С. М. НИКОЛЬСКИЙ

КУРС МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

II

С. М. НИКОЛЬСКИЙ

КУРС МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Том II

Издание третье,
переработанное и дополненное

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебника для студентов физических и механико-математических специальностей высших учебных заведений

22.16
Н 64
УДК 517

Никольский С. М. **Курс математического анализа**, т. II: Учебник.— 3-е изд., перераб. и дополн.— М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983.

Учебник для студентов физических и механико-математических специальностей вузов. Написан на основе курса лекций, читаемого автором в Московском физико-техническом институте. Фактически принят как учебное пособие в некоторых втузах с повышенной программой по математике.

Второй том содержит кратные интегралы, теорию поля, ряды Фурье и интеграл Фурье, обобщенные функции, дифференцируемые многообразия, дифференциальные формы, интеграл Лебега — Стилтьеса.

При подготовке 3-го издания в книге сделаны существенные изменения и дополнения.

Рис. 50.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Во втором издании тома II добавлены параграфы 19.8—19.12, посвященные интегралам Стилтьеса, Римана — Стилтьеса, Лебега — Стильтьеса. Некоторым изменениям подверглись §§ 12.13, 13.8, 13.14, 13.15, 13.16, 15.3, 15.9, 16.3.

Кроме лиц, уже отмеченных в предисловиях к тому I, я благодарю Р. В. Гамкрелидзе за полезное для меня обсуждение отдельных глав книги. Я благодарю также А. Н. Вейссенберга и Е. Л. Энгелсона, обративших мое внимание на некоторые неточности в 1-м издании книги.

1975 г. *С. М. Никольский*

ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ

В третьем издании тома II сделаны изменения и добавления в § 12.13, 13.8, 15.3, 15.4, 16.4, 19.3 (п. 22). В частности, в § 12.13 дано более простое доказательство непрерывности интеграла по параметру, которое сообщил мне О. В. Бесов. В § 16.4 разобрано много примеров на преобразовании Фурье. Я взял эти примеры из сборника задач и упражнений по математическому анализу Б. П. Демидовича («Наука», 1972).

1982 г. *С. М. Никольский*

Глава 12

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 12.1. Введение

Пусть в трехмерном пространстве, в котором определена прямоугольная система координат (x, y, z), задана непрерывная поверхность

$$z = f(Q) = f(x, y) \qquad (Q = (x, y) \in \Omega),$$

где Ω есть некоторое ограниченное (двумерное) множество, для которого возможно определить понятие его площади (двумерной меры *)). В качестве Ω может быть взят круг, прямоугольник, эллипс и т. д. Будем считать, что функция $f(x, y)$ положительна, и поставим задачу: требуется определить объем тела, ограниченного сверху нашей поверхностью, снизу плоскостью $z = 0$ и с боков цилиндрической поверхностью, проходящей через границу γ плоского множества Ω, с образующей, параллельной оси z.

Искомый объем естественно определить следующим образом.

Разделим Ω на конечное число частей

$$\Omega_1, \ldots, \Omega_N, \tag{1}$$

перекрывающихся между собой разве что по своим границам. Однако эти части должны быть такими, чтобы можно было определить их площади (двумерные меры), которые мы обозначим соответственно через $m\Omega_1, \ldots, m\Omega_N$.

Введем понятие диаметра множества A — это есть точная верхняя грань

$$d(A) = \sup_{P', P'' \in A} |P' - P''|.$$

В каждой части Ω_j выберем по произвольной точке $Q_j = (\xi_j, \eta_j)$ $(j = 1, \ldots, N)$ и составим сумму

$$V_N = \sum_{j=1}^{N} f(Q_j)\, m\Omega_j, \tag{2}$$

которую естественно считать приближенным выражением искомого объема V. Надо думать, что приближение $V \approx V_N$ будет тем более точным, чем меньшими будут диаметры $d(\Omega_j)$ частей Ω_j.

---

*) См. далее § 12.2.

Поэтому естественно *объем* нашего тела определить как предел суммы (2)

$$V = \lim_{\max d(\Omega_j)\to 0} \sum_{j=1}^{N} f(Q_j)\, m\Omega, \tag{3}$$

когда максимальный диаметр частичных множеств разбиения (1) стремится к нулю, если, конечно, этот предел существует и равен одному и тому же числу независимо от способа последовательного разбиения Ω.

Можно отвлечься от задачи о нахождении объема тела и смотреть на выражение (3) как на некоторую операцию, которая производится над функцией f, определенной на Ω. Эта операция называется *операцией двойного интегрирования по Риману функции f на множестве Ω*, а ее результат — *определенным двойным интегралом (Римана) от f на Ω*, обозначаемым так:

$$V = \lim_{\max d(\Omega_j)\to 0} \sum_{j=1}^{N} f(Q_j)\, m\Omega_j = \iint_{\Omega} f(x, y)\, dx\, dy = \int_{\Omega} f(Q)\, dQ = \int_{\Omega} f\, d\Omega.$$

Пусть теперь в трехмерном пространстве, где определена прямоугольная система координат (x, y, z), задано тело Ω (множество) с неравномерно распределенной в нем массой с плотностью распределения $\mu(x, y, z) = \mu(Q)$ $(Q = (x, y, z) \in \Omega)$. Требуется определить общую массу тела Ω.

Чтобы решить эту задачу, естественно произвести разбиение Ω на части $\Omega_1, \ldots, \Omega_N$, объемы (трехмерные меры) которых (в предположении, что они существуют) пусть будут $m\Omega_1, \ldots, m\Omega_N$, выбрать произвольным образом в каждой части по точке $(Q_j = (x_j, y_j, z_j) \in \Omega_j)$ и считать, что искомая масса равна

$$M = \lim_{\max d(\Omega_j)\to 0} \sum_{j=1}^{N} \mu(Q_j)\, m\Omega_j. \tag{4}$$

Снова на выражение (4) можно смотреть как на определенную операцию над функцией μ, заданной теперь на трехмерном множестве Ω. Эта операция на этот раз называется *операцией тройного интегрирования (по Риману)*, а результат ее — *определенным тройным интегралом (Римана)*, обозначаемым так:

$$M = \lim_{\max d(\Omega_j)\to 0} \sum \mu(Q_j)\, m\Omega_j = \int_{\Omega} \mu(Q)\, dQ = \iiint_{\Omega} \mu(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

В этом же духе определяется понятие *n-кратного интеграла Римана.*

Мы увидим, что часть теории кратного интегрирования, содержащая теоремы существования и теоремы об аддитивных свойствах интеграла, может быть изложена совершенно аналогично как в одномерном, так и в *n-мерном случае.* Однако в тео-

рии кратных интегралов возникают трудности, которых не было у нас при изложении теории однократных интегралов.

Дело в том, что однократный интеграл Римана мы определили для очень простого множества — отрезка $[a, b]$, который дробился снова на отрезки. Никаких трудностей в определении длины (*одномерной меры*) отрезков не возникало. Между тем в случае двойных и вообще n-кратных интегралов область интегрирования Ω приходится делить на части с криволинейными границами и возникает вопрос об общем определении понятия площади или вообще n-мерной меры этих частей. Конечно, этот вопрос возник бы и при $n = 1$, если бы мы определяли интеграл Римана не на отрезке, а на более или менее сложном одномерном множестве.

В связи с этим появляется необходимость в четком определении понятия меры множества и выяснении ее свойств. Поэтому мы начинаем эту главу с изложения теории меры по Жордану, органически связанной с теорией интеграла Римана. На основе этой теории затем излагается теория кратного интеграла. Важным методом в этой последней является тот факт, что вычисление кратных интегралов может быть сведено к вычислению однократных по каждой переменной в отдельности, что дает возможность применять во многих случаях теорему Ньютона — Лейбница.

§ 12.2. Квадрируемые по Жордану множества

Рассмотрим плоскость $R = R_2$, где задана вполне определенная прямоугольная система координат (x, y), которую мы обозначим той же буквой R.

Ту же плоскость в другой, повернутой системе координат (ξ, η) мы будем обозначать через R'.

Простейшим множеством на R мы будем считать прямоугольник Δ. Аналитически его можно определить следующим образом: существует такая прямоугольная система координат R', в которой Δ определяется как множество точек (ξ, η), удовлетворяющих неравенствам

$$a_1 \leqslant \xi \leqslant a_2, \quad b_1 \leqslant \eta \leqslant b_2, \tag{1}$$

где $a_1 < a_2$, $b_1 < b_2$. Система координат R' обладает тем свойством, что стороны Δ параллельны ее осям. Чтобы подчеркнуть, что стороны Δ параллельны осям системы R', мы будем писать $\Delta = \Delta_{R'}$. Заметим, что мы считаем Δ замкнутыми множествами.

Мы вводим еще понятие *элементарной фигуры* σ. Множество $\sigma \subset R$ мы называем элементарной фигурой, если оно есть (теоретико-множественная) сумма конечного числа прямоугольников $\Delta \subset R$, которые могут пересекаться только по частям своих гра-

ниц. Площадь $|\sigma|$ двумерной фигуры σ определяется как сумма площадей прямоугольников Δ, из которых состоит σ.

Фигура σ может быть бесконечным числом способов представлена как конечная сумма прямоугольников Δ. Однако площадь $|\sigma|$ не зависит от способа представления. Это утверждение доказывается средствами элементарной геометрии. Мы не будем на этом останавливаться.

