их напряжения через $\kappa_1, \kappa_2, \dots$, то согласно § 154 будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \kappa_1 \frac{dx_1}{dt} &= -\frac{\partial W}{\partial y_1}, & \kappa_1 \frac{dy_1}{dt} &= \frac{\partial W}{\partial x_1}, \\ \kappa_2 \frac{dx_2}{dt} &= -\frac{\partial W}{\partial y_2}, & \kappa_2 \frac{dy_2}{dt} &= \frac{\partial W}{\partial x_2}, \\ &\dots &&\dots \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где

$$W = \frac{1}{2\pi} \sum \kappa_1 \kappa_2 \ln r_{12} \quad (5)$$

и r_{12} обозначает расстояние между вихрями x_1, x_2 .

Так как W зависит только от *относительного* положения вихрей, то оно не изменяет своего значения, если x_1, x_2, \dots будут увеличены на одну и ту же величину; отсюда следует, что

$$\sum \frac{\partial W}{\partial x_1} = 0,$$

а также

$$\sum \frac{\partial W}{\partial y_1} = 0.$$

Это дает первые два уравнения (2); однако доказательство теперь не ограничивается случаем $\sum \kappa = 0$. Ход доказательства в основном такой же, как и в § 154. Далее из (4) получаем

$$\sum \kappa \left(x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} \right) = - \sum \left(x \frac{\partial W}{\partial y} - y \frac{\partial W}{\partial x} \right),$$

или, после введения полярных координат $(r_1, \theta_1), (r_2, \theta_2), \dots$ для различных вихрей,

$$\sum \kappa r \frac{dr}{dt} = - \sum \frac{\partial W}{\partial \theta}. \quad (6)$$

¹⁾ Kirchhoff, Mechanik, 20-я лекция.

Так как W остается без изменения, если вращать координатные оси в их плоскостях около начала, то имеем

$$\sum \frac{\partial W}{\partial \theta} = 0;$$

отсюда следует

$$\sum x r^2 = \text{const.}, \quad (7)$$

а это уравнение совпадает с третьим уравнением (2), но оно свободно от предполагаемого там ограничения.

Дальнейший интеграл (4) получается следующим путем. Мы имеем

$$\sum x \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = \sum \left(x \frac{\partial W}{\partial x} + y \frac{\partial W}{\partial y} \right),$$

или

$$\sum x r^2 \frac{d\theta}{dt} = \sum r \frac{\partial W}{\partial r}. \quad (8)$$

Если все r будут увеличены в отношении $1+\epsilon$, где ϵ бесконечно мало, то приращение W будет равно

$$\sum \epsilon r \frac{\partial W}{\partial r}.$$

Но так как новое расположение вихревой системы геометрически подобно первоначальному, то расстояния r_{12} меняются в том же самом отношении $1+\epsilon$, и, следовательно, если принять во внимание (5), приращение W будет равно $\frac{\epsilon}{2\pi} \sum x_1 x_2$. Следовательно, (8) может быть написано в форме

$$\sum x r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2\pi} \sum x_1 x_2. \quad (9)$$

§ 158. Полученные результаты независимы от формы поперечных сечений вихря до тех пор, пока размеры сечений малы сравнительно со взаимным расстоянием вихрей. Простейший случай круглого сечения и представляет интерес для исследования, является ли эта форма устойчивой. Этот вопрос был исследован Кельвином¹⁾.

Когда возмущение происходит только в двух измерениях, вычисления делаются очень простыми. Предположим, как в § 27, что область внутри круга радиуса $r=a$ с центром в начале наполнена жидкостью с повсюду равным вектором вихря ω и что этот круг находится в жидкости с безвихревым движением. Если движение на границе круга будет непрерывно, то будем иметь для $r < a$

$$\psi = -\frac{1}{4} \omega (a^2 - r^2) \quad (1)$$

и для $r > a$

$$\psi = -\frac{1}{2} \omega a^2 \ln \frac{a}{r}. \quad (2)$$

Чтобы исследовать влияние небольшого безвихревого возмущения, предположим, что для $r < a$

$$\psi = -\frac{1}{4} \omega (a^2 - r^2) + A \frac{r^s}{a^s} \cos (s\theta - \sigma t) \quad \left. \right\} \quad (3)$$

и для $r > a$

$$\psi = -\frac{1}{2} \omega a^2 \lg \frac{a}{r} + A \frac{a^s}{r^s} \cos (s\theta - \sigma t) \quad \left. \right\}$$

¹⁾ W. Thomson, On the Vibrations of a Columnar Vortex, Phil. Mag. (5), X, 155 (1880) [Papers, IV, 152].

