

Если уравнение (3) умножить на $f'(\eta)$, где $f(\eta)$ подлежит еще определению, и сложить с (1), то получим

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \right) \{f(\eta) + u\} = -(h + \eta) f'(\eta) \frac{\partial u}{\partial x} - g \frac{\partial \eta}{\partial x} = -(h + \eta) f'(\eta) \frac{\partial}{\partial x} \{f(\eta) + u\}, \quad (4)$$

если положить

$$(h + \eta) \{f'(\eta)\}^2 = g.$$

Уравнение (4) удовлетворяется с помощью

$$f(\eta) = 2c_0 \left\{ \left(1 + \frac{\eta}{h} \right)^{1/2} - 1 \right\}, \quad (5)$$

где $c_0 = \sqrt{gh}$. Если положить

$$P = f(\eta) + u, \quad Q = f(\eta) - u, \quad (6)$$

то будем иметь

$$\frac{\partial P}{\partial t} + (u + v) \frac{\partial P}{\partial x} = 0. \quad (7)$$

Аналогично получаем

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + (u - v) \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \quad (8)$$

где

$$v = (h + \eta) f'(\eta) = c_0 \left(1 + \frac{\eta}{h} \right)^{1/2}. \quad (9)$$

Отсюда следует, что P постоянно в (геометрической) точке, которая движется в направлении положительной оси x со скоростью

$$c_0 \left(1 + \frac{\eta}{h} \right)^{1/2} + u; \quad (10)$$

Q , напротив, будет постоянной в точке, которая движется в направлении отрицательной оси x со скоростью

$$c_0 \left(1 + \frac{\eta}{h} \right)^{1/2} - u. \quad (11)$$

Это значит, что всякое данное значение P передвигается вперед, а всякое данное значение Q передвигается назад со скоростями, данными формулами (10) и (11). Значения P и Q определяются с помощью значений η и u и обратно.

Возьмем в качестве примера начальное возмущение, ограниченное отрезком, для которого $a < x < b$, так что P и Q в начальный момент для $x < a$ и $x > b$ были равны нулю. Область, в которой P отлично от нуля, движется, следовательно, вперед, в то время как область, в которой Q отлично от нуля, движется назад; эти области после некоторого определенного промежутка времени разобщаются друг от друга и оставляют между собой пространство, в котором $P=0$ и $Q=0$, и жидкость, следовательно, находится в покое. Первона-

чальное возмущение распадается, таким образом, на две прогрессивные волны, которые распространяются в противоположных направлениях.

Для волны, распространяющейся в положительном направлении, имеем

$$Q = 0, \quad \frac{1}{2} P = u = 2c_0 \left\{ \left(1 + \frac{\eta}{h} \right)^{1/2} - 1 \right\}, \quad (12)$$

так что возвышение и скорость частиц будут связаны определенным соотношением (ср. § 171). Скорость волны дана формулами (10) и (12); в данном случае она будет равна

$$c_0 \left\{ 3 \left(1 + \frac{\eta}{h} \right)^{1/2} - 2 \right\}. \quad (13)$$

Если отвлечься от членов высшего порядка $\frac{\eta}{h}$, то это совпадает с результатом Эри [(6) § 175].

Аналогичные заключения можно сделать относительно волны, распространяющейся в отрицательном направлении ¹⁾.

Так как скорость волны растет вместе с возвышением, то оказывается, что в прогрессивной системе волн наклон на передней стороне делается все более крутым, а на задней стороне все более пологим, и здесь может быть достигнуто такое состояние, при котором мы более не вправе пренебрегать вертикальным ускорением. О том, что будет после этого момента, данная теория не может дать нам указаний; наблюдения, однако, показывают, что гребни стремятся в конце концов свернуться в завиток и затем распадаются.

Случай „высокого прилива“, когда имеет место внезапный переход от одного постоянного уровня к другому, можно рассмотреть с помощью приема стационарного движения (§ 175). Обозначая через Q объем, который протекает в единицу времени через сечение, ширина которого равна единице имеем

$$u_1 h_1 = u_2 h_2 = Q, \quad (14)$$

где индексы относятся к двум неизменяемым состояниям, а h_1 и h_2 означают глубины. Если мы рассмотрим массу жидкости, которая в данный момент заключена между двумя сечениями с разных сторон порога, то мы увидим, что количество движения этой массы в единицу времени возрастает на $gQ(u_2 - u_1)$, причем второе сечение предполагается находящимся направом от первого. Так как средние давления по сечению равны соответственно $\frac{1}{2} g \rho h_1$ и $\frac{1}{2} g \rho h_2$, то будем иметь

$$Q(u_2 - u_1) = \frac{1}{2} g (h_2^2 - h_1^2). \quad (15)$$

Отсюда и из (14) следует

$$Q^2 = \frac{1}{2} g h_1 h_2 (h_1 + h_2). \quad (16)$$

¹⁾ Эти результаты получаются также из уравнения (3) § 173, именно методом, данным Еагншоу; см. § 283.

Сообщив всей массе скорость — u_1 , мы получим волну, нахлынувшую на спокойную воду, скорость распространения которой в отрицательном направлении равна

$$u_1 = \sqrt{\frac{gh_2(h_1 + h_2)}{2h_1}}. \quad (17)$$

Скорость частиц в волне, двигающейся вперед, будет равна $u_1 - u_2$ в направлении движения. Эта величина положительна или отрицательна, смотря по тому, будет ли $h_2 \geq h_1$, т. е. смотря по тому, имеем ли мы поднимающуюся волну или спадающую.

Уравнение энергии, однако, будет нарушено, за исключением случая, когда разность уровней бесконечно мала. При стационарном движении, если частица движется вдоль линии тока на поверхности, то потеря ее энергии при прохождении порога будет равна

$$\frac{1}{2} \rho (u_1^2 - u_2^2) + g\rho (h_1 - h_2) \quad (18)$$

на единицу объема. Вследствие уравнений (14) и (16) это выражение принимает вид

$$\frac{g\rho (h_2 - h_1)^3}{4h_1h_2}. \quad (19)$$

Отсюда следует в той мере, в какой наши исследования вообще имеют значение, что скачок возвышения ($h_2 > h_1$) может распространяться без изменения далее, если только допустить, что имеет место рассеяние энергии в соответствующем размере в месте порога. Если же, однако, $h_2 < h_1$, то выражение (19) будет отрицательным и поэтому необходима в этом случае *прибавка* энергии. А тогда выходит, что отрицательный скачек, т. е. скачок понижения ни в коем случае не может далее продолжаться без изменения ¹⁾.

§ 188. При обстоятельном применении уравнений (1) и (3) к явлениям прилива пользуются обыкновенно методом последовательного приближения. В качестве примера мы рассмотрим канал, который одним концом ($x = 0$) соединяется с открытым морем, где возвышение дано формулой

$$\eta = a \cos \sigma t. \quad (20)$$

В первом приближении имеем

$$\frac{du}{dt} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} = -h \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (21)$$

Решения этих уравнений, совместимые с (20), будут

$$\left. \begin{aligned} \eta &= a \cos \sigma \left(t - \frac{x}{c} \right), \\ u &= \frac{ga}{c} \cos \sigma \left(t - \frac{x}{c} \right). \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

¹⁾ Rayleigh, On the Theory of Long Waves and Bores, Proc. Roy. Soc. A., XC, 324 (1914) [Papers, VI, 250].

Чтобы получить второе приближение, мы эти значения η и u подставим в (1) и (3); тогда получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -g \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{g^2 \sigma a^2}{2c^3} \sin 2\sigma \left(t - \frac{x}{c} \right), \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} &= -h \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{g \sigma a^2}{c^2} \sin 2\sigma \left(t - \frac{x}{c} \right). \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Если проинтегрировать эти уравнения обыкновенными методами, то решение, совместимое с (20), будет

$$\left. \begin{aligned} \eta &= a \cos \sigma \left(t - \frac{x}{c} \right) - \frac{3}{4} \frac{g \sigma a^2}{c^3} x \sin 2\sigma \left(t - \frac{x}{c} \right), \\ u &= \frac{ga}{c} \cos \sigma \left(t - \frac{x}{c} \right) - \frac{1}{8} \frac{g^2 a^2}{c^3} \cos 2\sigma \left(t - \frac{x}{c} \right) - \\ &\quad - \frac{3}{4} \frac{g^2 \sigma a^2}{c^4} x \sin 2\sigma \left(t - \frac{x}{c} \right). \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Прилагаемая фиг. 43 показывает, конечно, с преувеличенной амплитудой, профиль волны, вычисленный из первого из этих двух уравнений для некоторого частного случая. Необходимо отметить следующее: если зафиксируем внимание на какой-либо определенной точке канала, то заметим, что поднятие и падение воды происходят несимметрично, а именно падение требует более продолжительного времени, чем поднятие.

Присутствие множителя x вне знака тригонометрической функции в (24) указывает на существование границы, вне которой приближение не годится. Условие для применения способа последовательных приближений состоит, очевидно, в том, что $\frac{g \sigma a x}{c^3}$ должно быть мало. Если мы положим

$$c^2 = gh, \quad \lambda = \frac{2\pi c}{\sigma},$$

то эта дробь будет равна

$$2\pi \frac{a}{h} \frac{x}{\lambda}.$$

Отсюда следует, что как бы мало ни было отношение первоначального возвышения a к глубине, вышенаписанная дробь перестает быть малой, когда x есть достаточно большое кратное от длины волны (λ).

Необходимо отметить, что указанная сейчас граница в правой части фигуры уже превзойдена и что странные явления, которые начинают встречаться на заднем скате, происходят скорее от несовершенства наших методов вычисления, чем от действительных свойств волн. Если бы мы продолжили кривую, то нашли бы на заднем склоне вторичный максимум и минимум возвышения. Этим путем Эри пытался объяснить явление двойной высокой воды, которая наблюдается в некоторых реках; но на основании указанного выше соображения это заключение не может быть состоятельным¹⁾.

Но это затруднение не должно встретиться в канале, закрытом на некотором расстоянии от устья неподвижной стеной, или в случае вынужденных волн, образованных периодической силой, в канале, закрытом с обоих концов (§ 179). Для определения общего характера результатов, ожидавшихся в этих

¹⁾ Ms. Cowan, см. сноска на стр. 326.

случаях, однако, уже достаточно сказано, а что касается дальнейших частностей, то мы сошлемся на учебник Эри¹⁾.

Если разложить выражение для возвышения в какой-нибудь точке (x), например, формулы (24), на простые тригонометрические функции от времени, то оно будет состоять из двух членов, из которых второй представляет сверхприлив, или прилив второго порядка, так как он пропорционален a^2 ; частота этого прилива в два раза больше частоты начального приливного колебания, определяемого законом (20). Продолжая приближение, мы получим приливы еще большего порядка, частоты которых тогда в три, четыре и т. д. раза больше частот первоначального прилива.

Если вместо (20) возмущение в устье канала будет дано формулой

$$\zeta = a \cos \sigma t + a' \cos (\sigma' t + \varepsilon),$$

то легко определить, что при втором приближении получаются подобным образом приливы с периодами $\frac{2\pi}{\sigma + \sigma'}$ и $\frac{2\pi}{\sigma - \sigma'}$; они называются „комбинационными приливыми и аналогичны комбинационным тонам“ акустики, которые были исследованы впервые Гельмгольцем²⁾.

Распространение волн в двух измерениях

§ 189. Предположим сначала, что мы имеем плоский слой воды постоянной глубины h . Если пренебречь вертикальным ускорением, то горизонтальное движение для всех частиц одной и той же вертикали должно быть, как и раньше, одно и то же. Пусть оси x и y горизонтальны, u и v обозначают горизонтальные компоненты скорости в точке (x, y) и ζ есть соответствующее возвышение свободной поверхности над невозмущенным уровнем. Уравнение неразрывности получим, вычисляя поток жидкости в призматическом объеме, который имеет основанием элементарный прямоугольник $dx dy$; пренебрегая членами второго порядка, получим

$$\frac{\partial}{\partial x} (uh \delta y) dx + \frac{\partial}{\partial y} (vh \delta x) dy = - \frac{\partial}{\partial t} \{(\zeta + h) dx dy\};$$

откуда

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -h \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right). \quad (1)$$

При отсутствии возмущающих сил уравнения движения будут

$$\varrho \frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \varrho \frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial y},$$

где мы можем положить

$$p - p_0 = g \varrho (z_0 + \zeta - z),$$

если z_0 будет обозначать ординату свободной поверхности в невозмущенном состоянии. Тогда получим

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial y}. \quad (2)$$

¹⁾ Airy, Tides and Waves, § 198, ... и 308; см. также G. H. Darwin, Tides, Encycl. Britann. (9-е изд.), XXIII, 362, 363 (1888).

²⁾ Heimholz, Über Kombinationsstöne, Berl. Monatsber., 22 Mai 1856 [Wiss. Abh., I, 256]; и Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden, Crelle, LVII, 14 (1859) [Wiss. Abh., I, 318].

Исключив u и v , будем иметь

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right), \quad (3)$$

где, как и выше, $c^2 = gh$.

При применении к гармоническим колебаниям можно уравнения (2) и (3) упростить, вводя комплексный временной множитель $e^{i(\sigma t + \epsilon)}$ и в конечном счете отбрасывая мнимые части наших выражений. Это будет законным до тех пор, пока мы имеем дело только с линейными уравнениями. Тогда согласно уравнениям (2)

$$u = \frac{ig}{\sigma} \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad v = \frac{ig}{\sigma} \frac{\partial \zeta}{\partial y}, \quad (4)$$

а уравнение (3) будет

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + k^2 \zeta = 0, \quad (5)$$

где

$$k^2 = \frac{\sigma^2}{c^2}. \quad (6)$$

Условие, которое должно выполняться на вертикальной границе, получается как раз из формулы (4); оно имеет вид

$$\frac{\partial \zeta}{\partial n} = 0, \quad (7)$$

где ∂n обозначает элемент нормали к ограничивающей поверхности.

Если жидкость находится под действием малых возмущающих сил, колебаниями которых в пределах глубины можно пренебречь, то уравнения (2) заменяются через

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \Omega}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \Omega}{\partial y}, \quad (8)$$

где Ω есть потенциал этих сил.

Положив

$$\bar{\zeta} = -\frac{\Omega}{g}, \quad (9)$$

где $\bar{\zeta}$ обозначает статическое возвышение, соответствующее потенциальному Ω , можно уравнения (8) написать так:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial}{\partial x} (\zeta - \bar{\zeta}), \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -g \frac{\partial}{\partial y} (\zeta - \bar{\zeta}), \quad (10)$$

В случае простого гармонического колебания эти уравнения принимают вид

$$u = \frac{ig}{\sigma} \frac{\partial}{\partial x} (\zeta - \bar{\zeta}), \quad v = \frac{ig}{\sigma} \frac{\partial}{\partial y} (\zeta - \bar{\zeta}); \quad (11)$$

откуда, подставляя в уравнение неразрывности (1), мы получим

$$(A_1 + k^2) \zeta = A_1 \bar{\zeta}, \quad (12)$$

где, как раньше,

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (13)$$

и $k^2 = \frac{\sigma^2}{gh}$. Условие, которое должно быть выполнено на вертикальной границе, будет теперь

$$\frac{\partial}{\partial n} (\zeta - \bar{\zeta}) = 0. \quad (14)$$

§ 190. Уравнение (3) § 189 по виду тождественно с уравнением, которое встречается в теории поперечных колебаний равномерно натянутой мембранны. Еще более глубокая связь имеется, если принять во внимание граничные условия, с теорией цилиндрических звуковых волн ¹⁾. Действительно, многие результаты этой теории можно непосредственно перенести на плоские волны жидкости.

Чтобы получить свободные колебания слоя воды, ограниченного вертикальными стенками, мы должны найти решение уравнения

$$(\Delta_1 + k^2)\zeta = 0, \quad (1)$$

удовлетворяющее граничному условию

$$\frac{\partial \zeta}{\partial n} = 0. \quad (2)$$

Подобным же образом, как и в § 178, находим, что такое решение возможно только для определенных значений k , через которые в конце концов определяются периоды $\frac{2\pi}{kc}$ различных нормальных колебаний.