Пустое множество также считается фигурой, и мера его считается равной нулю.

Определяя прямоугольник при помощи неравенств (1), мы считали $a_1 < a_2$, $b_1 < b_2$. Таким образом, мы не будем считать отдельные точки или отрезки прямоугольниками — в этом не будет надобности при изложении данной теории.

Среди фигур σ мы выделим такие, что все прямоугольники Δ, из которых они состоят, суть $\Delta \equiv \Delta_R$, т. е. они имеют стороны, параллельные осям системы координат R. Такие фигуры мы будем обозначать символом σ_R.

Отметим ряд свойств фигур σ. Доказательства их элементарны, и мы не будем на них останавливаться.

а) *Если* $\sigma_1 \subset \sigma_2$, *то* $|\sigma_1| \leqslant |\sigma_2|$.

б) *Сумма* (теоретико-множественная) *фигур* σ'_R *и* σ''_R *есть фигура* σ_R, *и выполняется неравенство*

$$|\sigma'_R + \sigma''_R| \leqslant |\sigma'_R| + |\sigma''_R|. \tag{2}$$

Оно обращается в равенство, если σ'_R *и* σ''_R *пересекаются разве что по части их границ.*

в) *Разность* $\sigma'_R - \sigma''_R$ *двух фигур* σ'_R, σ''_R *не обязательно есть замкнутое множество, поэтому она не обязательно есть фигура. Она может стать фигурой (пустой), лишь если* $\sigma'_R \subset \sigma''_R$ *или если* σ'_R *и* σ''_R *не пересекаются. Но замыкание* $\overline{\sigma'_R - \sigma''_R}$ *есть всегда фигура, и при этом выполняется неравенство*

$$|\overline{\sigma'_R - \sigma''_R}| \geqslant |\sigma'_R| - |\sigma''_R|. \tag{3}$$

Оно обращается в равенство, если $\sigma''_R \subset \sigma'_R$.

г) *Если фигуру* σ_R *рассечь прямой, параллельной одной из осей* R, *то она разделится на две фигуры* σ'_R *и* σ''_R.

К этим свойствам нам придется еще добавить два, одно из которых основано на понятии сетки.

Зададим натуральное число N и построим два семейства прямых: $x = kh$ и $y = lh$ ($h = 2^{-N}$, k, $l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Оба семейства определяют прямоугольную сетку S_N, разбивающую R на квадраты Δ_h со сторонами длины h, параллельными осям R. При переходе от сетки S_N к сетке S_{N+1} каждый квадрат сетки S_N делится на четыре равных квадрата.

Пусть $G \subset R$ — произвольное непустое ограниченное множество. Обозначим через $\underset{\sim}{\omega}_N(G) = \underset{\sim}{\omega}_N$ фигуру, состоящую из тех квадратов Δ_k сетки S_N, которые полностью входят в G, и через $\tilde{\omega}_N(G) = \tilde{\omega}_N$ — фигуру, состоящую из тех квадратов Δ_k сетки S_N, каждый из которых содержит хотя бы одну точку множества G (рис. 12.1). Может, в частности, случиться, что $\underset{\sim}{\omega}_N$ есть пустое множество, но мы условились считать такое множество фигурой (имеющей меру, равную нулю).

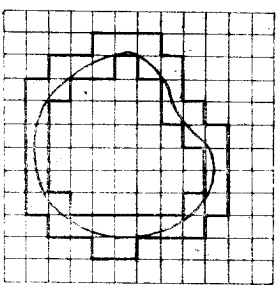

Рис. 12.1.

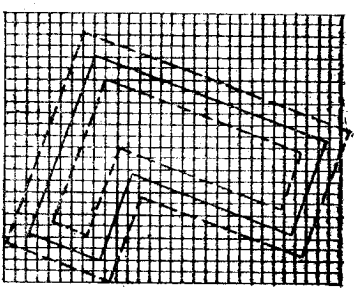

Рис. 12.2.

Очевидно, что

$$\underset{\sim}{\omega}_1 \subset \underset{\sim}{\omega}_2 \subset \ldots, \quad \tilde{\omega}_1 \supset \tilde{\omega}_2 \supset \ldots, \quad \underset{\sim}{\omega}_N(G) \subset G \subset \tilde{\omega}_{N'}(G),$$

где N и N' — произвольные натуральные числа. Отсюда следует, что существуют конечные пределы

$$m_i G = \lim_{N\to\infty} |\underset{\sim}{\omega}_N|, \quad m_e G = \lim_{N\to\infty} |\tilde{\omega}_N|, \quad m_i G \leqslant m_e G.$$

Число $m_i G$ называется *внутренней (двумерной) мерой Жордана множества* G, а число $m_e G$ называется *внешней (двумерной) мерой Жордана множества* G. Слово «Жордана» мы не всегда будем добавлять в целях краткости. В этом параграфе мы не всегда будем также в целях краткости добавлять слово «двумерный». Всюду в этом параграфе будет идти речь о двумерных мерах по Жордану.

Мы доказали, что произвольное ограниченное множество $G \subset R$ имеет внутреннюю и внешнюю жордановы меры $m_i G$ и $m_e G$, удовлетворяющие неравенству $m_i G \leqslant m_e G$.

Если для множества $G \subset R$ $m_i G = m_e G = mG$, то G называется *измеримым по Жордану* и число mG называют *жордановой двумерной мерой* G. Двумерное (только двумерное) измеримое по Жордану множество называют также *квадрируемым*.

Теперь мы можем сформулировать нужное нам свойство фигур σ:

д) *Фигура* σ (*состоящая из прямоугольников, как угодно повернутых по отношению к системе координат* R) *есть измеримое по Жордану множество. При этом* $m\sigma = |\sigma|$.

На рис. 12.2 изображены фигура σ и еще две фигуры σ' и σ'' со сторонами, параллельными соответствующим сторонам σ, такие, что $\sigma' \subset \sigma \subset \sigma''$. Ясно, что для данной фигуры σ и данного $\varepsilon > 0$ можно указать две фигуры σ' и σ'' такие, что выполняются условия:

1) $\sigma' \subset \sigma \subset \sigma''$,

2) $|\sigma''| - |\sigma'| < \varepsilon$,

3) точки границ σ' и σ'' отстоят от любой точки границы σ на расстоянии, большем некоторого положительного числа α.

Если теперь в системе координат R взять сетку S_N, где $\sqrt{2}h = \sqrt{2} \cdot 2^{-N} < \alpha$, то $\sigma'' - \sigma'$ содержит любой квадрат сетки, покрывающей хотя бы одну точку границы σ. Поэтому сумма площадей всех квадратов сетки S, покрывающих границу σ, не превышает $|\overline{\sigma'' - \sigma'}| = |\sigma''| - |\sigma'| < \varepsilon$. Отсюда следует, что

$$|\tilde{\omega}_N(\sigma)| - |\underset{\sim}{\omega}_N(\sigma)| < \varepsilon, \tag{2}$$

и так как ε как угодно мало, и $|\underset{\sim}{\omega}_N(\sigma)| \leqslant |\sigma| \leqslant |\tilde{\omega}_N(\sigma)|$, то

$$m_i\sigma = m_e\sigma = m\sigma = |\sigma|.$$

Докажем следующие равенства, выражающие различные эквивалентные определения внутренней и внешней мер ограниченного множества G:

$$m_iG = \lim_{N\to\infty} |\underset{\sim}{\omega}_N(G)| = \sup_N |\underset{\sim}{\omega}_N(G)| = \sup_{\sigma_R \subset G} |\sigma_R| = \sup_{\sigma \subset G} |\sigma|, \tag{3}$$

$$m_eG = \lim_{N\to\infty} |\tilde{\omega}_N(G)| = \inf_N |\tilde{\omega}_N(G)| = \inf_{\sigma_R \supset G} |\sigma_R| = \inf_{\sigma \supset G} |\sigma|. \tag{4}$$

Первое равенство в (3) есть уже данное выше определение m_iG. Оно дает эффективный способ получения m_iG. Однако оно связано с исходной системой координат R, потому что сетка связана с R.

Второе равенство очевидно, так как величина $|\underset{\sim}{\omega}_N(G)|$ возрастает вместе с N.

Так как $\underset{\sim}{\omega}_N(G)$ есть в то же время некоторая фигура σ_R, а σ_R есть некоторая σ, то очевидно, что

$$\sup_N |\underset{\sim}{\omega}_N(G)| \leqslant \sup_{\sigma_R \subset G} |\sigma_R| \leqslant \sup_{\sigma \subset G} |\sigma|. \tag{5}$$

С другой стороны, если $\sigma \subset G$ есть произвольная фигура и $\varepsilon > 0$, то в силу измеримости σ можно указать N настолько большим, что

$$|\sigma| < |\underset{\sim}{\omega}_N(\sigma)| + \varepsilon \leqslant |\underset{\sim}{\omega}_N(G)| + \varepsilon \leqslant m_iG + \varepsilon.$$

Отсюда $\sup\limits_{\sigma \subset G} |\sigma| \leqslant m_i G + \varepsilon$ и в силу произвольности ε

$$\sup_{\sigma \subset G} |\sigma| \leqslant m_i G. \tag{6}$$

Из (5) и (6) следуют третье и четвертое равенства (3) (первые два уже доказаны).

Последний член в (3) показывает, что *внутренняя мера $m_i G$ инвариантна относительно любой системы координат*, т. е. она не зависит от системы координат R, в которой она рассматривается.