где s обозначает целое число, а σ подлежит еще определению. Постоянное A должно иметь в обоих этих выражениях одно и то же значение, так как радиальная компонента $-\frac{\partial \psi}{r \partial \theta}$ скорости на контуре вихря, на котором приближенно $r=a$, должна быть непрерывна. Если в качестве уравнения контура мы возьмем

$$r = a + a \cos(s\theta - \sigma t), \quad (4)$$

то мы должны только еще выразить то, что поперечная компонента $\frac{\partial \psi}{\partial r}$ скорости непрерывна. Это дает

$$\frac{1}{2} \omega r + s \frac{A}{a} \cos(s\theta - \sigma t) = \frac{\frac{1}{2} \omega a^2}{r} - \frac{sA}{a} \cos(s\theta - \sigma t).$$

Если мы из уравнения (4) подставим значение r и пренебрежем квадратом a , то получим

$$\omega a = -\frac{2sA}{a}. \quad (5)$$

До сих пор исследование было чисто кинематическим; динамическая теорема о том, что вихревые линии движутся вместе с жидкостью, показывает, что нормальная компонента скорости для частицы на контуре должна быть равна нормальной компоненте скорости самого контура. Это условие дает

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{\partial \psi}{r \partial \theta} - \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{dr}{r \partial \theta},$$

где r имеет значение (4), или в другом виде

$$\sigma a = s \frac{A}{a} + \frac{1}{2} \omega a \frac{sa}{a}. \quad (6)$$

Если исключить отношение $\frac{A}{a}$ из уравнений (5) и (6), то найдем

$$\sigma = \frac{1}{2}(s-1) \omega. \quad (7)$$

Таким образом возмущение, представленное тригонометрическими функциями (4), представляет собой гофр, перемещающийся по окружности вихря с угловой скоростью

$$\frac{\sigma}{s} = \frac{(s-1)}{s} \frac{1}{2} \omega. \quad (8)$$

Это есть угловая скорость по отношению к пространству, которое мы считаем неподвижным; по отношению же к врачающейся жидкости угловая скорость будет равна

$$\frac{\sigma}{s} - \frac{1}{2} \omega = -\frac{1}{2} \frac{\omega}{s}, \quad (9)$$

и ее направление противоположно направлению вращения жидкости.

Для $s=2$ возмущенное поперечное сечение есть эллипс, который вращается с угловой скоростью $\frac{1}{4}\omega$ вокруг своего центра.

Поперечные и продольные колебания изолированного прямолинейного вихревого столба были также изучены Кельвином в цитированной работе. Прямолинейная форма оказывается устойчивой и для возмущений общего характера.

В недавней работе Розенхид¹⁾ исследовал вопрос об устойчивости несимметричной кармановской дорожки вихрей с конечным поперечным сечением. Оказывается, что такая дорожка будет устойчивой для строго двумерных возмущений и неустойчивой по отношению к синусоидальной продольной деформации, длина волны которой меньше некоторой доли диаметра.

§ 159. Частный случай эллиптического возмущения может быть решен точно следующим образом²⁾.

Предположим, что пространство внутри эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$

наполнено жидкостью с равномерной завихренностью ω , в то время как окружающая жидкость движется без вихрей. Оказывается, что все условия задачи будут удовлетворены, если мы предположим, что эллиптический контур без изменения вида вращается с угловой скоростью n , которая еще подлежит определению.

Формула для внешней области согласно (4) § 72 может быть написана сразу; мы будем иметь

$$\psi = \frac{1}{4} n(a+b)^2 e^{-2\xi} \cos 2\eta + \frac{1}{2} \omega ab\xi, \quad (2)$$

где ξ , η обозначают теперь эллиптические координаты, рассмотренные в п. 3 § 71, а циклическая постоянная κ положена равной $\pi ab\omega$.

