

три и вне этого круга, образуют две различные эквипотенциальные поверхности.

Предполагая, что

$$\varphi = \frac{1}{2} \kappa \quad \text{для } x=0, \tilde{\omega} < a,$$

$$\varphi = 0 \quad \text{для } x=0, \tilde{\omega} > a,$$

получим из (2) § 102

$$\varphi = \frac{1}{2} \kappa a \int_0^{\infty} e^{-kx} J_0(k\tilde{\omega}) J_1(ka) dk, \quad (13)$$

и, следовательно, в согласии с уравнением (5) § 100

$$\psi = -\frac{1}{2} \kappa a \tilde{\omega} \int_0^{\infty} e^{-kx} J_1(k\tilde{\omega}) J_1(ka) dk. \quad (14)$$

Эти формулы относятся, конечно, к области  $x > 0$ <sup>1)</sup>.

В § 150 было показано, что значение  $\varphi$  таково, как если бы оно зависело от некоторой системы дублетов, распределенных с равномерной плотностью  $\kappa$  на внутренней части окружности. Значения  $\varphi$  и  $\psi$  при равномерном распределении простых источников по этой поверхности были даны в выражениях (11) § 102. Формулы (13) и (14) могут быть получены отсюда дифференцированием по  $\kappa$  и подходящим выбором постоянного множителя<sup>2)</sup>.

**§ 162.** Энергия произвольной системы круговых вихрей с осью  $x$  в качестве общей оси представляется после интегрирования по частям формулой

$$T = \pi \rho \iint (u^2 + v^2) \tilde{\omega} dx d\tilde{\omega} = \pi \rho \iint \left( v \frac{\partial \psi}{\partial x} - u \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{\omega}} \right) dx d\tilde{\omega} = \\ = -\pi \rho \iint \psi \omega dx d\tilde{\omega} = -\pi \rho \sum \kappa \psi, \quad (1)$$

так как члены, проинтегрированные по частям, на границах обращаются в нуль. Через  $\kappa$  мы обозначили здесь напряжение  $\omega dx d\tilde{\omega}$  элементарной вихревой нити.

Далее, формула (7) § 153 напишется теперь<sup>3)</sup>

$$T = 2\pi \rho \iint (\tilde{\omega} u - xv) \tilde{\omega} \omega dx dy = 2\pi \rho \sum \kappa \tilde{\omega} (\omega u - xv) \quad (2)$$

<sup>1)</sup> Формула для  $\psi$  имеется у Bassett, Hydrodynamics, II, 93, см. также Nagaoka, см. выше.

<sup>2)</sup> Другие выражения для  $\varphi$  и  $\psi$  могут быть получены с помощью сферической функции. Так, значение  $\varphi$  дано у Thomson и Tait, § 546, а значение  $\psi$  может быть выведено из формулы (11) и (12) § 95 нашей книги. Выражение в эллиптических интегралах, однако, наиболее пригодно для всякого рода интерпретаций.

<sup>3)</sup> В какой-либо точке плоскости  $z=0$  имеем  $y=\tilde{\omega}$ ,  $\xi=0$ ,  $\eta=0$ ,  $\zeta=-\frac{1}{2} \omega$ ,  $v=v$ ; остальное следует из соображений симметрии.

Импульс системы сводится, очевидно, к силе, действующей вдоль  $Ox$ . Согласно формуле (6) § 152 имеем

$$P = \frac{1}{2} \varrho \iiint (y\zeta - z\eta) dx dy dz = \pi \varrho \int \int \tilde{\omega}^2 \tilde{\omega} dx d\tilde{\omega} = \\ = \pi \varrho \sum \kappa \tilde{\omega}^2. \quad (3)$$

Если мы введем символы  $x_0$  и  $\tilde{\omega}_0$ , определяемые уравнениями

$$x_0 = \frac{\sum \kappa \tilde{\omega}^2 x}{\sum \kappa \tilde{\omega}^2}, \quad \tilde{\omega}_0^2 = \frac{\sum \kappa \tilde{\omega}^2}{\sum \kappa}, \quad (4)$$

то обе эти величины определяют окружность, положение которой, очевидно, зависит от напряжений и положений вихрей, но не от положения начала на оси симметрии. Эту окружность можно назвать „круговой“ осью всей системы вихревых колец.

Так как  $\kappa$  постоянна для каждого вихря, то из постоянства импульса согласно (3) и (4) следует, что круговая ось обладает постоянным радиусом. Чтобы найти ее движение параллельно оси  $x$ , мы воспользуемся уравнением

$$\sum \kappa \tilde{\omega}_0^2 \frac{dx_0}{dt} = \sum \kappa \tilde{\omega}^2 \frac{dx}{dt} + 2 \sum \kappa \tilde{\omega} x \frac{d\tilde{\omega}}{dt} = \sum \kappa \tilde{\omega} (\tilde{\omega} u + 2xv), \quad (5)$$

которое следует из (4). С помощью формулы (2) мы можем теперь уравнение (5) привести к виду

$$\sum \kappa \tilde{\omega}_0^2 \frac{dx_0}{dt} = \frac{T}{2\pi \varrho} + 3 \sum \kappa (x - x_0) \tilde{\omega} v; \quad (6)$$

здесь исчезают дополнительные члены, так как  $\sum \kappa \tilde{\omega} v = 0$  вследствие постоянства среднего радиуса  $\tilde{\omega}_0$ .

**§ 163.** Рассмотрим, в частности, случай изолированного вихревого кольца, размеры поперечных сечений которого сравнительно с радиусом  $\tilde{\omega}_0$  очень малы. Было уже показано, что

$$\psi = -\frac{1}{\pi} \iint \left\{ F_1 \left( \frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1} \right) - E_1 \left( \frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1} \right) \right\} (r_1 + r_2) \omega' dx' d\tilde{\omega}'; \quad (1)$$

входящие здесь величины  $r_1, r_2$  определены формулами (6) § 161. Для точек  $(x, \tilde{\omega})$  в области вихря или вблизи него отношение  $r_1$  к  $r_2$  будет мало, и модуль  $\lambda$  эллиптического интеграла поэтому близок к единице. Мы имеем тогда приближенно <sup>1)</sup>

$$\left. \begin{aligned} F_1(\lambda) &= \frac{1}{2} \ln \frac{16}{\lambda'^2}, \\ E_1(\lambda) &= 1, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

<sup>1)</sup> См. Cayley, Elliptic Functions, § 72, 77; Maxwell, см. выше.

где  $\lambda'$  обозначает дополнительный модуль, т. е.

$$\lambda'^2 = 1 - \lambda^2 = \frac{4r_1 r_2}{(r_1 + r_2)^2}, \quad (3)$$

или приближенно

$$\lambda'^2 = \frac{4r_1}{r_2}.$$

Для точек, лежащих внутри самого вихря, значение  $\psi$ , таким образом, будет порядка  $\tilde{\omega}_0 \ln \frac{\tilde{\omega}_0}{\varepsilon}$ , где  $\varepsilon$  есть малая линейная величина порядка размера поперечного сечения. Компоненты скорости в таких точках зависят (см. § 94) от производных функции  $\psi$  и будут порядка  $\frac{x}{\varepsilon}$ .

Мы можем теперь оценить величину скорости поступательного движения  $\frac{dx_0}{dt}$  вихревого кольца. Согласно (1) § 162  $T$  есть величина порядка  $\varrho x^2 \tilde{\omega}_0 \ln \frac{\tilde{\omega}_0}{\varepsilon}$ ,  $v$  есть, как мы видели, порядка  $\frac{x}{\varepsilon}$ , в то время как  $x - x_0$  — величина порядка  $\varepsilon$ . Поэтому второй член в правой части формулы (6) предыдущего параграфа в рассматриваемом случае мал сравнительно с первым членом, и скорость поступательного движения кольца будет порядка  $\frac{x}{\tilde{\omega}_0} \ln \frac{\tilde{\omega}_0}{\varepsilon}$  и приблизительно постоянна.

Изолированное вихревое кольцо движется, таким образом без заметного изменения формы параллельно своей прямолинейной оси с приблизительно постоянной скоростью. Эта скорость мала по сравнению со скоростью жидкости в непосредственном соседстве с круговой осью, но она может быть больше или меньше чем  $\frac{1}{2} \frac{x}{\tilde{\omega}_0}$ , т. е. скорости жидкости в центре кольца, с которой она совпадает по направлению.

Для случая *круглого* поперечного сечения более определенные результаты могут быть получены следующим образом. Если мы пренебрежем изменениями  $\tilde{\omega}$  и  $\omega$  внутри поперечного сечения, то формулы (1) и (2) дадут

$$\psi = -\frac{\omega}{2\pi} \tilde{\omega}_0 \int \int \left( \ln \frac{8\tilde{\omega}_0}{r_1} - 2 \right) dx' d\tilde{\omega}',$$

или, если введем полярные координаты  $(s, \chi)$  в плоскости поперечного сечения, то

$$\psi = -\frac{\omega}{2\pi} \tilde{\omega}_0 \int_0^{2\pi} \int_0^a \left( \ln \frac{8\tilde{\omega}_0}{r_1} - 2 \right) s' ds' d\chi', \quad (4)$$

где  $a$  есть радиус поперечного сечения. Теперь имеем

$$\int_0^{2\pi} \ln r_1 d\chi' = \int_0^{2\pi} \ln \{ s^2 + s'^2 - 2ss' \cos(\chi - \chi') \}^{1/2} d\chi'.$$

и этот определенный интеграл, как известно, равен  $2\pi \ln s'$  или  $2\pi \ln s$ , смотря по тому,  $s' \geqslant s$ . Отсюда для точек внутри поперечного сечения будем иметь

$$\begin{aligned} \psi &= -\omega \tilde{\omega}_0 \int_0^s \left( \ln \frac{8\tilde{\omega}_0}{s} - 2 \right) s' ds' - \omega \tilde{\omega}_0 \int_s^a \left( \ln \frac{8\tilde{\omega}_0}{s'} - 2 \right) s' ds' = \\ &= -\frac{1}{2} \omega \tilde{\omega}_0 a^2 \left\{ \ln \frac{8\tilde{\omega}_0}{a} - \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \frac{s^2}{a^2} \right\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Единственный переменный член здесь есть  $\frac{1}{4} \omega \tilde{\omega}_0 s^2$ ; это показывает, что при *нашей степени приближения* линии тока внутри поперечного сечения образуют концентрические окружности, причем скорость на расстоянии  $s$  от центра равна  $\frac{1}{4} s \omega \tilde{\omega}_0$ .

Если мы подставим полученное выражение в формулу (1) § 162, то найдем

$$\frac{T}{2\pi Q} = -\frac{1}{2} \omega \iint_0^{2\pi} \psi s ds d\chi = \frac{\kappa^2 \tilde{\omega}_0}{4\pi} \left\{ \ln \frac{8\tilde{\omega}_0}{a} - \frac{7}{4} \right\}. \quad (6)$$

Последний член в формуле (6) § 162 равен

$$\frac{3}{2} \tilde{\omega}_0 \omega \sum \kappa (x - x_0)^2;$$

при принятом обозначении это равно  $\frac{3}{8} \kappa^2 \frac{\tilde{\omega}_0}{\pi}$ , причем  $\kappa$  означает напряжение всего вихря. Таким образом формула для поступательной скорости вихря теперь напишется <sup>1)</sup>

$$\frac{dx_0}{di} = \frac{\kappa}{4\pi \tilde{\omega}_0} \left\{ \ln \frac{8\tilde{\omega}_0}{a} - \frac{1}{4} \right\}. \quad (7)$$

Вихревое кольцо влечет за собой в своем движении некоторое количество жидкости,двигающейся безвихревым образом; ср. § 155, п. 2. Согласно формуле (7) поступательная скорость вихря будет равна скорости жидкости в центре, если имеем приблизительно  $\frac{\omega_0}{a} = 86$ . Сопровождающая масса будет кольцеобразной или нет, смотря по тому, будет ли значение  $\frac{\tilde{\omega}_0}{a}$  больше или меньше критического значения.

Отношение скорости жидкости на окружности вихря к скорости в центре кольца равно  $\frac{2\omega \tilde{\omega}_0}{\kappa}$  или  $\frac{\tilde{\omega}_0}{\pi a}$ . Для  $a = \frac{1}{100} \tilde{\omega}_0$  это число приблизительно равно 32.

Условия, при которых вихревое кольцо *конечного* поперечного сечения с равномерным завихрением может перемещаться не изменяясь, были исследованы Лихтенштейном <sup>2)</sup>. Форма поперечного сечения, если оно мало, ока-

<sup>1)</sup> Этот результат был дан без доказательства Томсоном в прибавлении к переводу работы Гельмгольца, Phil. Mag. (4), XXXIII, 511 (1867) [‘apers, IV, 67]. Он был подтвержден Hicks, Phil. Trans. A, CXXVI, 756 (1885); см. также Gray, Notes on Hydrodynamics Phil. Mag. (6), XXVIII, 13 (1914).

<sup>2)</sup> Math. Zeitsch., XXIII, 29, 310 (1925); см. также его Grundlagen der Hydrodynamik, Berlin (1929).

зывается приближенно эллиптической с меньшей осью, совпадающей с направлением поступательного движения. Он также исследовал аналогичный вопрос и по отношению к вихревой паре (§ 155).

**§ 164.** Если мы имеем произвольное число круговых вихревых колец — безразлично соосных или нет, — то движение каждого из них может быть представлено как состоящее из двух частей, из которых одна зависит от рассматриваемого кольца, в то время как другая зависит от влияния других колец.

Только что приведенные соображения показывают, что вторая часть сравнительно с первой незначительна, за исключением случая, когда два или несколько колец подходят друг к другу очень близко. Всякое кольцо, таким образом, будет двигаться без заметного изменения вида и размеров с приблизительно постоянной скоростью в направлении своей прямолинейной оси, до тех пор пока оно не подойдет на близкое расстояние ко второму кольцу.

Общее представление относительно последствий встречи двух вихревых колец можно в частных случаях получить из результатов, данных в (3) § 149. Так, например, предположим, что мы имеем два круговых кольца с одной и той же осью. Если направление вращения в обоих случаях одно и то же, оба кольца будут перемещаться, как целое, в том же самом направлении.

Действие их взаимного влияния состоит в том, что радиус вихря, идущего впереди, увеличивается, а следующего за ним уменьшается. Как только радиус впереди идущего кольца сделается больше радиуса следующего за ним, то движение впереди идущего кольца замедляется, а другого (идущего за ним) ускоряется. При благоприятных соотношениях между формой, а также и интенсивностью обоих колец может, таким образом, случиться, что второе кольцо нагонит первое и пройдет через него. Тогда оба кольца изменят свои роли; кольцо, которое сделалось теперь вторым, с своей стороны нагонит другое и пройдет через него; кольца таким образом попеременно постоянно будут проходить одно через другое<sup>1)</sup>.

Если оба кольца имеют противоположные направления вращения, то они приближаются друг к другу, и их взаимное влияние состоит в том, что радиусы обоих возрастают. Если оба кольца имеют кроме того одинаковые напряжения и форму, то скорость приближения будет непрерывно уменьшаться. В этом случае движение во всех точках плоскости, которая параллельна обоим кольцам и делит пополам расстояние между ними, тангенциально к этой плоскости. Мы можем, если пожелаем, эту плоскость рассматривать как твердую границу для жидкости с одной из обеих ее сторон и получить тогда случай од-

<sup>1)</sup> Ср. Hicks, On the Mutual Threading of Vortex-Rings. Proc. Roy. Soc. A., CII, 111 (1922). Соответствующий двухмерный случай был исследован и проиллюстрирован графически Gröbli, см. примечание на стр. 281; см. также Love, On the Motion of Paired Vortices with a Common Axis, Proc. Lond. Math. Soc., XXV, 185 (1894) и Hicks, см. выше.

ногого вихревого кольца, которое движется к неподвижной твердой стенке.

Только что сделанные замечания заимствованы из работы Гельмольца. Он в заключение к этому еще указал, что взаимное влияние вихревых колец легко можно изучать экспериментально в случае приблизительно полукруглых колец, которые появляются, когда концом ковша быстро проводят по свободной поверхности жидкости на протяжении короткого расстояния, причем места, в которых вихревые нити встречают поверхность, оказываются отмеченными небольшими углублениями (ср. § 27). Метод демонстративных опытов с помощью дымовых колец<sup>1)</sup> слишком известен, чтобы описывать его здесь подробно.