Аналогично доказываются равенства (4).

Из равенств (3), (4) легко следует

Лемма 1. *Для того чтобы множество G было измеримым, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовали две фигуры $\underset{\sim}{\sigma}$ и $\tilde{\sigma}$ ($\underset{\sim}{\sigma} \subset G \subset \tilde{\sigma}$) такие, что* $|\tilde{\sigma}| - |\underset{\sim}{\sigma}| < \varepsilon$.

При этом можно считать, что $\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}_R$, $\underset{\sim}{\sigma} = \underset{\sim}{\sigma}_R$.

Действительно, если множество измеримо и R — заданная система координат, то найдутся такие $\underset{\sim}{\sigma} = \underset{\sim}{\sigma}_R \subset G$ и $\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}_R \supset G$, что

$$mG - \frac{\varepsilon}{2} < |\underset{\sim}{\sigma}| \leqslant |\tilde{\sigma}| < mG + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{и} \quad |\tilde{\sigma}| - |\underset{\sim}{\sigma}| < \varepsilon.$$

Наоборот, из того, что $\underset{\sim}{\sigma} \subset G \subset \tilde{\sigma}$, следует, что $|\underset{\sim}{\sigma}| \leqslant m_i G \leqslant m_e G \leqslant |\tilde{\sigma}|$, а если $|\tilde{\sigma}| - |\underset{\sim}{\sigma}| < \varepsilon$, то $m_e G - m_i G < \varepsilon$, и вследствие произвольности $\varepsilon > 0$

$$m_e G = m_i G.$$

Из леммы 1 следует, что *измеримое множество ограничено.*

Лемма 2. *Для того чтобы множество G было измеримым по Жордану, необходимо и достаточно, чтобы его граница Γ имела жорданову (плоскую) меру нуль, т. е. для всякого $\varepsilon > 0$ должна найтись покрывающая Γ фигура σ_0, имеющая меру $|\sigma_0| < \varepsilon$.*

Доказательство. Пусть множество G измеримо. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ (см. рис. 12.1) найдутся две фигуры $\sigma' = \sigma'_R$ и $\sigma'' = \sigma''_R$, такие, что $\sigma' \subset G \subset \sigma''$ и $|\sigma''| - |\sigma'| < \varepsilon$. Всегда можно считать, что точки границы Γ множества G не лежат на границе σ'', так же как на границе σ'. Если бы это было для взятых σ' и σ'' не так, то можно фигуру σ'' увеличить (раздать), а σ' уменьшить в направлении оси x и оси y, однако настолько, чтобы написанное неравенство осталось не нарушенным. Тогда очевидно, что

$$\Gamma \subset \sigma'' - \sigma' \subset \overline{\sigma'' - \sigma'} = \sigma_0 \text{ и } |\sigma_0| = |\sigma''| - |\sigma'| < \varepsilon,$$

т. е. удалось покрыть Γ фигурой σ_0, имеющей площадь, меньшую чем ε.

Наоборот, пусть для любого $\varepsilon > 0$ можно указать покрывающую Γ фигуру (см. рис. 12.1) $\sigma_0 = \sigma_R^0$, $|\sigma_0| < \varepsilon$. Можно считать, что Γ не имеет общих точек с границей σ_0. Если это не так для выбранной фигуры, то ее можно дополнительно раздать, сохранив неравенство $|\sigma_0| < \varepsilon$.

Положим $\sigma'' = G + \sigma_0$ и $\sigma' = \overline{G - \sigma_0}$. Нетрудно видеть, что σ' и σ'' суть фигуры (см. рис. 12.1) и притом $\sigma' = \sigma_R'$, $\sigma'' = \sigma_R''$, $\sigma' \subset G \subset \sigma''$, $\sigma'' - \sigma' = \sigma_0$ и $|\sigma''| - |\sigma'| = |\sigma_0| < \varepsilon$. Это показывает, что G — измеримое множество.

Лемма 3. *Сумма двух множеств G_1 и G_2, имеющих жорданову меру нуль, в свою очередь имеет жорданову меру нуль.*

Действительно, по условию для всякого $\varepsilon > 0$ существуют фигуры σ_R' и σ_R'' такие, что $\sigma_R' \supset G_1$, $\sigma_R'' \supset G_2$ и $|\sigma_R'| < \varepsilon/2$, $|\sigma_R''| < \varepsilon/2$. Тогда фигура $\sigma_R = \sigma_R' + \sigma_R''$ будет обладать свойствами

$$\sigma_R \supset G_1 + G_2, \quad |\sigma_R| \leqslant |\sigma_R'| + |\sigma_R''| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Лемма 4. *Вместе с G и $G_1 \subset G$ есть множество жордановой меры нуль.*

Лемма очевидна.

Теорема 1. *Если два множества G_1 и G_2 измеримы по Жордану, то измеримы по Жордану также их сумма, разность и пересечение.*

Доказательство. Будем обозначать через $\Gamma(E)$ границу множества E. Имеют место легко проверяемые теоретико-множественные вложения

$$\Gamma(G_1 + G_2) \subset \Gamma(G_1) + \Gamma(G_2),$$
$$\Gamma(G_1 \cdot G_2) \subset \Gamma(G_1) + \Gamma(G_2),$$
$$\Gamma(G_1 - G_2) \subset \Gamma(G_1) + \Gamma(G_2).$$

Так как G_1 и G_2 измеримы, то по лемме 2 $m\Gamma(G_1) = 0$, $m\Gamma(G_2) = 0$. Но тогда по лемме 3 правые части написанных вложений имеют меру нуль, по лемме 4 и левые части имеют меру нуль. Отсюда, применяя снова лемму 2, получим, что множества, указанные в теореме, измеримы.

Лемма 5. *Если измеримое по Жордану множество G рассечь на две части G_1 и G_2 при помощи куска кривой L (в частности прямой), имеющей жорданову меру нуль, то каждая часть в свою очередь измерима по Жордану.*

Доказательство. Очевидно, что

$$\Gamma(G_1) \subset \Gamma(G) + L, \quad \Gamma(G_2) \subset \Gamma(G) + L,$$

откуда на основании предыдущих лемм следует утверждение.

Таким образом, *если G есть измеримое по Жордану множество, то любая сетка S_N (связанная с любой системой коорди-*

нат R) дробит G на части, каждая из которых измерима по Жордану. Диаметр каждой из этих частей не превышает $\sqrt{2}\,2^{-N}$. Таким образом, при $N \to \infty$ диаметры частей равномерно стремятся к нулю.

Отметим еще одно свойство фигур σ.

е) *Если фигуру σ подвергнуть в R операции сдвига или вращения, то получим фигуру σ' и $|\sigma| = |\sigma'|$.*

С помощью этого свойства и того факта, что при сдвиге и вращении соотношение вложения $A \subset B$ сохраняется, следует

Лемма 6. *Если G_* есть множество, полученное из измеримого множества $G \subset R$ посредством сдвига или вращения его в R, то G_* — измеримое множество и $mG = mG_*$.*

Пример. Приведем пример неквадрируемого (не измеримого в двумерном смысле) множества. Пусть G — не пустое открытое ограниченное множество и E — множество всех его рациональных точек, т. е. имеющих рациональные координаты (x, y). Очевидно, что $\omega_N(E)$ есть пустое множество для любого натурального N и $m_i(E) = 0$. С другой стороны, пусть точка $\mathbf{x}^0 \in G$, тогда найдется невырожденный прямоугольник Δ, принадлежащий G и содержащий $\mathbf{x}^0$. Очевидно, что $\tilde{\omega}_N(E) \supset \Delta$, $|\tilde{\omega}_N(E)| \geqslant |\Delta| > 0$, $m_e E \geqslant |\Delta| > 0$.

Таким образом, $m_i E < m_e E$ и E — неквадрируемое множество.

Докажем аддитивное свойство жордановой меры.

Теорема 2. *Если множества G_1 и G_2 измеримы по Жордану и имеют общие точки, принадлежащие разве что их границам, то их (измеримая по теореме 1) сумма имеет меру, равную сумме их мер:*

$$m(G_1 + G_2) = mG_1 + mG_2. \tag{7}$$

Доказательство. Зададим $\varepsilon > 0$ и подберем фигуры $\sigma_1' = \sigma_{1,R}'$, $\sigma_1'' = \sigma_{1,R}''$, $\sigma_2' = \sigma_{2,R}'$, $\sigma_2'' = \sigma_{2,R}''$ такие, что

$$\sigma_1' \subset G_1 \subset \sigma_1'', \quad \sigma_2' \subset G_2 \subset \sigma_2'',$$

$$mG_1 - \varepsilon < |\sigma_1'| < |\sigma_1''| < mG_1 + \varepsilon, \quad mG_2 - \varepsilon < |\sigma_2'| < |\sigma_2''| < mG_2 + \varepsilon.$$

Положим $\sigma' = \sigma_1' + \sigma_2'$, $\sigma'' = \sigma_1'' + \sigma_2''$. Очевидно, что σ' и σ'' — фигуры, при этом $\sigma' \subset G_1 + G_2 \subset \sigma''$ и

$$|\sigma''| \leqslant |\sigma_1''| + |\sigma_2''|, \quad |\sigma'| = |\sigma_1'| + |\sigma_2'|. \tag{8}$$

Равенство в (8) справедливо потому, что σ_1' и σ_2' вместе с G_1 и G_2 пересекаются разве что по своим границам.