Значение ψ для внутренней области должно удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \omega \quad (3)$$

с граничным условием

$$\frac{ux}{a^2} + \frac{vy}{b^2} = -ny \frac{x}{a^2} + nx \frac{y}{b^2}. \quad (4)$$

Оба эти условия будут выполняться для функции

$$\psi = \frac{1}{2} \omega (Ax^2 + By^2) \quad (5)$$

при условии, что

$$A + B = 1, \quad Aa^2 - Bb^2 = \frac{n}{\omega} (a^2 - b^2). \quad (6)$$

Мы должны теперь еще выразить, что на контуре вихря не имеет места тангенциальное скольжение, т. е. значения для $\frac{\partial \psi}{\partial \xi}$, полученные из (2) и (5), там совпадают. Если мы положим

$$x = c \operatorname{ch} \xi \cos \eta, \quad y = c \operatorname{sh} \xi \sin \eta,$$

где

$$c = \sqrt{a^2 - b^2},$$

то получим после дифференцирования, приравнивая коэффициенты при $\cos 2\eta$, дополнительное условие

$$-\frac{1}{2} n(a+b)^2 e^{-2\xi} = \frac{1}{2} \omega c^2 (A - B) \operatorname{ch} \xi \operatorname{sh} \xi,$$

¹⁾ Proc. Roy. Soc. A., CXXVII, 590 (1930).

²⁾ Kirchhoff, Mechanik, 20-я лекция; Bassett, Hydrodynamics, II, 41.

где ξ есть параметр эллипса (1). Это условие эквивалентно уравнению

$$A - B = -\frac{n}{\omega} \frac{a^2 - b^2}{ab}, \quad (7)$$

так как для точек эллипса

$$\operatorname{ch} \xi = \frac{a}{c}, \quad \operatorname{sh} \xi = \frac{b}{c}.$$

В соединении с уравнением (6) это дает

$$Aa = Bb = \frac{ab}{a + b} \quad (8)$$

и

$$n = \frac{ab}{(a + b)^2} \omega. \quad (9)$$

Для $a = b$ это совпадает с нашим прежним приближенным результатом.

Компоненты скорости \dot{x} , \dot{y} частицы вихря по отношению к главным осям эллипса определяются формулами

$$\dot{x} = -\frac{\partial \psi}{\partial y} + ny, \quad \dot{y} = \frac{\partial \psi}{\partial x} - nx.$$

Отсюда получается

$$\frac{\dot{x}}{a} = -n \frac{y}{b}, \quad \frac{\dot{y}}{b} = n \frac{x}{a}. \quad (10)$$

Интегрируя, находим

$$\begin{aligned} x &= ka \cos(nt + \varepsilon), \\ y &= kb \sin(nt + \varepsilon), \end{aligned} \quad (11)$$

где k и ε суть произвольные постоянные; *относительными* траекториями частиц будут эллипсы, которые подобны контуру вихря, и они описываются частицами по гармоническому закону.

Если x' , y' обозначают координаты частицы по отношению к неизменной в пространстве системе координат, то мы получаем

$$\left. \begin{aligned} x' &= x \cos nt - y \sin nt = \frac{1}{2} k (a + b) \cos(2nt + \varepsilon) + \\ &\quad + \frac{1}{2} k (a - b) \cos \varepsilon, \\ y' &= x \sin nt + y \cos nt = \frac{1}{2} k (a + b) \sin(2nt + \varepsilon) - \\ &\quad - \frac{1}{2} k (a - b) \sin \varepsilon. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Абсолютные траектории, таким образом, будут окружности, которые описываются с угловой скоростью $2n$ ¹⁾.

§ 159a. Движение твердого тела в жидкости, имеющей завихрение, является очень интересной проблемой, но, к сожалению, она трудна для изучения. Единственный доступный рассмотрению случай есть двумерное движение жидкости с равномерным завихрением.

¹⁾ Что касается дальнейших исследований в этом направлении, см. Hill, On the Motion of Fluid part of which is moving rotationally and part irrotationally, Phil. Trans., 1884; Love, On the Stability of certain Vortex Motions, Proc. Lond. Math. Soc. (1), XXV, 18 (1893).