Прекрасный вариант опыта состоит в образовании колец в воде, при этом завихренную жидкость подкрашивают<sup>2)</sup>.

Движение вихревого кольца в жидкости, которая (внутри или снаружи) ограничена неподвижной сферической поверхностью для случая, когда прямолинейная ось кольца проходит через центр шара, было исследовано Леви<sup>3)</sup> с помощью метода зеркальных изображений. Следующее упрощенное доказательство принадлежит Лармору<sup>4)</sup>. Вихревое кольцо эквивалентно (§ 150) сферическому слою дублетов с равномерно распределенной плотностью, который концентричен твердой сфере. Зеркальное изображение этого слоя согласно § 96 есть другой концентрический однородный двойной слой, который, с своей стороны, эквивалентен вихревому кольцу, соосному с первым. Из только что названных параграфов легко получается теперь, что напряжения ( $\kappa, \kappa'$ ) и радиусы ( $\omega, \omega'$ ) вихревого кольца и его изображения связаны соотношением

$$\kappa \tilde{\omega}^{1/2} + \kappa' \tilde{\omega}'^{1/2} = 0. \quad (1)$$

Рассуждение, очевидно, годится также для случая замкнутого вихря произвольной формы, если только он лежит на сфере, концентрической к границе.

Интерес, который вызвала устойчивая конфигурация кармановской системы вихрей малого сечения (§ 156), побудил к исследованию аналогичных конфигураций в трехмерном пространстве.

Рассматривая сначала ряд равных вихревых колец бесконечно малого поперечного сечения, нанизанных на равных интервалах на общую ось, Леви и Форсдейк<sup>5)</sup> нашли, что конфигурация эта будет неустойчивой для того типа возмущений, когда радиусы и интервалы изменяются одновременно, причем кольца остаются строго плоскими и круговыми. С другой стороны, для случая, когда отношение интервала между двумя последовательными кольцами к общему радиусу превышает 1,20, становятся возможными периодические

<sup>1)</sup> Reusch, Über Ringbildung der Flüssigkeiten, Pgog. Ann., CX (1860); Tait, Recent Advances in Physical Science, London, 1876, гл. XII.

<sup>2)</sup> Reynolds, On the Resistance encountered by Vortex Rings etc., Brit. Ass. Rep., 1876; Nature, XIV, 477.

<sup>3)</sup> Lewis, On the Images of Vortices in a Spherical Vessel, Quart. Journ. Math., XVI, 338 (1879).

<sup>4)</sup> Larmor, Electro-Magnetic and other Images in Spheres and Planes Quart. Journ. Math., XXIII, 94 (1889).

<sup>5)</sup> Levi and Forsdyke, Proc. Roy. Soc. A., CXIV, 594; A., CXVI 352 (1927).

отклонения от круговой формы, т. е. тот тип возмущений, который был исследован Томсоном и Дисоном для случая изолированного кольца<sup>1)</sup>.

Далее, они изучали случай винтового вихря<sup>2)</sup>. Будучи невозмущен, этот вихрь имеет определенную угловую скорость относительно своей оси и некоторую поступательную скорость. Они нашли, что устойчивость будет тогда и только тогда, когда шаг винта превышает 0,3.

### Условия стационарного движения

**§ 165.** В случае стационарного движения, т. е. когда

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = 0,$$

уравнения (2) § 6 могут быть представлены в следующей форме:

$$\left. \begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial x} - (v \zeta - w \eta) &= - \frac{\partial \Omega}{\partial x} - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \dots \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Если положить, как в § 146,

$$\chi' = \int \frac{dp}{\varrho} + \frac{1}{2} q^2 + \Omega, \quad (2)$$

то будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \chi'}{\partial x} &= v \zeta - w \eta, \\ \frac{\partial \chi'}{\partial y} &= w \xi - u \zeta, \\ \frac{\partial \chi'}{\partial z} &= u \eta - v \xi. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} u \frac{\partial \chi'}{\partial x} + v \frac{\partial \chi'}{\partial y} + w \frac{\partial \chi'}{\partial z} &= 0, \\ \xi \frac{\partial \chi'}{\partial x} + \eta \frac{\partial \chi'}{\partial y} + \zeta \frac{\partial \chi'}{\partial z} &= 0, \end{aligned}$$

так что каждая из поверхностей  $\chi' = \text{const.}$  содержит как линии тока, так и вихревые линии. Если, далее, обозначить через  $dn$  элемент нормали в произвольной точке такой поверхности, то будем иметь

$$\frac{\partial \chi'}{\partial n} = q \omega \sin \beta, \quad (4)$$

где  $q$  есть скорость течения,  $\omega$  — модуль вихря и  $\beta$  — угол между линией тока и вихревой линией в этой точке.

Таким образом условие того, что данное состояние движения жидкости могло бы быть возможным состоянием стационарного движения, состоит в следующем: должно быть возможным провести в жид-

<sup>1)</sup> См. ссылку на стр. 311.

<sup>2)</sup> Proc. Roy. Soc. A., CXX, 670 (1928).

кости бесконечную систему поверхностей, из которых каждая покрыта сеткой линий тока и вихревых линий, и произведение  $q\omega \sin \beta \delta p$  на каждой из таких поверхностей должно быть постоянно, при этом  $\delta p$  означает длину отрезка нормали между соседними поверхностями системы<sup>1)</sup>.

Эти условия получаются также из соображения, что при стационарном движении линии тока совпадают с действительными траекториями частиц, затем, что произведение угловой скорости на поперечное сечение для всех точек вихря имеет одинаковое значение и что это произведение для одного и того же вихря не зависит от времени.

Положение, что функция  $\chi'$ , определенная с помощью выражения (2), на всякой поверхности только что рассмотренного вида постоянна, представляет обобщение высказанной в § 21 теоремы о том, что  $\chi'$  постоянно вдоль линии тока.

Вышеизложенные условия во всех случаях безвихревого движения выполняются тождественно, если только граничные условия совместны со стационарным движением.

При движении жидкости в двух измерениях ( $xy$ ) произведение  $q \delta p$  постоянно вдоль линии тока, и вышеуказанные условия приводятся тогда к одному условию, что модуль вихря  $\zeta$  должен быть постоянным вдоль каждой линии тока или, согласно (5) § 59, что должно иметь место уравнение

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = f(\psi), \quad (5)$$

где  $f(\psi)$  есть произвольная функция от  $\psi$ <sup>2)</sup>.

Это условие всякий раз выполняется, например, когда имеет место движение по концентрическим окружностям вокруг начала. Другое, очевидное решение уравнения (5) есть

$$\psi = \frac{1}{2} (Ax^2 + 2Bxy + Cy^2); \quad (6)$$

в этом случае линиями тока будут подобные и соосные конические сечения. Угловая скорость во всякой точке равна  $1/2(A+C)$  и, следовательно, будет постоянна.

Если положить, далее,

$$f(\psi) = -k^2\psi,$$

где  $k$  есть постоянная, и если ввести полярные координаты  $r, \theta$ , то мы получим

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + k^2\psi = 0; \quad (7)$$

этому уравнению удовлетворяют функции (§ 101)

$$\left. \begin{aligned} \psi &= C J_s(kr) \cos s\theta, \\ \psi &= C J_s(kr) \sin s\theta. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

<sup>1)</sup> См. L a m b, On the Conditions for Steady Motion of Fluid, Proc. Lond. Math. Soc. (1), IX, 91 (1878).

<sup>2)</sup> Ср. L a g r a n g e, Nouv. Mém. de l'Acad. de Berlin, 1781, [Oeuvres IV, 720]; далее S t o k e s, On the Steady Motion of Incompressible Fluids, Camb. Trans., VII (1842) [Papers, I, 15].

Эти функции представляют различные решения, которые совместимы с твердой круглой границей радиуса  $a$ , причем допустимые значения  $k$  определяются из уравнения

$$J_s(ka) = 0. \quad (9)$$

Предположим, например, что в безграничной массе жидкости функция тока внутри круга  $r=a$  дана с помощью

$$\psi = C J_1(kr) \sin \theta, \quad (10)$$

а вне этого круга с помощью

$$\psi = U \left( r - \frac{a^2}{r} \right) \sin \theta. \quad (11)$$

Эти оба значения  $\psi$  совпадают при  $r=a$ , если  $J_1(ka)=0$ . Кроме того, тангенциальная компонента скорости непрерывна на этой окружности, если только оба значения  $\frac{\partial \psi}{\partial r}$  между собой равны, т. е. когда

$$C = \frac{2U}{k J'_1(ka)} = - \frac{2U}{k J_0(ka)}. \quad (12)$$

Если мы теперь сообщим всей системе скорость  $U$  параллельно  $Ox$ , то получим как бы цилиндрический вихрь, который движется со скоростью  $U$  в жидкости, покоящейся в бесконечности. Наименьшее из возможных значений  $k$  дано равенством  $\frac{ka}{\pi} = 1,2197$ ; относительные линии тока *внутри* вихря показаны на второй фиг. 45, при условии, что пунктирная окружность принята в качестве границы ( $r=a$ ). Согласно (1) § 157 легко показать, что „импульс“ вихря равен  $2\pi qa^2U$ .

В случае симметричного движения вокруг оси (например, оси  $x$ ) выражение  $q \cdot 2\tilde{\omega} \delta p$  постоянно вдоль линии тока, причем  $\tilde{\omega}$ , как в § 94, обозначает расстояние произвольной точки от оси симметрии. Условие стационарного движения состоит тогда в том, что отношение  $\frac{\omega}{\tilde{\omega}}$  должно быть постоянно вдоль каждой линии тока. Таким образом, если  $\psi$  есть функция тока, то согласно (2) § 161 должно иметь место следующее соотношение:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tilde{\omega}^2} - \frac{1}{\tilde{\omega}} \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{\omega}} = \tilde{\omega}^2 f(\psi), \quad (13)$$

где  $f(\psi)$  обозначает произвольную функцию от  $\psi$ <sup>1)</sup>.

Интересный пример представляет сферический вихрь Хилла<sup>2)</sup>. Если мы предположим, что для всех точек внутри шара  $r=a$  имеет место соотношение

$$\psi = \frac{1}{2} A \tilde{\omega}^2 (a^2 - r^2), \quad (14)$$

<sup>1)</sup> Этот результат принадлежит Стоксу, см. выше.

<sup>2)</sup> Hill, On a Spherical Vortex, Phil. Trans. A, CLXXXV, 1894.

где  $r^2 = x^2 + \tilde{\omega}^2$ , то формула (2) § 161 дает

$$\omega = -\frac{5}{2} A \tilde{\omega},$$

так что условие для стационарного движения будет выполнено. Далее, принимая во внимание § 96 и 97, ясно, что безвихревое течение вокруг неподвижной сферической поверхности  $r=a$  с общей скоростью  $-U$  параллельно оси  $x$  выражается формулой

$$\psi = \frac{1}{2} U \tilde{\omega}^2 \left( 1 - \frac{a^3}{r^3} \right). \quad (15)$$

Оба значения  $\psi$  совпадают для  $r=a$ ; благодаря этому нормальная компонента скорости на обеих сторонах равна нулю. Для того чтобы тангенциальная скорость была непрерывна, значения  $\frac{\partial \psi}{\partial r}$  должны также совпадать.

Если принять во внимание, что

$$\tilde{\omega} = r \sin \theta,$$

то из условия непрерывности  $\frac{\partial \psi}{\partial r}$  будем иметь

$$A = -\frac{3}{2} \frac{U}{a^2}$$

и, следовательно,

$$\omega = \frac{15}{2} U \frac{\tilde{\omega}}{a^2}. \quad (16)$$

Сумма напряжений вихревых нитей, образующих сферический вихрь, равна  $5Ua$ .

Фиг. 41 показывает линии тока как внутри, так и вне вихря; они, как обычно, нарисованы для равноотстоящих значений  $\psi$ .

Если мы всей системе сообщим скорость  $U$  параллельно оси  $x$ , то получим случай сферического вихря, который движется поступательно с постоянной скоростью  $U$  в жидкости, покоящейся в бесконечности.

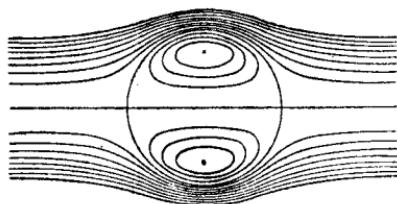
С помощью формул § 162 мы легко найдем, что квадрат "среднего радиуса" вихря равен  $\frac{2}{5} a^2$ , "импульс" равен  $2\pi a^3 U$ , а энергия равна  $\frac{10}{7} \pi a^3 U^2$ .

Как уже было выяснено в § 146, совершенно не нужно вычислять формулы для давления, чтобы убедиться в

его непрерывности на поверхности вихря. Непрерывность давления уже обеспечена непрерывностью скорости и постоянством циркуляции по всякой замкнутой движущейся кривой.

**§ 166.** Как было уже указано, теория вихревого движения была создана Гельмгольцем в 1858 г. Она привлекла еще больший интерес, когда в 1867 г. Кельвин предложил вихревую теорию атомов <sup>1)</sup>. В качестве физической теории вихревая теория атомов уже давно

<sup>1)</sup> См. сноску на стр. 278.



оставлена, но она послужила поводом к ряду интересных исследований, на которые вкратце необходимо указать. Мы упомянем исследования, относящиеся к устойчивости и периодам колебаний прямолинейных<sup>1)</sup> и кольцеобразных<sup>2)</sup> вихрей, а также аналогичные исследования относительно полых вихрей (у которых вращающееся ядро заменено пустотой)<sup>3)</sup>, и, наконец, вычисления формы пограничной поверхности для полого вихря, которая совместима со стационарным движением<sup>4)</sup>. Сводка некоторых важнейших результатов дана Ливом<sup>5)</sup>.

**§ 166a.** В данной главе все динамические теоремы имеют своей предпосылкой постоянство циркуляции по движущемуся контуру. Предполагалось (§ 146), что внешние силы суть консервативные, а также то, что жидкость либо однородна и несжимаема, либо подчинена определенному соотношению между давлением и плотностью.

Но, конечно, имеются многие естественные условия, в частности в метеорологии, когда эти предположения явно не выполняются. Если мы, следуя вычислениям § 33, не примем во внимание указанные допущения, то найдем, что скорость изменения циркуляции по движущемуся контуру будет

$$\frac{D}{Dt} \int (u dx + v dy + w dz) = - \int s \left( \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right), \quad (1)$$

где  $s = \frac{1}{\rho}$  есть величина, обратная плотности жидкости, т. е. удельный объем. Криволинейный интеграл в правой части можно преобразовать по теореме Стокса в поверхностный интеграл — по какой-либо поверхности, опирающейся на контур; тогда получим

$$\frac{D}{Dt} \int (u dx + v dy + w dz) = \int (lP + mQ + nR) dS, \quad (2)$$

где

$$P = \frac{\partial (p, s)}{\partial (y, z)}, \quad Q = \frac{\partial (p, s)}{\partial (z, x)}, \quad R = \frac{\partial (p, s)}{\partial (x, y)}. \quad (3)$$

Теперь рассмотрим вектор, компоненты которого суть  $P, Q, R$ . Этот вектор является соленоидальным в силу соотношения

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0, \quad (4)$$

<sup>1)</sup> W. Thomson, см. сноска на стр. 290.

<sup>2)</sup> J. J. Thomson, см. сноска на стр. 271, Dyson, Phil. Trans., A, CLXXXIV, 1041 (1893).

<sup>3)</sup> W. Thomson, см. выше; Hicks, On the Steady Motion and the Small Vibrations of a Hollow Vortex, Phil. Trans., 1884; Pocklington, The Complete System of the Periods of a Hollow Vortex-Ring, Phil. Trans. A, CLXXXVI, 603 (1895); Carslaw, The Fluted Vibrations of a circular Vortex-Ring with a Hollow Core, Proc. Lond. Math. Soc. XXVIII, 97 (1896).

<sup>4)</sup> Hicks, см. выше; Pocklington, Hollow Straight Vortices, Camb. Proc., VIII, 178 (1894).

<sup>5)</sup> Love, см. сноска на стр. 240.