В случае если контур есть *прямоугольник*, причем начало координат помещается в одной из вершин, а оси x и y направлены вдоль двух сторон, то граничные условия будут иметь вид

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0 \text{ для } x=0 \text{ и } x=a$$

и

$$\frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0 \text{ для } y=0 \text{ и } y=b,$$

где a и b суть длины сторон, параллельных осям x и y . Самое общее выражение для ζ , которое удовлетворяет этим условиям, дается двойным рядом Фурье

$$\zeta = \sum_m \sum_n A_{m,n} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}, \quad (3)$$

где суммирования распространяются на все целые значения m и n между 0 и ∞ . Подставив это выражение в (1), мы найдем

$$k^2 = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right). \quad (4)$$

¹⁾ Rayleigh, Theory of Sound, § 338.

Если $a > b$, то мы получим самое медленное колебание, если положим $m = 1$, $n = 0$, откуда следует $ka = \pi$. Движение тогда всюду параллельно более длинной стороне прямоугольника; ср. § 178.

§ 191. В случае кругового слоя воды удобно взять начало координат в центре и ввести полярные координаты

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$$

Уравнение (1) предыдущего параграфа будет тогда

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \theta^2} + k^2 \zeta = 0. \quad (1)$$

Это уравнение, конечно, можно найти также и непосредственно.

Чтобы выяснить зависимость от θ , мы разложим ζ по теореме Фурье в ряд косинусов и синусов, кратных θ . Мы получим ряд, члены которого имеют вид

$$f(r) \cos s\theta, \quad f(r) \sin s\theta. \quad (2)$$

Вставляя в уравнение (1), найдем, что каждый из этих членов в отдельности должен удовлетворять уравнению (1) и что имеет место уравнение

$$f''(r) + \frac{1}{r} f'(r) + \left(k^2 - \frac{s^2}{r^2}\right) f(r) = 0. \quad (3)$$

Это уравнение (3) имеет тот же вид, как (14) § 101. Так как для $r = 0$ ζ должно быть конечным, то различные нормальные колебания можно выразить через

$$\begin{cases} \zeta = A_s J_s(kr) \cos s\theta \cos(\sigma t + \varepsilon), \\ \zeta = A_s J_s(kr) \sin s\theta \cos(\sigma t + \varepsilon), \end{cases} \quad (4)$$

где s может иметь любое из значений $0, 1, 2, 3, \dots$, а A_s есть произвольная постоянная. Возможные значения k определяются условием $\frac{d\zeta}{dr} = 0$ на контуре $r = a$ и это дает

$$J'_s(ka) = 0. \quad (5)$$

Соответствующие частоты (σ) колебаний будут тогда

$$\sigma = kc,$$

где $c = \sqrt{gh}$.

Для случая $s = 0$ движение будет симметричным относительно начала, и гребни и впадины волн образуют окружности. Наименьшие корни уравнений

$$J'_0(ka) = 0 \text{ или } J_1(ka) = 0 \quad (6)$$

суть

$$\frac{ka}{\pi} = 1,2197, \quad 2,2330, \quad 3,2383, \quad \dots \quad (7)$$

Эти значения стремятся к

$$\frac{ka}{\pi} = m + \frac{1}{4},$$

где m есть целое число ¹⁾. Отсюда следует

$$\frac{\sigma a}{c} = 3,832, 7,016, 10,173, \dots \quad (7a)$$

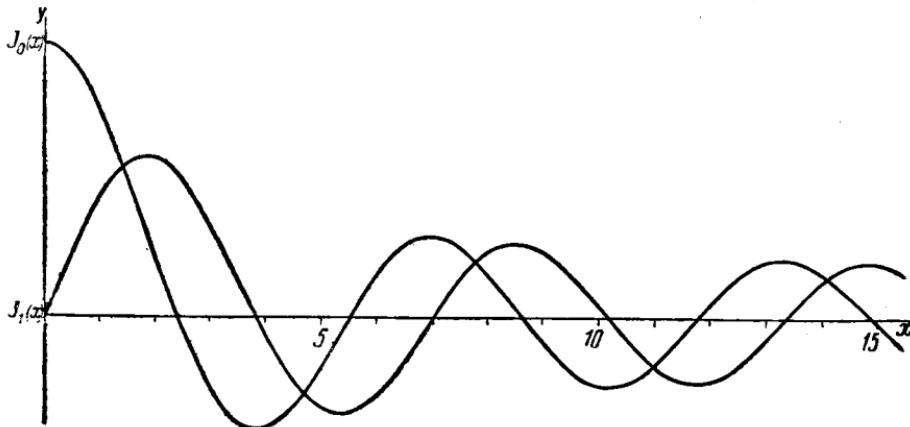
В m -м виде колебаний симметрического класса имеется m узловых окружностей, радиусы которых определяются из уравнения $\zeta = 0$ или

$$J_0(kr) = 0. \quad (8)$$

Корни этого уравнения (8) суть ²⁾

$$\frac{kr}{\pi} = 0,7655, 1,7571, 2,7546, \dots \quad (9)$$

Например, в первом симметрическом виде колебаний имеем одну узловую окружность, радиус которой $r = 0,628 a$. Форма сечения



Фиг. 44. Для ясности масштаб по оси ординат выбран в пять раз больше, чем по оси абсцисс.

свободной поверхности с плоскостью, проходящей через ось z , может быть усмотрена при любом из этих колебаний на основании вида кривой $y = J_0(x)$, начертенной на фиг. 44.

¹⁾ Stokes, On the Numerical Calculation of a Class of Definite Integrals and Infinite Series, Camb. Trans., IX (1850) [Papers, II, 355]. Необходимо отметить, что $\frac{ka}{\pi}$ равна $\frac{\tau_0}{\tau}$, где τ означает действительный период, а τ_0 время, которое требует прогрессивная волна, чтобы пройти со скоростью \sqrt{gh} расстояние, равное диаметру $2a$.

²⁾ Stokes, см. выше.

Если $s > 0$, то кроме узловых окружностей, определяемых уравнением

$$J_s(kr) = 0, \quad (10)$$

существует s равноотстоящих узловых диаметров.

Необходимо отметить, что вследствие равенства частот двух видов колебаний, представленных уравнениями (4), нормальные колебания теперь до известной степени будут неопределенными, т. е. мы можем подставить $\cos s(\theta - a_s)$ вместо $\cos s\theta$ или $\sin s\theta$, причем a_s произвольно. Узловые диаметры определяются тогда из

$$\theta - a_s = \frac{2m+1}{2s} \pi, \quad (11)$$

где $m = 0, 1, 2, \dots, s-1$. Неопределенность исчезает и частоты становятся неравными, когда контур хотя бы немного отклоняется от формы окружности.

В случае точно кругового контура наложением двух нормальных колебаний одинакового периода, но с различными фазами, получим решение

$$\zeta = C_s J_s(kr) \cos (\sigma t \mp s\theta + \varepsilon). \quad (12)$$

Это решение представляет систему волн, которые двигаются без изменения вокруг начала с угловой скоростью $\frac{\sigma}{s}$ в положительном или отрицательном направлении θ . Из выражений (4) § 189 видно, что движение каждой отдельной частицы будет эллиптически-гармоническим, причем одна ось каждого эллипса совпадает с радиусом-вектором. Все это согласно с общей теорией, на которую было указано в § 168.

Интереснейшие виды колебаний несимметрического класса суть те, которые соответствуют значению $s = 1$, например

$$\zeta = A J_1(kr) \cos \theta \cos (\sigma t + \varepsilon), \quad (13)$$

где k определяется уравнением

$$J'_1(ka) = 0. \quad (14)$$

Корни этого уравнения равны ¹⁾

$$\frac{ka}{\pi} = 0,586, 1,697, 2,717, \dots; \quad (15)$$

отсюда

$$\frac{\sigma a}{c} = 1,841, 5,332, 8,536, \dots \quad (15a)$$

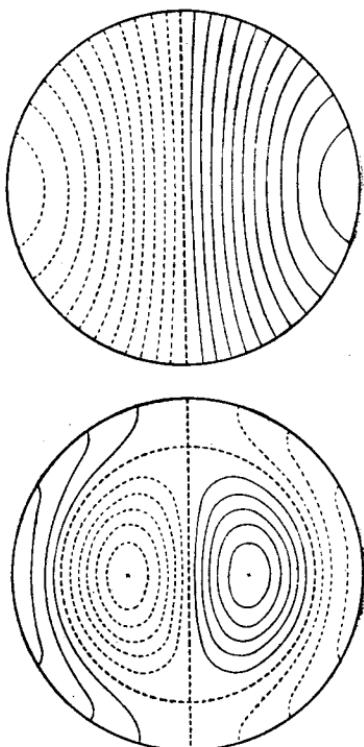
Мы имеем теперь узловой диаметр $(\theta = \frac{\pi}{2})$, положение которого,

¹⁾ См. учебник Рэлея, § 339. Общую формулу профессора Магона (J. Mc, Mahon) для вычисления корней уравнения $J'_s(ka) = 0$ можно найти в специальных учебниках.

однако, будет неопределенным, так как начало отсчета θ произвольно. Для соответствующих видов колебаний при эллиптическом контуре эта узловая линия определяется однозначно; именно она совпадала бы либо с большой, либо с малой осью, и частоты были бы не равны.

Обе фиг. 45 показывают контурные линии свободной поверхности для первых двух видов колебаний рассматриваемого класса. Эти линии встречают границу под прямым углом в согласии с общим граничным условием [(2) § 190]. Простые гармонические колебания отдельных частиц совершаются по прямым линиям, которые согласно выражениям (4) § 189 перпендикулярны к контурным линиям. Форма сечений свободной поверхности с плоскостями, проходящими через ось z , видна из кривой $y = J_1(x)$ на фиг. 44.

Первый из двух, нарисованных на фиг. 44 видов колебаний имеет из всех нормальных колебаний наиболее длинный период. В этом случае вода колеблется с одной стороны на другую примерно таким образом, как при самом медленном виде колебания в канале, закрытом с обоих концов (§ 178). При втором виде колебаний получается узловая линия в виде окружности, радиус которой дается наименьшим корнем уравнения $J_1(kr) = 0$; это дает $r = 0,719 a$ ¹⁾.



Фиг. 45.

Сравнение этих исследований с общей теорией малых колебаний, о которой говорилось в § 168, приводит к различным важным свойствам бесселевых функций.

Прежде всего, так как общая масса воды остается без изменения, то

$$\int_0^{2\pi a} \int_0^r \zeta r d\theta dr = 0, \quad (16)$$

¹⁾ Колебания жидкости в бассейне произвольной постоянной глубины были исследованы Poisson, *Sur les petites oscillations de l'eau contenue dans un cylindre*, Ann. de Gergonne, XIX, 225 (1829–1829); теория бесселевых функций была тогда еще не разработана, и результаты поэтому не могли быть интерпретированы. Полное решение проблемы вместе с числовыми результатами даны были Rayleigh, Phil. Mag. (5), I, 257 (1876) [Papers, I, 25].

Исследование в тексте, конечно, ограничивается случаем, когда глубина мала в сравнении с радиусом a . Решение Пуассона и Рэля для случая произвольной глубины будет приведено в гл. IX.

где ζ имеет одну из форм (4). Для $s > 0$ это уравнение выполняется вследствие присутствия тригонометрического множителя $\cos s\theta$ или $\sin s\theta$; в симметричном случае оно дает

$$\int_0^a J_0(kr) r dr = 0. \quad (17)$$

Далее, так как самое общее свободное движение системы можно получить наложением нормальных колебаний, из которых каждое имеет произвольную амплитуду и фазу, то всякое произвольное значение ζ , удовлетворяющее условию (16), может быть разложено в ряд вида

$$\zeta = \sum A_s \cos s\theta + B_s \sin s\theta, \quad (18)$$

где суммирования распространяются на все целые значения, включая нуль, и для каждого значения s на все корни k уравнения (5). Если коэффициенты A_s, B_s рассматривать как функции от t , то уравнение (18) представляет возведение поверхности в каждый произвольный момент времени. Величины A_s, B_s суть тогда нормальные координаты рассматриваемой системы (§ 168); выраженные через них формулы для кинетической и потенциальной энергии должны приводиться к суммам квадратов. Если рассматривать, например, потенциальную энергию

$$V = \frac{1}{2} g \rho \iint \zeta^2 dx dy, \quad (19)$$

то для этого необходимо, чтобы

$$\int_0^{2\pi} \int_0^a w_1 w_2 r d\theta dr = 0, \quad (20)$$

где w_1, w_2 суть два какие-то члена разложения (18). Если w_1, w_2 содержат косинус или синус различных кратностей от θ , то это соотношение можно тотчас же проверить интегрированием по θ ; если же

w_1 пропорционально $J_s(k_1 r) \cos s\theta$,

w_2 пропорционально $J_s(k_2 r) \cos s\theta$,

где k_1, k_2 обозначают два произвольных различных корня уравнения (5), то получаем

$$\int_0^a J_s(k_1 r) J_s(k_2 r) r dr = 0. \quad (21)$$

Общие результаты, частными случаями которых являются формулы (17) и (21), суть

$$\int_0^a J_0(kr) r dr = -\frac{a}{k} J'_0(ka) \quad (22)$$

[ср. (10) § 102] и

$$\begin{aligned} \int_0^a J_s(k_1 r) J_s(k_2 r) r dr = \\ = \frac{1}{k_1^2 - k_2^2} \{ k_2 a J'_s(k_2 a) J_s(k_1 a) - k_1 a J'_s(k_1 a) J_s(k_2 a) \}. \end{aligned} \quad (23)$$

Для $k_1 = k_2$ это последнее выражение становится неопределенным; вычисление с помощью обычных приемов дает

$$\int_{-\infty}^a \{J_s(ka)\}^2 r dr = \frac{1}{2k^2} [k^2 a^2 \{J'_s(ka)\}^2 + (k^2 a^2 - s^2) \{J_s(ka)\}^2]. \quad (24)$$

Математическое доказательство этих формул находится в учебниках, указанных на стр. 147.

Малые колебания *кольцеобразного* слоя воды, который ограничен концентрическими окружностями, теоретически легко рассмотреть с помощью бесселевых функций второго рода. Единственный, однако, интересный случай — это тот, когда оба радиуса приблизительно равны; практически мы имеем тогда канал кольцевого вида, и решение получается проще согласно § 178.

Указанный метод применяется также к случаю *кругового сектора* с произвольным углом¹⁾ или к слою воды, ограниченному двумя концентрическими дугами окружности и двумя радиусами.

Соответствующая задача для *эллиптического* бассейна более трудна, но приближенное значение частоты самого медленного колебания, которое имеет ось в качестве узловой линии, можно получить согласно данному в § 168 методу Рэлея.

Пусть уравнение контура будет

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0. \quad (25)$$

За компоненты перемещения возьмем

$$\left. \begin{aligned} \xi &= A \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) + B \frac{y^2}{b^2}, \\ \eta &= -B \frac{xy}{a^2}, \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

где постоянные выбраны таким образом, что на границе контура (25)

$$\frac{x\xi}{a^2} + \frac{y\eta}{b^2} = 0. \quad (27)$$

Понятно, что компоненты перемещения необходимо умножить еще на временной множитель $\cos \sigma t$. Соответствующее возвышение поверхности равно

$$\zeta = -h \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) = \frac{h}{a^2} (2A + B)x. \quad (28)$$

Допущение (26), однако, для рассматриваемого случая слишком общо, так как оно включает также циркуляционные движения. Условие, чтобы вектор вихря равнялся нулю, требует

$$(2a^2 + b^2) B = 2a^2 A. \quad (29)$$

Из (26) получаем

$$\begin{aligned} 2T &= \rho h \iint (\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) dx dy = \\ &= 2\pi abh \sigma^2 \left\{ \frac{1}{6} A^2 + \frac{1}{12} AB + \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{48} \frac{b^2}{a^2} \right) B^2 \right\} \sin^2 \sigma t, \end{aligned} \quad (30)$$

$$2V = \rho e \iint \zeta^2 dx dy = 2\pi abgh^2 \frac{(2A + B)^2}{8a^3} \cos^2 \sigma t. \quad (31)$$

¹⁾ См. Rayleigh, Theory of Sound, § 339.