Пусть x_0, y_0 обозначают координаты точки C (цилиндрического) тела относительно неподвижных осей; x, y — координаты произвольной точки жидкости относительно параллельных осей, проходящих через C , а (u, v) обозначают компоненты скорости относительно C . Тогда мы имеем

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} + \ddot{x}_0 + u \frac{du}{dx} + v \frac{dv}{dx} - \zeta v &= - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{dv}{dt} + \ddot{y}_0 + u \frac{du}{dy} + v \frac{dv}{dy} + \zeta u &= - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}; \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ср. (3) § 12 и (5) § 146. Так как

$$u = - \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2)$$

и ζ постоянна, то оказывается, что $\frac{du}{dt}$ и $\frac{dv}{dt}$ являются производными от некоторой функции от x, y, t соответственно по x и y . Если мы обозначим эту функцию через $-\frac{\partial \varphi}{\partial t}$, то будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) &= - \frac{du}{dt} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right), \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) &= - \frac{dv}{dt} = - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

а это есть условие того, что

$$\frac{\partial}{\partial t} (\varphi + i\psi)$$

есть аналитическая функция комплексного переменного $x + iy$. Вследствие этого $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ будет вполне определено, если будет известен вид ψ ¹⁾.

Уравнения (1) дают теперь

$$\frac{p}{\rho} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} - (\ddot{x}_0 x + \ddot{y}_0 y) - \frac{1}{2} q^2 + \zeta \psi, \quad (4)$$

где

$$q^2 = u^2 + v^2. \quad (5)$$

Перейдем к применению этих результатов к некоторым случаям движения кругового цилиндра. Точку C естественно взять на оси.

Предположим сначала, что невозмущенное движение жидкости представляет равномерное вращение ω около начала, так что $\zeta = 2\omega$. Функция тока для движения относительно движущейся точки (x_0, y_0) будет равна тогда

$$\left. \begin{aligned} \psi_0 &= \frac{1}{2} \omega \{(x_0 + x)^2 + (y_0 + y)^2\} + \dot{x}_0 y - \dot{y}_0 x = \\ &= \frac{1}{2} \omega r^2 + \omega r (x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta) + \frac{1}{2} \omega (x_0^2 + y_0^2) + \\ &\quad + r (\dot{x}_0 \sin \theta - \dot{y}_0 \cos \theta), \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

¹⁾ Proudman, On the Motion of Solids in a Liquid possessing Vorticity, Proc. R. S., XCII, 408 (1916).

причем мы ввели полярные координаты с началом С. Относительная функция тока для возмущенного движения будет

$$\begin{aligned}\psi = \frac{1}{2} \omega r^2 + \omega \left(r - \frac{a^2}{r} \right) (x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta) + \\ + \frac{1}{2} \omega (x_0^2 + y_0^2) + \left(r - \frac{a^2}{r} \right) (\dot{x}_0 \sin \theta - \dot{y}_0 \cos \theta),\end{aligned}\quad (7)$$

так как она удовлетворяет уравнению $\Delta_1 \psi = 2\omega$ и дает $\psi = \text{const.}$ для $r = a$, а для $r = \infty$ совпадает с (6).

Отсюда следует

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \omega \left(r - \frac{a^2}{r} \right) (\dot{x}_0 \cos \theta + \dot{y}_0 \sin \theta) + \left(r - \frac{a^2}{r} \right) (\ddot{x}_0 \sin \theta - \ddot{y}_0 \cos \theta) \quad (8)$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\omega \left(r + \frac{a^2}{r} \right) (\dot{x}_0 \sin \theta - \dot{y}_0 \cos \theta) + \left(r + \frac{a^2}{r} \right) (\ddot{x}_0 \cos \theta + \ddot{y}_0 \sin \theta), \quad (9)$$

при этом мы опустили члены, независимые от r и θ . Далее для $r = a$ имеем

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = \omega a + 2\omega (x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta) + 2(\dot{x}_0 \sin \theta - \dot{y}_0 \cos \theta)$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{2} q^2 = 2\omega^2 a (x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta) + 2\omega a (\dot{x}_0 \sin \theta - \dot{y}_0 \cos \theta) + \dots, \quad (10)$$