и его направление определяется пересечением поверхностей  $p = \text{const.}$ ,  $s = \text{const.}$ . Если мы теперь представим ряд поверхностей равного давления, проведенных для равных бесконечно малых интервалов  $\delta p$ , и аналогично ряд поверхностей равного удельного объема для бесконечно малых интервалов  $\delta s$ , то эти поверхности разделяют все поле на систему трубок, поперечное сечение которых суть бесконечно малые параллелограммы. Если  $\delta\Sigma$  есть площадь одного из этих параллелограммов, то легко показать, что

$$\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2} \cdot \delta\Sigma = \delta p \delta s. \quad (5)$$

Отсюда следует, что произведение вектора ( $P, Q, R$ ) на поперечное сечение не только постоянно вдоль какой-либо трубы, но и является одинаковым для всех трубок.

Уравнение (2) тогда показывает, что скорость изменения циркуляции по движущемуся контуру пропорциональна числу указанных трубок, им охватываемых<sup>1)</sup>.

### Преобразование Клебша

**§ 167.** Представляет некоторый интерес вопрос, о котором, однако, мы здесь можем только коротко сообщить: это вопрос о преобразовании Клебша<sup>2)</sup> гидродинамических уравнений.

Легко видеть, что компоненты скорости в произвольный момент могут быть выражены в форме

$$u = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \lambda \frac{\partial\mu}{\partial x}, \quad v = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \lambda \frac{\partial\mu}{\partial y}, \quad w = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \lambda \frac{\partial\mu}{\partial z}, \quad (1)$$

где  $\varphi, \lambda, \mu$  суть функции от  $x, y, z$  при условии, что компоненты вихря могут быть представлены в форме

$$\xi = \frac{\partial(\lambda, \mu)}{\partial(y, z)}, \quad \eta = \frac{\partial(\lambda, \mu)}{\partial(z, x)}, \quad \zeta = \frac{\partial(\lambda, \mu)}{\partial(x, y)}. \quad (2)$$

Если мы предположим теперь, что дифференциальные уравнения вихревых линий

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} = \frac{dz}{\zeta} \quad (3)$$

<sup>1)</sup> V. Bjetk p e s s, Vid.-Selsk. Skrifter, Kristiania, 1918. Независимое доказательство приписывается Зильберштейну (1896). Другая теорема с менее простым содержанием, указанная Бьеркнесом, относится к циркуляции количества движения

$$\int e(u dx + v dy + w dz).$$

Некоторые применения этих теорем к метеорологическим и другим явлениям пояснены в Stockholm, Ak. Handl, XXXI (1898).

<sup>2)</sup> C l e b s c h, Über eine allgemeine Transformation der hydrodynamischen Gleichungen, Crelle, LIV (1857) и LVI (1859); см. также H i l l, Quart. Journ. Math., XVII (1881) и Camb. Trans., XIV (1883).

произведены в форме

$$\alpha = \text{const.}, \quad \beta = \text{const.}, \quad (4)$$

где  $\alpha, \beta$  означают функции от  $x, y, z$ , то мы должны иметь

$$\xi = P \frac{\partial(\alpha, \beta)}{\partial(y, z)}, \quad \eta = P \frac{\partial(\alpha, \beta)}{\partial(z, x)}, \quad \zeta = P \frac{\partial(\alpha, \beta)}{\partial(x, y)}, \quad (5)$$

где  $P$  есть определенная функция от  $x, y, z$ <sup>1)</sup>. Подставляя выражения (5) в тождество

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0,$$

получим

$$\frac{\partial(P, \alpha, \beta)}{\partial(x, y, z)} = 0, \quad (6)$$

которое показывает, что  $P$  имеет вид  $f(\alpha, \beta)$ . Если  $\lambda, \mu$  будут обозначать две произвольные функции от  $\alpha, \beta$ , то будем иметь

$$\frac{\partial(\lambda, \mu)}{\partial(y, z)} = \frac{\partial(\lambda, \mu)}{\partial(\alpha, \beta)} \frac{\partial(\alpha, \beta)}{\partial(y, z)} \quad \text{и т. д.};$$

уравнения (5) будут сводиться тогда к виду (2), если только  $\lambda, \mu$  выбраны таким образом, что удовлетворяется уравнение

$$\frac{\partial(\lambda, \mu)}{\partial(\alpha, \beta)} = f(\alpha, \beta). \quad (7)$$

Этот выбор может быть, очевидно, произведен бесконечным числом способов.

Из формулы (2) тотчас же следует, что линии пересечения поверхностей

$$\lambda = \text{const.}, \quad \mu = \text{const.}$$

представляют собой вихревые линии. Это означает, что можно предположить относительно входящих в (1) функций  $\lambda, \mu$ , что они меняются непрерывно в зависимости от  $t$  и именно так, что соответствующие поверхности движутся вместе с жидкостью<sup>2)</sup>. Для этого факта были даны различные аналитические доказательства; простейшее, пожалуй, доказательство основывается на уравнениях (2) § 15; эти уравнения дают (как в § 17)

$$u dx + v dy + w dz = u_0 da + v_0 db + w_0 dc - dx. \quad (8)$$

Было доказано, что мы сначала можем положить

$$u_0 da + v_0 db + w_0 dc = -d\varphi_0 + \lambda d\mu. \quad (9)$$

Отсюда следует, если мы примем во внимание изменение положения в момент  $t$ , что

$$u dx + v dy + w dz = -d\varphi + \lambda d\mu, \quad (10)$$

где  $\varphi = \varphi_0 + \chi$ , а  $\lambda, \mu$  имеют те же значения, как в (9), но только они выражены через  $x, y, z, t$ . Так как при лагранжевом методе независимые пространственные переменные связаны с индивидуальными частицами, то теорема этим самым доказана.

<sup>1)</sup> Ср. Forsyth, Differential Equations, § 174.

<sup>2)</sup> Не следует упускать из виду, что вследствие неполной определенности  $\lambda, \mu$  эти функции могут непрерывно меняться с  $t$ , не будучи связаны вместе с тем все время с одними и теми же частицами жидкости.

На основании этого соображения уравнения движения могут быть проинтегрированы тогда, когда внешние силы имеют потенциал и  $\rho$  есть функция только от  $\varrho$ . Мы имеем

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} - 2v\xi + 2w\eta &= \\ &= \frac{\partial u}{\partial t} + \left( u \frac{\partial \lambda}{\partial x} + v \frac{\partial \lambda}{\partial y} + w \frac{\partial \lambda}{\partial z} \right) \frac{\partial \mu}{\partial x} - \left( u \frac{\partial \mu}{\partial x} + v \frac{\partial \mu}{\partial y} + w \frac{\partial \mu}{\partial z} \right) \frac{\partial \lambda}{\partial x} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \lambda \frac{\partial \mu}{\partial t} \right) + \frac{D\lambda}{Dt} \frac{\partial \mu}{\partial x} - \frac{D\mu}{Dt} \frac{\partial \lambda}{\partial x}. \end{aligned} \quad (11)$$

Отсюда следует, при сделанном предположении, что  $\frac{D\lambda}{Dt} = 0$ ,  $\frac{D\mu}{Dt} = 0$ , и согласно (5), (6) § 146 получим

$$\int \frac{d\rho}{\rho} + \frac{1}{2} q^2 + \Omega = \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \lambda. \quad (12)$$

Произвольная функция от  $t$  предполагается включенной в  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ .

Если на  $\lambda$  и  $\mu$  не наложены вышеуказанные условия, то, полагая

$$H = \int \frac{dp}{\rho} + \frac{1}{2} q^2 + \Omega - \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \lambda \frac{\partial \mu}{\partial t}, \quad (13)$$

получаем

$$\left. \begin{array}{l} \frac{D\lambda}{Dt} \frac{\partial \mu}{\partial x} - \frac{D\mu}{Dt} \frac{\partial \lambda}{\partial x} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \\ \frac{D\lambda}{Dt} \frac{\partial \mu}{\partial y} - \frac{D\mu}{Dt} \frac{\partial \lambda}{\partial y} = -\frac{\partial H}{\partial y}, \\ \frac{D\lambda}{Dt} \frac{\partial \mu}{\partial z} - \frac{D\mu}{Dt} \frac{\partial \lambda}{\partial z} = -\frac{\partial H}{\partial z}. \end{array} \right\} \quad (14)$$

Отсюда следует

$$\frac{\partial (H, \lambda, \mu)}{\partial (x, y, z)} = 0, \quad (15)$$

а это показывает, что  $H$  есть выражение вида  $f(\lambda, \mu, t)$  и

$$\frac{D\lambda}{Dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mu}, \quad \frac{D\mu}{Dt} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} \text{<sup>1)</sup>.} \quad (16)$$

## ГЛАВА ВОСЬМАЯ

### ПРИЛИВНЫЕ ВОЛНЫ

**§ 168.** Одно из наиболее интересных и плодотворных применений гидродинамической теории представляют малые колебания, которые совершают жидкость со свободной поверхностью под действием тяжести. В некоторых случаях, которые с теоретической точки зрения представляют до некоторой степени частные случаи, но практически особенно важны, эти колебания могут в комбинации образовать прогрессивные волны, которые (в первом приближении), не меняя своего вида, движутся поступательно на поверхности.

<sup>1)</sup> Автору было сообщено, что эти уравнения были даны в диссертации F. Stuart (Dublin, 1900).

Выражение „приливные волны“ применялось в различном смысле, но наиболее естественно ограничить его применение теми колебаниями, зависящими от тяжести, которые обладают характерными чертами морских приливов, происходящих под влиянием солнца и луны. Поэтому указанное выражение мы и выбрали в качестве заглавия настоящей главы, где будут рассматриваться волны, при которых движение жидкости происходит в основном горизонтально и, следовательно (как мы это увидим), для всех частиц, лежащих на одной и той же вертикали, практически будет одинаковым. Это последнее обстоятельство существенно упрощает теорию.

Необходимо напомнить сначала некоторые теоремы общей теории малых колебаний, которые в последующих исследованиях постоянно будут находить свое применение<sup>1)</sup>. Теория относится главным образом к системе с конечным числом степеней свободы, но результаты сохраняют свое значение (если их соответственно истолковать) также и при отсутствии этого ограничения<sup>2)</sup>.

Пусть  $q_1, q_2, \dots, q_n$  суть обобщенные координаты, определяющие положение динамической системы, и пусть они выбраны таким образом, что для положения равновесия они обращаются в нуль. Кинетическая энергия есть однородная квадратичная функция обобщенных скоростей  $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$ :

$$2T = a_{11}\dot{q}_1^2 + a_{22}\dot{q}_2^2 + \dots + 2a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + \dots, \quad (1)$$

где коэффициенты в общем случае суть функции координат  $q_1, q_2, \dots, q_n$ , а в случае *малых* движений могут рассматриваться как постоянные, имеющие как раз те значения, которые соответствуют  $q_1, q_2, \dots, q_n = 0$ . Далее, если система, как мы и будем считать, „консервативна“, то потенциальная энергия  $V$  малого перемещения есть однородная квадратичная функция компонент перемещения  $q_1, q_2, \dots, q_n$

$$2V = c_{11}q_1^2 + c_{22}q_2^2 + \dots + 2c_{12}q_1q_2 + \dots, \quad (2)$$

причем коэффициенты в том же смысле, как и выше величины  $a_{ik}$ , могут рассматриваться как постоянные.

При помощи действительного<sup>3)</sup> линейного преобразования координат  $q_1, q_2, \dots, q_n$  можно представить  $T$  и  $V$  одновременно как суммы квадратов; новые координаты, введенные таким образом, назы-

<sup>1)</sup> Более полное изложение теории можно найти у Thomson a. Tait, § 337, ..., Релей, Теория звука, т. I, гл. IV; Routh, Elementary Rigid Dynamics, 6-е изд., London, 1897 (по-немецки — Leipzig, 1898), гл. IX; Уиттекер, Аналитическая динамика, гл. VII, ОНТИ, 1937 г.; Г. Ламб, Теоретическая механика, том третий, Москва, 1936 г.

<sup>2)</sup> Путь, по которому возможен точный переход к случаю бесконечно большого числа степеней свободы, указан Hilbert, Gött. Nachr., 1904.

<sup>3)</sup> Алгебраическое доказательство этого основывается на предположении, что по крайней мере одна из функций  $T, V$  существенно положительна. В настоящем случае этому условию удовлетворяет, конечно,  $T$ .

ваются нормальными координатами системы. С помощью этих координат будем иметь

$$2T = a_1 \dot{q}_1^2 + a_2 \dot{q}_2^2 + \dots + a_n \dot{q}_n^2, \quad (3)$$

$$2V = c_1 q_1^2 + c_2 q_2^2 + \dots + c_n q_n^2. \quad (4)$$

Коэффициенты  $a_1, a_2, \dots, a_n$  называются главными коэффициентами инерции; они обязательно положительны. Коэффициенты  $c_1, c_2, \dots, c_n$  могут быть названы главными коэффициентами устойчивости; они все будут положительными, если только невозмущенная конфигурация устойчива.

Если на систему действуют заданные внешние силы, то работа их при произвольном малом перемещении  $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_n$  может быть выражена в таком виде:

$$Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_n \delta q_n. \quad (5)$$

Коэффициенты  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  называются тогда нормальными компонентами возмущающей силы.

Уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{dT}{\dot{q}_r} - \frac{\partial T}{\partial q_r} = - \frac{\partial V}{\partial q_r} + Q_r \quad [r = 1, 2, \dots, n] \quad (6)$$

для случая бесконечно малых движений принимают вид

$$a_{1r} \ddot{q}_1 + a_{2r} \ddot{q}_2 + \dots + c_{1r} q_1 + c_{2r} q_2 + \dots = Q_r \quad (7)$$

или, после введения нормальных координат,

$$a_r \ddot{q}_r + c_r q_r = Q_r. \quad (8)$$

Отсюда видно, что нормальные координаты характеризуются динамически следующими свойствами:

1. Импульс, соответствующий какой-нибудь нормальной координате, вызывает начальное движение *только* относительно той же самой координаты.

2. Возмущающая непрерывно действующая сила, соответствующая некоторой нормальной координате, вызывает статическое перемещение *только* относительно этой же координаты.

Чтобы получить *свободные* колебания системы, полагаем  $Q_r = 0$ . Решая уравнение (8), находим

$$q_r = A_r \cos(\sigma_r t + \varepsilon_r), \quad (9)$$

где

$$\sigma_r = \left( \frac{c_r}{a_r} \right)^{1/2} \quad (10)$$

и  $A_r$ ,  $\varepsilon_r$  суть произвольные постоянные<sup>1)</sup>). Таким образом возможен тип свободных колебаний, при котором изменяется только одна какая-то нормальная координата  $q_r$ , и движение каждой частицы системы, в силу того, что оно линейно зависит от  $q_r$ , будет представлять простое гармоническое колебание с периодом  $\frac{2\pi}{\sigma_r}$ ; более того, частицы, двигаясь с одинаковой фазой, одновременно проходят через положение равновесия. Различные типы движения, обладающие указанными признаками, называются нормальными колебаниями системы; их число равно числу степеней свободы, и любое свободное колебание системы может быть получено из них при помощи сложения при соответствующем выборе амплитуд ( $A_r$ ) и фаз ( $\varepsilon_r$ ). Из выражения (10) можно видеть, что при всяком нормальном колебании средние значения (относительно времени) кинетической и потенциальной энергии равны друг другу.

В некоторых случаях, именно, когда два или несколько свободных периодов  $\frac{2\pi}{\sigma}$  системы равны между собой, нормальные координаты остаются до известной степени неопределенными, т. е. они могут быть выбраны бесконечно большим числом способов. Сложение соответствующих колебаний с произвольными амплитудами и фазами дает малое колебание, при котором движение каждой частицы есть результатирующее простых гармонических колебаний различного направления и есть, следовательно, вообще эллиптическое колебание с тем же периодом. Примером этого является сферический маятник; важный пример из нашей рассматриваемой здесь области представляют прогрессивные волны в глубокой воде (IX гл.).

Если один из коэффициентов устойчивости ( $c_r$ ) будет отрицательным, то значение  $\sigma_r$  будет чисто мнимым. Тригонометрическую функцию в выражении (9) можно заменить тогда через действительные показательные функции, и произвольное перемещение будет вообще возрастать, а тогда предположения, на которых основывается приближенное уравнение (8), делаются несостоятельными. Невозмущенное положение следует в этом случае рассматривать как неустойчивое. Необходимое и достаточное условие для устойчивости (в этом смысле) состоит в том, что потенциальная энергия  $V$  в положении равновесия должна быть минимальна.