Выразив, что среднее значение $T - V$ равно нулю и используя условие (29) мы найдем

$$\sigma^2 = \frac{18a^2 + 6b^2}{5a^2 + 2b^2} \cdot \frac{c^2}{a^2}, \quad (32)$$

где $c^2 = gh$.

При $b = a$ имеем $\frac{\sigma a}{c} = 1,852$, в то время как для круглого бассейна истинное значение $\frac{\sigma a}{c} = 1,841$. Приближенное значение хорошо согласуется с общим принципом (§ 168).

Не следует ожидать, что формула (32) для больших значений эксцентрикитета даст еще хорошие результаты. Для $\frac{b}{a} = \infty$ она совершенно не годится.

Различные виды продольных колебаний в эллиптическом канале были исследованы Жеффреем¹⁾ и Гольдштейном²⁾ и совсем недавно Хидаком³⁾ различными методами. Оказывается, что при наиболее важном виде колебаний $\frac{\sigma a}{c} = 1,8866$, если мы примем $\frac{b}{a} \rightarrow 0$, в формуле (32) получим $\frac{\sigma a}{c} = 1,8994$. Казалось, что формула эта дает хорошее приближение для значений $\frac{b}{a}$, меньших единицы.

§ 192. Рассмотрим пример *вынужденных* колебаний в круглом бассейне. Предположим, что возмущающие силы таковы, что возвышение согласно статической теории равно

$$\zeta = C \left(\frac{r}{a} \right)^s \cos s\theta \cos (\sigma t + \varepsilon). \quad (33)$$

Это дает $A_1 \zeta = 0$, и уравнение (12) § 189 приводится к виду (1). Решение его есть

$$\zeta = A J_s(kr) \cos s\theta \cos (\sigma t + \varepsilon), \quad (34)$$

где A обозначает произвольную постоянную. Граничное условие [(14) § 189] дает

$$A k a J'_s(ka) = sC;$$

отсюда следует, что

$$\zeta = C \frac{s J_s(kr)}{k a J'_s(ka)} \cos s\theta \cos (\sigma t + \varepsilon). \quad (35)$$

Случай $s = 1$ представляет интерес, так как он соответствует *неизменяющейся* горизонтальной силе; получаемый здесь результат можно сравнить с результатом § 179.

¹⁾ Jeffreys, Proc. Lond. Math. Soc. (2), XXIII, 455 (1924).

²⁾ Goldstein, там же, XXVIII, 91 (1927).

³⁾ Hidaka, Mem. Imp. Mar. Obs. (Japan), IV, 99 (1931). Эта работа содержит исследования свободных колебаний в бассейнах с другой формой очертания границ и с различными законами изменения глубины.

Случай $s=2$ дает грубое представление полусуточных приливов для бассейна на полюсе Земли, ограниченного небольшим кругом широты, причем, однако, вращение Земли не учитывается.

Мы обращаем внимание на то, что выражение для амплитуды колебаний в случае $J_s(ka)=0$ делается бесконечным. Это находится в согласии с общим положением, несколько примеров применения которого мы уже имели, именно: период возмущающей силы здесь равен периоду свободных нормальных колебаний, исследованных в предыдущем параграфе.

§ 193¹⁾. Если слой воды имеет переменную глубину, то (см. § 189) уравнение неразрывности будет

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{\partial(hu)}{\partial x} - \frac{\partial(hv)}{\partial y}. \quad (1)$$

Уравнения движения [(2) § 189] остаются, конечно, без изменения. После исключения ζ мы находим для свободных колебаний

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = g \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) \right\}. \quad (2)$$

Если временной множитель есть $e^{i(\sigma t + \epsilon)}$, то мы получим

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) + \frac{\sigma^2}{g} \zeta = 0. \quad (3)$$

Когда h зависит только от r — расстояния от начала, тогда уравнение (3) переходит в

$$h \Delta_1 \zeta + \frac{dh}{dr} \frac{\partial \zeta}{\partial r} + \frac{\sigma^2}{g} \zeta = 0. \quad (4)$$

В качестве простого примера рассмотрим круглый бассейн, глубина которого постепенно убывает от центра к краю по закону

$$h = h_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right). \quad (5)$$

Если ввести полярные координаты и принять, что ζ пропорционально $\cos s\theta$ или $\sin s\theta$, то уравнение (4) примет вид

$$\left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial r} - \frac{s^2}{r^2} \zeta \right) - \frac{2}{a^2} r \frac{\partial \zeta}{\partial r} + \frac{\sigma^2}{gh_0} \zeta = 0. \quad (6)$$

Тот интеграл этого уравнения который конечен в начале, находится легко в виде степенного ряда с возрастающими положительными показателями. Положив

$$\zeta = \sum A_m \left(\frac{r}{a} \right)^m, \quad (7)$$

¹⁾ Этот параграф представлял § 189 второго издания этого труда (1895). Подобное исследование дано Poinsagé, *Lecons de mécanique céleste*, III (Paris, 1910).

где для краткости тригонометрические множители опущены, получим следующее соотношение между последовательными коэффициентами:

$$(m^2 - s^2) A_m = \left\{ m(m-2) - s^2 - \frac{\sigma^2 a^2}{gh_0} \right\} A_{m-2},$$

или, если положить

$$\frac{\sigma^2 a^2}{gh_0} = n(n-2) - s^2, \quad (8)$$

где n — пока еще не обязательно целое число, то

$$(m^2 - s^2) A_m = (m-n)(m+n-2) A_{m-2} \quad (9)$$

Уравнение (6) будет удовлетворяться рядом вида (7), который начинается членом $A_s \left(\frac{r}{a} \right)^s$, причем остальные коэффициенты получим, если в (9) положим $m=s+2, s+4, \dots$. Таким образом, мы находим

$$\zeta = A_s \left(\frac{r}{a} \right)^s \left\{ 1 - \frac{(n-s-2)(n+s)}{2(2s+2)} \frac{r^2}{a^2} + \frac{(n-s-4)(n-s-2)(n+s)(n+s+2)}{2 \cdot 4 \cdot (2s+2)(2s+4)} \frac{r^4}{a^4} - \dots \right\}, \quad (10)$$

или, пользуясь употребительным способом обозначений гипергеометрических рядов:

$$\zeta = A_s \frac{r^s}{a^s} F \left(a, \beta, \gamma, \frac{r^2}{a^2} \right). \quad (11)$$

где

$$\alpha = \frac{1}{2} n + \frac{1}{2} s,$$

$$\beta = 1 + \frac{1}{2} s - \frac{1}{2} n,$$

$$\gamma = s+1.$$

Так как отсюда получаем $\gamma - \alpha - \beta = 0$, то для $r=a$ ряд не сходится кроме того случая, когда он конечен. Это же имеет место только тогда когда n есть целое число вида $s+2j$. Соответствующие значения σ получим из (8).

Для симметрических видов колебаний ($s=0$) имеем

$$\zeta = A_0 \left\{ 1 - \frac{j(j-1)}{1^2} \frac{r^2}{a^2} + \frac{(j+1)j(j-1)(j-2)}{1^2 \cdot 2^2} \frac{r^4}{a^4} - \dots \right\}, \quad (12)$$

где j может быть каким-нибудь целым числом, большим единицы¹⁾. Можно показать, что для $j-1$ значений r , лежащих между 0 и a , это выражение обращается в нуль, что указывает на существование $j-1$ круговых узловых линий. Значение σ определяется из

$$\sigma^2 = 4j(j-1) \frac{gh_0}{a^2}; \quad (13)$$

Отсюда следует $\frac{\sigma a}{\sqrt{gh_0}} = 2,828, 4,899, 6,928, \dots$ (13a)

¹⁾ Если мы положим $r/a = \sin^{1/2} \chi$, то ряд будет тождественно совпадать с разложением $P_{j-1}(\cos \chi)$; см. § 85 (4).

Таким образом самый медленный симметрический вид колебаний ($j=2$) имеет круговую узловую линию с радиусом $0,707 a$.

Из несимметрических видов колебаний для произвольного данного значения s самое медленное есть то, для которого $n=s+2$; в этом случае

$$\zeta = A_s \frac{r^s}{a^s} \cos s\theta \cos (\sigma t + \varepsilon),$$

где значение σ получается из формулы

$$\sigma^2 = 2s \frac{gh_0}{a^2}. \quad (14)$$

Для случая $s=1$ различные частоты получаются из выражения

$$\sigma^2 = (4j^2 - 2) \frac{gh_0}{a^2}; \quad (15)$$

отсюда следует

$$\frac{\sigma a}{\sqrt{gh_0}} = 1,414, 3,742, 5,831, \dots \quad (16)$$

При самых медленных из этих видов колебаний, которые соответствуют значениям $s=1, n=3$, свободная поверхность есть всегда *плоскость*. Из (15а) § 191 следует, что частота в 0,768 раз больше, чем частота соответствующего вида колебаний в круглом бассейне с *постоянной* глубиной h_0 и тем же радиусом.

Как в § 192, мы могли бы написать сразу выражение для приливов, которые происходят от неизменяющейся горизонтальной периодической силы или вообще для случая, когда возмущающая сила имеет потенциал вида

$$\Omega \text{ пропорционально } r^s \cos s\theta \cos (\sigma t + \varepsilon).$$

§ 194. В заключение нашего изучения длинных волн на плоских водных поверхностях мы рассмотрим еще распространение возмущений, которые идут от центра в неограниченном слое постоянной глубины. Для простоты мы ограничимся случаем симметрии, при котором возмущение ζ есть функция расстояния r от начала возмущения. Это приведет нас к некоторым своеобразным и важным явлениям, которые встречаются при распространении волн в двух измерениях.

Исследование периодического возмущения требует применения бесселевой функции (нулевого порядка) второго рода, относительно которой мы сделаем некоторые предварительные замечания.

Чтобы решить уравнение

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{d\varphi}{dz} + \varphi = 0 \quad (1)$$

при помощи определенных интегралов, мы возьмем¹⁾

$$\varphi = \int e^{-zt} T dt, \quad (2)$$

где T есть функция комплексного переменного t , а пределы интегрирования:

¹⁾ Forsyth, Differential Equations, гл. VII. Систематическое применение этого метода к теории бесселевых функций принадлежит Напке, Die Zylinderfunktionen erster und zweiter Art, Math. Ann., I, 467 (1869).

постоянны, но еще неопределены. После интегрирования по частям будем иметь

$$z \frac{d^2\varphi}{dz^2} + \frac{d\varphi}{dz} + z\varphi = -[(1+t^2)e^{-zt} \cdot T] + \int \left(\frac{1}{dt} \{(1+t^2)T\} - tT \right) e^{-zt} dt.$$

Уравнение (1) удовлетворяется, таким образом, если положить

$$\varphi = \int \frac{e^{-zt} dt}{\sqrt{1+t^2}} \quad (3)$$

при условии, что выражение

$$\sqrt{1+t^2} e^{-zt}$$

обращается в нуль при верхнем и нижнем пределах интегрирования. Следовательно, предполагая, что z действительно и положительно или что по крайней мере действительная часть z положительна, мы можем взять интеграл (3) вдоль пути, который соединяет две какие-то из точек i , $-i$, $+\infty$ в плоскости t ; но два различные пути, соединяющие одну и ту же пару точек, не обязательно должны давать один и тот же результат, если они содержат между собой одну из точек разветвления ($t = \pm i$) функции, находящейся под знаком интеграла.

Таким образом, мы получаем, например, решение в виде

$$\varphi_1 = \int_{-i}^i \frac{e^{-zt} dt}{\sqrt{1+t^2}},$$

где путь интегрирования есть та часть мнимой оси, которая лежит между пределами, и для квадратного корня берется то значение, которое для $t=0$ равно 1. Положив

$$t = \xi + i\eta,$$

получим

$$\varphi_1 = i \int_{-1}^{+1} \frac{e^{-iz\eta} d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} = 2i \int_0^{1/2 \pi} \cos(z \cos \theta) d\theta = i\pi J_0(z), \quad (4)$$

а это есть уже известное решение (§ 100).

Взяв интеграл (3) вдоль оси η от точки $(0, i)$ до начала и затем вдоль оси ξ до точки $(\infty, 0)$, мы получим независимое от (4) решение, которое при одинаковом условии относительно квадратного корня равно

$$\varphi_2 = \int_i^0 \frac{e^{-iz\eta} d(i\eta)}{\sqrt{1-\eta^2}} + \int_0^\infty \frac{e^{-z\xi} d\xi}{\sqrt{1+\xi^2}} = \int_0^\infty \frac{e^{-z\xi} d\xi}{\sqrt{1+\xi^2}} - i \int_0^1 \frac{e^{-iz\eta} d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}}. \quad (5)$$

Если мы возьмем другое пары пределов интегрирования и другие пути то мы можем получить другие выражения для φ , но все они должны быть эквивалентны либо φ_1 , либо φ_2 , либо их линейным комбинациям. В особенности важны некоторые другие выражения φ_3 . Известно, что значение интеграла (3) равно нулю, если он берется по замкнутой кривой, вне которой лежат точки разветвления ($t = \pm i$). Возьмем сначала в качестве такой замкнутой кривой прямоугольник, две стороны которого совпадают с положительными частями осей ξ и η , за исключением малой полуокружности около точки $t=i$, в то время как другие две стороны прямоугольника лежат в бесконечности. Легко видеть, что части интеграла, которые зависят от бесконечно далеких сторон, обращаются в нуль или потому, что множитель $e^{-z\xi} \rightarrow 0$ для $\xi \rightarrow \infty$, или же вследствие бесконечно быстрого колеба-

ния функции $\frac{e^{-iz\eta}}{\eta}$, когда $\eta \rightarrow \infty$. Мы можем таким образом путь, которым мы пользовались при образовании решения (5), заменить путем, который идет вдоль оси η от точки $(0, i)$ к точке $(0, i, \infty)$, при условии, что сохраняется непрерывность квадратного корня. Так как переменная t про-
бегает малый полукруг в направлении, противоположном часовой стрелке,
то квадратный корень изменяется непрерывно от $\sqrt{1-\eta^2}$ до $i\sqrt{\eta^2-1}$.
Следовательно,

$$\varphi_2 = \int_i^{\infty} \frac{e^{-iz\eta} d(i\eta)}{i\sqrt{\eta^2-1}} = \int_1^{\infty} \frac{e^{iz\eta} d\eta}{\sqrt{\eta^2-1}} = \int_0^{\infty} e^{-iz \operatorname{ch} u} du. \quad (6)$$

Мы покажем, что это решение особенно подходит для случая расходящихся волн. Другой метод для получения этого решения будет дан в главе X.

Приравняв друг другу мнимые части в выражениях (5) и (6), получим формулу

$$J_0(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin(z \operatorname{ch} u) du, \quad (7)$$

которая принадлежит Меллеру¹⁾.

Вследствие физической важности решения (6) введем для него особое обозначение. Мы полагаем²⁾

$$D_0(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-iz \operatorname{ch} u} du, \quad (8)$$

а это эквивалентно с

$$D_0(z) = -Y_0(z) - iJ_0(z), \quad (9)$$

где³⁾

$$Y_0 = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(z \operatorname{ch} u) du. \quad (10)$$

Приравняв друг другу действительные части в выражениях (5) и (6) получим также

$$Y_0(z) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-z \operatorname{sh} u} du + \frac{2}{\pi} \int_0^{1/2\pi} \sin(z \cos \vartheta) d\vartheta. \quad (11)$$

На том же основании можно заменить путь интегрирования, использованный для φ_2 , прямой линией, проведенной от точки $(0, i)$ параллельно

¹⁾ M e h l e r, Math. Ann., V (1872).

²⁾ Применение простого обозначения для случая расходящихся волн можно считать оправданным. Наше $D_0(z)$ эквивалентно обозначению Нильсена — $iH_0^0(z)$ в форме, слегка измененной Ватсоном.

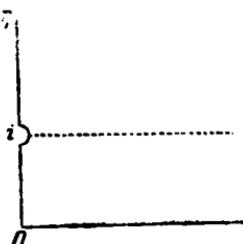
³⁾ Это есть обозначение, рекомендуемое Ватсоном. Мы обращаем, однако, внимание читателя на то, что тот же самый символ другими авторами применяется в другом смысле. С чисто математической точки зрения выбор решения „второго рода“ есть в сущности дело соглашения, так как дифференциальное уравнение (1) удовлетворяется также тогда, когда к решению прибавить постоянное, умноженное на $J_0(z)$. Таблицы функции $Y_0(z)$, определяемые (10), можно найти и в учебнике Ватсона.