где члены, не влияющие на результирующую силу давления на цилиндр, были опущены. Если мы теперь подставим это выражение в (4), то получим для $r = a$

$$\begin{aligned}\frac{p}{\rho} = a (\ddot{x}_0 \cos \theta + \ddot{y}_0 \sin \theta) - 4\omega \dot{a} (\dot{x}_0 \sin \theta - \dot{y}_0 \cos \theta) - \\ - 2\omega^2 a (x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta) + \dots\end{aligned}\quad (11)$$

Компоненты силы, вызываемой давлениями жидкости на цилиндр, представляются тогда в следующем виде ¹⁾:

$$\left. \begin{aligned}- \int_0^{2\pi} p \cos \theta a d\theta = - M' (\ddot{x}_0 + 4\omega \dot{y}_0 - 2\omega^2 x_0); \\ - \int_0^{2\pi} p \sin \theta a d\theta = - M' (\ddot{y}_0 - 4\omega \dot{x}_0 - 2\omega^2 y_0),\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

где $M' = \mu a^2$. Если M означает массу самого цилиндра на единицу длины то уравнения движения будут иметь вид

$$\left. \begin{aligned}\mu \ddot{x} + 4\omega \dot{y} - 2\omega^2 x = \frac{X}{M'}, \\ \mu \ddot{y} - 4\omega \dot{x} - 2\omega^2 y = \frac{Y}{M'},\end{aligned}\right\} \quad (13)$$

¹⁾ Ср. G. I. Taylor, Motion of Solids in Fluids when the Flow is not Irrotational, Proc. R. S. A., X+III, 99 (1916).

где $\mu = 1 + \frac{M}{M'}$ и индекс нуль опущен, так как он больше не нужен. Если мы положим

$$z = x + iy,$$

то уравнения (13) равнозначны с уравнением

$$\ddot{uz} - 4i\omega\dot{z} - 2\omega^2 z = \frac{X + iY}{M'} . \quad (14)$$

Чтобы найти свободное движение для случая, когда

$$X = 0, \quad Y = 0,$$

возьмем z пропорциональным $e^{im\omega t}$; тогда получим

$$\mu t^2 - 4t + 2 = 0. \quad (15)$$

Когда $\mu < 2$, т. е. масса цилиндра меньше массы вытесненной жидкости, тогда t будет действительным и решение имеет вид

$$z = A e^{im_1 \omega t} + B e^{im_2 \omega t} \quad (16)$$

где m_1 и m_2 положительны. Этим представлено движение по „прямому“ эпициклу. В качестве частных случаев возможны круговые орбиты, и они будут устойчивыми. Если же $\mu > 2$, то для t получаются комплексные значения и решение будет иметь вид

$$z = (A e^{at} + B e^{-at}) e^{i\beta t}; \quad (17)$$

орбита в таком случае с возрастанием t приближается к логарифмической спирали. Если $\mu = 2$, то $(m - 1)^2 = 0$ и

$$z = (A + Bt) e^{i\omega t}. \quad (18)$$

Хотя и возможен случай, как мы должны были ожидать, что цилиндр, имеющий с жидкостью одинаковую среднюю плотность, движется вместе с жидкостью по круговому пути, однако это движение, как только что было показано, будет неустойчивым.

Если имеется налицо радиально действующая сила, направление которой поворачивается вместе с жидкостью и которая дана формулой

$$X + iY = R e^{i\omega t}, \quad (19)$$

то уравнение (14) для $\mu = 2$ удовлетворяется, полагая

$$z = r e^{i\omega t}, \quad (20)$$

если только

$$\ddot{r} = \frac{1}{2} \frac{R}{M'} . \quad (21)$$

Цилиндр может, таким образом, двигаться по отношению к врачающейся жидкости вдоль радиуса ¹⁾, но это движение должно быть опять классифицировано как неустойчивое ²⁾.

¹⁾ Ср. Т а у л о г., см. сноску на стр. 295.

²⁾ Некоторые случаи, в которых шар движется во врачающейся жидкости, были исследованы Прудманом, см. примечание выше; S. F. Г л а с с е, Proc R. S. A., CII, 89 (1922); Т а у л о г, Proc. R. S. A., CII, 180 (1922).