Теперь очевидно, что

$$(mG_1 - \varepsilon) + (mG_2 - \varepsilon) < |\sigma_1'| + |\sigma_2'| = |\sigma'| \leqslant m_i(G_1 + G_2) \leqslant$$
$$\leqslant m_e(G_1 + G_2) \leqslant |\sigma''| \leqslant |\sigma_1''| + |\sigma_2''| < (mG_1 + \varepsilon) + (mG_2 + \varepsilon),$$

откуда в силу произвольности $\varepsilon > 0$ следует (7).

Теорема 3. *Если G_1 и G_2 измеримы по Жордану и $G_1 \subset G_2$, то*

$$m(G_2 - G_1) = mG_2 - mG_1. \tag{9}$$

Доказательство. Измеримость $G_2 - G_1$ доказана в теореме 1, поэтому измеримое множество G_2 распадается на два непересекающиеся измеримые множества: $G_2 = G_1 + (G_2 - G_1)$. Но тогда равенство (9) следует из предыдущей теоремы.

§ 12.3. Важные примеры квадрируемых по Жордану множеств

Пусть функция $f(x)$ неотрицательна на отрезке $[a, b]$ и интегрируема (в частности, непрерывна) на нем. Обозначим через Γ ее график — множество всех точек $(x, f(x))$, где $a \leqslant x \leqslant b$, и через Ω — множество всех точек (x, y) плоскости, для которых выполняются неравенства

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad 0 \leqslant y \leqslant f(x).$$

Теорема 1. *Множество Ω измеримо и его мера (двумерная) равна*

$$m\Omega = \int_a^b f(x)\,dx = I.$$

В самом деле, в силу интегрируемости f на $[a, b]$ для любого $\varepsilon > 0$ найдется разбиение R отрезка $[a, b]$ такое, что

$$I - \frac{\varepsilon}{2} < \underline{S}_R \leqslant \overline{S}_R < I + \frac{\varepsilon}{2},$$

где $\underline{S}_R$ и $\overline{S}_R$ — соответствующие R нижняя и верхняя интегральные суммы функции f, равные площадям фигур, первая из которых принадлежит Ω, а вторая содержит Ω.

Это доказывает теорему.

Теорема 2. *Непрерывная (плоская) кривая Γ на плоскости x, y, проектируемая взаимно однозначно на отрезок $[a, b]$ некоторой прямой L, есть множество точек, имеющее двумерную меру нуль.*

В самом деле, можно считать, что Γ находится по одну сторону от прямой L, иначе в качестве L можно взять другую ей параллельную прямую, удовлетворяющую этим свойствам. Построим прямоугольную систему координат x, y с осью x, совпадающей с L. Тогда Γ будет графиком некоторой непрерывной функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Множество Ω, определенное для f как в теореме 1, на основании этой теоремы измеримо, а Γ как часть границы Ω имеет двумерную меру нуль.

Теорема 3. *Плоское ограниченное множество Ω измеримо (в двумерном смысле), если его граница состоит из конечного*

числа точек и кусков непрерывных кривых, каждый из которых проектируется взаимно однозначно на одну из осей прямоугольной системы координат.

В самом деле, граница множества Ω есть сумма конечного числа множеств, имеющих двумерную меру нуль.

Заметим, что гладкий кусок кривой Γ $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ $(a\leqslant t\leqslant b)$ (φ' и ψ' непрерывны и $\varphi'^2+\psi'^2>0$) всегда можно разбить на конечное число частей, проектирующихся на одну из осей координат. Ведь (см. § 6.5) каждую точку $t\in[a, b]$ можно покрыть интервалом (t', t'') (в случае $t=a$ или $t=b$ — полуинтервалом) таким, что соответствующая ему часть нашей гладкой кривой проектируется на одну из осей, а на основании леммы Бореля среди этих интервалов можно выбрать конечное их число, все же покрывающих отрезок $[a, b]$. Другое доказательство того факта, что гладкий кусок кривой имеет двумерную меру нуль, см. в § 12.5, теорема 3.

В заключение отметим, что произвольная плоская непрерывная кривая может и не иметь двумерной меры нуль. Вспомним о кривой Пеано, точки которой заполняют квадрат (см. § 6.5).

§ 12.4. Еще один критерий измеримости множества. Полярные координаты

Внутреннюю и внешнюю меры ограниченного множества Ω можно еще определить так:

$$m_i\Omega=\sup_{\Omega'\subset\Omega} m\Omega',\quad m_e\Omega=\inf_{\Omega'\supset\Omega} m\Omega', \tag{1}$$

где Ω' обозначает произвольное измеримое множество, в первом случае принадлежащее Ω, а во втором — содержащее Ω. В самом деле, с одной стороны,

$$m_i\Omega=\sup_{\sigma\subset\Omega}|\sigma|\leqslant\sup_{\Omega'\subset\Omega} m\Omega'=I,$$

потому что фигуры σ измеримы, а с другой стороны, если $\varepsilon>0$ и Ω' — такое измеримое множество, что $\Omega'\subset\Omega$ и $I-\varepsilon<m\Omega'$, то найдется также $\sigma\subset\Omega'$, так что $m\Omega'<|\sigma|+\varepsilon$. Следовательно, $I-2\varepsilon<|\sigma|\leqslant m_i\Omega$, и вследствие произвольности ε имеет место $I\leqslant m_i\Omega$. Мы доказали первое равенство (1). Подобным образом доказывается и второе.

Из (1), очевидно, следует: *для того чтобы множество Ω было измеримым, необходимо и достаточно, чтобы, каково бы ни было $\varepsilon>0$, нашлись два измеримых множества Ω' и Ω'' таких, что $\Omega'\subset\Omega\subset\Omega''$ и $m\Omega''-m\Omega'<\varepsilon$.*

Площадь (двумерная жорданова мера) фигуры Ω, ограниченной полярными лучами $\theta=\theta_1$, $\theta=\theta_2$ $(\theta_1<\theta_2)$ и кривой Γ, определяемой в полярных координатах непрерывной функцией $\rho=f(\theta)$, равна (см. § 10.1 и вопрос, поставленный там)

$$S=\frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} f(\theta)^2\,d\theta. \tag{2}$$

Покажем, что $m\Omega = S$. В самом деле, произвольный круговой сектор есть измеримое множество, потому что его граница есть непрерывная кусочно гладкая кривая. Далее, из существования интеграла (2) следует, что для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое разбиение отрезка $[\theta_1, \theta_2]$, что соответствующая ему верхняя интегральная сумма отличается от нижней менее чем на ε. Но верхняя сумма есть мера суммы конечного числа круговых секторов, содержащих Ω, а нижняя есть мера суммы конечного числа круговых секторов, содержащихся в Ω. Это и доказывает наше утверждение в силу (1).

§ 12.5. Измеримые по Жордану трехмерные и n-мерные множества

Теория, изложенная в предыдущих параграфах, легко переносится на случай любого числа измерений $n = 1, 2, 3, \ldots$

Остановим пока наше внимание на случае трех измерений. В этом случае мы вводим в качестве простейших фигур замкнутые прямоугольники (параллелепипеды) и обозначаем их символами Δ. Теперь уже в качестве меры Δ рассматривается объем Δ, т. е. число $|\Delta|$, равное произведению длин трех ребер Δ (ширины, длины, высоты). Рассматриваются только невырожденные прямоугольники, у которых все три ребра положительны.

Вводим понятие фигуры σ как множества точек, представляющего собой конечную сумму прямоугольников Δ, которые могут пересекаться только по частям своих границ.

Объем $|\sigma|$ фигуры σ определяется как сумма объемов $|\Delta|$ прямоугольников Δ, из которых она состоит. Пустое множество считается фигурой с объемом, равным нулю.

Если R' есть какая-либо прямоугольная система координат, то прямоугольники и фигуры с ребрами, параллельными осям R', обозначаем еще через $\Delta_{R'}$ и $\sigma_{R'}$. Вводим в $R = R_3$ для каждого натурального числа N сеть S_N, образуемую тремя семействами плоскостей

$$x = kh, \quad y = lh, \quad z = mh \quad (h = 2^{-N},\ k,\ l,\ m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Сеть S_N разбивает пространство R на кубы Δ_h с ребрами длины h, параллельными осям координат. Определяем для любого ограниченного множества $G \subset R$ множество $\underset{\sim}{\omega}_N(G)$ как сумму тех Δ_h, которые полностью принадлежат G, и множество $\tilde{\omega}_N(G)$ как сумму всех тех кубов Δ_h, каждый из которых содержит в себе хотя бы одну точку из G.

Аналогично § 12.2 *внешнюю и внутреннюю меры* G определяем как пределы монотонных последовательностей

$$m_e G = \lim_{N\to\infty} |\tilde{\omega}_N(G)|, \quad m_i G = \lim_{N\to\infty} |\underset{\sim}{\omega}_N(G)|$$

и называем множеством G *измеримым по Жордану в трехмерном смысле*, если $m_i G = m_e G = mG$. Число mG называется *жордановой трехмерной мерой* G.