оси ξ (см. пунктирную линию фиг. 46). Чтобы обеспечить непрерывность $\sqrt{1-t^2}$, заметим, что значение этого корня изменяется от $\sqrt{1-\eta^2}$ приблизительно до $e^{1/4 i\pi} \sqrt{2\xi}$, когда t пробегает нижний квадрант малого полукруга. Если положить $t = 1 + \xi$, то вдоль пунктирной линии будем иметь

$$\sqrt{1+t^2} = e^{1/4 i\pi} \sqrt{2\xi - i\xi^2},$$

где необходимо выбрать то значение корня, которое действительно и положительно, когда ξ бесконечно мало. Следовательно, мы имеем

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \int_i^{\infty+i} \frac{e^{-z(\xi+i)} d(\xi+i)}{e^{1/4 i\pi} \sqrt{2\xi - i\xi^2}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i(z+1/4\pi)} \int_0^\infty \frac{e^{-z\xi}}{\xi^{1/2}} \left(1 - \frac{1}{2} i\xi\right)^{1/2} d\xi. \end{aligned} \quad (12)$$



Фиг. 46.

Если разложить двучлен в биномиальный ряд и интегрировать почленно, то найдем

$$D_0(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} e^{-i(z+1/4\pi)} \left\{ 1 + \frac{i^2}{1!} \left(\frac{i}{\pi z}\right) + \frac{i^2 \cdot 3^2}{2!} \left(\frac{i}{8z}\right)^2 + \dots \right\}, \quad (13)$$

причем используются формулы

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\infty e^{-z\xi} \xi^{-1/2} d\xi &= \frac{\Pi(-\frac{1}{2})}{z^{1/2}} = \frac{\pi^{1/2}}{z^{1/2}}, \\ \int_0^\infty e^{-z\xi} \xi^{m-1/2} d\xi &= \frac{\Pi(m - \frac{1}{2})}{z^{m+1/2}} = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2m-1)}{2^m z^m} \frac{\pi^{1/2}}{z^{1/2}}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Если разделить действительные и мнимые части (13), то получим из сравнения с (9)

$$J_0(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \left\{ R \sin\left(z + \frac{1}{4}\pi\right) - S \cos\left(z + \frac{1}{4}\pi\right) \right\}, \quad (15)$$

$$Y_0(z) = -\left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \left\{ R \cos\left(z + \frac{1}{4}\pi\right) + S \sin\left(z + \frac{1}{4}\pi\right) \right\}, \quad (16)$$

где

$$\left. \begin{aligned} R &= 1 - \frac{1^2 \cdot 3^2}{2!(8z)^2} + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2}{4!(8z)^4} - \dots, \\ S &= \frac{1^2}{1!(8z)} - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{3!(8z)^3} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Ряды в формулах (13) и (17) принадлежат к „полусходящимся“ или асимптотическим рядам; это значит, что хотя для достаточно больших значений z следующие друг за другом члены некоторое время убывают, но затем, однако, они опять начинают расти; если же остановимся на некотором

малом члене, то мы получим приблизительно верный результат¹⁾. Это доказывается исследованием остаточного члена, стоящего после m -го члена разложения выражения (12).

Из (15) видно, что с возрастанием абсолютной величины корни уравнения $J_0(z) = 0$ приближаются к корням уравнения

$$\sin\left(z + \frac{1}{4}\pi\right) = 0. \quad (18)$$

Ряд (13) дает полное заключение относительно поведения функции $D_0(z)$ для больших значений z . Когда, напротив, z мало, то $D_0(z)$ согласно (8) очень велико. Приближенную формулу для этого случая можно получить следующим образом. Если мы обратимся к уравнению (11), то получим

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-z \sin u} du &= \int_1^\infty e^{-1/2 z(v-1/v)} \frac{dv}{v} = \\ &= \int_1^\infty \frac{e^{-1/2 zv}}{v} \left\{ 1 + \frac{z}{2v} + \frac{1}{2!} \left(\frac{z}{2v}\right)^2 + \dots \right\} dv = \\ &= \int_{1/2 z}^\infty \frac{e^{-w}}{w} \left\{ 1 + \frac{z^2}{4w} + \frac{1}{2!} \left(\frac{z^2}{4w}\right)^2 + \dots \right\} dw. \end{aligned} \quad (19)$$

Первый член дает²⁾

$$\int_{1/2 z}^\infty \frac{e^{-w}}{w} dw = -\gamma - \ln \frac{1}{2} z + \dots, \quad (20)$$

а остальные члены по сравнению с этим малы. Таким образом из (9) и (11) получаем

$$D_0(z) = -\frac{2}{\pi} \left(\ln \frac{1}{2} z + \gamma + \frac{1}{2} i\pi + \dots \right). \quad (21)$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{z \rightarrow 0} z D'_0(z) = -\frac{2}{\pi} \text{³⁾.} \quad (22)$$

¹⁾ Ср. Whittaker a. Watson, Modern Analysis, гл. VIII; Bromwich, Theory of Infinite series, London, 1908, гл. XI; Watson, гл. VII; Gray and Mathews, 2-е изд., гл. V. Асимптотическое разложение для J_0 получено Пуассоном, Journal de l'École Polyth., тетр. 19, стр. 349 (1823); строгое исследование этих и подобных разложений дано Стоксом, см. примечание на стр. 359. „Остаточный член“ исследован Липшицем, Crelle, LVI, 189 (1859); ср. Напке I, см. примечание на стр. 367.

²⁾ De Morgan, Differential and Integral Calculus, London, 1842, стр. 659.

³⁾ Бесселевы функции второго рода впервые были обстоятельно изучены Стоксом и приведены к виду, аналитически употребительному для применения к физическим проблемам, в работе, опубликованной в Camb. Trans. С помощью современной теории функций методы были упрощены Липшицем и другими, а также (особенно с физической точки зрения) Рэлеем. Эти последние методы и применены в тексте

Формула (21) достаточна для наших целей, но полное выражение мы можем получить теперь также в форме ряда по возрастающим степеням сравнением с общим решением уравнения (1). Именно мы имеем¹⁾

$$\varphi = AJ_0(z) + B \left\{ J_0(z) \ln z + \frac{z^2}{2^2} - s_2 \frac{z^4}{2^2 \cdot 4^2} + s_3 \frac{z^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} - \dots \right\}, \quad (23)$$

где

$$s_m = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{m}.$$

Чтобы показать, что для малых значений z это выражение совпадает с (21), мы должны положить

$$B = -\frac{2}{\pi}, \quad A = -\frac{2}{\pi} \left(\ln \frac{1}{2} z + \gamma + \frac{1}{2} i\pi \right); \quad (24)$$

тогда будем иметь

$$D_0(z) = -\frac{2}{\pi} \left(\ln \frac{1}{2} z + \gamma + \frac{1}{2} i\pi \right) J_0(z) - \\ - \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{z^2}{2^2} - s_2 \frac{z^4}{2^2 \cdot 4^2} + s_3 \frac{z^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} - \dots \right\}. \quad (25)$$

§ 195. Мы можем теперь перейти к задаче, поставленной в начале § 194. Для определенности положим, что возмущение происходит благодаря переменному давлению p_0 , которое действует на поверхность. Тогда уравнения движения § 189 переходят в

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_0}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_0}{\partial y}, \end{cases} \quad (1)$$

в то время как

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -h \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (2)$$

остается без изменения.

Если мы введем в (1) потенциал скоростей, то получим после интегрирования

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = g\zeta + \frac{p_0}{\rho}. \quad (3)$$

Мы можем предположить, что p_0 обозначает изменяющееся давление и произвольная функция от t заключена в φ , которая выбрана так, что в областях, не затронутых возмущением, $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$. Исключив ζ с помощью (2), получим

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = gh A_1 \varphi + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_0}{\partial t}. \quad (4)$$

После определения φ значение ζ найдем из уравнения (3).

¹⁾ Forsyth, Differential Equations, гл. VI, заметка I; Watson, Bessel Functions, стр. 59, 60.

Предположим теперь, что p_0 только внутри небольшой¹⁾ области около начала имеет заметную величину. Если умножить обе части уравнения (4) на $dx dy$ и интегрировать по этой области, то можно пренебречь, по сравнению с остальными, членом в левой части уравнения, и мы получим

$$-\int \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds = \frac{1}{gh} \frac{d}{dt} \iint p_0 dx dy, \quad (5)$$

где ds есть элемент границы области, а δn — горизонтальная нормаль к ds , проведенная наружу. Начало можно, таким образом, рассматривать как двухмерный источник с мощностью

$$f(t) = \frac{1}{gh} \frac{dP_0}{dt}, \quad (6)$$

где P_0 обозначает полную результирующую возмущающую силу.

Если мы перейдем к полярным координатам и положим $gh = c^2$, то должны будем удовлетворить уравнению

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) \quad (7)$$

при условии

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left(-2\pi r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = f(t), \quad (8)$$

где $f(t)$ обозначает мощность определенного только что источника.

В случае периодического источника мощности $e^{i\sigma t}$ уравнение (7) принимает вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + k^2 \varphi = 0, \quad (9)$$

где $k = \frac{\sigma}{c}$. Решение этого уравнения есть

$$\varphi = \frac{1}{4} D_0(kr) e^{i\sigma t}; \quad (10)$$

здесь постоянный множитель определен, как и в формуле (22) § 194. Если взять действительную часть, то будем иметь решение

$$\varphi = \frac{1}{4} \{ J_0(kr) \sin \sigma t - Y_0(kr) \cos \sigma t \}, \quad (11)$$

которое соответствует источнику мощности $f(t) = \cos \sigma t$.

Для больших значений kr формула (10) принимает вид

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{8\pi kr}} e^{i\sigma(l-r/c)-1/4 i\pi}, \quad (12)$$

¹⁾ Это предположение обозначает, что измерения области малы в сравнении с длиной полученной волны, понимаемой в общем смысле § 172. С другой стороны, необходимо принять, что по отношению к h измерения велики.

Выражение $t - r/c$ показывает, что мы в самом деле получили решение, которое подходит для изображения расходящихся волн.

Следовательно, амплитуда кольцеобразных волн в конечном счете обратно пропорциональна квадратному корню расстояния от начала.

§ 196. Решение, которое мы получили для случая простого гармонического источника $e^{i\omega t}$, можно выразить так

$$2\pi\varphi = \int_0^\infty e^{i\sigma \left(t - \frac{r}{c} \operatorname{ch} u\right)} du. \quad (13)$$

Эта форма допускает обобщение с помощью теоремы Фурье; формула

$$2\pi\varphi = \int_0^\infty f\left(t - \frac{r}{c} \operatorname{ch} u\right) du \quad (14)$$

должна представлять возмущение, происходящее от источника $f(t)$, лежащего в начале¹⁾. Конечно, $f(t)$ должна быть такой, чтобы интеграл сходился; это условие, понятно, будет всегда выполнено, когда источник был в действии только в течение конечного времени. Более полная формула, которая обнимает как склоняющиеся, так и расходящиеся волны, будет

$$2\pi\varphi = \int_0^\infty f\left(t - \frac{r}{c} \operatorname{ch} u\right) du + \int_0^\infty F\left(t + \frac{r}{c} \operatorname{ch} u\right) du. \quad (15)$$

Решение (15) может быть проверено подстановкой в дифференциальное уравнение (7) и подчинением некоторым условиям. Если мы отдельно рассмотрим первый член (15), то найдем

$$\begin{aligned} 2\pi \left\{ c^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right\} &= \\ &= \int_0^\infty \left\{ \operatorname{sh}^2 u f''\left(t - \frac{r}{c} \operatorname{ch} u\right) - \frac{c}{r} \operatorname{ch} u f'\left(t - \frac{r}{c} \operatorname{ch} u\right) \right\} du = \\ &= \frac{c^2}{r^2} \int_0^\infty \frac{\partial^2}{\partial u^2} f\left(t - \frac{r}{c} \operatorname{ch} u\right) du = -\frac{c}{r} \left[\operatorname{sh} u f'\left(t - \frac{r}{c} \operatorname{ch} u\right) \right]_{u=0}^{u=\infty} \end{aligned}$$

Это выражение, очевидно, обращается в нуль, когда $f(t) = 0$ для отрицательных значений t , превосходящих определенную границу²⁾.

¹⁾ Содержание § 196, 197 заимствовано из работы автора «On Wave Propagation in Two Dimensions», Proc. Lond. Math. Soc. (1), XXXV, 141 (1902). Результат, эквивалентный уравнению (14), был найден (другим путем) Levi-Civita, Nuovo Cimento (4), VI (1897).

²⁾ Доказательство совершенно аналогично данному Леви-Чивита.

Далее при тех же самых условиях имеем

$$\begin{aligned} 2\pi r \frac{\partial \phi}{\partial r} &= \frac{r}{c} \int_0^\infty \operatorname{ch} u \cdot f' \left(t - \frac{r}{c} \operatorname{ch} u \right) du = \\ &= \frac{r}{c} \int_0^\infty (\operatorname{sh} u + e^{-u}) f' \left(t - \frac{r}{c} \operatorname{ch} u \right) du = \\ &= - \left[f \left(t - \frac{r}{c} \operatorname{ch} u \right) \right]_{u=0}^{u=\infty} + \frac{r}{c} \int_0^\infty e^{-u} f' \left(t - \frac{r}{c} \operatorname{ch} u \right) du = \\ &= f \left(t - \frac{r}{c} \right) + \frac{r}{c} \int_0^\infty e^{-u} f' \left(t - \frac{r}{c} \operatorname{ch} u \right) du. \end{aligned}$$

Предел этого выражения для $r \rightarrow 0$ равен $f(t)$; высказанное выше утверждение относительно мощности источника в (14) таким образом проверено.

Подобный прием применим и ко второму члену (15), при условии, что $F(t)$ для положительных значений t , которые превосходят определенную границу, обращается в нуль.

§ 197. Мы можем теперь применить формулу (14), чтобы исследовать действие переменного источника, которое меняется согласно какому-нибудь простому закону.

Если мы предположим, что до момента $t=0$ все находится в покое, так что $f(t)$ для отрицательных значений t равно нулю, тогда из (14) или из равнозначного выражения

$$2\pi\varphi = \int_{-\infty}^t \frac{f(\theta) d\theta}{\left\{ (t-\theta)^2 - \frac{r^2}{c^2} \right\}^{1/2}} \quad (16)$$

следует, что φ всюду остается равно нулю, пока $t < \frac{r}{c}$. Если, сверх того, источник действует только в течение конечного времени τ , так что $f(t)=0$ для $t > \tau$, то для $t > \tau + \frac{r}{c}$ имеет место

$$2\pi\varphi = \int_0^t \frac{f(\theta) d\theta}{\left\{ (t-\theta)^2 - \frac{r^2}{c^2} \right\}^{1/2}}. \quad (17)^1)$$

¹⁾ С аналитической точки зрения необходимо заметить, что для $p_0=0$ уравнение (4) может быть написано в виде

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial (ict)^2} = 0$$

и что (17) состоит из совокупности решений известного типа

$$\{ x^2 + y^2 + (ict)^2 \}^{-1/2}.$$

Это выражение обычно не обращается в нуль; волна, таким образом, с задней стороны не ограничена так резко, как с передней, а наоборот, имеет нечто вроде хвоста¹⁾, форма которого, когда $t - \frac{r}{c}$ велико по сравнению с τ , определяется уравнением

$$2\pi\varphi = \frac{1}{(r^2 - \frac{r^2}{c^2})^{1/2}} \int_0^\tau f(\theta) d\theta. \quad (18)$$

Возышение ζ в произвольной точке выражается с помощью (3) через

$$\zeta = \frac{1}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (19)$$

Отсюда следует, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \zeta dt = 0, \quad (20)$$

если начальные и конечные значения φ обращаются в нуль. Можно показать, что это будет иметь место, когда $f(t)$ конечно и интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt \quad (21)$$

сходится. Смысл этих условий можно усмотреть из уравнения (6). Отсюда следует, что даже тогда, когда $\frac{dP_0}{dt}$ все время будет положительно, так что поток в окрестности начала направлен целиком наружу, волна, которая подходит к произвольной точке, будет состоять не только (как в соответствующей проблеме одного измерения) из одного возышения, но в простейшем случае из одного возышения, сопровождаемого понижением.