Чтобы найти действие периодических возмущающих сил, достаточно рассмотреть случай, когда  $Q_r$  есть простая тригонометрическая функция времени, например,

$$Q_r = C_r \cos(\sigma t + \varepsilon), \quad (11)$$

<sup>1)</sup> Отношение  $\frac{\sigma}{2\pi}$  дает частоту колебаний. Для самой величины  $\sigma$  рекомендуется ввести отдельное название; Кельвин и Дарвин в своих исследованиях о приливах употребляли для этого выражение „быстрота“ (Speed). Немцамильд я  $\sigma$  предложен термин „круговая частота“ (Kreisfrequenz).

где значение  $\sigma$  задано. Этот случай не только наиболее интересен сам по себе, но, как мы знаем из теории рядов Фурье, как бы  $Q_r$  ни зависело от времени, оно может быть выражено рядом, члены которого имеют вид (11). Частный интеграл уравнения (8) имеет тогда вид

$$q_r = \frac{C_r}{c_r - \sigma^2 a_r} \cos(\sigma t + \varepsilon). \quad (12)$$

Это представляет вынужденное колебание, вызываемое периодической силой  $Q_r$ . При таком колебании движение каждой частицы есть периодическое с заданным периодом  $\frac{2\pi}{\sigma}$ , и наибольшие значения перемещений совпадают по времени с максимумом и минимумом силы.

Постоянная сила, равная мгновенному значению действующей силы (11), вызывает перемещение

$$\bar{q}_r = \frac{C_r}{c_r} \cos(\sigma t + \varepsilon), \quad (13)$$

т. е. то самое, конечно, которое имело бы место, если бы коэффициент инерции  $a_r$  равнялся нулю. Поэтому выражение (12) может быть представлено в форме

$$q_r = \frac{\frac{1}{\sigma^2} \bar{q}_r}{1 - \frac{\sigma^2}{a_r}}, \quad (14)$$

где  $\sigma_r$  имеет значение, данное формулой (10). Это очень удобная формула; она позволяет выразить действие периодической силы, если мы знаем статическое действие силы того же самого типа. Необходимо заметить, что  $q_r$  и  $Q_r$  имеют одинаковые или противоположные фазы, смотря по тому  $\sigma \leq \sigma_r$ , т. е. будет ли период возмущающей силы больше или меньше периода свободного колебания. Простой пример этого представляет простой маятник, на который действует периодическая горизонтальная сила. Другие важные примеры будут даны в теории приливов<sup>1)</sup>.

Если  $\sigma$  очень велико по сравнению с  $\sigma_r$ , то из выражения (12) мы получаем

$$q_r = -\frac{C_r}{\sigma^2 a_r} \cos(\sigma t + \varepsilon); \quad (15)$$

перемещение имеет теперь постоянно противоположную фазу сравнительно с силой и зависит только от *инерции* системы.

Если период силы, действующей на систему, приблизительно равен периоду нормального колебания порядка  $r$ , то амплитуда вынужденного колебания согласно формуле (14) будет очень велика

<sup>1)</sup> Ср. T. Young, A Theorie of Tides, Nicholson's Journal, XXXV (1813) [Miscellaneous Works, London, 1854, II, 262].

сравнительно с  $\bar{q}_r$ . В случае полного равенства решение (12) не годится и должно быть заменено выражением

$$q_r = \frac{C_r t}{2\sigma a_r} \sin(\sigma t + \varepsilon). \quad (16)$$

Это выражение дает колебание с непрерывно возрастающей амплитудой и может поэтому служить только для представления начальных стадий возмущения.

Мы упомянем еще другое важное свойство нормальных колебаний. Пусть вследствие наложения связей без трения система вынуждена колебаться каким-то заранее заданным образом, так что ее положение во всякий момент может быть выражено при помощи одной переменной, которую мы обозначим через  $\theta$ ; в таком случае мы получаем

$$q_r = B_r \theta,$$

где величины  $B_r$  суть определенные постоянные. Отсюда получаем

$$2T = (B_1^2 a_1 + B_2^2 a_2 + \dots + B_n^2 a_n) \theta^2, \quad (17)$$

$$2V = (B_1^2 c_1 + B_2^2 c_2 + \dots + B_n^2 c_n) \theta^2. \quad (18)$$

Если  $\theta$  пропорционально  $\cos(\sigma t + \varepsilon)$ , то постоянство энергии ( $T + V$ ) требует, чтобы

$$\sigma^2 = \frac{B_1^2 c_1 + B_2^2 c_2 + \dots + B_n^2 c_n}{B_1^2 a_1 + B_2^2 a_2 + \dots + B_n^2 a_n}; \quad (19)$$

$\sigma^2$  есть, таким образом, промежуточное значение между наибольшим и наименьшим значением величин  $\frac{c_r}{a_r}$ ; другими словами, частота колебания с наложенными связями лежит между наибольшей и наименьшей частотами, соответствующими нормальным колебаниям системы. В частности, следует, что когда на систему накладывается связь, частота самого медленного свободного колебания *увеличивается*. Более того, если система со связью мало уклоняется в отношении нормальной координаты ( $r$ ), то  $\sigma^2$  отличается

от  $\frac{c_r}{a_r}$  на малую величину *второго порядка*. Это дает метод для приближенной оценки частоты в тех случаях, когда нормальные типы колебаний не могут быть точно определены<sup>1)</sup>. Примеры этого можно будет найти в §§ 191, 259. Далее можно показать, что в случае наложения одной связи, которая только сводит число степеней свободы с  $n$  на  $n - 1$ , периоды измененной системы заключаются между периодами первоначальной<sup>2)</sup>.

Еще Лагранж<sup>3)</sup> заметил следующее: если в уравнениях типа (7), где координаты не обязательно нормальные, положить  $Q_r = 0$  и принять

$$q_r = A_r \cos(\sigma t + \varepsilon), \quad (20)$$

<sup>1)</sup> Rayleigh, Some General Theorems relating to Vibrations, Proc. Lond. Math. Soc., IV, 357 (1874) [Papers, I, 170] и Theory of Sound, гл. IV. Метод был разработан Ritz, Journ. für Math., CXXXV, 1 (1908) и Ann. d. Physik, XXVIII (1909) [Gesammelte Werke, Paris, 1911, стр. 192, 265].

<sup>2)</sup> Routh, Elementary Rigid Dynamics, § 67; Rayleigh, Theory of Sound, 2-е изд., § 92a; Уиттекер, Аналитическая динамика, ОНТИ, 1937.

<sup>3)</sup> Лагранж, Аналитическая механика, т. I, ОНТИ, 1939. Mecanique Analytique (изд. Бертрана), I, 331 [Oeuvres, XI, 380].

то результирующие уравнения тождественны с теми, которые определяют стационарные значения, например, выражения

$$\sigma^2 = \frac{c_{11}A_1^2 + c_{22}A_2^2 + \dots + 2c_{12}A_1A_2 + \dots}{a_{11}A_1^2 + a_{22}A_2^2 + \dots + 2a_{12}A_1A_2 + \dots} = \frac{V(A, A)}{T(A, A)}. \quad (21)$$

Так как  $T(A, A)$  есть определенная положительная форма, то знаменатель не может обратиться в нуль, следовательно, это выражение должно иметь минимум. Более того, исходя из этого свойства, можно построить доказательство, что  $n$  значений  $\sigma^2$  все будут действительными<sup>1)</sup>. Они, очевидно, все будут положительными, когда  $V$  будет существенно положительной.

Теорема Рэлея, таким образом, родственна гамильтоновой формуле (3) § 135, что можно видеть, если принять

$$q_r = A_r \sin \sigma t \quad (22)$$

и положить  $t_0 = 0$ ,  $t_1 = \frac{2\pi}{\sigma}$ ; см. § 205.

Изменения, вводимые в теорию малых колебаний при учете сил трения, будут рассмотрены в главе XI.

### Длинные волны в каналах

**§ 169.** Переходя теперь к специальной задаче этой главы, начнем со случая волн, распространяющихся вдоль прямолинейного канала с горизонтальным руслом и параллельными вертикальными стенками.

Пусть ось  $x$  будет параллельна длине канала, а ось  $y$  направлена вертикально вверх; будем предполагать, что движение происходит в этих двух измерениях  $x$ ,  $y$ . Ординату свободной поверхности, соответствующую в момент  $t$  абсциссе  $x$ , обозначим через  $y_0 + \eta$ , где  $y_0$  означает ординату в невозмущенном состоянии.

Как уже сказано, при всех исследованиях этой главы мы будем предполагать, что можно пренебречь вертикальным ускорением частиц жидкости или, выражаясь точнее, что давление в произвольной точке  $(x, y)$  практически будет равно статическому давлению, обусловленному глубиной под свободной поверхностью; следовательно, будет выполняться уравнение

$$p - p_0 = g\rho(y_0 + \eta - y), \quad (1)$$

где  $p_0$  есть постоянное давление на свободной поверхности. Отсюда имеем

$$\frac{\partial p}{\partial x} = g\rho \frac{\partial \eta}{\partial x}. \quad (2)$$

Это уравнение не зависит от  $y$ , так что горизонтальное ускорение для всех частиц жидкости, расположенных в плоскости, перпендикулярной к оси  $x$ , имеет одно и то же значение. Отсюда следует, что все частицы, которые в некоторый момент времени лежат в ука-

<sup>1)</sup> См. Poinsot, Journal de Math. (5), II, 83 (1896); Ламб, Теоретическая механика, том III, § 92.

занной плоскости, и в дальнейшем будут лежать в такой же плоскости, другими словами, горизонтальная скорость и есть функция только от  $x$  и  $t$ .

В уравнении горизонтального движения

$$\frac{du}{dt} + u \frac{du}{dx} = - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx}$$

можно в случае бесконечно малых движений опустить член второго порядка и  $\frac{du}{dx}$ ; тогда мы получим

$$\frac{du}{dt} = - g \frac{\partial \eta}{\partial x}. \quad (3)$$

Пусть теперь

$$\xi = \int u dt,$$

т. е.  $\xi$  есть интеграл по времени от перемещения вдоль плоскости  $x$  за время  $t$ . В случае *малых движений* он будет равен, если пренебречь малыми величинами выше первого порядка, перемещению частиц, которые лежали первоначально в этой плоскости, или перемещению частиц, которые в момент  $t$  фактически в ней лежат. Уравнение (3) перейдет теперь в следующее:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = - g \frac{\partial \eta}{\partial x}. \quad (4)$$

Уравнение неразрывности можно получить, вычисляя объем жидкости, который войдет в момент  $t$  в пространство между плоскостями  $x$  и  $x + \delta x$ ; если  $h$  обозначает глубину и  $b$  ширину канала, то будем иметь

$$-\frac{\partial}{\partial x} (\xi h b) \delta x = \eta b \delta x$$

или

$$\eta = -h \frac{\partial \xi}{\partial x}. \quad (5)$$

Тот же самый результат получается из обычной формы уравнения неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (6)$$

Из этого уравнения следует

$$v = - \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy = -y \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (7)$$

если перенести начало на момент на дно канала. Эта формула представляет интерес потому, что она показывает как следствие нашего первоначального допущения, что вертикальная скорость частицы пропорциональна первой степени ее высоты от дна. На свободной поверхности будем иметь

$$y = h + \eta, \quad v = \frac{\partial \eta}{\partial t};$$

отсюда следует, если пренебречь произведением малых величин,

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -h \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial t}. \quad (8)$$

Интегрируя уравнение (8) по  $t$ , получим уравнение (5).

Исключив  $\eta$  из уравнений (4) и (5), получим

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = gh \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}. \quad (9)$$

Исключение же  $\xi$  дает уравнение того же вида, именно

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = gh \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}. \quad (10)$$

Только что приведенное исследование можно непосредственно распространить на случай канала с произвольной, но постоянной по длине формой поперечного сечения<sup>1)</sup>. Если поперечное сечение невозмущенной жидкости имеет площадь  $S$ , а ширина свободной поверхности есть  $b$ , то уравнение неразрывности будет

$$-\frac{\partial}{\partial x} (\xi S) dx = \eta b dx; \quad (11)$$

отсюда следует, как и выше,

$$\eta = -h \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad (12)$$

предполагая, что  $h = \frac{S}{b}$ , т. е.  $h$  означает теперь *среднюю* глубину канала. Уравнение движения (4) остается, конечно, без изменения.

**§ 170.** Уравнение (9) имеет хорошо знакомый вид, который встречается при различных физических проблемах, например, при поперечных колебаниях струн и при движении звука в одном измерении.

Чтобы интегрировать это уравнение, напишем для краткости

$$c = \sqrt{gh} \quad (13)$$

и

$$x - ct = x_1, \quad x + ct = x_2.$$

Если ввести  $x_1$  и  $x_2$  в качестве независимых переменных, то уравнение (9) принимает вид

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x_1 \partial x_2} = 0.$$

Общее решение его будет

$$\xi = F(x - ct) + f(x + ct), \quad (14)$$

где  $F$  и  $f$  суть произвольные функции.

<sup>1)</sup> Kelland, Trans R. S. Edin., XIV (1839).

Соответствующие значения для скорости какой-либо частицы жидкости и для возвышения поверхности будут

$$\left. \begin{aligned} \frac{\xi}{c} &= -F'(x - ct) + f'(x + ct), \\ \frac{\eta}{h} &= -F'(x - ct) - f'(x + ct). \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Истолкование этого результата очень просто. Рассмотрим сначала движение, представленное только первым членом правой части уравнения (14). Так как  $F(x - ct)$  не меняется, если  $t$  и  $x$  возрастают соответственно на  $\tau$  и на  $c\tau$ , то, очевидно, возмущение, которое в момент  $t$  было в точке  $x$ , в момент  $t + \tau$  переносится в точку  $x + c\tau$ . Возмущение перемещается таким образом, не изменяясь, с постоянной скоростью  $c$  вдоль канала. Другими словами, мы имеем здесь прогрессивную волну, которая перемещается со скоростью  $c$  вдоль положительного направления оси  $x$ . Точно так же второй член правой части (14) представляет прогрессивную волну, которая распространяется со скоростью  $c$  в отрицательном направлении оси  $x$ . Так как (14) есть общее решение (9), то всякое произвольное движение жидкости, которое удовлетворяет условиям предыдущего параграфа, может рассматриваться состоящим из двух аналогичных волн.

Скорость распространения  $c$  согласно (13) есть скорость, соответствующая свободному падению с высоты, равной половине глубины невозмущенной жидкости<sup>1)</sup>.

Следующая таблица дает скорость распространения волн для различных глубин; она будет иметь интерес позднее в связи с теорией приливов.

$h$ м	$c$ м/сек	$c$ км/час	$\frac{2\pi a}{c}$ (часы)
97,5	31	111	360
390	62	222	180
1560	123	444	90
3510 <sup>2)</sup>	185	667	60
6240	247	889	45

Последний столбец дает время, которое потребовалось бы для волны, чтобы пройти расстояние, равное длине земного экватора ( $2\pi a$ ). Чтобы «длинная» волна могла пройти это расстояние в 24 часа, глубина должна равняться приблизительно 22 км. Не следует забывать, что эти числовые результаты годятся только для волн, удовлетворяющих вышеизложенным условиям.

Значение этих условий более полно будет выяснено в § 172.

<sup>1)</sup> Lagrange, Nouv. mém. d. l'Acad. de Berlin, 1781 [Oeuvres, I, 747].

<sup>2)</sup> Это число, вероятно, сравнимо с порядком средней глубины океанов.

**§ 171.** Чтобы исследовать действие произвольного начального возмущения, предположим, что для  $t = 0$  имеем

$$\frac{\dot{\xi}}{c} = \varphi(x), \quad \frac{\eta}{h} = \psi(x). \quad (16)$$

Функции  $F'$  и  $f'$  выражения (15) будут тогда иметь вид

$$\left. \begin{aligned} F'(x) &= -\frac{1}{2} \{ \varphi(x) + \psi(x) \}, \\ f'(x) &= \frac{1}{2} \{ \varphi(x) - \psi(x) \}. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Следовательно, если провести кривые

$$y = \eta_1, \quad y = \eta_2,$$

где

$$\left. \begin{aligned} \eta_1 &= \frac{1}{2} h \{ \psi(x) + \varphi(x) \}, \\ \eta_2 &= \frac{1}{2} h \{ \psi(x) - \varphi(x) \}, \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

то можно будет найти профиль волны во всякий следующий момент  $t$ . Для этого надо смещать эти кривые параллельно осям  $x$  на отрезки  $\pm ct$  и складывать (алгебраически) соответствующие ординаты. Если, например, начальное возмущение было ограничено длиной  $l$  оси  $x$ , то оно по истечении времени, равного  $\frac{l}{2c}$ , будет переходить в две прогрессивные волны длины  $l$ , перемещающиеся в противоположных направлениях.