Свойства трехмерной меры совершенно аналогичны свойствам двумерной меры, изложенным в § 12.2. Чтобы убедиться в этом, нужно только проверить справедливость свойств а) — е) фигур σ, теперь уже трехмерных. Это проверяется элементарными средствами. Теоремы в § 12.2 были доказаны исключительно на основе свойств а) — е), поэтому эти утверждения верны и в трехмерном случае. Несколько видоизменяется только лемма 5 из § 12.2. В трехмерном случае она гласит:

Лемма. *Если измеримое множество $G \subset R$ рассечь на части при помощи конечного числа поверхностей, имеющих (трехмерную) меру нуль, то эти части будут измеримы (в трехмерном смысле).*

Изложенная теория по аналогии переносится на n-мерный случай, где n есть любое натуральное число ($n = 1, 2, \ldots$). Теперь уже $R = R_n$ есть n-мерное действительное пространство точек $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. Мы считаем, что R также обозначает определенную прямоугольную систему координат $R(x_1, \ldots, x_n)$. Можно в R ввести другую прямоугольную систему координат $R'(\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Формулы преобразования $R \rightleftarrows R'$ записываются при помощи равенств (ортогональных преобразований)

$$x_k = \sum_{l=1}^{n} a_{kl}\xi_l \quad (k = 1, \ldots, n),$$

$$\sum_{l=1}^{n} a_{kl}a_{k_1 l} = \begin{cases} 0 & (k \neq k_1), \\ 1 & (k = k_1). \end{cases}$$

По определению множество $\Delta \subset R$ называется прямоугольным параллелепипедом, если можно указать такую прямоугольную систему координат $R'(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ и такие пары чисел $a_j < b_j$ ($j = 1, \ldots, n$), что $\Delta = \{a_j \leqslant \xi_j \leqslant b_j;\ j = 1, \ldots, n\}$.

Нетрудно показать, что указанная система координат R' (для данного Δ) единственна. *n-мерный объем* Δ определяется как число

$$|\Delta| = \prod_{j=1}^{n} (b_j - a_j).$$

Естественно говорить в этом случае, что Δ имеет ребра, параллельные осям координат системы R', и писать $\Delta = \Delta_{R'}$. Элементарная фигура σ в R определяется как конечная сумма прямоугольных параллелепипедов Δ, пересекающихся разве что по своим границам, а мера σ — как число $|\sigma|$, равное сумме мер указанных Δ.

Пустое множество в R_n считается фигурой, имеющей n-мерный объем, равный нулю.

Вводится также для каждого натурального N сеть S_N как n семейств плоскостей

$$x_j = k_j h \quad (j = 1, \ldots, n;\ h = 2^{-N};\ k_j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

разбивающих R_n на n-мерные кубы

$$\Delta_h = \{k_j h \leqslant x_j \leqslant (k_j + 1)h\}.$$

Если G — ограниченное множество в R, то по определению множество $\underset{\sim}{\omega}_N(G)$ есть теоретико-множественная сумма кубов Δ_h, полностью содержащихся в G, и множество $\tilde{\omega}_N(G)$ есть сумма кубов Δ_h, каждый из которых содержит хотя бы одну точку $\mathbf{x} \in G$. Очевидно, что существуют пределы монотонных последовательностей

$$\lim_{N\to\infty} |\underset{\sim}{\omega}_N(G)| = m_i G, \quad \lim_{N\to\infty} |\tilde{\omega}_N(G)| = m_e G,$$

которые и называются соответственно *внутренней* и *внешней* n-*мерными мерами* G *по Жордану*.

Далее, множество G называется *измеримым по Жордану в смысле* n-*мерной меры*, если для него $m_i G = m_e G = mG$. Число mG называется n-*мерной мерой* G *по Жордану*.

Теория n-мерной меры по Жордану полностью аналогична теории двухмерной меры, изложенной в § 12.2. Чтобы убедиться в этом, надо только проверить справедливость свойств а) — е) для n-мерных фигур σ. Это несколько кропотливо, но может быть выполнено по аналогии с тем, как это делается в трехмерном случае.

Следующая теорема обобщает теорему 2 § 12.3.

Теорема 1. *Поверхность* S

$$x_n = f(x_1, \ldots, x_{n-1}) = f(Q) \quad (Q = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \Lambda)$$

в n-*мерном пространстве, где* f — *непрерывная функция на замкнутом ограниченном множестве* Λ, *имеет* n-*мерную меру нуль.*

Доказательство. Так как функция f равномерно непрерывна на Λ, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что

$$|f(Q) - f(Q')| < \varepsilon, \quad |Q - Q'| < \delta; \quad Q, Q' \in \Lambda.$$

Рассечем R_n сеткой

$$x_i = \alpha_i h, \quad \alpha_i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots; \quad i = 1, \ldots, n-1,$$
$$x_n = k\varepsilon, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

на равные прямоугольники Δ (прямоугольные параллелепипеды). Высота каждого Δ (в направлении x_n) равна ε, а основание Δ' (проекция Δ на $R_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1})$) есть куб со стороной h, подобранной так, чтобы его диаметр был меньше δ. Тем самым сетка рассекает R_{n-1} на кубы Δ'. Так как Λ ограничено, то Λ содержится в некотором $(n-1)$-мерном кубе, и общая мера кубов Δ', содержащих в себе точки Λ, не превышает некоторую константу M. Рассмотрим один из таких кубов Δ'. Среди прямоугольников Δ, имеющих его своей проекцией, может быть, очевидно, не более чем три, содержащих в себе точки поверхно-

сти S. Их общий объем не превышает $3\varepsilon|\Delta'|$, где $|\Delta'|$ есть $(n-1)$-мерная мера Δ'. Но тогда общий объем кубов Δ, покрывающих S, не превышает $3\varepsilon M$, то есть может быть сделан как угодно малым.

Пример. Пусть в прямоугольной системе координат R задан прямоугольный параллелепипед Δ со сторонами, параллельными осям другой прямоугольной системы R'. Пусть S — одна из его граней. Она проектируется взаимно однозначно на одно из $(n-1)$-мерных координатных подпространств, для определенности пусть это будет подпространство $(x_1, \ldots, x_{n-1})$, и описывается линейной функцией (непрерывной) вида $x_n = \sum_{j=1}^{n-1} d_j x_j$, заданной на некотором ограниченном замкнутом множестве. По теореме 1 $mS = 0$. Так как Δ имеет конечное число граней, то Δ есть измеримое множество.

Теорема 2. *Открытое ограниченное не пустое множество G в пространстве $R_n = R$ можно представить как сумму счетного числа кубов:*

$$G = \sum_1^\infty \Delta_k \tag{1}$$

(замкнутых, с ребрами, параллельными осям координат), пересекающихся попарно разве что по своим границам. При этом

$$m_i G = \sum_1^\infty |\Delta_k| \tag{2}$$

(хотя G может и не быть измеримым по Жордану, см. § 19.7).

Доказательство. Последовательность сеток S_N $(N = 1, 2, \ldots)$ определяет (замкнутые) фигуры

$$\underset{\sim}{\omega}_1(G) \subset \underset{\sim}{\omega}_2(G) \subset \underset{\sim}{\omega}_3(G) \subset \ldots \subset G.$$

Так как G — открытое, то любая точка $\mathbf{x}^0$ может быть покрыта открытым кубом $\Delta \subset G$ с центром в ней. Но тогда при достаточно большом N куб сетки S_N, содержащий x^0, будет принадлежать Δ, следовательно, и G, тем самым он войдет в фигуру $\omega_N(G)$. Это показывает, что имеет место равенство

$$G = \underset{\sim}{\omega}_1(G) + (\underset{\sim}{\omega}_2(G) - \underset{\sim}{\omega}_1(G)) + (\underset{\sim}{\omega}_3(G) - \underset{\sim}{\omega}_2(G)) + \ldots$$

Перенумеруем кубы $\underset{\sim}{\omega}_1(G)$, если они есть, дальше последующими номерами перенумеруем кубы замыкания $\underset{\sim}{\omega}_2(G) - \underset{\sim}{\omega}_1(G)$, затем кубы замыкания $\underset{\sim}{\omega}_3(G) - \underset{\sim}{\omega}_2(G)$ и т. д. В результате получим последовательность $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$ такую, что выполняется (1). Она бесконечна потому, что при любом m замкнутое множество $\sum_1^m \Delta_k$ отлично от содержащего его ограниченного открытого множества G.

Далее, $\sum_1^\infty |\Delta_k| = \lim_{N\to\infty} \underset{\sim}{\omega}_N(G) = m_i G$.

Теорема 3. *Поверхность S (m-мерная, $m < n$)*

$$x_i = \varphi_i(\mathbf{u}) = \varphi_i(u_1, \ldots, u_m) \qquad (i = 1, \ldots, n;\ \mathbf{u} \in \Omega), \tag{3}$$

где φ_i непрерывны вместе со своими частными производными на Ω

(замыкании ограниченного m-мерного открытого выпуклого множества), имеет n-мерную меру нуль.

Доказательство. Пусть

$$K \geqslant \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j} \right| \text{ на } \Omega \quad (i=1, \ldots, n;\ j=1, \ldots, m).$$

Пространство точек $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_m)$ обозначим через R_m, а пространство точек $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ — через R_n. Разрежем R_m и R_n прямоугольными сетками на кубики с длинами ребер соответственно h и g. Поместим Ω в куб $\Delta \subset R_m$ с гранями, принадлежащими граням сетки R_m.