Чтобы ближе исследовать распространение единичной волны в одном частном случае, возьмем

$$f(t) = \frac{\tau}{t^2 + \tau^2}; \quad (22)$$

это значит, что P_0 возрастает от одного постоянного значения к другому по закону

$$P_0 = A + B \operatorname{arctg} \frac{t}{\tau}. \quad (23)$$

Момент, в который возмущающее давление начинается или прекращается, является теперь неопределенным, но промежуток времени, в котором оно становится ощутительным, можно сделать как угодно малым, уменьшая τ . Для проведения вычислений удобнее взять вместо (22)

$$f(t) = \frac{1}{t - i\tau} \quad (24)$$

¹⁾ Наличие хвоста в случае цилиндрических электрических волн было замечено Хевисайдом: Heaviside, Phil. Mag. (5), XXVI (1888) [Electrical Papers, II].

и в конце оставить только минимую часть. Тогда будем иметь

$$2\pi\varphi = \int_0^\infty \frac{du}{t - \frac{r}{c} \operatorname{ch} u - i\tau} = 2 \int_0^1 \frac{dz}{t - \frac{r}{c} - i\tau - \left(t + \frac{r}{c} - i\tau\right)z^2}, \quad (25)$$

где $z = \operatorname{th}^{1/2} u$.

Теперь положим

$$\left. \begin{aligned} t - \frac{r}{c} - i\tau &= a^2 e^{-2ia}, \\ t + \frac{r}{c} - i\tau &= b^2 e^{-2ib}, \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

где мы можем считать, что a, b положительны и углы α, β лежат между 0 и $\frac{1}{2}\pi$. Так как

$$\left. \begin{aligned} a^4 &= \left(t - \frac{r}{c}\right)^2 + \tau^2, & b^4 &= \left(t + \frac{r}{c}\right)^2 + \tau^2, \\ \operatorname{tg} 2a &= \frac{c\tau}{ct - r}, & \operatorname{tg} 2\beta &= \frac{c\tau}{ct + r}, \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

то получается, что $a \geq b$, смотря по тому $t \geq 0$, и что всегда $\alpha > \beta$. При этих обозначениях мы находим

$$2\pi\varphi = 2 \int_0^1 \frac{dz}{a^2 e^{-2ia} - b^2 e^{-2ib} z^2} = \frac{e^{i(a+\beta)}}{ab} \ln \frac{z + \frac{a}{b} e^{-i(a-\beta)}}{z - \frac{a}{b} e^{-i(a-\beta)}}. \quad (28)$$

Чтобы взять верное значение логарифма, рассмотрим в плоскости комплексной переменной z точки (фиг. 47)

$$I = +1,$$

$$P = -\frac{a}{b} z^2 e^{-i(a-\beta)},$$

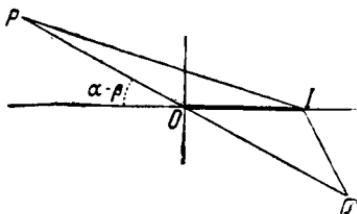
$$Q = \frac{a}{b} e^{-i(a-\beta)}$$

Так как интеграл в (28) надо взять вдоль пути OI , то соответственное значение правой части (28) будет равно

$$\frac{e^{i(a+\beta)}}{ab} \left\{ \left(\ln \frac{IP}{OP} + i \cdot OPI \right) - \left(\ln \frac{IQ}{OQ} - i \cdot OQI \right) \right\},$$

где мы предполагаем логарифмы действительными, а углы положительными. Таким образом получается, если сохранить только минимую часть, решение, соответствующее источнику типа (22) в виде:

$$2\pi\varphi = \frac{\sin(a+\beta)}{ab} \ln \frac{IP}{IQ} + \frac{\cos(a+\beta)}{ab} (\pi - PIQ). \quad (29)$$



Фиг. 47.

При этом будем иметь

$$\frac{IP}{IQ} = \left(\frac{a^3 + 2ab \cos(a + \beta) + b^3}{a^3 - 2ab \cos(a - \beta) + b^3} \right)^{1/2},$$

$$\operatorname{tg} PIQ = \frac{2ab \sin(a - \beta)}{b^2 - a^2}, \quad (30)$$

причем значения a , b , a , β , выраженные через r и t , даны уравнениями (27).

Будет достаточно проследить главнейшую часть волны тогда, когда она проходит через точку, расстояние r которой от начала велико по сравнению с $c\tau$. Если мы ограничимся временем, в течение которого $t - \frac{r}{c}$ будет мало по сравнению с $\frac{r}{c}$, то a будет малым по сравнению с b , угол PIQ будет малым и $\frac{IP}{IQ}$ приблизительно будет равно 1. Если мы теперь положим

$$t = \frac{r}{c} + \tau \operatorname{tg} \eta, \quad (31)$$

то получим приближенно

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{1}{4} \pi - \frac{1}{2} \eta, \\ a &= \sqrt{\tau \sec \eta}, \\ \beta &= \frac{1}{4} \frac{c\tau}{r}, \\ b &= \left(2 \cdot \frac{r}{c} \right)^{1/2}; \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Фиг. 48.

тогда формула (29) принимает следующий вид:

$$2\pi\varphi = \frac{\pi}{ab} \cos a = \frac{\pi}{\tau \sqrt{2}} \left(\frac{c\tau}{r} \right)^{1/2} \cos \left(\frac{1}{4} \pi - \frac{1}{2} \eta \right) \sqrt{\cos \eta}. \quad (33)$$

Возвышение ζ в этом случае будет дано приближенно уравнением

$$2\pi g \zeta = 2\pi g \frac{d\varphi}{d(\tau \operatorname{tg} \eta)} = \frac{1}{4\tau^2 \sqrt{2}} \left(\frac{c\tau}{r} \right)^{1/2} \sin \left(\frac{1}{4} \pi - \frac{3}{2} \eta \right) \cos^{3/2} \eta. \quad (34)$$

Фигура 48 показывает соотношение между ζ и t , получаемое по формуле (34)¹⁾.

§ 198. Мы переходим теперь к исследованию случая сферического слоя воды или моря, которое покрывает шар. Предположим пока, что шар не вращается, а также пренебрежем пока взаимным притяжением частиц воды. Заданные математические условия тогда точно такие же, как и при акустической проблеме колебаний сферического воздушного слоя²⁾.

¹⁾ Точки, обозначенные на фигуре через -1 , 0 , $+1$, соответствуют временам $\frac{r}{c-\tau}$, $\frac{r}{c}$, $\frac{r}{c+\tau}$.

²⁾ Рассмотренной в книге Rayleigh, Theory of Sound, гл. XVIII.

Пусть a есть радиус твердого шара, h — глубина жидкости; мы предполагаем, что глубина h мала по сравнению с a , но непостоянна. Пусть положение какой-нибудь точки слоя определяется угловыми координатами θ, φ . Компоненту скорости в этой точке вдоль меридиана, в направлении возрастания θ , назовем через u , компоненту же скорости вдоль круга широты в направлении возрастания φ — через v . Далее через ζ обозначим возвышение свободной поверхности над невозмущенным уровнем. На основании изложенных в § 172 соображений предположим, что горизонтальное движение для всех точек одной и той же вертикали одинаково; уравнение неразрывности будет тогда

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (uh \sin \theta \delta\varphi) \delta\theta + \frac{\partial}{\partial \varphi} (vh \delta\theta) \delta\varphi = -a \sin \theta \delta\varphi a \delta\theta \frac{\partial \zeta}{\partial t},$$

где левая часть представляет поток через призму, имеющую в основании элемент поверхности $a \sin \theta \delta\varphi a \delta\theta$, тогда как правая сторона представляет быстроту уменьшения объема жидкости вследствие понижения поверхности. Следовательно,

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{1}{a \sin \theta} \left\{ \frac{\partial (hu \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial (hv)}{\partial \varphi} \right\}. \quad (1)$$

Если пренебречь членами второго порядка относительно u и v , то уравнения движения, полученные по методам § 169, 189, будут

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -g \frac{\partial \zeta}{a \delta\theta} - \frac{\partial \Omega}{a \delta\theta}, \\ \frac{dv}{dt} &= -g \frac{\partial \zeta}{a \sin \theta \delta\varphi} - \frac{\partial \Omega}{a \sin \theta \delta\varphi}, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где Ω обозначает потенциал внешних сил.

Если положить

$$\bar{\zeta} = -\frac{\Omega}{g}, \quad (3)$$

то уравнения движения могут быть написаны также в форме

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -\frac{g}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} (\zeta - \bar{\zeta}), \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{g}{a \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\zeta - \bar{\zeta}). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Мы можем исключить u и v из уравнений (1) и (4) и получить таким образом уравнение, содержащее только ζ .

В случае простого гармонического колебания временной множитель равен $e^{i(\omega t + \epsilon)}$, и уравнения принимают вид

$$\zeta = \frac{i}{\sigma a \sin \theta} \left\{ \frac{\partial (hu \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial (hv)}{\partial \varphi} \right\}, \quad (5)$$

$$u = i \frac{g}{\sigma a} \frac{\partial}{\partial \theta} (\zeta - \bar{\zeta}), \quad (6)$$

$$v = i \frac{g}{\sigma a \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\zeta - \bar{\zeta}).$$

§ 199. Рассмотрим более подробно случай постоянной глубины. Чтобы найти свободные колебания, положим $\zeta = 0$; уравнения (5) и (6) предыдущего параграфа тогда дают

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \zeta}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \varphi^2} + \frac{\sigma^2 a^2}{gh} \zeta = 0. \quad (1)$$

Это уравнение по виду тождественно с общим уравнением сферических поверхностных функций [§ 83 (2)]. Если мы, следовательно, положим

$$\frac{\sigma^2 a^2}{gh} = n(n+1), \quad (2)$$

то

$$\zeta = S_n \quad (3)$$

будет решением уравнения (1), где S_n обозначает общую сферическую поверхностную функцию порядка n .

В § 86 было отмечено, что S_n только тогда может быть конечной на всей поверхности шара, когда n есть целое число. Для океана, который покрывает всю сферу, свободная поверхность, таким образом, при нормальном колебании в каждый момент времени имеет форму „гармонического сфериоида“

$$r = a + h + S_n \cos(\sigma t + \varepsilon); \quad (4)$$

частота колебания будет равна

$$\sigma = \{n(n+1)\}^{1/2} \frac{(gh)^{1/2}}{a}, \quad (5)$$

где n есть целое число.

Характер различных нормальных колебаний лучше всего определить при помощи исследования узловых линий ($S_n = 0$) свободной поверхности. В учебниках по сферическим функциям¹⁾ показывается, что зональная сферическая функция $P_n(\mu)$ обращается в нуль для n действительных и различных значений μ , лежащих между -1 и $+1$, так что в этом случае мы имеем в качестве узловых линий n кругов широты. Если n нечетно, то один из них совпадает с экватором. В случае тессеральных функций

$$(1 - \mu^2)^{1/2s} \frac{d^s P_n(\mu)}{d\mu^s} \cos s\varphi,$$

$$(1 - \mu^2)^{1/2s} \frac{d^s P_n(\mu)}{d\mu^s} \sin s\varphi$$

второй множитель обращается в нуль для $n - s$ значений μ , а тригонометрический множитель обращается в нуль для $2s$ равностоящих значений φ . Узловые линии состоят таким образом из $n - s$ парал-

¹⁾ См. литературные указания в сноске 1, стр. 137.

лелей и $2s$ меридианов. Подобным же образом секториальные гармонические функции

$$(1 - \mu^2)^{1/2} n \cos np\varphi,$$

$$(1 - \mu^2)^{1/2} n \sin np\varphi$$

имеют в качестве узловых линий $2n$ меридианов.

Однако рассматриваемые случаи суть только частные случаи; в самом деле, так как существуют $2n+1$ независимых сферических поверхностных функций какого-то целого порядка n и так как данная формулой (5) частота для каждой из них будет одной и той же, то будет иметь место неопределенность соответственного порядка и в составе нормальных колебаний и в распределении их узловых линий.

Наложением можно получить различные типы прогрессивных волн; если мы возьмем, например, секториальную гармоническую функцию, то получим решение, при котором

$$\zeta \text{ пропорционально } (1 - \mu^2)^{1/2} n \cos(np\varphi - \sigma t + \varepsilon); \quad (6)$$

это дает целый ряд меридиональных гребней и борозд, которые движутся вокруг шара, причем скорость распространения, измеренная на экваторе, будет равна

$$\frac{\sigma a}{n} = \left(\frac{n+1}{n} gh \right)^{1/2}. \quad (7)$$

Легко убедиться, что траектории частиц суть эллипсы, главные оси которых соответственно совпадают с направлениями меридианов и кругов широты. На экваторе эти эллипсы сводятся к прямым линиям.

Для случая $n=1$ сферическая функция будет зональной. Тогда гармонический сферический период (4) при нашей степени приближения будет представлять шар, эксцентричный твердому шару. Важно, однако, отметить, что этот случай, строго говоря, не может быть включен в наше динамическое исследование, если мы только не наложим некоторую связь на шар, чтобы удерживать его в покое, ибо рассматриваемая деформация свободной поверхности вызвала бы перемещение центра масс всего океана и вместе с этим вызвала бы соответственную реакцию связи на земной шар. Легко было бы построить в этом смысле исправленную теорию для случая свободного земного шара, но сам вопрос имеет мало значения, во-первых, потому, что для случая Земли инертная масса твердого шара несомненно велика сравнительно с массой океана и, во-вторых, возмущающие силы, которые могли бы произвести подобного рода деформацию, в природе обыкновенно не встречаются. Оказывается, например, что первый член выражения для приливообразующего потенциала Солнца или Луны есть сферическая функция *второго* порядка (см. приложение к этой главе).

Для $n=2$ свободная поверхность в некоторый момент представляет приближенно эллипсоид. Соответствующий период, который определяется из формулы (5), в 0,816 раза больше периода аналогичного колебания в канале на экваторе (§ 181).

Для больших значений n расстояние между двумя узловыми линиями мало сравнительно с радиусом земного шара, и колебания происходят тогда приблизительно таким же образом, как и на плоском слое воды. Например, скорость распространения секториальных волн, представленных формулой (6), на экваторе стремится с возрастающим n к значению $(gh)^{1/2}$ в согласии с § 170.

Сравнение этих исследований с общей теорией § 168 приводит по одним только физическим основаниям к заключению, что любое произвольное значение ζ можно разложить в ряд простых сферических функций, т. е. мы можем положить

$$\zeta = \sum_0^{\infty} S_n,$$

причем коэффициенты различных независимых сферических функций суть нормальные координаты системы. Так как в выражении для кинетической и потенциальной энергий произведения этих коэффициентов должны обращаться в нуль, то мы приходим к ортогональным свойствам сферических функций, как это было указано в § 87. Действительное вычисление энергий будет дано в следующей главе применительно к иному трактованию этой проблемы.

Действие простой гармонической возмущающей силы можно дать тотчас же, согласно формуле (14) § 168. Если значение Ω на поверхности можно привести к виду

$$\Omega = \sum \Omega_n, \quad (8)$$

где Ω_n есть сферическая поверхностная функция целого порядка n , то различные члены будут обозначать нормальные компоненты силы в обобщенном смысле § 135; значение ζ , согласно статической теории соответствующее какому-либо члену Ω_n , будет

$$\zeta_n = -\frac{\Omega_n}{g}. \quad (9)$$

Таким образом для вынужденного колебания, соответствующего этому члену, мы будем иметь

$$\zeta_n = -\frac{1}{1 - \frac{\sigma^2}{\sigma_n^2}} \frac{\Omega_n}{g}, \quad (10)$$

где σ обозначает частоту возмущающей силы, а σ_n — частоту соответствующего свободного колебания, которое дано формулой (5). Можно, конечно, уравнение (10) вывести без труда прямо из уравнения предыдущего параграфа.