Для частного случая, когда в начальном состоянии  $\xi = 0$  и, следовательно,  $\varphi(x) = 0$ , будем иметь  $\eta_1 = \eta_2$ ; возвышение в каждой из образовавшихся волн будет тогда равно в точности половине того возвышения, которое было в соответствующих точках при первоначальном возмущении.

Если первоначальное возмущение таково, что  $\dot{\xi} = \pm \frac{\eta}{h} c$ , то из уравнений (16) и (17) следует, что движение будет состоять из системы волн, распространяющихся только в одном направлении, так как одна из двух функций  $F'$  и  $f'$  будет тогда равна нулю.

Легко представить движение частицы поверхности в то время, когда прогрессивная волна одного из двух видов проходит мимо нее. Возьмем, например,

$$\xi = F(x - ct) \quad (19)$$

и, следовательно,

$$\dot{\xi} = c \frac{\eta}{h}. \quad (20)$$

Частица будет находиться в покое до тех пор, пока ее не достигла волна, а затем она будет двигаться вперед со скоростью, которая

во всякий момент времени пропорциональна возвышению над средним уровнем; скорость частицы при этом будет меньше скорости волны  $c$ , и их отношение равно отношению возвышения поверхности к глубине жидкости. Полное перемещение в некоторый произвольный момент будет равно

$$\xi = \frac{1}{h} \int \eta c dt.$$

Этот интеграл при ширине канала, равной единице, измеряет объем той части волны, которая к рассматриваемому моменту прошла через частицу. Когда, наконец, волна прошла, то частица приходит опять в положение равновесия, расстояние которого от первоначального положения будет равно полному объему поднятой воды, деленному на площадь поперечного сечения канала.

**§ 172.** Мы можем исследовать теперь, при каких условиях решение, данное формулой (14), будет совместимо с теми предварительными допущениями, которые были приняты в § 169.

Точное уравнение для вертикального движения

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} - g\rho$$

после интегрирования по  $y$  дает

$$p - p_0 = g\rho(y_0 + \eta - y) - \rho \int_y^{y_0 + \eta} \frac{Dv}{Dt} dy. \quad (21)$$

Если  $\beta h$  будет мало сравнительно с  $g\eta$ , то это уравнение можно заменить приближенным уравнением (1), причем  $\beta$  обозначает максимум вертикального ускорения. В самом деле, если расстояние между двумя последовательными узловыми точками прогрессивной волны (т. е. точками, в которых профиль волны встречает невозмущенный уровень) обозначить через  $\lambda$ , то время, которое требуется соответствующей части волны, чтобы пройти это расстояние, будет равно  $\frac{\lambda}{c}$ ; следовательно, если предположить, что градиент  $\frac{\partial \eta}{\partial x}$  всюду мал, то

вертикальная скорость будет величиной порядка  $\frac{\eta c}{\lambda}$ <sup>1)</sup>, а вертикальное ускорение — порядка  $\frac{\eta c^2}{\lambda^2}$ , где  $\eta$  обозначает максимум возвышения или впадины. Таким образом, действительно  $\beta h$  будет мало сравнительно с  $g\eta$  при условии, что  $\frac{h^2}{\lambda^2}$  есть малая величина.

Пологие волны, длина  $\lambda$  которых велика по сравнению с глубиной жидкости, называются длинными волнами.

1) Если сравнить с уравнением (20), то мы увидим, что отношение максимума вертикальной скорости к максимуму горизонтальной есть величина порядка  $\frac{h}{\lambda}$ .

Далее, ограничение бесконечно малыми движениями, сделанное в уравнении (3), состояло в пренебрежении и  $\frac{\partial u}{\partial x}$  по сравнению с  $\frac{\partial u}{\partial t}$ . В прогрессивной волне мы имеем

$$\frac{du}{dt} = \pm c \frac{du}{dx};$$

и должно, следовательно, быть мало по сравнению с  $c$ , и поэтому согласно (20)  $\eta$  также должно быть мало сравнительно с  $h$ . Необходимо заметить, что это условие совершенно отлично от предыдущего, которое может быть справедливо и в тех случаях, когда движение нельзя рассматривать как бесконечно малое (см. § 187).

Предыдущие условия будут выполнены, конечно, в общем случае, представленном уравнением (14), если только они выполнены для каждой из двух прогрессивных волн, на которые можно разложить возмущение.

**§ 173.** Существует еще другой, хотя в общем и менее удобный метод для исследования движения длинных волн, в котором применяется метод Лагранжа, т. е. координаты относятся к отдельным частицам жидкости. Ради простоты мы рассмотрим только случай канала с прямоугольным поперечным сечением<sup>1)</sup>. Основное допущение, что можно пренебречь вертикальным ускорением, обусловливает, как и раньше, что горизонтальное движение всех частиц в плоскости, перпендикулярной к длине канала, должно быть одно и то же. Мы обозначим поэтому через  $x + \xi$  абсциссу в момент  $t$  той плоскости частиц, невозмущенная абсцисса которой была  $x$ . Если  $\eta$  означает возвышение свободной поверхности в этой плоскости, то уравнение движения для слоя с шириной, равной единице, и длины (в невозмущенном состоянии)  $dx$  будет

$$\rho h \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = - \frac{\partial p}{\partial x} dx (h + \eta),$$

где множитель  $\frac{\partial p}{\partial x} dx$  означает разность давлений для каких-то двух, друг против друга лежащих по обеим сторонам слоя частиц  $x$  и  $x + dx$ , а множитель  $h + \eta$  представляет площадь слоя. Так как мы предполагаем, что давление на частицу зависит только от глубины под свободной поверхностью, то мы можем положить

$$\frac{\partial p}{\partial x} = g \rho \frac{\partial \eta}{\partial x},$$

так что наше динамическое уравнение выразится следующим образом:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -g \left(1 + \frac{\eta}{h}\right) \frac{\partial \eta}{\partial x}. \quad (1)$$

<sup>1)</sup> Airy, Encycl. Metrop., Tides and Waves, § 192 (1845); см. также Stokes, On Waves, Camb. and Dub. Math. Journ., IV (1849) [Papers, II, 222]. Случай канала с косыми стенками рассматривался M. C. Cowan, On the Theorie of Long Waves, Phil. Mag. (5), XXXV, 250 (1892).

Уравнение неразрывности получим, если приравняем друг другу объемы слоя, состоящего из тех же самых частиц в возмущенном и невозмущенном состояниях. Таким образом

$$\left( \delta x + \frac{\partial \xi}{\partial x} \delta x \right) (h + \eta) = h \delta x,$$

или

$$1 + \frac{\eta}{h} = \left( 1 + \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^{-1}. \quad (2)$$

Из уравнений (1) и (2) мы можем исключить  $\eta$  или  $\xi$ ; результат, выраженный через  $\xi$ , будет проще, именно

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = gh \frac{\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}}{\left( 1 + \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^3}. \quad (3)$$

Это есть общее уравнение длинных волн в канале с постоянным по длине сечением и вертикальными стенками<sup>1)</sup>.

До сих пор при нашем исследовании мы делали только одно допущение, что при вычислении давления можно пренебречь вертикальным ускорением частиц. Примем теперь, кроме того, что  $\frac{\eta}{h}$  есть малая величина; тогда уравнения (2) и (3) сведутся к уравнениям

$$\eta = -h \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (4)$$

и

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = gh \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}. \quad (5)$$

Возвышение  $\eta$  удовлетворяет уравнению такого же вида:

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = gh \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}. \quad (6)$$

Эти уравнения согласуются с нашими прежними результатами; в самом деле, малость  $\frac{\partial \xi}{\partial x}$  обозначает, что относительное перемещение двух частиц всегда есть только малая дробь от расстояния между ними, следовательно, в первом приближении несущественно, относится ли  $x$  к неподвижной в пространстве плоскости или к плоскости, движущейся вместе с жидкостью.

**§ 174.** Потенциальная энергия волны или системы волн, зависящая от повышения или понижения жидкости над или под средним уровнем, выражается для единицы ширины интегралом

$$g \rho \int \int y \, dx \, dy,$$

<sup>1)</sup> Airy, см. выше

где интегрирование по  $y$  необходимо взять между пределами 0 и  $\eta$ , а по  $x$  — по всей длине системы волн. Выполнив первое интегрирование, получим

$$\frac{1}{2} g \rho \int \eta^2 dx. \quad (1)$$

Кинетическая же энергия будет равна

$$\frac{1}{2} \rho h \int \dot{\xi}^2 dx. \quad (2)$$

При системе волн, распространяющихся только в одном направлении, мы имеем

$$\dot{\xi} = \pm \frac{c}{h} \eta,$$

и, следовательно, выражения (1) и (2) будут равны; это означает, что полная энергия есть наполовину потенциальная и наполовину кинетическая.

Этот результат может быть получен в более общем виде следующим образом<sup>1)</sup>. Всякую прогрессивную волну можно представить возникающей благодаря распадению на две волны, распространяющиеся в противоположных направлениях, некоторого начального возмущения, при котором скорость частиц всюду равна нулю, и, следовательно, полная энергия есть потенциальная энергия. Из § 171 следует, что обе волны, происшедшие таким образом, будут симметричны во всех отношениях, так что каждая из них должна содержать половину первоначального запаса энергии. Так как, однако, возвышение соответствующих точек обеих полученных волн в точности равно половине возвышения первоначального возмущения, то потенциальная энергия каждой волны согласно выражению (1) равна четверти первоначального запаса энергии. Остальная (кинетическая) часть энергии каждой полученной волны должна поэтому равняться также одной четверти первоначальной энергии.

**§ 175.** Если в каком-нибудь случае волны, распространяющейся только в одном направлении без изменения своей формы, мы сообщим всей массе жидкости скорость, равную и противоположную скорости распространения волн, то движение будет установившимся и в то же время силы, действующие на каждую частицу, остаются теми же, что и раньше. С помощью этого приема можно очень легко исследовать законы распространения волн<sup>2)</sup>. Например в рассматриваемом случае согласно (5) § 22 будем иметь на свободной поверхности

$$\frac{p}{\rho} = \text{const.} - g(h + \eta) - \frac{1}{2} q^2, \quad (1)$$

где  $q$  означает скорость. Если наклон профиля волны всюду незначителен и глубина  $h$  мала по сравнению с длиной волны, то можно

<sup>1)</sup> Rayleigh, On Waves, Phil. Mag. (5), I, 257 (1876) [Papers, I, 251].

<sup>2)</sup> Rayleigh, см. выше.

принять, что горизонтальная скорость на протяжении всей глубины одна и та же и приблизительно равна  $q$ . Уравнение неразрывности тогда будет

$$q(h + \eta) = ch, \quad (2)$$

где  $c$  обозначает скорость установившегося движения в тех местах, в которых глубина потока одна и та же и равна  $h$ . Подставляя в уравнение (1) это значение  $q$ , мы получим

$$\frac{p}{\rho} = \text{const.} - gh \left(1 + \frac{\eta}{h}\right) - \frac{1}{2} c^2 \left(1 + \frac{\eta}{h}\right)^{-2}. \quad (3)$$

Следовательно, если  $\frac{\eta}{h}$  мало, то условие для свободной поверхности  $p = \text{const.}$  будет выполняться приближенно, при условии, что

$$c^2 = gh, \quad (4)$$

а это согласуется с нашим прежним результатом.

Этот метод позволяет также очень просто установить найденное уже в § 171 соотношение между скоростью частиц и возвышением поверхности. Согласно уравнению (2) приближенно будем иметь

$$q = c \left(1 - \frac{\eta}{h}\right). \quad (5)$$

Следовательно, в волновом движении скорость частиц в направлении распространения волн по отношению к невозмущенной воде равна  $\frac{c\eta}{h}$ .

Если возвышение  $\eta$ , хотя и мало по сравнению с длиной волны, но, однако, не может рассматриваться как бесконечно малое, то можно будет получить лучшее приближенное значение для скорости волны, заменив в уравнении (4)  $h$  через  $\eta + h$ . Это дает для скорости волны относительно жидкости в непосредственной близости от нее приближенное выражение

$$c_0 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\eta}{h}\right),$$

где  $c_0 = \sqrt{gh}$ . Так как жидкость сама имеет скорость  $c_0 \frac{\eta}{h}$ , то абсолютная скорость распространения волн приближенно будет равна

$$c_0 \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\eta}{h}\right). \quad (6)$$

Этот результат в основном принадлежит Эри<sup>1)</sup>. Отсюда следует, что волна рассмотренного здесь типа не может распространяться совершенно без изменения профиля, так как скорость изменяется с высотой. Другое доказательство формулы (6) мы дадим, как только перейдем к специальному рассмотрению волн с конечной амплитудой (§ 187).

<sup>1)</sup> Airy, Tides and Waves, § 208.

**§ 176.** Из линейности наших приближенных уравнений следует, что в случае достаточно пологих волн можно наложить друг на друга любое число независимых решений. Пусть, например, дана волна произвольной формы, которая движется в некотором направлении; если мы наложим на нее движущееся в противоположном направлении зеркальное изображение ее относительно плоскости  $x=0$ , то в результате изображения ее движении, очевидно, горизонтальная скорость в начале координат обратится в нуль; это значит, что условия таковы, как будто в этой точке находится неподвижная стенка. Мы можем таким образом наблюдать отражение волны от стенки; возвышения и впадины отражаются при этом без изменения, в то время как направление горизонтальной скорости меняется на обратное. Тот же самый результат следует из формулы

$$\xi = F(ct - x) - F(ct + x), \quad (1)$$

которая дает, очевидно, самое общее значение  $\xi$ , удовлетворяющее условию  $\xi = 0$  для  $x = 0$ .

Нетрудно исследовать частичное отражение волны в том месте, в котором происходит внезапное изменение поперечного сечения канала. Если перенести начало координат в эту точку, то мы можем положить для отрицательной стороны

$$\eta_1 = F\left(t - \frac{x}{c_1}\right) + f\left(t + \frac{x}{c_1}\right), \quad u_1 = \frac{g}{c_1} F\left(t - \frac{x}{c_1}\right) = -\frac{g}{c_1} f\left(t + \frac{x}{c_1}\right) \quad (2)$$

и для положительной стороны

$$\eta_2 = \varphi\left(t - \frac{x}{c_2}\right), \quad u_2 = \frac{g}{c_2} \varphi\left(t - \frac{x}{c_2}\right), \quad (3)$$

где функция  $F$  представляет первоначальную волну, а  $f$  и  $\varphi$  — соответственно отраженную и проходящую части. Постоянство массы требует, чтобы в точке  $x = 0$  было

$$b_1 h_1 u_1 = b_2 h_2 u_2,$$

где  $b_1$ ,  $b_2$  обозначают ширину на поверхности, а  $h_1$ ,  $h_2$  обозначают средние глубины. В той же самой точке вследствие непрерывности давления мы должны, следовательно, иметь  $\eta_1 = \eta_2$ <sup>1)</sup>.

Эти условия дают

$$\frac{b_1 h_1}{c_1} (F(t) - f(t)) = \frac{b_2 h_2}{c_2} \varphi(t), \quad F(t) + f(t) = \varphi(t).$$

<sup>1)</sup> Понятно, что вследствие быстрого изменения характера движения вблизи точки разрыва задача допускает только приближенное решение. Характер приближения, лежащий в основе вышеизложенных допущений, становится более очевидным, если мы предположим, что индексы относятся к двум поперечным сечениям  $S_1$  и  $S_2$  по ту и другую сторону от начала  $O$  на таких расстояниях от него, которые очень малы по отношению к длине волны, но все еще являются небольшими кратными поперечных размеров канала. Движение жидкости в каждом из этих поперечных сечений будет практически равномерным и параллельным направлению длины. Допущение, указанное в тексте, сводится тогда к утверждению что между  $S_1$  и  $S_2$  не существует заметной разницы уровней.

Следовательно, отношения возвышений в соответствующих частях отраженной и падающей волн, а также проходящей и падающей волн, соответственно будут иметь вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{f}{F} &= \frac{b_1 c_1 - b_2 c_2}{b_1 c_1 + b_2 c_2}, \\ \frac{\varphi}{F} &= \frac{2b_1 c_1}{b_1 c_1 + b_2 c_2}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Читатель может легко сам убедиться в том, что сумма энергий отраженной и проходящей волн равна энергии падающей волны.

**§ 177.** До сих пор наши исследования относились к случаю *свободных* волн. Когда на жидкость действуют, кроме силы тяжести, малые возмущающие силы  $X, Y$ , то уравнения движения получаются следующим образом.