Теперь предположим, что жидкость в невозмущенном состоянии находится в ламинарном движении, параллельном оси Ox с постоянным завихрением 2ω ; функция тока выразится тогда так:

$$\psi_0 = \omega(y_0 + y)^2 = \frac{1}{2} \omega r^2 (1 - \cos 2\theta) + 2\omega y_0 r \sin \theta + \omega y_0^2. \quad (22)$$

При возмущенном движении относительно цилиндра будем иметь

$$\begin{aligned} \psi = \frac{1}{2} \omega r^2 - \frac{1}{2} \omega \left(r^2 - \frac{a^4}{r^2} \right) \cos 2\theta + 2\omega y_0 \left(r - \frac{a^2}{r} \right) \sin \theta + \\ + \omega y_0^2 + \left(r - \frac{a^2}{r} \right) (\ddot{x}_0 \sin \theta - \dot{y}_0 \cos \theta). \end{aligned} \quad (23)$$

Отсюда следует

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = 2\omega \dot{y}_0 \left(r - \frac{a^2}{r} \right) \sin \theta + \left(r - \frac{a^2}{r} \right) (\ddot{x}_0 \sin \theta - \dot{y}_0 \cos \theta), \quad (24)$$

причем члены, которые не зависят от r и θ , опущены. Мы будем иметь, таким образом,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 2\omega \dot{y}_0 \left(r + \frac{a^2}{r} \right) \cos \theta + \left(r + \frac{a^2}{r} \right) (\ddot{x}_0 \cos \theta + \dot{y}_0 \sin \theta). \quad (25)$$

Для $r = a$ согласно формуле (23) имеем

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = -\omega a + 4\omega a \sin^2 \theta + 4\omega y_0 \sin \theta + 2(\dot{x}_0 \sin \theta - \dot{y}_0 \cos \theta), \quad (26)$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} q^2 = -4\omega^2 a y_0 \sin \theta - 2\omega a (\dot{x}_0 \sin \theta - \dot{y}_0 \cos \theta) + \\ + 16\omega^3 a y_0 \sin^3 \theta + 8\omega a y_0 (\dot{x}_0 \sin^2 \theta - \dot{y}_0 \sin^2 \theta \cos \theta) + \dots, \end{aligned} \quad (27)$$

при этом сохранены только те члены, которые входят в выражение результирующей силы давления на цилиндр. Подставляя это выражение в (4), для $r = a$ получим

$$\begin{aligned} \frac{p}{\rho} = a (\ddot{x}_0 \cos \theta + \dot{y}_0 \sin \theta) + 2\omega a \dot{x}_0 (\sin \theta - 4 \sin^3 \theta) + \\ + 2\omega \dot{y}_0 (\cos \theta + 4 \sin^2 \theta \cos \theta) + 4\omega^3 a y_0 (\sin \theta - 4 \sin^3 \theta) + \dots \end{aligned} \quad (28)$$

Отсюда следует ¹⁾

$$\left. \begin{aligned} - \int_0^{2\pi} p \cos \theta a d\theta = -M' (\ddot{x}_0 + 4\omega \dot{y}_0), \\ - \int_0^{2\pi} p \sin \theta a d\theta = -M' (\dot{y}_0 - 4\omega \dot{x}_0 - 8\omega^2 y_0). \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

¹⁾ Ср. Т а у л о г, см. примечание на стр. 295.

Если мы опустим значки, то уравнения движения цилиндра будут

$$\left. \begin{aligned} \mu \ddot{x} + 4\omega \dot{y} &= \frac{X}{M'}, \\ \mu \ddot{y} - 4\omega \dot{x} - 8\omega^2 y &= \frac{Y}{M'}. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Мы замечаем, что цилиндр может оставаться в относительном равновесии, если на него будет действовать сила

$$Y = -8\omega^2 M' y = 4\omega M' U = 2\kappa \rho U, \quad (31)$$

где $U = -2\omega y$ есть скорость невозмущенного течения на уровне центра и $\kappa = 2\lambda \omega$ есть циркуляция непосредственно вокруг цилиндра. Этот результат может быть сопоставлен с выражением (6) § 69.

Из уравнений (30) легко найти, что траектория для $\mu < 2$, при отсутствии внешних сил, есть трохонда, общее поступательное перемещение которой параллельно течению.