Пусть $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_m)$ есть точка определенного кубика ω сетки R_m и $\mathbf{u}' = (u_1, \ldots, u_m)$ — другая точка этого кубика. Пусть точки $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{x}' = (x_1', \ldots, x_n')$ на поверхности S соответствуют при помощи уравнений (3) точкам $u, u' \in \omega$.

На основании теоремы о среднем (см. § 7.13, (12))

$$|x_j' - x_j| = \left| \sum_{s=1}^{m} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial u_s} \right)_1 (u_s' - u_s) \right| \leqslant Kmh.$$

Здесь $(\quad)_1'$ обозначает, что в $(\quad)$ подставлена некоторая промежуточная точка между $\mathbf{u}$ и $\mathbf{u}'$.

Будем считать, что $g = Kmh$.

Тогда, если $\mathbf{x}$ попала в некоторый кубик σ сетки R_n, то точка $\mathbf{x}'$ будет, очевидно, принадлежать либо тому же кубику σ, либо одному из соседних с ним кубиков сетки R_n. Количество таких возможных кубиков не превышает 3^n. Общий их объем равен

$$3^n g^n = (3mK)^n h^n.$$

Но количество всех кубиков $\omega \subset \Delta$ равно $|\Delta|/h^m$, где $|\Delta|$ есть m-мерный объем Δ. Поэтому общий объем покрывающих нашу поверхность S кубиков σ равен

$$(3MK)^n |\Delta| h^{n-m} = ch^{n-m}, \qquad c = (3mK)^n |\Delta|.$$

Мы видим, что при $m < n$ эта величина стремится к нулю при $h \to 0$.

Это показывает, что для всякого $\varepsilon > 0$ можно указать такое h, что для него общий n-мерный объем кубиков, покрывающих S будет меньшим, чем $\varepsilon > 0$, и, следовательно, $mS = 0$.

§ 12.6. Понятие кратного интеграла

Определим это понятие в n-мерном случае. Специально в двух- и трехмерном случае оно уже вводилось в § 12.1 схематически.

Пусть $R = R_n$ есть n-мерное евклидово пространство точек $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\Omega \subset R_n$ — измеримое (следовательно, ограниченное) множество и на Ω задана функция $f(P)$ $(P \in \Omega)$.

Введем разбиение Ω на частичные множества, т. е. представим Ω в виде суммы

$$\Omega = \Omega_1 + \ldots + \Omega_N \tag{1}$$

конечного числа измеримых в n-мерном смысле по Жордану множеств Ω_j, которые могут попарно пересекаться только по ча-

стям своих границ. Различные разбиения Ω мы будем обозначать символами ρ, ρ^1, ...

В каждом частичном множестве Ω_j $(j = 1, \ldots, N)$ разбиения ρ выберем произвольную точку $P_j \in \Omega_j$ и составим *интегральную сумму (по Риману)*:

$$S_\rho = S_\rho(f) = \sum_1^N f(P_j)\, m\Omega_j, \tag{2}$$

где $m\Omega_j$ — мера Жордана множества Ω_j.

Надо иметь в виду, что S_ρ зависит от функции f, способа разбиения Ω на части и выбора точек P_j в каждом из частичных множеств Ω_j разбиения.

Обозначим через δ максимальный диаметр множеств Ω_j:

$$\delta = \delta(\rho) = \max_{1 \leq j \leq N} d(\Omega_j).$$

По определению предел

$$\lim_{\delta \to 0} \sum_{j=1}^N f(P_j)\, m\Omega_j = I \tag{3}$$

интегральной суммы f называется *определенным (n-кратным) интегралом в смысле Римана от функции f по множеству Ω.*

Таким образом, *определенным интегралом от функции f по множеству Ω называют предел, к которому стремится ее интегральная сумма, соответствующая переменному разбиению Ω, когда максимальный диаметр частичных множеств разбиения стремится к нулю (независимо от выбора точек $P_j \in \Omega_j$).*

Как обычно в анализе, это определение можно понимать в двух (эквивалентных) смыслах: на языке ε, δ и на языке последовательностей.

На языке ε, δ оно формулируется так:

Интегралом Римана от функции f по множеству Ω называют число I, удовлетворяющее следующему свойству: для всякого $\varepsilon > 0$ должно найтись такое $\delta > 0$, зависящее от ε, что, каково бы ни было разбиение Ω на части Ω_j с диаметрами, меньшими чем δ, и каков бы ни был выбор точек $P_j \in \Omega_j$ $(j = 1, 2, 3, \ldots, n)$, выполняется неравенство:

$$\left| I - \sum_{j=1}^N f(P_j)\, m\Omega_j \right| < \varepsilon. \tag{4}$$

На языке последовательностей оно формулируется так:

Интеграл Римана от функции f по множеству Ω есть предел, к которому стремится любая последовательность интегральных сумм S_{ρ_k} функции f, соответствующих разбиениям ρ_k $(k = 1, 2, \ldots)$, со стремящимся к нулю максимальным диаметром

δ_k *частичных множеств*:

$$I = \int_\Omega f\,d\mathbf{x} = \int_\Omega f\,d\Omega = \lim S_{\rho k} \quad (\delta_k \to 0). \tag{5}$$

Сейчас уже заметим, что *если определенная на измеримом множестве* Ω *функция* f *ограничена и если для нее при некоторой вполне определенной последовательности разбиений* ρ_k *существует предел* (5), *равный* I, *не зависящий от выбора точек* $P_j \in \Omega_j$, *то этого, как будет доказано в дальнейшем, достаточно для того, чтобы сказать, что существует интеграл от* f *на* Ω, *равный* I, *т. е. тогда автоматически выполняется равенство* (5), *какова бы ни была последовательность разбиений* $\rho_1, \rho_2, \ldots$, *для которой* $\delta_k \to 0$ (см. § 12.7, теорема 2, 2)).

Напомним, что в § 12.2 (после леммы 5) было показано, что измеримое множество всегда можно разбить на части, имеющие диаметры, меньшие наперед заданного $\varepsilon > 0$.

Интеграл Римана от функции f по Ω, если он существует, обозначается так:

$$I = \int_\Omega f(P)\,d\Omega = \int_\Omega f(P)\,dP. \tag{6}$$

В этом случае говорят еще, что f *интегрируема по Риману на* Ω.

Высказанное выше условие римановой интегрируемости f на Ω можно выразить еще на языке признака Коши: для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, зависящее от ε, что для любых двух разбиений ρ' и ρ'' множества Ω на части с диаметрами частичных множеств, меньшими δ, имеет место неравенство

$$|S_{\rho'} - S_{\rho''}| < \varepsilon.$$

n-кратный интеграл от f на множестве Ω записывают еще так:

$$I = \int \ldots \int_\Omega f(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1 \ldots dx_n.$$

Это обозначение удобно потому, что, как мы увидим в дальнейшем, вычисление кратного интеграла сводится к вычислению соответствующих однократных интегралов в отдельности по $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Если функция $f(P) = A = \text{const}$ на измеримом множестве Ω, то ее интегральная сумма равна числу

$$S_\rho = \sum_{j=1}^{N} Am\Omega_j = Am\Omega,$$

не зависящему от способа разбиения Ω на части. Поэтому

$$\int_\Omega A\,d\Omega = A\int_\Omega d\Omega = Am\Omega. \tag{7}$$

Отметим еще, что если Ω имеет жорданову меру нуль ($m\Omega = 0$), то

$$\int_{\Omega} f\,d\Omega = \lim_{\max d(\Omega_j)\to 0} \sum_{j=1}^{N} f(P_j)\,m\Omega_j = \lim_{\max d(\Omega_j)\to 0} 0 = 0$$

для любой конечной на Ω функции f, даже если она не ограничена. Таким образом, из интегрируемости f на Ω не всегда следует ограниченность f на Ω. *При исследовании функции f, определенной на произвольном измеримом множестве Ω, мы* (см. сноску на стр. 38) *заранее будем предполагать, что она ограничена на Ω.* Впрочем, если Ω — открытое измеримое множество, то *из интегрируемости функции f на Ω следует ограниченность ее на Ω* (см. далее § 12.10).

В будущем, чтобы избежать лишних слов, согласимся, что если про функцию f мы будем говорить, что она интегрируема по Риману на множестве $\Omega \subset R_n$, то этим будет подразумеваться, что Ω есть измеримое в n-мерном смысле по Жордану множество. Это соглашение вполне естественно, так как определение интеграла по Риману на Ω тесно связано с измеримостью Ω по Жордану.

§ 12.7. Верхняя и нижняя интегральные суммы. Основная теорема

Пусть R есть n-мерное пространство. При первом чтении читатель может считать, что $n = 2$ или $n = 3$, но рассуждения и формулировки в этом параграфе вполне аналогичны и при любом натуральном n, в том числе и при $n = 1$.