Мы предположим, что в пределах расстояния, сравнимого с порядком глубины  $h$ , эти силы изменяются только на малую дробь их полного значения. При этом предположении мы будем иметь вместо уравнения (1) § 169

$$\frac{p - p_0}{\rho} = (g - Y)(y_0 + \eta - y) \quad (1)$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = (g - Y) \frac{\partial \eta}{\partial x} - (y_0 + \eta - y) \frac{\partial Y}{\partial x}.$$

Мы предполагаем далее, что  $Y$  мало сравнительно с  $g$  и что (исходя из указанных ранее оснований)  $h \frac{\partial Y}{\partial x}$  будет мало по сравнению с  $X$ . Тогда уравнение горизонтального движения

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + X \quad (2)$$

приводится с достаточным приближением к виду

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} + X, \quad (3)$$

где  $X$  можно рассматривать как функцию только от  $x$  и  $t$ . Уравнение неразрывности, как и в § 169, будет

$$\eta = -h \frac{\partial \xi}{\partial x}. \quad (4)$$

Из уравнений (3) и (4) после исключения  $\eta$  получаем

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = gh \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + X. \quad (5)$$

Таким образом имеет значение только одна *горизонтальная* компонента возмущающей силы.

Если возмущающее влияние обусловлено переменным давлением  $p_0$  на свободной поверхности, то уравнение (3) приводится к виду

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_0}{\partial x}, \quad (6)$$

а уравнение (4) остается без изменения. В случае перемещающегося давления, например,

$$\frac{p_0}{\rho} = f(Ut - x), \quad (7)$$

мы найдем

$$\frac{\eta}{h} = \frac{p_0}{\rho (U^2 - gh)}. \quad (8)$$

Понижение поверхности будет происходить вместе с давлением в тех же фазах или в противоположных в зависимости от того, будет ли  $U \leq \sqrt{gh}$ .

Если же возмущающее влияние обусловлено колебаниями дна, то в уравнении (2) мы будем иметь  $X = 0$ , а уравнение неразрывности представится в виде

$$\eta - \eta_0 = -h \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad (9)$$

где  $\eta_0$  есть отклонение дна от некоторого среднего уровня. Так например, в случае сейсмической волны

$$\eta_0 = f(Ut - x) \quad (10)$$

мы получим

$$\frac{\eta}{\eta_0} = \frac{U^2}{U^2 - gh}. \quad (11)$$

**§ 178.** Колебания воды в канале постоянного сечения, закрытого с обоих концов, можно получить, как и в соответствующей акустической задаче, наложением прогрессивных волн, распространяющихся в противоположных направлениях. Однако, учитывая последующие более трудные исследования, поучительно рассмотреть эту задачу как пример применения общей теории § 168.

Мы должны определить  $\xi$  таким образом, чтобы оно удовлетворяло уравнению

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + X \quad (1)$$

и одновременно граничным условиям  $\xi = 0$  для  $x = 0$  и  $x = l$ .

Чтобы найти свободные колебания, положим  $X = 0$  и допустим что  $\xi$  пропорционально  $\cos(\sigma t + \varepsilon)$ , где  $\sigma$  должна быть определена. Подставляя, получим

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\sigma^2}{c^2} \xi = 0; \quad (2)$$

отсюда, опуская множитель, зависящий от времени, будем иметь

$$\xi = A \sin \frac{\sigma x}{c} + B \cos \frac{\sigma x}{c}.$$

Граничные условия дают  $B = 0$  и

$$\sigma \frac{l}{c} = r\pi, \quad (3)$$

где  $r$  есть целое число. Следовательно, нормальное колебание порядка  $r$  выражается в виде

$$\xi = A_r \sin \frac{r\pi x}{l} \cos \left( \frac{r\pi c t}{l} + \varepsilon_r \right), \quad (4)$$

где амплитуда  $A_r$  и фаза  $\varepsilon_r$  произвольны.

В случае самого медленного колебания ( $r = 1$ ) вода колеблется взад и вперед и при этом приливает попеременно к обоим концам, а в середине ( $x = \frac{1}{2}l$ ) образуется узел. Период  $\frac{2l}{c}$  равен времени, которое необходимо прогрессивной волне, чтобы дважды пробежать длину канала.

Периоды более высоких колебаний равны соответственно  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$  от этого периода, однако мы должны помнить, что в этой задаче, как и в других подобных задачах, наша теория теряет свою применимость, как только длина  $\frac{l}{r}$  полуволны станет величиной, сравнимой с глубиной  $h$ .

Сравнивая с общей теорией § 168, мы видим, что в рассматриваемом примере нормальные координаты  $q_1, q_2, \dots, q_n$  таковы, что при изменении только одной координаты, например  $q_r$ , перемещение системы выражается в виде

$$\xi = q_r \sin \frac{r\pi x}{l};$$

следовательно, самое общее перемещение системы при рассматриваемых условиях имеет вид

$$\xi = \sum q_r \sin \frac{r\pi x}{l}, \quad (5)$$

где  $q_1, q_2, \dots, q_n$  произвольны, что, конечно, находится в согласии с теоремой Фурье.

Выражения для  $T$  и  $V$ , будучи представлены через нормальные скорости и нормальные координаты, должны привестись к суммам квадратов. В рассматриваемом случае это легко установить с помощью

формулы (5). Если  $S$  обозначает площадь поперечного сечения канала, то будем иметь

$$\left. \begin{aligned} 2T &= \varrho S \int_0^l \dot{\xi}^2 dx = \sum a_r \dot{q}_r^2, \\ 2V &= g\varrho \frac{S}{h} \int_0^l r^2 dx = \sum c_r q_r^2, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

где

$$a_r = \frac{1}{2} \varrho S l, \quad c_r = \frac{1}{2} r^2 \pi^2 g \varrho h \frac{S}{l}. \quad (7)$$

Из выражения (7) следует, что коэффициенты устойчивости  $c_r$  возрастают с глубиной.

Обратно, если, в согласии с теорией Фурье, мы примем, что формула (5) есть достаточно общее выражение для значения  $\xi$  в любой момент времени, то только что приведенное вычисление показывает, что коэффициенты  $q_r$  суть нормальные координаты; частоты могут быть тогда найдены с помощью общей формулы (10) § 168; именно в согласии с (3) будем иметь

$$\sigma_r = \left( \frac{c_r}{a_r} \right)^{1/2} = r \pi \frac{(gh)^{1/2}}{l}. \quad (8)$$

**§ 179.** В качестве примера вынужденных волн рассмотрим случай действия горизонтальной силы, зависящей только от времени

$$X = f \cos(\sigma t + \varepsilon). \quad (9)$$

Этот пример в известной мере может иллюстрировать происхождение приливов в озерах малых размеров.

Предположив, что  $\xi$  пропорционально  $\cos(\sigma t + \varepsilon)$ , и отбросив множитель, зависящий от времени, получим из уравнения (1)

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\sigma^2}{c^2} \xi = -\frac{f}{c^2}.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\xi = -\frac{f}{\sigma^2} + D \sin \frac{\sigma x}{c} + E \cos \frac{\sigma x}{c}. \quad (10)$$

Граничные условия дают

$$E = \frac{f}{\sigma^2}, \quad D \sin \frac{\sigma l}{c} = \left( 1 - \cos \frac{\sigma l}{c} \right) \frac{f}{\sigma^2}. \quad (11)$$

Исключая случай  $\frac{\sigma l}{c} = 0$ , будем иметь

$$D = \frac{f}{\sigma^2} \operatorname{tg} \frac{\sigma l}{2c};$$

следовательно,

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{2f}{\sigma^2 \cos \frac{1}{2} \frac{\sigma l}{c}} \sin \frac{\sigma x}{2c} \sin \frac{\sigma(l-x)}{2c} \cos(\sigma t + \varepsilon), \\ \eta &= \frac{hf}{\sigma c \cos \frac{1}{2} \frac{\sigma l}{c}} \sin \frac{\sigma \left(x - \frac{1}{2}l\right)}{c} \cos(\sigma t + \varepsilon). \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Если период возмущающей силы велик по сравнению с периодом самого медленного свободного колебания, то  $\frac{\sigma l}{2c}$  будет мало и приближенная формула для возвышения может быть представлена в виде

$$\eta = \frac{f}{g} \left( x - \frac{1}{2} l \right) \cos(\sigma t + \varepsilon), \quad (13)$$

точно так, как если бы вода не обладала инерцией. Горизонтальное перемещение воды будет находиться всегда в одинаковой фазе с силой, пока период последней больше, чем период самого медленного свободного колебания, т. е. пока  $\frac{\sigma l}{c} < \pi$ . Если период силы уменьшается и становится меньше указанного значения, то фазы силы и перемещения будут противоположны.

Когда период в точности будет равен периоду свободного колебания нечетного порядка ( $r = 1, 3, 5, \dots$ ),  $\xi$  и  $\eta$  становятся бесконечно большими, т. е. решение будет непригодным. Как было указано в § 168, этот случай можно объяснить тем, что при отсутствии сил трения амплитуда движения здесь становится такой большой, что наши основные допущения уже больше не оправдываются.

Если, с другой стороны, период возмущающей силы совпадает с периодом свободного колебания четного порядка ( $r = 2, 4, 6, \dots$ ), то

$$\sin \frac{\sigma l}{c} = 0, \cos \frac{\sigma l}{c} = 1$$

и граничные условия выполняются независимо от значения  $D$ . Вынужденное движение может быть тогда представлено уравнением<sup>1)</sup>

$$\xi = -\frac{2f}{\sigma^2} \sin^2 \frac{\sigma x}{2c} \cos(\sigma t + \varepsilon). \quad (14)$$

Этот пример иллюстрирует тот факт, что действие возмущающей силы иногда может быть легко вычислено без разложения силы на ее нормальные компоненты.

<sup>1)</sup> На языке общей теории это значит, что рассматриваемая здесь сила не имеет компоненты частного типа, с которой она синхронна, поэтому колебание этого типа вообще не может быть вызвано. Точно так же периодическое давление, приложенное к произвольной точке натянутой струны, не будет возбуждать того собственного колебания, которое имеет в этой точке узел, даже и тогда, когда оно синхронно с этим давлением.

Другой простой пример вынужденных колебаний, который с точки зрения теории приливов обладает известным интересом, есть пример канала, который с одного конца закрыт, а с другого конца сообщается с открытым морем, где происходят периодические колебания:

$$\eta = a \cos (\sigma t + \varepsilon). \quad (15)$$

Если мы поместим начало координат в закрытом конце, то решение, очевидно, представится в виде

$$\eta = a \frac{\cos \frac{\sigma x}{c}}{\cos \frac{\sigma l}{c}} \cos (\sigma t + \varepsilon), \quad (16)$$

где  $l$  обозначает длину. Когда  $\frac{\sigma l}{c}$  мало, тогда приливная волна для всех точек канала имеет приблизительно одинаковую амплитуду. Для частных значений  $l$  (которые определяются из уравнения  $\cos \frac{\sigma l}{c} = 0$ ) это решение не годится, так как амплитуда делается бесконечно большой.

### Каналовая теория приливов

**§ 180.** Теория вынужденных колебаний в каналах или на открытых водных пространствах имеет значение главным образом вследствие ее прямого отношения к явлениям приливов. „Каналовая теория“, в частности, была разработана весьма исчерпывающим образом Эри<sup>1)</sup>. Мы рассмотрим несколько интересных задач.

Вычисление возмущающего действия, которое производит отдаленное тело на воду моря, изложено в прибавлении к концу этой главы. Получается, например, что возмущающее действие луны в некоторой точке  $P$  земной поверхности может быть представлено потенциалом  $\Omega$ , приближенное значение которого равно

$$\Omega = \frac{3}{2} \frac{\gamma Ma^2}{D^3} \left( \frac{1}{3} - \cos^2 \vartheta \right), \quad (1)$$

где  $M$  означает массу Луны,  $D$  — ее расстояние от центра Земли,  $a$  — земной радиус,  $\gamma$  — „постоянную тяготения“ и  $\vartheta$  — зенитное расстояние Луны в точке  $P$ . Оно дает горизонтальное ускорение

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \vartheta} = f \sin 2\vartheta \quad (2)$$

в направлении к той точке земной поверхности, которая лежит вертикально под Луной, где

$$f = \frac{3}{2} \frac{\gamma Ma}{D^3}. \quad (3)$$

<sup>1)</sup> A i g u, Encycl. Metrop., Tides and Waves, отд. VI (1845). Некоторые основания теории были найдены с помощью очень простых методов уже Юнгом (Young) в 1813—1823 годах (Works, II, 262, 291).

Если  $E$  есть масса Земли, то мы можем положить

$$g = \gamma \frac{E}{a^2},$$

откуда следует

$$\frac{f}{g} = \frac{3}{2} \frac{M}{E} \left( \frac{a}{D} \right)^3.$$

Положив  $\frac{M}{E} = \frac{1}{81}$ ,  $\frac{a}{D} = \frac{1}{60}$ , получаем  $\frac{f}{g} = 8,57 \cdot 10^{-8}$ . Если возмущающее тело есть Солнце, то соответственно будет  $\frac{f}{g} = 3,78 \cdot 10^{-8}$ .

Для некоторых целей удобно ввести линейную величину  $H$ , определяемую формулой

$$H = \frac{af}{g}. \quad (4)$$

Положив  $a = 64 \cdot 10^5 \text{ м}$ , мы для лунных приливов получим  $H = 0,55 \text{ м}$ , а для солнечных приливов

$$H = 0,24 \text{ м.}$$

В прибавлении будет показано, что  $H$  измеряет наибольшую высоту прилива от наибольшего уровня до наименьшего уровня воды согласно статической теории.

**§ 181.** Рассмотрим случай канала постоянной ширины, который совпадает с земным экватором, и предположим для простоты, что Луна описывает круговую орбиту в этой же плоскости. Пусть  $\xi$  есть отнесенное к поверхности Земли перемещение частицы воды, среднее положение которой имеет угол долготы  $\varphi$ , считая на восток от некоторого определенного меридиана.

Если  $\omega$  есть угловая скорость вращения Земли, то действительное перемещение частицы за время  $t$  будет равно  $\xi + a\omega t$ , так что тангенциальное ускорение будет равно  $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$ . Приняв, что центробежная сила, как обычно, включена в значение  $g$ , можно непосредственно применить рассуждения § 169, 177.

Если  $n$  обозначает угловую скорость Луны в направлении на запад, считая от определенного меридиана<sup>1)</sup>, то мы можем в формуле (2) § 180 положить

$$\vartheta = nt + \varphi + \varepsilon,$$

так что уравнение движения будет представлено в виде

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \xi}{a^2 \partial \varphi^2} - f \sin 2(nt + \varphi + \varepsilon). \quad (1)$$

Свободные колебания будут определены, если принять во внимание, что  $\xi$  должна быть обязательно периодической функцией от  $\varphi$ ,

<sup>1)</sup> Мы имеем  $n = \omega - n_1$ , где  $n_1$  есть угловая скорость Луны на ее орбите.

значения которой повторяются при возрастании  $\varphi$  на  $2\pi$ . Следовательно, согласно теореме Фурье  $\xi$  можно представить в виде

$$\xi = \sum_{r=0}^{\infty} (P_r \cos r\varphi + Q_r \sin r\varphi). \quad (2)$$

Подставив это выражение в уравнение (1) и отбросив последний член, мы найдем, что  $P_r$  и  $Q_r$  должны удовлетворять уравнению

$$\frac{d^2 P_r}{dt^2} + \frac{r^2 c^2}{a^2} P_r = 0. \quad (3)$$

Для любого нормального колебания движение представляет такой образом простое гармоническое колебание с периодом  $\frac{2\pi a}{rc}$ .

Для вынужденных волн или приливов получим

$$\xi = -\frac{1}{4} \frac{f a^2}{c^2 - n^2 a^2} \sin 2(nt + \varphi + \varepsilon); \quad (4)$$

отсюда следует

$$\eta = \frac{1}{2} \frac{c^2 H}{c^2 - n^2 a^2} \cos 2(nt + \varphi + \varepsilon). \quad (5)$$

Таким образом здесь мы получим полусуточный прилив (причем подразумеваются, конечно, лунные сутки), который, кроме того, будет „прямым“ или „обращенным“, т. е. будет иметь место высокая вода или низкая вода под Луной, смотря по тому  $c > na$  или, другими словами, смотря по тому, будет ли отнесенная к земной поверхности скорость точки, находящейся всегда вертикально под Луной, меньше или больше скорости свободной волны. При условиях, действительно существующих на Земле, мы имеем

$$\frac{c^2}{n^2 a^2} = \frac{g}{n^2 a} \frac{h}{a} = 311 \frac{h}{a},$$

так что приливы суть „обращенные“; для противоположного случая глубина канала должна значительно превосходить действительную глубину моря.