§ 160. В § 80 было указано, что движение несжимаемой жидкости в кривом слое малой и одинаковой толщины вполне определяется функцией тока ψ , так что всякая кинематическая задача этого рода может быть проектированием преобразована в задачу плоского слоя. Если, далее, отображение будет „ортоморфным“, то кинетические энергии соответствующих частиц жидкости и циркуляции по соответствующим замкнутым кривым для обоих движений будут равны. Из этого второго утверждения следует, что вихри преобразуются в вихри равного напряжения. Из § 145 следует сейчас же, что для случая *замкнутой* односвязной поверхности алгебраическая сумма напряжений всех наличных вихрей равна нулю.

Мы можем применить вышеизложенное к движению в сферическом слое. Простейший случай — это тот, когда пара изолированных вихрей находится в диаметрально противоположных точках; линии тока будут тогда малые параллельные круги, а скорость будет обратно пропорциональна радиусу круга. Для пары вихрей, которые находятся в двух произвольных точках A и B , линии тока будут окружности с общей осью, как и в § 80. Методом стереографической проекции легко найти, что скорость произвольной точки P есть результирующая из двух скоростей

$$\frac{\kappa}{2\pi a} \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \theta_1 \quad \text{и} \quad \frac{\kappa}{2\pi a} \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \theta_2$$

которые перпендикулярны соответственно к дугам большого круга AP и BP ; θ_1 и θ_2 означают длины этих дуг, a — радиус круга и $\pm \kappa$ — напряжения вихрей. Центр ¹⁾ (см. § 154) каждого вихря движется со скоростью $\frac{\kappa}{2\pi a} \operatorname{ctg} \frac{1}{2} AB$ перпендикулярно к AB . Оба вихря, таким образом, описывают параллельные и одинаковые малые круги, оставаясь всегда на постоянном расстоянии друг от друга.

¹⁾ Чтобы предупредить возможное непонимание, заметим, что центры соответствующих вихрей не обязательно должны быть в соответствующих точках. Траектории этих центров, вообще говоря, не являются проекциями друг друга.

Круговые вихри

§ 161. Рассмотрим теперь случай, когда все вихри, имеющиеся в жидкости (которую опять считаем безграничной), суть круговые и имеют ось x в качестве общей оси. Пусть $\tilde{\omega}$ означает расстояние произвольной точки P от этой оси, v — скорость в направлении $\tilde{\omega}$ и ω — результирующее завихрение в P . Очевидно тогда u , v , ω суть функции только от x и $\tilde{\omega}$.

При этих условиях существует функция тока, определенная, как и в § 94; именно мы будем иметь

$$u = -\frac{1}{\tilde{\omega}} \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{\omega}}, \quad v = \frac{1}{\tilde{\omega}} \frac{\partial \psi}{\partial x}; \quad (1)$$

отсюда

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial \tilde{\omega}} = \frac{1}{\tilde{\omega}} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tilde{\omega}^2} - \frac{1}{\tilde{\omega}} \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{\omega}} \right). \quad (2)$$

Из выражения (7) § 148 легко видеть, что вектор (F , G , H) при настоящих условиях всегда перпендикулярен к оси x и радиусу $\tilde{\omega}$. Если мы обозначим через S величину этого вектора, то поток его через круг (x , $\tilde{\omega}$) будет равен $2\pi\tilde{\omega}S$, отсюда следует, что

$$\psi = -\tilde{\omega}S. \quad (3)$$

Значение ψ в точке $(x, \tilde{\omega})$, которое обусловлено одной вихревой нитью с циркуляцией κ и координатами x' , $\tilde{\omega}'$ (заметим, что элемент вихревой нити имеет длину $\tilde{\omega}' d\theta$, где θ означает угол элемента с направлением S), согласно (1) § 149 будет

$$\psi = -\tilde{\omega}S = -\frac{\kappa \tilde{\omega} \tilde{\omega}'}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta}{r} d\theta, \quad (4)$$

где

$$r = \{(x - x')^2 + \tilde{\omega}^2 + \tilde{\omega}'^2 - 2\tilde{\omega}\tilde{\omega}' \cos \theta\}^{1/2}. \quad (5)$$