§ 200. До сих пор мы пренебрегали взаимным притяжением частиц жидкости. В случае океана, покрывающего земной шар, и при плотностях, имеющих место для действительной Земли и действительного океана, указанное притяжение не оказывает влияния. Чтобы исследовать его действие для случая свободных колебаний, мы должны только в последнюю формулу на место Ω_n подставить гравитационный потенциал вытесняемой воды. Если мы обозначим плотность воды через ϱ , а через ϱ_0 обозначим среднюю плотность земли и воды вместе, то будем иметь¹⁾

$$\Omega_n = - \frac{4\pi\gamma\varrho a}{2n+1} \zeta_n, \quad (11)$$

$$g = \frac{4}{3} \gamma\pi a\varrho_0, \quad (12)$$

где γ обозначает постоянную тяготения; отсюда следует

$$\Omega_n = - \frac{3}{2n+1} \frac{\varrho}{\varrho_0} g \zeta_n. \quad (13)$$

Подставляя в (10), получим

$$\frac{\sigma_n^2}{\sigma_0^2} = \left(1 - \frac{3}{2n+1} \frac{\varrho}{\varrho_0}\right), \quad (14)$$

где σ_n обозначает теперь действительную частоту колебания, а σ_0 — частоту, вычисленную на основании первой гипотезы, т. е. не принимая во внимание взаимного притяжения. Таким образом исправленная частота определится из формулы

$$\sigma_n^2 = n(n+1) \left(1 - \frac{3}{2n+1} \frac{\varrho}{\varrho_0}\right) \frac{gh}{a^2}. \quad (15)^2)$$

Для эллипсоидального колебания ($n=2$) и для $\frac{\varrho}{\varrho_0}=0,18$ (как в случае Земли) из выражения (14) видно, что благодаря взаимному притяжению частота уменьшается в отношении 0,94 к 1.

Самое медленное колебание соответствовало бы значению $n=1$, однако в этом случае, как было уже указано, мы должны были бы допустить существование наложенной на шар связи, удерживающей его в состоянии равновесия. При этом допущении из (15) следует, что значение σ_1^2 будет отрицательно, если $\varrho > \varrho_0$. Тригонометрическая функция от t заменяется тогда действительной показательной функцией, а это показывает, что конфигурация, при которой поверхность океана образует сферическую поверхность, концентрическую к поверхности

¹⁾ См. например, Routh, Analytical Statics 2-е изд., Cambridge, 1902, II, 146—7.

²⁾ Этот результат дан Лапласом, Mécanique céleste, кн. 1, § 1 (1799). Свободные и вынужденные колебания типа $n=2$ он исследовал уже ранее в своих Recherches sur quelques points du système du monde, Mém. de l'Acad. Roy. des sciences, 1775 (1778) [Oeuvres complètes, IX, 109].

земного шара, представляет неустойчивое положение равновесия. Так как введение связей только увеличивает инерцию системы, то мы заключаем, что для $e > e_0$ равновесие при свободном земном шаре также будет неустойчивым. В крайнем случае, когда мы предположили бы сам земной шар совершенно свободным от тяготения, вода, будучи возмущена под влиянием сил трения, стремилась бы, очевидно, в конце концов вытолкнуть ядро и собраться в виде шаровой массы.

Из § 168 следует, а также легко можно заметить независимо от этого, что вынужденные колебания, происходящие от периодической возмущающей силы при учете тяготения воды, будут лавиться формулой (10) при условии, что Ω_n обозначает теперь потенциал только внешних сил и σ_n имеет значение, данное формулой (15).

§ 201. Колебания моря, ограниченного меридианами или параллельными кругами, или и теми и другими, могут быть исследованы тем же методом¹⁾. Однако получающиеся при этом сферические функции, как правило, уже теперь будут не целого порядка, а поэтому трудно получить численные результаты.

Для случая моря, ограниченного двумя параллельными кругами, мы полагаем

$$\zeta = \left\{ Ap(\mu) + Bq(\mu) \right\} \frac{\cos}{\sin} \frac{1}{l} \varphi, \quad (1)$$

где $\mu = \cos \theta$, а $p(\mu)$, $q(\mu)$ суть обе функции от μ , которые содержат $(1-\mu^2)^{1/2}$ в качестве множителя и даны формулой (2) § 196. Необходимо заметить, что $p(\mu)$ есть четная, а $q(\mu)$ — нечетная функция от μ .

Если мы будем отличать ограничивающие параллельные круги индексами, то граничные условия будут

$$u = 0 \text{ для } \mu = \mu_1 \text{ и } \mu = \mu_2.$$

Для свободных колебаний будем иметь, согласно (6) § 193

$$Ap'(\mu_1) + Bq'(\mu_1) = 0, \quad Ap'(\mu_2) + Bq'(\mu_2) = 0; \quad (?)$$

откуда следует

$$\begin{vmatrix} p'(\mu_1) & q'(\mu_1) \\ p'(\mu_2) & q'(\mu_2) \end{vmatrix} = 0; \quad (3)$$

это уравнение определяет допустимые значения для порядка l сферических функций. Частоты σ , которые соответствуют различным корням, как и раньше, определяются формулой (5) § 199.

Если обе пограничные линии одинаково удалены от экватора, то имеем $\mu_2 = -\mu_1$. Вышенаписанные решения распадаются тогда на две группы; для одной имеем

$$B = 0, \quad p'(\mu_1) = 0, \quad (4)$$

а для другой

$$A = 0, \quad q'(\mu_1) = 0. \quad (5)$$

В первом случае ζ для двух точек, лежащих симметрично относительно экватора, имеет одинаковое значение, во втором случае значения ζ для подобных точек одинаковы по абсолютной величине, но различны по знаку.

¹⁾ Ср. Rayleigh, см. сноску на стр. 378.

Если мы предположим, что одна из ограничивающих линий стягивается к одной точке (например, $\mu_1 = 1$), то приходим к случаю круглого бассейна. Значения $p'(1)$ и $q'(1)$ бесконечны, но их отношение вычисляется с помощью формул, данных в § 84. Из них можно найти с помощью второго уравнения (2) отношение $A : B$; если мы подставим это в первое уравнение (2), то получим уравнение для определения n . Однако мы будем иметь более простой метод для этого случая, если будем исходить из решения, о котором мы знаем, что оно для каждого значения n в полюсе $\mu = 1$ конечно. Это требует введения новых переменных, при выборе которых оставляется до известной степени произвол. Например, мы можем взять выражение $P_n^s(\cos \theta)$ из формулы (6) § 86 и попытаться определить n из условия, которое для $\theta = \theta_1$ имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial \theta} P_n^s(\cos \theta) = 0^{-1}. \quad (6)$$

Если радиус сферы сделается бесконечным, то мы приходим к плоской проблеме § 191¹). Отдельные шаги этого перехода можно усмотреть из § 100.

Если рассмотренный слой воды имеет в качестве границ два меридиана (и кроме того может иметь или не иметь параллельные круги), например $\varphi = 0$ и $\varphi = a$, то условие, что для них $v = 0$, налагает ограничение на множитель $\cos sa$, и мы получаем $sa = t\pi$, где t есть целое число. Это последнее уравнение определяет допустимые значения s , которые, вообще говоря, не являются целыми числами²).

Суточные и полусуточные приливы в невращающемся океане с постоянной глубиной, ограниченной двумя меридианами, были изучены Прудманом и Додсоном и доведены до результатов для некоторых случаев и некоторых значений глубины³).

Приливы на вращающемся слое жидкости

§ 202. Теория приливов на открытом слое волн существенно усложняется благодаря вращению Земли. Если бы мы могли по крайней мере допустить, что периоды свободных колебаний и периоды возмущающих сил малы сравнительно с продолжительностью суток, то предыдущие исследования могли бы рассматриваться как первое приближение, но, однако, эти допущения далеко не соответствуют условиям, господствующим на Земле.

Затруднения, появляющиеся тогда, когда мы пытаемся учесть вращение, зависят от того, что частица, которая имеет движение в направлении изменения широты, стремится сохранить неизменным свой момент количества движения при вращении около земной оси и тем самым изменить свою скорость, перпендикулярную к направлению меридиана. Это обстоятельство, конечно, хорошо известно

¹) Этот вопрос был решен Macdonald, Proc. Lond. Math. Soc., XXXI, 264 (1899).

²) Cp. Rayleigh, Theory of Sound, § 336, 338.

³) Читателю, который хочет изучать задачу в этом направлении дальше, мы указываем Thomson a. Tait, Natural Philosophy, 12-е изд., прибавление B, Spherical Harmonic Analysis.

⁴) Proudman a. Doodson, M. N. R. A. S., Geophy. Suppt., I, 468 (1927) и II, 209 (1929).

в связи с гадлеевой теорией пассатных ветров¹⁾). На его значение для теории приливов впервые, повидимому, указал Маклорен²⁾.

Вследствие большой инерции твердой части земного шара сравнительно с инерцией океана периодическое изменение скорости вращения, имеющее место благодаря приливам, абсолютно незаметно. Мы можем, следовательно, эту скорость вращения рассматривать в дальнейшем как постоянную.

Теория малых колебаний динамической системы около положения относительного равновесия по отношению к реальной или воображаемой твердой системе отсчета, вращающейся с постоянной угловой скоростью около неподвижной оси, отличается в некоторых существенных чертах от теории малых колебаний около положения абсолютного равновесия, о которой мы говорили в § 168. Необходимо поэтому уделить некоторое внимание общей теории, прежде чем заняться исследованием специальных проблем. Система, которую мы исследуем, может быть совершенно свободна или может быть связана с вращающимся твердым телом. Во втором случае предполагается, что как реакции связи, так и внутренние силы системы являются консервативными.

§ 203. Уравнения движения частицы m относительно прямоугольных координатных осей Ox , Oy , Oz , которые вращаются с угловой скоростью ω около Oz , имеют вид

$$\left. \begin{aligned} m(\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2x) &= X, \\ m(\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2y) &= Y, \\ m\ddot{z} &= Z, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где X , Y , Z означают компоненты действующих сил.

Предположим, что относительные координаты (x, y, z) каждой частицы выражены через определенное число независимых величин q_1, q_2, \dots, q_r . Положим

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{T} &= \frac{1}{2} \sum m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2), \\ T_0 &= \frac{1}{2} \omega^2 \sum m(x^2 + y^2). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Таким образом \mathfrak{T} обозначает кинетическую энергию относительного движения; мы предполагаем, что она есть однородная квадратичная функция обобщенных скоростей \dot{q}_r , коэффициенты которой суть функции обобщенных координат q_r ; T_0 обозначает кинетическую энергию системы, когда она вращается без относительного движения в положении (q_1, q_2, \dots, q_n) . Наконец, мы положим

$$\sum (X \delta x + Y \delta y + Z \delta z) = -\delta V + Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_n \delta q_n, \quad (3)$$

¹⁾ H adley, The Cause of the General Trade Winds, Phil. Trans., 1735.

²⁾ Mac laurin, De Causâ Physicâ Fluxus ex Refluxus Maris, Prop. VII. Motus aquae turbatur ex inaequali velocitate quâ corpora circa axem Terræ motu diurno deferuntur (1740).

где V обозначает потенциальную энергию, а Q_1, Q_2, \dots, Q_n суть обобщенные компоненты внешних сил.

Умножив три уравнения (1) соответственно на $\frac{\partial x}{\partial q_r}, \frac{\partial y}{\partial q_r}, \frac{\partial z}{\partial q_r}$ и сложив их, затем суммируя результат по всем частицам системы и поступая далее таким же образом, как и при „прямом“ выводе уравнений Лагранжа, получим следующее типичное уравнение движения в обобщенных координатах ¹⁾

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial q_r} - \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial q_r} + \beta_{r1} \dot{q}_1 + \beta_{r2} \dot{q}_2 + \dots + \beta_{rn} \dot{q}_n = \\ = - \frac{\partial}{\partial q_r} (V - T_0) + Q_r, \quad (4) \end{aligned}$$

где

$$\beta_{rs} = 2\omega \sum m \frac{\partial(x, y)}{\partial(q_s, q_r)}. \quad (5)$$

Необходимо отметить, что

$$\beta_{rs} = -\beta_{sr}, \quad \beta_{rr} = 0. \quad (6)$$

Уравнение (4) можно вывести также из (23) § 141 с помощью (8) § 142, если вообразить вращающуюся систему свободной, но с бесконечно большим моментом инерции.

Условия относительного равновесия при отсутствии возмущающих сил можно получить, положив в уравнении (4) $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n = 0$; тогда получим

$$\frac{\partial}{\partial q_r} (V - T_0) = 0; \quad (7)$$

это показывает, что значение $V - T_0$ для положения равновесия является „стационарным“.

Далее из уравнений (1) мы будем иметь

$$\sum m(\ddot{x}\dot{x} + \ddot{y}\dot{y} + \ddot{z}\dot{z}) - \omega^2 \sum m(x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}) = \sum (X\dot{x} + Y\dot{y} + Z\dot{z}); \quad (8)$$

из этого уравнения и из уравнений (2) и (3) следует

$$\frac{d}{dt} (\mathfrak{E} + V - T_0) = Q_1 \dot{q}_1 + Q_2 \dot{q}_2 + \dots + Q_n \dot{q}_n. \quad (9)$$

Этот результат можно также получить из (4) с помощью соотношений (6). Если возмущающие силы отсутствуют, то

$$\mathfrak{E} + V - T_0 = \text{const.} \quad (10)$$

¹⁾ Ср. Thomson a. Tait, Natural Philosophy, 2-е изд., I, 310; Lamb, Higher Mechanics, 2-е изд., § 84.

Стоит также отметить вид, который принимает теорема Гамильтона § 135. Полная кинетическая энергия нашей системы равна

$$T = \frac{1}{2} \sum x m \left\{ (\dot{x} - \omega y)^2 + (\dot{y} + \omega x)^2 + \dot{z}^2 \right\} = \mathfrak{T} + T_0 + \omega M, \quad (11)$$

где

$$M = \sum m (x \dot{y} - y \dot{x}). \quad (12)$$

При отсутствии внешних сил будем иметь

$$\Delta \int_{t_0}^{t_1} (T - V) dt = 0 \quad (13)$$

с обычными предельными условиями. Отсюда следует

$$\Delta \int_{t_0}^{t_1} (\mathfrak{T} + T_0 + \omega M - V) dt = 0 \quad (14)$$

при условии

$$\left[\sum m \left\{ (\dot{x} - \omega y) \Delta x + (\dot{y} + \omega x) \Delta y + \dot{z} \Delta z \right\} \right]_{t_0}^{t_1} = 0. \quad (15)$$

Эту теорему можно вывести также непосредственно из формулы (1) с помощью обычного метода Гамильтона. Обратно эта теорема для случая свободного движения приводит к независимому доказательству формулы (4). Введение в эти исследования возмущающих сил не представляет никаких трудностей.

Условие (15) всегда выполняется в том случае, когда относительные начальное и конечное положения при виртуальном движении такие же, как и при действительном.

§ 204. Примем, что координаты q_r выбраны таким образом, что они обращаются в нуль для невозмущенного состояния. В случае малого возмущения можно написать

$$2\mathfrak{T} = a_{11}\dot{q}_1^2 + a_{22}\dot{q}_2^2 + \dots + 2a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + \dots, \quad (1)$$

$$2(V - T_0) = c_{11}q_1^2 + c_{22}q_2^2 + \dots + 2c_{12}q_1q_2 + \dots, \quad (2)$$

где коэффициенты можно рассматривать как постоянные. Члены первого порядка в выражении $V - T_0$ вследствие „стационарности“ опущены.

Чтобы по возможности упростить уравнения (1) и (2), предположим, что они, как в § 168, приведены линейным преобразованием к сумме квадратов, т. е. что

$$2\mathfrak{T} = a_1\dot{q}_1^2 + a_2\dot{q}_2^2 + \dots + a_n\dot{q}_n^2, \quad (3)$$

$$2(V - T_0) = c_1q_1^2 + c_2q_2^2 + \dots + c_nq_n^2. \quad (4)$$

Величины q_1, q_2, \dots, q_n можно назвать „главными координатами“ системы. Однако не следует предполагать, что их свойства так же просты, как при отсутствии вращения. Коэффициенты a_1, a_2, \dots, a_n и c_1, c_2, \dots, c_n можно соответственно назвать „главными коэффициентами“ инерции и устойчивости. Главные коэффициенты устойчивости

такие же, как и без учета вращения, но дополненные фиктивными центробежными силами ($m\omega^2x$, $m\omega^2y$, 0), которые действуют на каждую частицу в направлении от оси наружу.