Этот результат, который иногда рассматривается как парадокс, вытекает из общего принципа, изложенного в § 168. Он представляет следствие относительной медленности свободных колебаний в экваториальном канале средней глубины.

Из грубых цифр таблицы на стр. 323 видно, что даже при глубине в 3510 метров свободной волне необходимо приблизительно 30 часов, чтобы пробежать половину земной окружности, в то время как период возмущающей силы, производящей приливы, равен приблизительно только 12 часам.

Формула (5) в действительности есть частный случай формулы (14) § 168, так как она может быть представлена в виде

$$\eta = \frac{1}{1 - \frac{\sigma^2}{\sigma_0^2}} \bar{\eta}, \quad (6)$$

где  $\bar{\eta}$  есть данное статической теорией возвышение

$$\bar{\eta} = \frac{1}{2} H \cos 2(nt + \varphi + \varepsilon), \quad (7)$$

и

$$\sigma = 2n, \quad \sigma_0 = \frac{2c}{a}.$$

Для умеренных глубин, от 3000 метров и ниже,  $n^2 a^2$  велико сравнительно с  $gh$ ; амплитуда горизонтального движения согласно уравнению (4) тогда приближенно будет равна  $\frac{f}{4n^2}$  или  $\frac{g}{4n^2 a} H$  и будет почти независимой от глубины. Для лунных приливов эта амплитуда приблизительно равна  $42^{1/2}$  метрам. Максимум возвышения получается умножением на  $\frac{2h}{a}$ ; это дает для глубины в 3000 метров высоту только 0,04 метра.

Для больших глубин приливы должны быть выше, но все еще обращенными до тех пор, пока будет достигнута критическая глубина  $\frac{n^2 a^2}{g}$ , которая приблизительно равна 24 километрам. Для глубин, превышающих эту границу, приливы становятся прямыми и они все более приближаются к тому виду, который дается статической теорией<sup>1)</sup>.

**§ 182.** Случай канала, совпадающего с земной параллелью, трактуется аналогичным образом. Предполагая, что орбита Луны лежит всегда в плоскости экватора, мы найдем с помощью сферической тригонометрии, что

$$\cos \vartheta = \sin \theta \cos(nt + \varphi + \varepsilon), \quad (1)$$

где  $\theta$  есть угол, дополнительный к углу широты, а  $\varphi$  — долгота.

Возмущающая сила в направлении долготы будет

$$-\frac{\partial \Omega}{a \sin \theta \partial \varphi} = -f \sin \theta \sin 2(nt + \varphi + \varepsilon), \quad (2)$$

а это дает

$$\eta = \frac{1}{2} \frac{c^2 H \sin^2 \theta}{c^2 - n^2 a^2 \sin^2 \theta} \cos 2(nt + \varphi + \varepsilon); \quad (3)$$

следовательно, если  $na > c$ , то приливы будут прямыми или обращенными, смотря по тому, будет ли  $\sin \theta > \frac{c}{na}$ . Если глубина так

<sup>1)</sup> Ср. Young, см. сноску на стр. 318

велика, что  $c > na$ , то приливы для всех значений  $\theta$  будут прямыми.

Если Луна не лежит в плоскости экватора, а имеет угол склонения  $A$ , формулу (1) следует заменить через

$$\cos \vartheta = \cos \theta \cos A + \sin \theta \sin A \cos a, \quad (4)$$

где  $a$  обозначает часовой угол Луны относительно меридиана точки  $P$ . Для простоты мы пренебрежем движением Луны по склонению сравнительно с угловой скоростью вращения Земли, т. е. мы полагаем

$$a = nt + \varphi + \varepsilon$$

и рассматриваем  $A$  как постоянную. Составляющая возмущающей силы в направлении параллельного круга будет иметь вид

$$-\frac{d\Omega}{a \sin \theta \partial \varphi} = -f \cos \theta \sin 2A \sin(nt + \varphi + \varepsilon) - \\ - f \sin \theta \sin^2 A \sin 2(nt + \varphi + \varepsilon). \quad (5)$$

Отсюда получается

$$\eta = \frac{1}{2} \frac{c^2 H}{c^2 - n^2 a^2 \sin^2 \theta} \sin 2\theta \sin 2A \cos(nt + \varphi + \varepsilon) + \\ + \frac{1}{2} \frac{c^2 H}{c^2 - n^2 a^2 \sin^2 \theta} \sin^2 \theta \sin^2 A \cos 2(nt + \varphi + \varepsilon). \quad (6)$$

Первый член дает суточный прилив с периодом  $\frac{2\pi}{n}$ ; этот член обращается в нуль и меняет свой знак, когда Луна пересекает экватор, т. е. дважды в месяц. Второй член представляет полусуточный прилив с периодом  $\frac{\pi}{n}$ , амплитуда которого теперь меньше, чем прежде, в  $\sin^2 A$  раз.

**§ 183.** Когда канал совпадает с меридианом, мы должны обратить внимание на то, что невозмущенная свободная поверхность образует фигуру относительного равновесия при одновременном действии тяготения и центробежной силы и поэтому не в точности является сферической. Мы будем впоследствии иметь случай обстоятельно рассмотреть вопрос о перемещениях по отношению к врачающемуся шару; предвосхищая результаты этого рассмотрения, мы на мгновение предположим, что в узком канале возмущения практически таковы, как если бы Земля покоялась, а возмущающее тело вращалось вокруг нее с соответствующей относительной скоростью.

Если принять, что Луна движется в плоскости экватора, и обозначить через  $nt + \varepsilon$  часовой угол относительно меридиана канала и через  $\theta$  — угловое расстояние от полюса точки  $P$  канала, то получим

$$\cos \vartheta = \sin \theta \cos(nt + \varepsilon). \quad (1)$$

Уравнение движения будет

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 \xi}{a^2 \partial \theta^2} - \frac{\partial \Omega}{a \partial \theta} = \\ &= c^2 \frac{\partial^2 \xi}{a^2 \partial \theta^2} - \frac{1}{2} f \sin 2\theta \{1 + \cos 2(nt + \varepsilon)\}. \quad (2)\end{aligned}$$

В качестве решения мы найдем

$$\eta = -\frac{1}{4} H \cos 2\theta - \frac{1}{4} \frac{c^2 H}{c^2 - n^2 a^2} \cos 2\theta \cos 2(nt + \varepsilon). \quad (3)$$

Первый член представляет постоянное изменение среднего уровня на величину

$$\eta = -\frac{1}{4} H \cos 2\theta. \quad (4)$$

Колебания выше и ниже среднего возмущенного уровня даны вторым членом (3). Он представляет полусуточный прилив; мы видим, что для  $c < na$ , т. е. для действительных условий на Земле, когда Луна стоит в плоскости канала, уровень воды в широтах, больших  $45^\circ$ , повышается, а в широтах, меньших  $45^\circ$ , понижается, и имеет место обратное явление, когда Луна удалена от канала на  $90^\circ$ . Соотношения будут как раз противоположными, когда  $c > na$ .

Если Луна находится не в плоскости экватора, а имеет известное склонение, то формула для среднего уровня, как это выражено членом, соответствующим формуле (4), имеет некоторый коэффициент, зависящий от склонения, и соответствующее изменение в нем дает четырнадцатидневный прилив, а в случае Солнца — полугодовой. Существует также суточный прилив, знак которого зависит от склонения.

Читателю будет нетрудно проверить эти результаты с помощью данного в прибавлении общего выражения для  $\Omega$ .

**§ 184.** В случае канала постоянной ширины, окружающего земной шар (§ 181, 182), имеет место обязательно всюду точное совпадение (или точное противоположение) между фазами возвышения приливов и фазами сил, их производящих. Этого уже не будет, когда канал или море имеет ограниченные размеры.

Возьмем, например, случай экваториального канала конечной длины<sup>1)</sup>. Если пренебречь склонением Луны, то мы получим при подходящем выборе начального момента времени

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \xi}{a^2 \partial \varphi^2} - f \sin 2(nt + \varphi) \quad (1)$$

с условием, что  $\xi = 0$  на концах, где, скажем,  $\varphi = \pm a$ .

<sup>1)</sup> Lamb H. и Miss Swain, Phil. Mag. (6), XXIX, 736 (1915). Аналогичный результат при переменной глубине рассматривался Goldsborough, Proc. Lond. Math. Soc. (2), XV, 64 (1915).

Если пренебречь инерцией воды, то член  $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$  отпадает, и мы получаем

$$\xi = \frac{1}{4} \frac{fa^2}{c^2} \left\{ \sin 2nt \cos 2a + \frac{\varphi}{a} \cos 2nt \sin 2a - \sin 2(nt + \varphi) \right\} \quad (2)$$

и

$$\eta = -\frac{h}{a} \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} = \frac{1}{2} H \left\{ \cos 2(nt + \varphi) - \frac{\sin 2a}{2a} \cos 2nt \right\}, \quad (3)$$

где  $H = \frac{af}{g}$ , как и в § 180. Это есть возвышение, получаемое согласно (исправленной) статической теории, о которой мы будем говорить в прибавлении к этой главе. В центре ( $\varphi = 0$ ) канала имеем

$$\eta = \frac{1}{2} H \cos 2nt \left( 1 - \frac{\sin 2a}{2a} \right). \quad (4)$$

Если  $a$  мало, то возвышения в этой точке будут очень малыми, но все же там нет узла в собственном смысле этого слова. Моменты высокой воды совпадают с прохождением Луны и „противолуны“<sup>1)</sup>. На концах  $\varphi = \pm a$  будем иметь

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{1}{2} H \left\{ \left( 1 - \frac{\sin 4a}{4a} \right) \cos 2(nt \pm a) \mp \frac{1 - \cos 4a}{4a} \sin 2(nt \pm a) \right\} = \\ &= \frac{1}{2} HR_0 \cos 2(nt \pm a \mp \varepsilon_0), \end{aligned} \quad (5)$$

если

$$R_0 \cos 2\varepsilon_0 = 1 - \frac{\sin 4a}{4a}, \quad R_0 \sin 2\varepsilon_0 = -\frac{1 - \cos 4a}{4a}. \quad (6)$$

Здесь  $\varepsilon_0$  обозначает часовой угол Луны, считая от меридиана на запад, когда на восточном конце канала имеет место высокий уровень воды, и считая на восток, когда высокий уровень воды имеет место на западном конце. Если  $a$  мало, то приближенно будем иметь

$$R_0 = 2a, \quad \varepsilon_0 = -\frac{1}{4} \pi + \frac{2}{3} a. \quad (7)$$

Если учесть инерцию воды, то получим

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{4} \frac{fa^2}{(m^2 - 1)c^2} [\sin 2(nt + \varphi) - \\ &- \frac{1}{\sin 4ma} \{ \sin 2(nt + a) \sin 2m(\varphi + a) - \\ &- \sin 2(nt - a) \sin 2m(\varphi - a) \}], \end{aligned} \quad (8)$$

<sup>1)</sup> Это выражение будет объяснено в прибавлении к этой главе.

где  $m = \frac{na}{c}$ . Отсюда следует <sup>1)</sup>

$$\begin{aligned} \eta = -\frac{1}{2} \frac{H}{m^2-1} [\cos 2(nt+\varphi) - \\ - \frac{m}{\sin 4ma} (\sin 2(nt+\alpha) \cos 2m(\varphi+\alpha) - \\ - \sin 2(nt-\alpha) \cos 2m(\varphi-\alpha))]. \end{aligned} \quad (9)$$

Заставив  $m$  стремиться к нулю, мы получим формулу (3) статической теории. Заметим, что эти выражения для  $m \rightarrow 1$  не обращаются в бесконечность, как в случае бесконечного канала. Однако во всех случаях, в которых условия вообще сравнимы с морскими условиями,  $m$  значительно больше единицы.

В центре канала будем иметь

$$\eta = -\frac{1}{2} \frac{H}{m^2-1} \cos 2nt \left( 1 - \frac{m \sin 2\alpha}{\sin 2ma} \right). \quad (10)$$

Как и в статической теории, при малом  $\alpha$  амплитуда очень мала, но при этом нет узла. Для концов мы находим

$$\begin{aligned} \eta = \frac{1}{2} \frac{H}{m^2-1} \left\{ \left( \frac{m \sin 4\alpha}{\sin 4ma} - 1 \right) \cos 2(nt \pm \alpha) \pm \right. \\ \left. \pm \frac{m(\cos 4ma - \cos 4\alpha)}{\sin 4ma} \sin 2(nt \pm \alpha) \right\} = \\ = \frac{1}{2} HR_1 \cos 2(nt \pm \alpha \mp \varepsilon_1), \end{aligned} \quad (11)$$

причем

$$\left. \begin{aligned} R_1 \cos 2\varepsilon_1 &= \frac{m \sin 4\alpha - \sin 4ma}{(m^2-1) \sin 4ma}, \\ R_1 \sin 2\varepsilon_1 &= \frac{m(\cos 4ma - \cos 4\alpha)}{(m^2-1) \sin 4ma}. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Если  $\alpha$  будет малым, то имеем приближенно

$$R_1 = 2\alpha, \quad \varepsilon_1 = -\frac{1}{4}\pi + \frac{2}{3}\alpha, \quad (13)$$

как и в случае статической теории.

Значение  $R_1$  становится бесконечным, когда  $\sin 4ma = 0$ . Это определяет критические длины канала, для которых существует свободный период, равный  $\frac{\pi}{n}$ , или половине лунных суток. Предельное значение  $\varepsilon$  дано в подобном случае формулами

$$\operatorname{tg} 2\varepsilon_1 = -\operatorname{ctg} 2\alpha \quad \text{или} \quad \operatorname{tg} 2\varepsilon_1 = \operatorname{tg} 2\alpha,$$

смотря по тому, является ли  $4ma$  нечетным или четным кратным  $\pi$ .

<sup>1)</sup> Ср. Airy, Tides and Waves, § 301.

		Исправленная статическая теория			Динамическая теория		
$2\alpha$ (градусы)	$2\alpha$ (км)	Разность высот		$\epsilon_0$ (градусы)	Разность высот		$\epsilon_1$ (градусы)
		в центре	на концах		в центре	на концах	
0	0,0	0	0	-45	0	0	-45
9	1001,7	0,004	0,157	-42	0,004	0,165	-41,9
18	2003,4	0,016	0,311	-32	0,018	0,396	-38,5
27	3005,1	0,037	0,460	-36	0,044	0,941	-33,9
31,5	3505,95	0,050	0,531	-34,5	0,063	1,945	-30,9
36	4006,8	0,065	0,601	-33	0,089	$\infty$	{ -27 +63
40,5	4508,5	0,081	0,668	-31,6	0,125	1,956	+68,2
45	5008,5	0,100	0,733	-30,1	0,174	0,987	+75,7
54	6010,2	0,142	0,853	-27,2	0,354	0,660	-83,5
63	7011,9	0,190	0,959	-24,4	0,918	1,141	-65,1
72	8013,6	0,243	1,051	-21,6	$\infty$	$\infty$	{ -54 +36
81	9015,3	0,301	1,127	-18,9	1,459	1,112	+44,5
90	10017,0	0,363	1,185	-16,2	0,864	0,513	+55,9

Таблица иллюстрирует случай  $m=2,5$ . Если  $\frac{\pi}{n}$  равно 12 лунным часам, то это соответствует глубине в 3300 метров, которая является величиной порядка средней морской глубины. Соответствующая скорость волн равна приблизительно 667 километрам в час. Первая критическая длина равна 4000 километров ( $a = \frac{1}{10} \pi$ ). Единица, которой измеряются максимальные разности высот, есть величина  $H$ , значение которой для лунного прилива равно приблизительно 0,549 метра. Часовые углы  $\epsilon_0$  и  $\epsilon_1$  выбраны таким образом, что они всегда лежат между  $-90^\circ$  и  $+90^\circ$ ; положительный знак указывает на запад от меридиана для восточного конца канала и на восток от меридиана для западного его конца.