Пусть задано измеримое (следовательно, ограниченное) по Жордану (в n-мерном смысле) множество Ω, на котором определена ограниченная функция:

$$|f(P)| \leqslant K < \infty \quad (P \in \Omega).$$

Множество Ω может быть разбито на части (измеримые по Жордану и пересекающиеся разве что по своим границам) различными способами. Пусть ρ и ρ' — два такие разбиения:

$$\Omega = \Omega_1 + \ldots + \Omega_N, \quad \Omega = \Omega'_1 + \ldots + \Omega'_{N'}.$$

Условимся говорить, что ρ' *есть продолжение* ρ, и писать $\rho \subset \rho'$, если любое частичное множество Ω'_k ($k = 1, \ldots, N'$) разбиения ρ' есть часть одного из частичных множеств Ω_j разбиения ρ. Иначе говоря, разбиение ρ' получается из ρ, если некоторые множества Ω_j разбиения ρ в свою очередь разбить на конечное число частей

$$\Omega_j = \sum_{k=1}^{l_j} \Omega_{jk} \quad (k = 1, \ldots, l_j;\ j = 1, \ldots, N).$$

Таким образом, разбиение ρ' состоит из слагаемых кратной суммы

$$\Omega = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{l_j} \Omega_{jk} \tag{1}$$

Зададим разбиение ρ. Ему соответствует интегральная сумма функции f

$$S_\rho = \sum_{j=1}^{N} f(P_j)\, m\Omega_j = \sum_{\rho} f(P_j)\, m\Omega_j$$

$(P_j \in \Omega_j)$. Мы будем пользоваться как первой, так и второй приведенными записями S_ρ.

Положим

$$M_j = \sup_{P \in \Omega_j} f(P), \quad m_j = \inf_{P \in \Omega_j} j(P),$$

$$\overline{S}_\rho = \sum_{\rho} M_j m\Omega_j, \quad \underline{S}_\rho = \sum_{\rho} m_j m\Omega_j.$$

Суммы $\overline{S}_\rho$, $\underline{S}_\rho$ называются соответственно *верхней и нижней интегральными суммами функции* f (*соответствующими разбиению* ρ).

Для произвольной точки $P_j \in \Omega_j$ справедливы неравенства $m_j \leqslant f(P_j) \leqslant M_j$ $(j = 1, \ldots, N)$. Поэтому, учитывая, что $m\Omega_j \geqslant 0$, имеем

$$m_j m\Omega_j \leqslant f(P_j) m\Omega_j \leqslant M_j m\Omega_j,$$

откуда

$$\underline{S}_\rho \leqslant S_\rho \leqslant \overline{S}_\rho. \tag{2}$$

Таким образом, *любая* (*независимо от выбора точек* P_j) *интегральная сумма функции* f, *соответствующая разбиению* ρ, *находится между ее нижней и верхней интегральными суммами, соответствующими тому же разбиению* ρ.

Другое важное свойство верхних и нижних сумм заключается в том, что если $\rho \subset \rho'$, то имеют место неравенства

$$\underline{S}_\rho \leqslant \underline{S}_{\rho'} \leqslant \overline{S}_{\rho'} \leqslant \overline{S}_\rho. \tag{3}$$

Второе из них уже доказано.

Чтобы убедиться в справедливости, например, третьего неравенства, запишем $\overline{S}_{\rho'}$ в виде

$$\overline{S}_{\rho'} = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{l_j} M_{jk} m\Omega_{jk},$$

где

$$M_{jk} = \sup_{P \in \Omega_{jk}} f(P).$$

Для сравнения сумму $\overline{S}_\rho$ можно записать подобным образом:

$$\overline{S}_\rho = \sum_{j=1}^{N} M_j m\Omega_j = \sum_{j=1}^{N} M_j \sum_{k=1}^{l_j} m\Omega_{jk} = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{l_j} M_j m\Omega_{jk}.$$

Теперь ясно, что $\overline{S}_{\rho'} \leqslant \overline{S}_\rho$, потому что из вложения $\Omega_{jk} \subset \Omega_j$ следует что $M_{jk} \leqslant M_j$.

Пусть теперь ρ_1 и ρ_2 — разбиения Ω и $\rho = \rho_1 + \rho_2$ есть новое разбиение, полученное наложением ρ_1 на ρ_2. Тогда ρ есть продолжение ρ_1 и ρ_2 и

$$\underline{S}_{\rho_1} \leqslant \underline{S}_\rho \leqslant \overline{S}_\rho \leqslant \overline{S}_{\rho_2}.$$

Таким образом,

$$\underline{S}_{\rho_1} \leqslant \overline{S}_{\rho_2}, \tag{4}$$

каковы бы ни были разбиения ρ_1 и ρ_2.

Если зафиксировать ρ_2 и менять произвольно ρ_1 (которое мы желаем обозначить через ρ), то получим

$$\underline{I}(f) = \sup_\rho \underline{S}_\rho \leqslant \overline{S}_{\rho_2}.$$

А теперь, варьируя разбиения ρ_2 (обозначаемые через ρ), получим

$$\underline{I}(f) \leqslant \overline{I}(f) = \inf_\rho \overline{S}_\rho.$$

Числа $\overline{I}(f) = \overline{I}$ и $\underline{I}(f) = \underline{I}$ называются соответственно *верхним и нижним интегралами функции f на Ω*. Из приведенных рассуждений следует, что *для произвольной ограниченной на Ω функции нижний и верхний интегралы на Ω существуют.*

Докажем важную теорему.

Теорема 1 (основная). *Пусть $\Omega \subset R$ есть измеримое множество (т. е. измеримое в n-мерном смысле по Жордану), на котором определена ограниченная функция $f(|f(x)| \leqslant K)$.*

Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) $\underline{I} = \overline{I}$;

2) *для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое разбиение ρ, что*

$$\overline{S}_\rho - \underline{S}_\rho < \varepsilon; \tag{5}$$

3) *для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для всех разбиений ρ с диаметрами $d(\Omega_j) < \delta$ имеет место неравенство* (5);

4) *существует интеграл*

$$\int_\Omega f\, d\Omega = I. \tag{6}$$

При этом $I = \underline{I} = \overline{I}$.

Здесь, конечно, подразумевается, что $\underline{I}$ и $\overline{I}$ — нижний и верхний интегралы от f на G, а $\underline{S}_\rho$, $\overline{S}_\rho$ — нижняя и верхняя интегральные суммы f, соответствующие разбиению ρ.

Эту теорему можно перефразировать так: *для того чтобы существовал интеграл от f на Ω, необходимо и достаточно выполнение одного из условий* 1)—3). *При этом величина интеграла равна $\underline{I}=\overline{I}$.*

Доказательство. 1) → 2). Для любого ε найдутся разбиения ρ_1 и ρ_2 такие, что

$$\underline{I}-\frac{\varepsilon}{2}<\underline{S}_{\rho_1};\quad \overline{S}_{\rho_2}<\overline{I}+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда для $\rho=\rho_1+\rho_2$

$$\underline{I}-\frac{\varepsilon}{2}<\underline{S}_{\rho_1}\leqslant\underline{S}_\rho\leqslant\overline{S}_\rho\leqslant\overline{S}_{\rho_2}\leqslant\overline{I}+\frac{\varepsilon}{2},$$

откуда из 1) следует (5), т. е. 2).

2) → 1). Пусть ρ — разбиение, для которого верно (5). Тогда в силу неравенств $\underline{S}_\rho\leqslant\underline{I}\leqslant\overline{I}\leqslant\overline{S}_\rho$ имеет место $\overline{I}-\underline{I}<\varepsilon$. Но $\varepsilon>0$ как угодно малое число, а $\underline{I}$ и $\overline{I}$ — определенные числа, не зависящие от ε, поэтому $\underline{I}=\overline{I}$.

4) → 3). Пусть существует интеграл (6). Из определения интеграла следует, что для всякого $\varepsilon>0$ можно указать такое $\delta>0$, что для любого разбиения ρ, у которого $d(\Omega_j)<\delta$, имеют место неравенства

$$I-\frac{\varepsilon}{2}<\sum_{j=1}^{N}f(P_j)\,|\Omega_j|<I+\frac{\varepsilon}{2},$$

каковы бы ни были точки $P_j\in\Omega_j$. Отсюда, беря верхнюю и нижнюю грани входящей в эти неравенства суммы по $P_j\in\Omega_j$, получим

$$I-\frac{\varepsilon}{2}\leqslant\underline{S}_\rho\leqslant\overline{S}_\rho\leqslant I+\frac{\varepsilon}{2},$$

следовательно, справедливо 3).

3) → 2) — это тривиально.

2) → 3). Это самая нетривиальная часть теоремы, утверждающая, что если для любого $\varepsilon>0$ найдется зависящее от него разбиение ρ_*:

$$\Omega=\sum_{j=1}^{N}\Omega_j^*,$$

для которого $\overline{S}_{\rho_*}-\underline{S}_{\rho_*}<\varepsilon$, то также найдется $\delta>0$ такое, что для всех разбиений ρ с $d(\Omega_j)<\delta$ выполняется неравенство (5).

Обозначим через Γ_* объединение всех граничных точек Ω_j^*, каково бы ни было $j = 1, \ldots, N$. Оно имеет меру нуль (Ω_j^* измеримы), и потому можно определить фигуру σ', покрывающую Γ_*, такую, что $|\sigma'| < \varepsilon/2K$. Введем еще новую фигуру σ, содержащую строго внутри себя σ', но такую, что $|\sigma| < \varepsilon/2K$.

Пусть $\delta > 0$ есть настолько малое положительное число, что расстояние между любыми двумя точками границ σ и σ' больше, чем δ. Тем-более расстояние любой точки Γ_* до границы σ больше, чем δ.