Уравнения (4) предыдущего параграфа для случая бесконечно малых движений будут

$$\left. \begin{aligned} a_1\ddot{q}_1 + c_1q_1 + \beta_{12}\dot{q}_2 + \beta_{13}\dot{q}_3 + \dots + \beta_{1n}\dot{q}_n &= Q_1, \\ a_2\ddot{q}_2 + c_2q_2 + \beta_{21}\dot{q}_1 &\quad + \beta_{23}\dot{q}_3 + \dots + \beta_{2n}\dot{q}_n = Q_2, \\ \dots &\quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_n\ddot{q}_n + c_nq_n + \beta_{n1}\dot{q}_1 + \beta_{n2}\dot{q}_2 + \beta_{n3}\dot{q}_3 + \dots &= Q_n, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

где коэффициенты β_{rs} можно рассматривать как постоянные.

Если умножить уравнения (5) по порядку на $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$ и сложить их, то мы найдем, принимая во внимание соотношение $\beta_{rs} = -\beta_{sr}$:

$$\frac{d}{dt} (\mathfrak{L} + V - T_0) = Q_1\dot{q}_1 + Q_2\dot{q}_2 + \dots + Q_n\dot{q}_n, \quad (6)$$

что мы уже доказали, не прибегая к приближениям.

§ 205. Чтобы исследовать *свободные* движения системы, положим в уравнениях (5) $Q_1, Q_2, \dots, Q_n = 0$ и сделаем, как при обычном способе решения линейных уравнений, подстановку:

$$q_1 = A_1 e^{it}, \quad q_2 = A_2 e^{it}, \quad \dots, \quad q_n = A_n e^{it}. \quad (7)$$

Подставляя, находим

$$\left. \begin{aligned} (a_1\lambda^2 + c_1)A_1 + \beta_{12}\lambda A_2 + \dots + \beta_{1n}\lambda A_n &= 0, \\ \beta_{21}\lambda A_1 + (a_2\lambda^2 + c_2)A_2 + \dots + \beta_{2n}\lambda A_n &= 0, \\ \dots &\quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \beta_{n1}\lambda A_1 + \beta_{n2}\lambda A_2 + \dots + (a_n\lambda^2 + c_n)A_n &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Исключив отношения $A_1 : A_2 : \dots : A_n$, мы получим уравнение

$$\left| \begin{array}{ccc|c} a_2\lambda^2 + c_1, & \beta_{12}\lambda, & \dots & \beta_{1n}\lambda, \\ \beta_{21}\lambda, & a_2\lambda^2 + c_2 & \dots & \beta_{2n}\lambda \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{n1}\lambda, & \beta_{n2}\lambda, & \dots & a_n\lambda^2 + c_n \end{array} \right| = 0 \quad (9)$$

или, как мы обычно будем писать для краткости,

$$D(\lambda) = 0. \quad (10)$$

Детерминант $D(\lambda)$ принадлежит в силу соотношений (6) § 203 к детерминантам, которые Кэли назвал косыми. Если изменить знак перед λ , то строки заменятся столбцами и наоборот, и значение детерминанта останется без изменения. Если представить левую часть уравнения (10) в развернутом виде, то она будет содержать только четные степени λ и корни будут состоять из пар вида

$$\lambda = \pm(\varrho + i\sigma).$$

Для того чтобы относительное равновесие было устойчиво, существенно, чтобы значения q все были бы нулями, так как иначе в действительном выражении для произвольной координаты q , встретились бы члены вида $e^{\pm \omega t} \cos \sigma t$ и $e^{\pm \omega t} \sin \sigma t$; это указывало бы на возможность колебания с постоянно возрастающей амплитудой.

В теории абсолютного равновесия, которая была набросана в § 168, необходимое и достаточное условие для устойчивости (в указанном смысле) состояло просто в том, что потенциальная энергия для положения равновесия должна иметь минимум. В рассматриваемом случае условия становятся более сложными¹⁾, но легко видеть, что если выражение для $V - T_0$ будет существенно положительным или, другими словами, если коэффициенты c_1, c_2, \dots, c_n в формуле (4) будут все положительными, то равновесие должно быть устойчивым. Это следует тотчас же из уравнения

$$\Sigma + (V - T_0) = \text{const.}, \quad (11)$$

выведенного в § 203, которое показывает, что при только что сделанном допущении ни Σ , ни $V - T_0$ не могут возрасти выше определенной границы, зависящей от начальных условий²⁾. Необходимо отметить, что это заключение не основывается на применении приближенных уравнений.

Устойчивость, таким образом, будет обеспечена, когда $V - T_0$ в относительном положении равновесия есть минимум. Это условие, однако, не необходимо, и устойчивость может иметь место и тогда (с рассматриваемой точки зрения), когда $V - T_0$ есть максимум, как это мы покажем для частного случая двух степеней свободы. Необходимо, однако, заметить, что если система подвержена каким-нибудь, хотя бы незначительным силам трения, которые влияют на координаты q_1, q_2, \dots, q_n , то равновесие только тогда перманентно или „вековым“ образом устойчиво, когда $V - T_0$ есть минимум. Для таких сил характерно, что их работа, произведенная над системой, всегда является отрицательной. А в таком случае, согласно уравнению (6), выражение $\Sigma + (V - T_0)$ в алгебраическом смысле будет непрерывно уменьшаться, пока имеет место какое-нибудь относительное движение. Следовательно, если система перешла из относительного положения равновесия в такую конфигурацию, при которой $V - T_0$ будет отрицательным, то вышенаписанное выражение, а тем самым и его часть $V - T_0$ будут принимать непрерывно возрастающие отрицательные значения, что может случиться только тогда, когда система все более и более удаляется от своего положения равновесия.

¹⁾ Эти условия были исследованы Routh, см. сноску на стр. 243 см. также его Advanced Rigid Dynamics, гл. VI.

²⁾ Это заключение было первоначально применено Дирихле к теории колебаний около абсолютного положения равновесия § 168, Über die Stabilität des Gleichgewichtes, Crelle, XXXII (1846) [Werke, Berlin, 1889–1897, II, 3]. Алгебраическое доказательство приведено у Lamb, Higher Mechanics, 2 изд., § 99.

Это важное различие между „обыкновенной“, или кинетической, и „вековой“, или практической, устойчивостью было сделано впервые Томсоном и Тэтом¹⁾. Необходимо отметить, что вышеизложенное доказательство предполагает постоянную угловую скорость (ω), которая в случае необходимости должна поддерживаться соответствующим образом действующей для этой цели на вращающееся тело силой. Если твердое тело *свободно*, то условие для вековой устойчивости принимает несколько иную форму, о которой речь будет впоследствии (гл. XII). При практических применениях ограничимся только случаями, в которых $V - T_0$ есть минимум, и коэффициенты c_1, c_2, \dots, c_n формулы (4) § 204 будут таким образом положительными.

Чтобы исследовать характер свободного колебания для случая устойчивости, заметим следующее: если λ есть произвольный корень уравнения (10), то уравнения (8) дают

$$\frac{A_1}{a} = \frac{A_2}{a_2} = \dots = \frac{A_n}{a_n} = C, \quad (12)$$

где a_1, a_2, \dots, a_n обозначают миноры какой-либо строки в детерминанте $D(\lambda)$, а C — произвольная постоянная. Эти миноры будут содержать, вообще говоря, как нечетные, так и четные степени от λ и поэтому примут неравные значения для обоих противоположных по знаку корней ($\pm \lambda$) некоторой произвольной пары. Если положить $\lambda = \pm i\nu_r$, то соответствующие значения a_r будут иметь вид

$$\mu_r \pm i\nu_r,$$

где μ_r, ν_r действительны. Отсюда следует

$$q_r = C (\mu_r + i\nu_r) e^{i\omega t} + C' (\mu_r - i\nu_r) e^{-i\omega t}.$$

Положив

$$C = \frac{1}{2} K e^{i\varepsilon}, \quad C' = \frac{1}{2} K e^{-i\varepsilon},$$

получим решение наших уравнений в действительной форме с двумя произвольными постоянными K и ε ,

$$q_r = K \{ \mu_r \cos(\omega t + \varepsilon) - \nu_r \sin(\omega t + \varepsilon) \}. \quad (13)$$

Эти формулы представляют движение, которое можно обозначить как „собственный вид колебаний“ системы. Число возможных собственных видов колебаний равно, конечно, числу пар корней уравнения (9), т. е. равно числу степеней свободы системы. Необходимо

¹⁾ Thomson a. Tait, *Natural Philosophy*, 2-е изд., часть I, стр. 391; см. также Poincaré, *Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation*, *Acta Mathematica*, VII (1885) и op. cit. ante, стр. 146. Некоторые простые механические иллюстрации в статье „On Kinetic Stability“, *Proc. Roy. Soc. A.*, LXXX, 168 (1909) и в работе автора *Higher Mechanics*, 2-е изд., стр. 253.

отметить, что вследствие вращения различные координаты недолго будут обладать одинаковыми фазами.

Если обозначить через ξ, η, ζ компоненты смещения произвольной частицы из ее положения равновесия, то мы будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{\partial x}{\partial q_1} q_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} q_2 + \dots + \frac{\partial x}{\partial q_n} q_n \\ \eta &= \frac{\partial y}{\partial q_1} q_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2} q_2 + \dots + \frac{\partial y}{\partial q_n} q_n \\ \zeta &= \frac{\partial z}{\partial q_1} q_1 + \frac{\partial z}{\partial q_2} q_2 + \dots + \frac{\partial z}{\partial q_n} q_n \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Подставляя из уравнений (13), получим результат в виде

$$\left. \begin{aligned} \xi &= P \cdot K \cos(\sigma t + \epsilon) + P' \cdot K \sin(\sigma t + \epsilon) \\ \eta &= Q \cdot K \cos(\sigma t + \epsilon) + Q' \cdot K \sin(\sigma t + \epsilon) \\ \zeta &= R \cdot K \cos(\sigma t + \epsilon) + R' \cdot K \sin(\sigma t + \epsilon) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

где P, P', Q, Q', R, R' обозначают определенные функции среднего положения частицы; в частности, эти функции содержат также и σ , а поэтому они различны для различных нормальных колебаний, но независимы, однако, от произвольных постоянных K и ϵ . Формулы (15) представляют эллиптическое колебание с периодом $\frac{2\pi}{\sigma}$, причем направления

$$\left. \begin{aligned} \frac{\xi}{P} &= \frac{\eta}{Q} = \frac{\zeta}{R} \\ \frac{\dot{\xi}}{P'} &= \frac{\dot{\eta}}{Q'} = \frac{\dot{\zeta}}{R'} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

представляют направления двух сопряженных полудиаметров эллиптической орбиты, длины которых соответственно равны

$$(P^2 + Q^2 + R^2)^{1/2} K$$

и

$$(P'^2 + Q'^2 + R'^2)^{1/2} K.$$

Положения, формы и относительные размеры эллиптических траекторий, а также относительные фазы частиц на них являются определенными таким образом для всякого нормального вида колебания, но абсолютные размеры и фазы будут произвольны.

§ 205а. Если угловая скорость ω будет малой, то вид нормальных колебаний, вообще говоря, будет мало отличаться от соответствующего вида при отсутствии вращения, и выражения для измененных видов колебаний и их частот можно найти следующим образом¹⁾). Так как детерминантное уравнение (9) § 205 не изменится, если мы переменим знаки на обратные у всех β , то частоты будут, как правило, содержать эти количества во второй степени. Следовательно, рассматривая для примера тот вид колебаний, в котором A_1

¹⁾ Rayleigh, Phil. Mag. (6), V, 293 (1903) [Papers, V, 89].

конечно, тогда как A_3, A_4, \dots, A_n будут сравнительно малыми, и полагая $\lambda = i\sigma_1$, получим r -е уравнение системы (8) в приближенном виде

$$\frac{A_r}{A_1} = \frac{i\beta_{r1}\sigma_1}{a_r(\sigma_1^2 - \sigma_r^2)}, \quad (17)$$

где $\sigma_r^2 = \frac{C_r}{a_r}$. Отсюда, подставляя в первое уравнение, мы получим исправленное выражение σ_1^2 , так что

$$\sigma_1^2 = \frac{C_1}{a_1} \left\{ 1 + \sum_r \frac{\beta_{1r}^2}{a_1 a_r (\sigma_1^2 - \sigma_r^2)} \right\}. \quad (18)$$

Но эти приближения будут ошибочными, если какой-нибудь знаменатель в скобке обращается в нуль или является очень малым. Этот случай будет иметь место тогда, когда два или несколько видов нормальных колебаний при отсутствии вращения имеют одинаковые или почти одинаковые периоды. Предположим, например, что σ_1^2 и σ_2^2 почти равны. Тогда из формулы (8), считая $\lambda = i\sigma$, будем иметь

$$\begin{cases} (C_1 - \sigma^2 a_1) A_1 + i\beta_{12}\sigma A_2 = 0, \\ i\beta_{21}A_1 + (C_2 - \sigma^2 a_2) A_2 = 0, \end{cases} \quad (19)$$

т. е. A_1 и A_2 будут сравнимы. Исключая $\frac{A_1}{A_2}$, получим

$$(\sigma^2 - \sigma_1^2)(\sigma^2 - \sigma_2^2) = \frac{\beta_{12}^2}{a_1 a_2} \sigma^2. \quad (20)$$

В случае точного равенства частот это дает

$$\sigma^2 - \sigma_1^2 = \pm \frac{\beta_{12}}{\sqrt{a_1 a_2}} \sigma, \quad (21)$$

или приближенно

$$\sigma - \sigma_1 = \pm \frac{\beta_{12}}{2\sqrt{a_1 a_2}}. \quad (22)$$

Изменение частоты вследствие вращения теперь будет пропорционально ω^2 вместо ω^3 .

Выражения для A_3, A_4, \dots, A_n через A_1, A_2 могут быть найдены из оставшихся уравнений системы (8); ясно, что изменения в них могли произойти согласно указанному выше замечанию только благодаря прибавлению членов, содержащих ω^3 .

§ 205b. Вследствие аналитических трудностей, которые встречаются при определении свободных колебаний, в особенности в случае непрерывных систем, надлежит искать приближенные методы для вычисления наиболее важных частот, подобные тем, которые применял Рэлей в случае невращающихся систем (§ 168).

Для этой цели обратимся к вариационной формуле (14) § 203. При применении к малым колебаниям целесообразно ввести в эту

формулу *отклонения* (ξ , η , ζ) частиц из их положения относительного равновесия. Если написать $x_0 + \xi$, $y_0 + \eta$, $z_0 + \zeta$ вместо x , y , z , где x_0 , y_0 , z_0 относятся к положению относительного равновесия, то мы получим

$$\Delta \int_{t_0}^{t_1} M dt = \Delta \int_{t_0}^{t_1} M' dt + \left[\sum m (x_0 \Delta \eta - y_0 \Delta \xi) \right]_{t_0}^{t_1}, \quad (1)$$

где

$$M' = \sum m (\dot{\xi} \eta - \dot{\eta} \xi). \quad (2)$$

При подстановке выражения (1) в (14) § 203 при использовании граничного условия (15) § 203 указанная теорема будет представлена формулой

$$\Delta \int_{t_0}^{t_1} (\mathfrak{E} + \omega M' + T_0 - V) dt = 0, \quad (3)$$

если

$$\left[\sum m \{ (\dot{\xi} - \omega \eta) \Delta \xi + (\dot{\eta} + \omega \xi) \Delta \eta + \dot{\zeta} \Delta \zeta \} \right]_{t_0}^{t_1} = 0. \quad (4)$$

Предположим теперь, что как действительное, так и виртуальное движения суть простые гармонические колебания, что оба обладают одинаковыми периодами $\frac{2\pi}{\sigma}$ и что пределы интегрирования отличаются друг от друга в точности на один период. Тогда члены в (4), относящиеся к обоим пределам, сокращаются, так что требуемое условие будет выполнено. Отсюда следует, что среднее значение (по отношению ко времени) выражения

$$\mathfrak{E} + \omega M' - (V - T_0) \quad (5)$$

будет стационарным для малых произвольных вариаций типа колебаний, причем период не варьируется. M' , выраженное в обобщенных координатах (относительно которых мы предполагаем, что они обращаются в нуль при относительном равновесии), представляет биенийную функцию двух рядов переменных

$$q_1, q_2, \dots, q_n$$

и

$$\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n,$$

в то время как \mathfrak{E} и $V - T_0$, согласно предположению, представляют соответственно однородные квадратичные функции скоростей координат. Отсюда следует, что (5) есть однородная квадратичная функция переменных q_r , \dot{q}_r .