### Движение волн в канале с переменным поперечным сечением

**§ 185.** Когда поперечное сечение  $S$  канала не одинаково повсюду, а постепенно меняется от точки к точке, то уравнение неразрывности согласно (11) § 169 будет

$$\eta = -\frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial x} (S\xi), \quad (1)$$

где  $b$  обозначает ширину свободной поверхности. Если  $h$  есть средняя глубина при ширине  $b$ , то  $S=bh$  и

$$\eta = -\frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial x} (hb\xi), \quad (2)$$

где  $h$  и  $b$  суть теперь функции от  $x$ .

Уравнение движения имеет тот же вид, что и раньше:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x}. \quad (3)$$

Из (2) и (3) мы можем исключить либо  $\eta$ , либо  $\xi$ ; уравнение для  $\eta$  будет

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \frac{g}{b} \frac{\partial}{\partial x} \left( h b \frac{\partial \eta}{\partial x} \right). \quad (4)$$

Законы распространения волн в канале с непрерывно меняющимся прямоугольным сечением были изучены Грином<sup>1)</sup>. Его результаты, свободные от ограничения специальной формой сечения, можно получить следующим образом.

Если мы введем определяемую уравнением

$$\frac{dx}{d\tau} = (gh)^{1/2} \quad (5)$$

переменную  $\tau$  вместо  $x$ , то уравнение (4) перейдет в

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \eta'' + \left( \frac{b'}{b} + \frac{1}{2} \frac{h'}{h} \right) \eta'; \quad (6)$$

штрихи показывают здесь дифференцирование по  $\tau$ . Если бы  $b$  и  $h$  были постоянны, то уравнению (6) можно было бы удовлетворить, как в § 170, полагая

$$\eta = F(\tau - t);$$

в рассматриваемом же случае для пробы возьмем

$$\eta = \Theta \cdot F(\tau - t), \quad (7)$$

где  $\Theta$  является функцией только одной  $\tau$ . Подставив это выражение  $\eta$  в уравнение (6), получим

$$2 \frac{\Theta'}{\Theta} \frac{F'}{F} + \frac{\Theta''}{\Theta} + \left( \frac{b'}{b} + \frac{1}{2} \frac{h'}{h} \right) \left( \frac{F'}{F} + \frac{\Theta'}{\Theta} \right) = 0. \quad (8)$$

Члены этого уравнения, содержащие  $F$ , сокращаются, если

$$2 \frac{\Theta'}{\Theta} + \frac{b'}{b} + \frac{1}{2} \frac{h'}{h} = 0,$$

или

$$\Theta = C b^{-1/2} h^{-1/4}, \quad (9)$$

где  $C$  есть постоянная. Поэтому уравнение (4) будет удовлетворено, если предположить, что остальными членами (8) можно пренебречь.

Это приближение оправдывается, если мы можем пренебречь  $\frac{\Theta''}{\Theta}$  и  $\frac{\Theta'}{\Theta}$  по сравнению с  $\frac{F'}{F}$ . Что касается  $\frac{\Theta'}{\Theta}$ , то из (9) и (7) следует,

<sup>1)</sup> Green, On the Motion of Waves in a Variable Canal of small depth and width, Camb. Trans., VI (1837) [Papers, стр. 225]; см. также Airy, Tides and Waves, § 260.

что это равносильно пренебрежению величинами  $b^{-1} \frac{db}{dx}$  и  $h^{-1} \frac{dh}{dx}$  по сравнению с  $\eta^{-1} \frac{\partial \eta}{\partial x}$ . Если  $\lambda$  означает длину волны в общем смысле § 172, то  $\frac{\partial \eta}{\partial x}$  есть величина такого же порядка, как и  $\frac{\eta}{\lambda}$ , и наше допущение обозначает, что  $\lambda \frac{db}{dx}$  и  $\lambda \frac{dh}{dx}$  соответственно малы по сравнению с  $b$  и  $h$ . Другими словами, мы предполагаем, что поперечные измерения канала изменяются в пределах длины волны только на малую часть своей величины. Подобным же образом легко усмотреть что пренебрежение  $\frac{\theta''}{\theta'}$  по сравнению с  $\frac{F'}{F}$  равносильно аналогичному ограничению относительно скорости изменений  $\frac{db}{dx}$  и  $\frac{dh}{dx}$ .

Так как уравнение (4) не изменяется от перемены знака перед  $t$ , то полное решение при вышеуказанных ограничениях будет

$$\eta = b^{-1/2} h^{-1/4} \{ F(\tau - t) + f(\tau + t) \}, \quad (10)$$

где  $F$  и  $f$  суть произвольные функции.

Первый член этого выражения для  $\eta$  представляет волну, распространяющуюся в направлении положительной оси  $x$ . Скорость распространения в произвольной точке мы найдем из того соображения, что всякая отдельная фаза повторяется, когда  $\delta t$  и  $\delta x$  имеют одинаковые значения; таким образом она согласно (5) будет равна  $\sqrt{gh}$ , т. е. в точности тому же, что и в случае постоянного сечения. Таким же образом второй член выражения (10) представляет волну, распространяющуюся в направлении отрицательной оси  $x$ . В обоих случаях возвышение произвольной части волны изменяется при поступательном ее движении по закону  $b^{-1/2} h^{-1/4}$ .

Отражение прогрессивной волны в точке, где поперечное сечение канала внезапно меняется, было исследовано в § 176. Данные там формулы показывают, как и следовало ожидать, что амплитуда отраженной волны будет тем меньше, чем меньше изменение размеров сечения. Случай, когда переход от одного сечения к другому происходит не внезапно, а непрерывно, был изучен Рэлеем для частного закона изменения сечения<sup>1)</sup>. Оказывается, что практически отражение будет отсутствовать, если расстояние, внутри которого имеет место переход, есть незначительное кратное от длины волны; в противоположном случае, наоборот, результаты совпадают с результатами § 176.

Если мы примем на основании этих результатов, что прогрессивная волна не испытывает никакого заметного распадения при отражении, в том случае, когда можно пренебречь изменением сечения внутри длины волны, то закон амплитуд следует тотчас же из прин-

<sup>1)</sup> Rayleigh, On Reflection of Vibration at the Confines of two Media between which the Transition is gradual, Proc. Lond. Math. Soc. XI, 51 (1880) [Papers I, 460]; Theory of Sound, 2-е изд., London, 1894, § 148b.

ципа энергии<sup>1)</sup>. Из § 174 видно, что энергия волны пропорциональна длине, ширине и квадрату высоты; но легко показать, что длины волн в различных частях канала изменяются как соответствующие скорости распространения волн, т. е. как квадратные корни из средних глубин. Отсюда следует, в прежних обозначениях, что  $\eta^2 b h^{1/2}$  будет постоянным или что  $\eta$  пропорционально  $b^{-1/2} h^{-1/4}$ , а это и есть указанный закон Грина.

**§ 186.** В случае простого гармонического колебания, при котором  $\eta$  пропорционально  $\cos(\sigma t + \varepsilon)$ , уравнение (4) предыдущего параграфа представится в виде

$$\frac{g}{b} \frac{\partial}{\partial x} \left( h b \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \sigma^2 \eta = 0. \quad (1)$$

Некоторые наиболее интересные частные случаи могут быть легко разобраны.

1. Пусть в канале ширина будет пропорциональна расстоянию от конца  $x=0$ , а глубина везде будет одинаковой; предположим далее, что канал в своем устье ( $x=a$ ) соединен с открытым морем, в котором происходит приливное движение по закону

$$\eta = C \cos(\sigma t + \varepsilon). \quad (2)$$

Положив в уравнении (1)  $h = \text{const.}$  и  $b$  пропорционально  $x$ , получим

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + k^2 \eta = 0, \quad (3)$$

где

$$k^2 = \frac{\sigma^2}{gh}. \quad (4)$$

Отсюда следует

$$\eta = C \frac{J_0(kx)}{J_0(ka)} \cos(\sigma t + \varepsilon). \quad (5)$$

Кривая  $y = J_0(x)$  изображена на фиг. 44, которая показывает, как увеличивается амплитуда вынужденного колебания в зависимости от расстояния от устья, в то время как длина волны остается почти постоянной.

2. Предположим теперь, что изменяется только глубина, равномерно возрастающая от конца канала  $x=0$  вплоть до устья, в то время как ширина остается постоянной. Положив в уравнении (1)

$$h = h_0 \frac{x}{a}, \quad x = \frac{\sigma^2 a}{gh_0},$$

мы получим

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( x \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \kappa \eta = 0. \quad (6)$$

То решение этого уравнения, которое конечно для  $x=0$ , будет

$$\eta = A \left( 1 - \frac{\kappa x}{1^2} + \frac{\kappa^2 x^2}{1^2 2^2} - \dots \right), \quad (7)$$

или

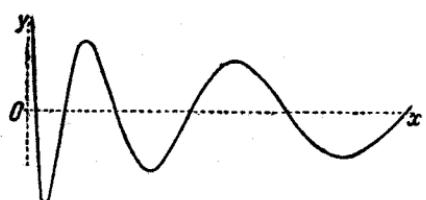
$$\eta = A J_0(2\kappa^{1/2} x^{1/2}), \quad (8)$$

<sup>1)</sup> Rayleigh, см. примечание на стр. 328.

или, наконец, введя опять временной множитель и определив постоянную, получим

$$\eta = C \frac{J_0(2x^{1/2}x^{1/2})}{J_0(2x^{1/2}a^{1/2})} \cos(\sigma t + \varepsilon). \quad (9)$$

Кривая  $y = J_0(\sqrt{x})$  (фиг. 42) (для ясности масштаб для  $y$  взят в двести раз больше такового для  $x$ ) показывает, как амплитуда непрерывно возрастает, а длина волны убывает, если итии вверх по каналу. Эти примеры могут служить для объяснения увеличения морских приливов, которые происходят в мелких морях и в лиманах.



Фиг. 42.

3. Если и ширина и глубина изменяются пропорционально расстоянию от конца  $x=0$ , то, положив  $b = b_0 \frac{x}{a}$ ,  $h = h_0 \frac{x}{a}$ , получим

$$x \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial \eta}{\partial x} + \kappa \eta = 0, \quad (10)$$

где, как и раньше,  $\kappa = \frac{\sigma^2 a}{gh_0}$ . Отсюда следует

$$\eta = A \left( 1 - \frac{\kappa x}{1 \cdot 2} + \frac{\kappa^2 x^2}{1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4} - \dots \right) \cos(\sigma t + \varepsilon). \quad (11)$$

Этот ряд равен  $\frac{J_1(2x^{1/2}x^{1/2})}{x^{1/2}x^{1/2}}$ , а постоянная  $A$  определяется при

сравнении с формулой (2). Этот случай находится в прекрасном соответствии с условиями в Бристольском канале (наблюдавшиеся там на различных станциях приливы хорошо согласуются с этой формулой)<sup>1)</sup>.

Присоединим сюда еще некоторые простые задачи относительно свободных колебаний.

4. Рассмотрим канал постоянной ширины и длины  $2a$ , дно которого равномерно понижается от обоих концов к середине. Если взять начало на одном конце, то движение в первой половине канала определяется, как выше, формулой

$$\eta = AJ_0(2x^{1/2}x^{1/2}), \quad (12)$$

где  $\kappa = \frac{\sigma^2 a^2}{gh_0}$  и  $h_0$  обозначает глубину в середине.

Очевидно, что нормальные колебания распадаются на два класса. В первом классе  $\eta$  в соответствующих точках обеих половин канала имеет противоположные значения, и поэтому в середине ( $x=a$ ) будет обращаться в нуль. Значения  $\sigma$  при этом будут определяться с помощью формулы

$$J_0(2x^{1/2}a^{1/2}) = 0. \quad (13)$$

Это значит, что если  $\kappa$  есть произвольный корень этого уравнения, то

$$\sigma = \frac{(gh_0)^{1/2}}{a} (\kappa a)^{1/2}. \quad (14)$$

<sup>1)</sup> Taylor G. J., Camb. Proc., XX, 320 (1921).

Во втором классе значения  $\eta$  будут симметричны относительно середины, так что в середине будем иметь  $\frac{\partial \eta}{\partial x} = 0$ . Это дает

$$J'_0(2x^{1/2}a^{1/2}) = 0. \quad (15)$$

Легко найти, что самое медленное колебание принадлежит несимметричному классу и соответствует самому малому корню уравнения (13); этот наименьший корень равен  $2x^{1/2}a^{1/2} = 0,7655 \pi$ ; отсюда следует

$$\frac{2\pi}{\sigma} = 1,306 \frac{4a}{(gh_0)^{1/2}}.$$

5. Предположим, что глубина канала изменяется по следующему закону:

$$h = h_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right), \quad (16)$$

где  $x$  обозначает расстояние от середины. Подставив  $h$  в уравнение (1) и положив  $b = \text{const.}$ , мы найдем

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \frac{\partial \eta}{\partial x} \right\} + \frac{\sigma^2}{gh_0} \eta = 0. \quad (17)$$

Если положить

$$\sigma^2 = n(n+1) \frac{gh_0}{a^2}, \quad (18)$$

то (17) будет иметь такой же вид, как общее уравнение зональных сферических функций (1) § 84.

В настоящей задаче  $n$  определяется из условия, что  $\eta$  для  $\frac{x}{a} = \pm 1$  должна быть конечной. Согласно § 85 это значит, что  $n$  есть целое число; нормальные колебания имеют, следовательно, тип

$$\eta = CP_n \left(\frac{x}{a}\right) \cos(\sigma t + \varepsilon), \quad (19)$$

где  $P_n$  есть зональная сферическая функция, а значение  $\sigma$  определяется из (18).

При наиболее медленном колебании ( $n=1$ ) профиль свободной поверхности есть прямая линия. Для канала постоянной глубины  $h_0$  и той же самой длины  $2a$  соответствующее значение  $\sigma$  равно  $\frac{\pi c}{2a}$ , где  $c = (gh_0)^{1/2}$ . Отсюда следует, что в рассматриваемом случае частота будет меньше в отношении  $2\sqrt{\pi}$ , или  $0,9003$ <sup>1)</sup>.

Вынужденные колебания, вызываемые возмущающей силой

$$X = f \cos(\sigma t + \varepsilon), \quad (20)$$

1) Что касается обобщений и применений к теории „сейшней“ в бухтах, см. Chry stall Some Results in the Mathematical Theory of Seiches, Proc. R. S. Edin., XXV, 328 (1904), и Trans. R. S. Edin., XLI, 599 (1915). Новейшие исследования можно найти у Proudman, Proc. Lond. Math. Soc. (2), XIV, 240 (1914) и Doodson, Trans. R. S. Edin., LII, 629 (1920); Jeffreys, M. N. R. A. S., Geophys. Suppl. I, 495 (1928).

могут быть получены согласно закону (14) § 168. Статическая форма свободной поверхности, очевидно, определяется так:

$$\bar{\eta} = \frac{f}{g} x \cos(\sigma t + \varepsilon), \quad (21)$$

и так как данная сила соответствует нормальному типу  $n = 1$ , то

$$\eta = \frac{f}{g \left(1 - \frac{\sigma^2}{\sigma_0^2}\right)} x \cos(\sigma t + \varepsilon), \quad (22)$$

где

$$\sigma_0^2 = \frac{2gh_0}{a^2}.$$

### Волны с конечной амплитудой

**§ 187.** Если возвышение волны сравнительно со средней глубиной не мало, то даже в канале постоянного прямоугольного сечения распространение волны совершается не без изменения ее формы. Эта задача была сначала разобрана Эри<sup>1)</sup> методом последовательных приближений. Он нашел, что в прогрессивной волне различные части движутся с различными скоростями, причем скорость волны, соответствующая возвышению  $\eta$ , приближенно дается формулой (б) § 175.

Более полное освещение вопроса можно получить методом, подобным тому, который применял Риман при изложении аналогичной акустической задачи (см. § 282).

Единственное допущение, которое мы теперь примем, состоит в том, что можно пренебречь вертикальным ускорением. Отсюда следует, как это было разъяснено в § 169, что горизонтальную скорость для всех точек сечения канала можно считать одинаковой. Уравнение движения будет, как раньше,

$$\frac{du}{dt} + u \frac{du}{dx} = - g \frac{d\eta}{dx}, \quad (1)$$

и уравнение неразрывности, как легко видеть, в случае прямоугольного сечения имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x} \{(h + \eta) u\} = - \frac{\partial \eta}{\partial t}, \quad (2)$$

или

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} = -(h + \eta) \frac{du}{dx}, \quad (3)$$

где  $h$  обозначает глубину.

<sup>1)</sup> См. сноску на стр. 329.