Обозначив через r_1 и r_2 соответственно наименьшее и наибольшее расстояния точки P от точек вихря:

$$\begin{cases} r_1^2 = (x - x')^2 + (\tilde{\omega} - \tilde{\omega}')^2, \\ r_2^2 = (x - x')^2 + (\tilde{\omega} + \tilde{\omega}')^2, \end{cases} \quad (6)$$

будем иметь

$$\begin{cases} r^2 = r_1^2 \cos^2 \frac{1}{2} \theta + r_2^2 \sin^2 \frac{1}{2} \theta, \\ 4\tilde{\omega}\tilde{\omega}' \cos \theta = r_1^2 + r_2^2 - 2r^2 \end{cases} \quad (7)$$

и, следовательно,

$$\psi = -\frac{\kappa}{8\pi} \left[(r_1^2 + r_2^2) \int_0^\pi \frac{d\theta}{\sqrt{r_1^2 \cos^2 \frac{1}{2}\theta + r_2^2 \sin^2 \frac{1}{2}\theta}} - \right. \\ \left. - 2 \int_0^\pi \sqrt{r_1^2 \cos^2 \frac{1}{2}\theta + r_2^2 \sin^2 \frac{1}{2}\theta} d\theta \right]. \quad (8)$$

Интегралы принадлежат к типу, известному из теории „арифметико-геометрического среднего“ ¹⁾. В обычном, недостаточно симметрическом способе обозначения полного эллиптического интеграла имеем

$$\psi = -\frac{\kappa}{2\pi} (\tilde{\omega} \tilde{\omega}')^{1/2} \left\{ \left(\frac{2}{k} - k \right) F_1(k) - \frac{2}{k} E_1(k) \right\}, \quad (9)$$

где

$$k^2 = 1 - \frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{4\tilde{\omega} \tilde{\omega}'}{(x-x')^2 + (\tilde{\omega}+\tilde{\omega}')^2}. \quad (10)$$

Значение ψ в какой-нибудь данной точке можно, таким образом,

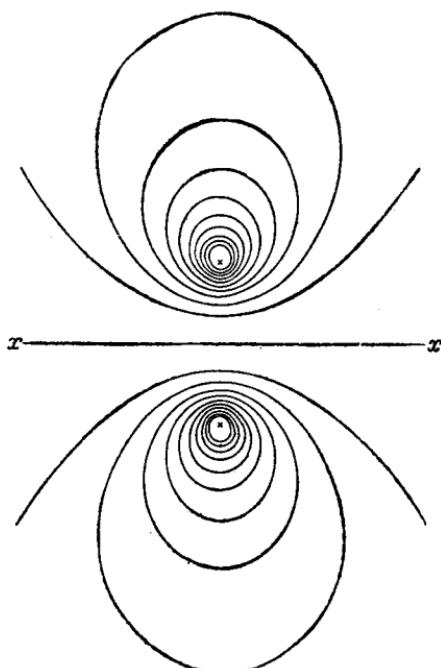
вычислить с помощью лежандровых таблиц.

Преобразование Ландена ²⁾ дает более изящное выражение для ψ

$$\psi = -\frac{\kappa}{2\pi} (r_1 + r_2) \times \\ \times \{ F_1(\lambda) - E_1(\lambda) \}, \quad (11)$$

где

$$\lambda = \frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1}. \quad (12)$$



Фиг. 40.

Вид линий тока для равноотстоящих значений ψ показывает фиг. 40. Они нарисованы по методу, который, так же как и формула (11), принадлежит Максвеллу ³⁾.

Выражения для потенциала скоростей и функции тока могут быть также получены в виде определенных интегралов, содержащих бесселевы функции.

Если мы для этой цели предположим, что вихрь занимает положение окружности $x=0$, $\tilde{\omega}=a$, то, очевидно, части положительной стороны плоскости $x=0$, лежащие вну-

¹⁾ См. Cayley, Elliptic Functions, Cambridge (1876), гл. XIII.

²⁾ См. Cayley, см. сноска ¹⁾.

³⁾ Maxwell, Electricity and Magnetism, § 704, 705; см. также Minchin Phil. Mag. (5) (1893); Nagaoaka, Phil. Mag. (6), VI (1903).