Если положить

$$q_r = A_r \cos \sigma t + B_r \sin \sigma t \quad (6)$$

и обозначить среднее значение выражения (5) через J , то получим

$$J = \sigma^2 P + \sigma Q - R, \quad (7)$$

где P, Q, R обозначают некоторые однородные квадратичные функции переменных A_r, B_r , точный вид которых в настоящий момент не нужен.

В силу свойства стационарности будем иметь

$$\sigma^2 \Delta P + \sigma \Delta Q - \Delta R = 0 \quad (8)$$

для всех бесконечно малых значений $\Delta A_r, \Delta B_r$. Если, в частности, положить $\Delta A_r = \varepsilon A_r, \Delta B_r = \varepsilon B_r$, где ε есть произвольно малая независимая от r постоянная, то будем иметь вследствие однородности

$$J = 0. \quad (9)$$

То обстоятельство, что при свободных колебаниях среднее значение выражения (5) равно нулю, представляет обобщение высказанного уже для случая $\omega = 0$ положения, что при колебаниях около положения абсолютного равновесия средние значения кинетической и потенциальной энергии равны между собой.

Данный результат может быть выражен еще в другой форме. Если временно рассматривать σ как функцию от A_r, B_r , где эти коэффициенты должны иметь какие-то значения, которые удовлетворяют уравнению

$$\sigma^2 P + \sigma Q - R = 0, \quad (10)$$

то будем иметь

$$(2\sigma P + Q) \Delta \sigma + (\sigma^2 \Delta P + \sigma \Delta Q - \Delta R) = 0. \quad (11)$$

Отсюда следует: если A_r, B_r имеют частные значения, соответствующие свободному колебанию, то имеем согласно (8)

$$\Delta \sigma = 0. \quad (12)$$

Другими словами, значения σ , определяемые формулой (10), стационарны.

Отсюда следует, что если значения P, Q, R в (10) вычислены на основе предполагаемого типа колебаний, который очень мало отличается от истинного, то погрешность получающегося значения σ будет второго порядка.

Стационарные значения включают, что вообще более всего важно, и максимумы и минимумы σ (взятые по абсолютной величине).

Применения вышеизложенного принципа к частным случаям будут получены в § 212a и 216.

Общий вид функций P, Q, R в формуле (7) может быть установлен, хотя это и несущественно для доказательства. Принимая во внимание (3) и (4) § 204, мы тотчас же получаем

$$\left. \begin{aligned} P &= \frac{1}{4} S_r a_r (A_r^2 + B_r^2), \\ R &= \frac{1}{4} S_r c_r (A_r^2 + B_r^2), \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

где S_r обозначает суммирование по членам указанного вида, а r про-
бегает значения 1, 2, ..., n . Далее из (2) следует

$$\begin{aligned} mM' &= \omega \sum m \left(S_r \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial q_r} q_r \cdot S_s \frac{\partial \eta}{\partial q_s} \dot{q}_s - S_r \frac{\partial \eta}{\partial q_r} q_r \cdot S_s \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial q_s} \dot{q}_s \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \dot{q}_1 S_1 \beta_{1r} q_r + \dot{q}_2 S_2 \beta_{2r} q_r + \dots + \dot{q}_n S_n \beta_{nr} q_r \right\}, \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$\beta_{rs} = 2\omega \sum m \frac{\partial(\dot{\xi}, \eta)}{\partial(q_s, q_r)}. \quad (15)$$

Если сделать подстановку из формулы (6) и взять среднее значение, то получим

$$Q = \frac{1}{2} S_r S_s \beta_{rs} A_s B_r,$$

где при двойном суммировании всякая перестановка индексов берется один раз.

Это подтверждается следующим замечанием: если образовать с помощью этих значений P , Q , R уравнения (8), то мы найдем, что коэффициенты при ΔA_r , ΔB_r соответственно будут тождественны с коэффициентами при $\cos \sigma t$ и $\sin \sigma t$, если из (6) сделать подстановку в типичное уравнение движения (5) § 204.

§ 206. Символические выражения для вынужденных колебаний, под действием периодической возмущающей силы, легко могут быть написаны. Если предположить, что Q_1, Q_2, \dots, Q_n все пропорциональны $e^{i\sigma t}$, где σ задана, то уравнения (5) § 204 дают, если опустить множители, зависящие от времени,

$$D(i\sigma) q_r = a_{r1} Q_1 + a_{r2} Q_2 + \dots + a_{rn} Q_n, \quad (1)$$

где коэффициенты в правой части обозначают миноры r - m -й строки матрицы $D(i\sigma)$.

Важнейшее отличие от теории „нормальных колебаний“ при отсутствии вращения состоит в том, что отклонение, соответствующее какому-нибудь типу колебаний, не зависит единственно только от возмущающей силы того же самого типа. Вследствие этого движения отдельных частиц состоят, как легко видеть из (14) § 205, из общих эллиптических колебаний. Кроме того получаются вообще сдвиги фаз между отклонениями и силой, зависящие от частоты.

Как в § 168, отклонение будет очень велико, если $D(i\sigma)$ будет очень мало, т. е. когда частота σ возмущающей силы приближается к частоте собственного свободного колебания.

Если период возмущающих сил бесконечно велик, то отклонения стремятся к „статическим“ значениям

$$q_1 = \frac{Q_1}{c_1}, \quad q_2 = \frac{Q_2}{c_2}, \quad \dots, \quad q_n = \frac{Q_n}{c_n}, \quad (2)$$

как это непосредственно видно из уравнения (5) § 204. Это заключение должно быть, однако, изменено, если один или несколько коэффициентов устойчивости c_1, c_2, \dots, c_n будут равны нулю. Если, например, $c_1 = 0$, то как первая строка, так и первый столбец детерминанта $D(\lambda)$ делятся на λ , так что детерминантное уравнение (10) § 204 будет иметь пару корней, обращающихся в нуль. Другими словами, существует возможное свободное движение бесконечно длинного периода. Коэффициенты при Q_2, Q_3, \dots, Q_n на правой стороне формулы (1) становятся в этом случае неопределенными для $\sigma = 0$, и вычисленные значения не совпадают, вообще говоря, со значениями (2). Этот пункт важен, так как при некоторых гидродинамических применениях, как мы увидим, возможны установившиеся циркуляционные движения жидкости при постоянной деформации свободной поверхности даже без влияния внешних сил; далее как следствие получается, что вынужденные приливные волны длинного периода не обязательно будут приближаться к значениям, данным статической теорией приливов; ср. § 214, 217.

Чтобы пояснить вышеизложенные положения, рассмотрим более подробно случай двух степеней свободы. Уравнения движения тогда имеют вид

$$\left. \begin{aligned} a_1 \ddot{q}_1 + c_1 q_1 + \beta \dot{q}_2 &= Q_1, \\ a_2 \ddot{q}_2 + c_2 q_2 + \beta \dot{q}_1 &= Q_2. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Уравнение, определяющее периоды свободных колебаний, будет

$$a_1 a_2 \lambda^4 + (a_1 c_2 + a_2 c_1 + \beta^2) \lambda^2 + c_1 c_2 = 0. \quad (4)$$

Для „обыкновенной“ устойчивости достаточно, чтобы корни этого квадратного уравнения относительно λ^2 были действительны и отрицательны. Так как a_1, a_2 существенно положительны, то это условие, очевидно, всегда выполняется в том случае, если c_1, c_2 оба положительны, и выполняется также и тогда, когда c_1, c_2 оба отрицательны, если только β^2 достаточно велико. Позднее мы, однако, покажем, что в этом, втором случае равновесие, благодаря введению сил трения, будет неустойчиво; см. § 322.

Для определения вынужденных колебаний, когда Q_1, Q_2 пропорциональны $e^{i\sigma}$, мы имеем, опуская множитель, зависящий от времени:

$$\left. \begin{aligned} (c_1 - \sigma^2 a_1) q_1 + i\sigma \beta q_2 &= Q_1, \\ -i\sigma \beta q_1 + (c_2 - \sigma^2 a_2) q_2 &= Q_2; \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

отсюда следует

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= \frac{(c_2 - \sigma^2 a_2) Q_1 - i\sigma \beta Q_2}{(c_1 - \sigma^2 a_1)(c_2 - \sigma^2 a_2) - \sigma^2 \beta^2}, \\ q_2 &= \frac{i\sigma \beta Q_1 + (c_1 - \sigma^2 a_1) Q_2}{(c_1 - \sigma^2 a_1)(c_2 - \sigma^2 a_2) - \sigma^2 \beta^2}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Предположим, что $c_2 = 0$ или, другими словами, что отклонение q_2 не влияет на значение $V - T_0$. Далее предположим, что $Q_2 = 0$, т. е. что внешние силы при некотором отклонении типа q_2 не производят никакой работы. Вышеписанные формулы дают тогда

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= \frac{a_2}{a_2(c_1 - \sigma^2 a_1) + \beta^2} Q_1, \\ \dot{q}_2 &= \frac{\beta}{a_2(c_1 - \sigma^2 a_1) + \beta^2} Q_1. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

В случае возмущения длинного периода мы будем иметь приближение $\sigma = 0$, а поэтому

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= \frac{1}{c_1 + \frac{\beta^2}{a_2}} Q_1, \\ q_2 &= \frac{\beta}{a_2 c_1 + \beta^2} Q_1. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Отклонение q_1 , таким образом, меньше, чем его статическое значение в отношении $1:1 + \frac{\beta^2}{a_2 c_1}$ и сопровождается движением типа q_2 , хотя и нет налицо никакой внешней силы этого типа (ср. § 217). Мы, естественно, приходим снова к случаю абсолютного равновесия, исследованному в § 168, если положим $\beta = 0$ ¹⁾.

Необходимо прибавить, что определение „главных координат“ § 204 зависит от первоначального вида Φ и $V - T_0$ и поэтому находится в зависимости от значения ω^2 , которое входит как множитель в T_0 . Система данных там уравнений не особенно подходит к разрешению вопроса о том, как зависят характер и частоты соответствующих нормальных колебаний от значения ω . Пункт, достойный быть отмеченным, который там был пропущен, заключается в том, что некоторые циркуляционные движения, которые при отсутствии вращения имели бы бесконечно длинные периоды, благодаря всякому хотя и малому вращению, превращаются в колебательные движения²⁾ периоды которых сравнимы с периодами вращения; ср. § 212, 223.

Чтобы пояснить вопрос наиболее простым примером, возьмем опять случай двух степеней свободы. Если c_s для $\omega = 0$ обращается в нуль и таким образом в общем случае содержит ω^2 в качестве множителя, то два корня уравнения (4) при ω^2 малом приближенно равны

$$\lambda^2 = -\frac{c_1}{a_1}, \quad \lambda^2 = -\frac{c_2}{a_2}.$$

Из второго из этих уравнений мы заключаем, что окончательно λ будет пропорциональна ω .

§ 207. Мы переходим теперь к гидродинамическим примерам и начнем со случая плоского горизонтального слоя жидкости, который в невозмущенном состоянии вращается равномерно около вертикальной оси²⁾). Результаты будут применимы без существенных изменений и к случаю бассейна не очень больших размеров, который находится на полюсе или где-нибудь в другом месте вращающегося земного шара.

Примем ось вращения за ось z . Предположим, что оси x и y врашаются с наперед заданной угловой скоростью ω в их собственной плоскости, и обозначим через u , v , w скорости относительно этих

¹⁾ Вышеизложенная теория появилась во 2-м изд. этого труда (1895). Влияние трения принимается во внимание в § 322.

²⁾ W. Thomson, On Gravitational Oscillations of Rotating Water, Proc. R. S. Edin., X, 92 (1879) [Papers, IV, 141].

осей в момент t той частицы, которая в этот момент занимает положение (x, y, z) . Действительные скорости этой частицы, параллельные мгновенным положениям осей, будут таковы:

$$u - \omega y, v + \omega x, w,$$

а ускорения по этим направлениям:

$$\frac{Du}{Dt} = 2\omega v - \omega^2 x, \quad \frac{Dv}{Dt} = 2\omega u - \omega^2 y, \quad \frac{Dw}{Dt}.$$

В настоящем случае относительное движение принимается бесконечно малым, так что $\frac{D}{Dt}$ можно заменить через $\frac{\partial}{\partial t}$.

Обозначив через z_0 ординату свободной поверхности при относительном равновесии исключительно под действием силы тяжести, имеем, как в § 26,

$$z_0 = \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{g} (x^2 + y^2) + \text{const.} \quad (1)$$

Примем для простоты, что наклон этой поверхности всюду мал, т. е. что $\frac{\omega^2 r}{g}$ будет мало, где r есть наибольшее расстояние произвольной части слоя от оси вращения.

Если $z_0 + \zeta$ обозначает ординату возмущенной поверхности, то при обычном предположении, что вертикальное ускорение воды мало сравнительно с g , давление в произвольной точке (x, y, z) определяется из уравнения

$$p - p_0 = g \varrho (z_0 + \zeta - z), \quad (2)$$

откуда следует

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial x} &= -\omega^2 x - g \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \\ -\frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial y} &= -\omega^2 y - g \frac{\partial \zeta}{\partial y}. \end{aligned}$$

Уравнения горизонтального движения будут тогда иметь вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - 2\omega v &= -g \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \Omega}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + 2\omega u &= -g \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \Omega}{\partial y}, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где Ω обозначает потенциал возмущающих сил.

Если положить

$$\bar{\zeta} = -\frac{\Omega}{g}, \quad (4)$$

то уравнения (3) примут вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - 2\omega v &= -g \frac{\partial}{\partial x} (\zeta - \bar{\zeta}), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + 2\omega u &= -g \frac{\partial}{\partial y} (\zeta - \bar{\zeta}). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Уравнение неразрывности имеет тот же вид, как в § 193:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{\partial(hu)}{\partial x} - \frac{\partial(hv)}{\partial y}, \quad (6)$$

где h обозначает глубину свободной поверхности, счиная от уровня в невозмущенном состоянии. Эта глубина, конечно, не будет постоянной за исключением, когда дно следует профилю свободной поверхности, данному уравнением (1).

Дифференцируя первое уравнение (5) по y , а второе по x и вычитая затем из второго первое, найдем

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + 2\omega \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad (7)$$

или, если положить

$$u = \frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad v = \frac{\partial \eta}{\partial t}$$

и проинтегрировать по t :

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} + 2\omega \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) = \text{const.} \quad (8)$$

Это есть не что иное как выражение теоремы Гельмгольца о том, что производение модуля вихря

$$2\omega + \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

на поперечное сечение

$$\left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) dx dy$$

вихревой нити постоянно.

В случае простого гармонического возмущения с множителем $e^{i\omega t}$ уравнения (5) и (6) соответственно перейдут в

$$\begin{cases} i\sigma u - 2\omega v = -g \frac{\partial}{\partial x} (\zeta - \bar{\zeta}), \\ i\sigma v + 2\omega u = -g \frac{\partial}{\partial y} (\zeta - \bar{\zeta}), \end{cases} \quad (9)$$

и

$$i\sigma \zeta = -\frac{\partial(hu)}{\partial x} - \frac{\partial(hv)}{\partial y}. \quad (10)$$

Из (9) следует

$$\begin{cases} u = \frac{g}{\sigma^2 - 4\omega^2} \left(i\sigma \frac{\partial}{\partial x} + 2\omega \frac{\partial}{\partial y} \right) (\zeta - \bar{\zeta}), \\ v = \frac{g}{\sigma^2 - 4\omega^2} \left(i\sigma \frac{\partial}{\partial y} - 2\omega \frac{\partial}{\partial x} \right) (\zeta - \bar{\zeta}), \end{cases} \quad (11)$$

и если подставить эти значения в (10), то получим уравнение, содержащее только ζ .