Зададим какое-нибудь разбиение ρ, на которое наложено единственное условие, что все его частичные множества ω имеют диаметр $d(\omega) < \delta$ (нам удобно будет их писать без индексов, так же как соответствующие им m и M). Имеем

$$\overline{S}_\rho - \underline{S}_\rho = \sum{}' (M - m)\, m\omega + \sum{}'' (M - m)\, m\omega,$$

где сумма $\sum'$ распространена на все частичные множества ω разбиения ρ, каждое из которых содержит в себе одну из точек Γ_*. Так как $d(\omega) < \delta$, то все такие $\omega \subset \sigma$ и их общая мера не превышает $m\sigma < \varepsilon/2K$. Поэтому

$$\sum{}' (M - m)\, m\omega \leqslant 2K \sum{}' m\omega \leqslant 2K \frac{\varepsilon}{2K} = \varepsilon.$$

Сумму $\sum''$ запишем в виде кратной суммы $\sum'' = \sum_i \sum^i$, где $\sum^i$ обозначает сумму слагаемых $\sum''$, соответствующих частичным множествам ω разбиения ρ, попавшим полностью в частичное множество Ω_i^* старого разбиения ρ_*. Имеем

$$\sum{}'' (M - m)\, m\omega = \sum_i \sum{}^i (M - m)\, m\omega \leqslant$$
$$\leqslant \sum_i (M_i^* - m_i^*) \sum{}^i m\omega \leqslant \sum_i (M_i^* - m_i^*)\, m\Omega_i^* < \varepsilon.$$

Поэтому $\overline{S}_\rho - \underline{S}_\rho < 2\varepsilon$ для всех разбиений ρ с $d(\omega) < \delta$, т. е. имеет место 3).

3) $\to$ 4). Пусть имеет место 3). Тогда, как уже доказано, имеет место и 1). Зададим $\varepsilon > 0$ и подберем $\delta > 0$ так, как указано в 3). Тогда для разбиений ρ, о которых говорится в 3),

$$\underline{S}_\rho \leqslant \sum f(P_j)\, |\Omega_j| \leqslant \overline{S}_\rho, \qquad \underline{S}_\rho \leqslant \underline{I} = \overline{I} \leqslant \overline{S}_\rho. \tag{7}$$

Отсюда, полагая $I = \underline{I} = \overline{I}$, получим

$$\left| I - \sum f(P_j)\, |\Omega_j| \right| < \varepsilon, \tag{8}$$

т. е. I есть интеграл от f на Ω. Мы доказали 4).

Теорема полностью доказана.

Теорема 2. *Пусть задана последовательность разбиений* ρ_k $(k = 1, 2, \ldots)$ *измеримого множества* Ω,

$$\Omega = \sum_{j=1}^{N_k} \Omega_j^k \qquad (k = 1, 2, \ldots), \tag{9}$$

со стремящимся к нулю максимальным диаметром δ_k *частичных множеств.*

Если для некоторой ограниченной на Ω *функции* $f(x)$ *выполняется одно из условий*

$$1)\ \lim_{k\to\infty}\left(\overline{S}_{\rho_k}(f) - \underline{S}_{\rho_k}(f)\right) = 0, \tag{10}$$

$$2)\ \lim_{k\to\infty}\sum_j f\left(\xi_j^k\right) m\Omega_j^k = I \qquad \left(\xi_j^k \in \Omega_j^k\right), \tag{11}$$

$$3)\ \lim_{k\to\infty}\underline{S}_{\rho_k}(f) = \lim_{k\to\infty}\overline{S}_{\rho_k}(f) = I, \tag{12}$$

то это влечет существование интеграла от f *на* Ω.

Наоборот, существование интеграла от f *на* Ω *влечет выполнение условий* 1), 2), 3).

Существования одного только из пределов 3) *недостаточно для существования интеграла от* f *на* Ω.

Доказательство этой теоремы полностью аналогично доказательству одномерной теоремы 2 в § 9.4.

Теорема 3. *Пусть задана последовательность разбиений* (9) *измеримого множества* Ω *с* $\delta_{\rho_k} = \max_j d\left(\Omega_j^k\right) \to 0$. *Тогда сумма мер*

$$\sum_j{}' m\Omega_j^k = m\Omega^k$$

тех частей разбиения, которые прилегают к границе Γ *области* Ω $\left(\overline{\Omega}_j^k\right.$ *содержат точки* Γ), *стремится к нулю при* $k \to \infty$.

Доказательство. Зададим $\varepsilon > 0$ и подберем покрывающую Γ фигуру σ такую, что $|\sigma| < \varepsilon$. Раздадим σ по направлениям всех осей координат, но так, чтобы новая фигура $\sigma' \supset \sigma$ имела меру $|\sigma'| < \varepsilon$. Обозначим через η расстояние между границами σ' и σ. Найдется k_0 такое, что $\delta_{\rho_k} < \eta$ для $k > k_0$. Для таких k частичные множества Ω_j^k, прилегающие к Γ, принадлежат σ', т. е.

$$m\Omega^k = \sum_j{}' m\Omega_j^k < |\sigma'| < \varepsilon.$$

Теорема 4. *Определенный интеграл от ограниченной на измеримом множестве* Ω *функции* f *можно определить как предел*

$$\lim_{\delta_{\rho_k}\to 0}\sum_j{}' f\left(P_j^k\right) m\Omega_j^k = \int_\Omega f\,d\mathbf{x}$$

для какой-нибудь (одной!) последовательности разбиений (9) *с* $\delta_{\rho_k} \to 0$, *где интегральные суммы распространены только на частичные множества* Ω_j^k, *не прилегающие к* Г.

В самом деле, часть интегральной суммы, приходящаяся на частицы Ω_j^k, прилегающие к Г, оценивается в силу предыдущей теоремы следующим образом:

$$\left|\sum_j{}' f(P_j^k)\, m\Omega_j^k\right| \leqslant K \sum_j{}' m\Omega_j^k \to 0, \qquad k \to 0 \qquad (K > |f(x)|).$$

§ 12.8. Интегрируемость непрерывной функции на замкнутом измеримом множестве. Другие критерии

Теорема 1. *Функция* $f(P)$, *непрерывная на замкнутом измеримом по Жордану множестве* Ω, *интегрируема по Риману на* Ω.

Доказательство. Так как множество Ω измеримо, то оно ограничено. Кроме того, оно замкнуто, поэтому непрерывная на Ω функция f равномерно непрерывна на Ω. Это значит, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что если $P', P'' \in \Omega$ и $|P'' - P'| < \delta$, то $|f(P'') - f(P')| < \varepsilon$.

Пусть ρ есть произвольное разбиение $\Omega = \sum_1^N \Omega_j$ на измеримые части с диаметром $d(\Omega_j) < \delta$ и пусть, как всегда, $M_j = \sup_{x \in \Omega_j} f(\mathbf{x})$, $m_j = \inf_{x \in \Omega_j} f(\mathbf{x})$. Тогда

$$M_j - m_j = \sup_{P', P'' \in \Omega_j} [f(P'') - f(P')] \leqslant \varepsilon,$$

потому что расстояние между любыми точками $P', P'' \in \Omega_j$ не превышает по условию δ. Следовательно,

$$\overline{S}_\rho - S_\rho = \sum (M_j - m_j)\, m\Omega_j \leqslant \varepsilon \sum m\Omega_j = \varepsilon m\Omega = \eta.$$

Так как $\eta > 0$ может быть как угодно малым, то по основной теореме интеграл от f на Ω существует.

Теорема 2. *Функция* f, *ограниченная на измеримом замкнутом множестве* Ω *и непрерывная на* Ω, *за исключением точек, образующих множество* Λ *меры нуль, интегрируема на* Ω.

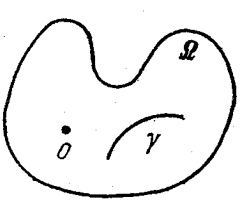

Рис. 12.3.

Например, если функция f ограничена на плоском замкнутом множестве Ω, имеющем гладкую границу (см. рис. 12.3) и, кроме того, непрерывна на Ω, за исключением изолированной точки O и гладкой дуги γ, то f интегрируема на Ω.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ и $\sigma \supset \Lambda$ — открытая (без границы) фигура такая, что $|\sigma| < \varepsilon$. Тогда $\Omega - \sigma$ есть измеримое

замкнутое множество, на котором f непрерывна, следовательно, интегрируема. Произведем разбиение ρ' множества $\Omega - \sigma$: $\Omega - \sigma = \Omega_1 + \ldots + \Omega_N$ так, чтобы $\overline{S}_{\rho'} - \underline{S}_{\rho'} < \varepsilon$, и определим разбиение ρ множества Ω: $\Omega = \Omega_1 + \ldots + \Omega_N + \sigma\Omega$. Положив $M = \sup\limits_{x \in \sigma\Omega} f(x)$, $m = \inf\limits_{x \in \sigma\Omega} f(x)$, получим

$$\overline{S}_\rho - \underline{S}_\rho = (\overline{S}_{\rho'} - \underline{S}_{\rho'}) + (M - m)\, m(\sigma\Omega) < \varepsilon + 2K\varepsilon = \eta$$
$$(K > |f(x)|, \quad x \in \Omega),$$

где η может быть как угодно малым. Но тогда согласно свойству 2) основной теоремы f интегрируема на Ω.

Оказывается, что теорему 2 можно обобщить, считая, что множество Λ имеет лебегову меру нуль (вместо жордановой, как мы считали; см. ниже § 12.9).

В такой более общей формулировке теорема 2 становится окончательной, потому что имеет место

Теорема (Лебега). *Для того чтобы ограниченная на измеримом по Жордану замкнутом множестве Ω функция $f(x)$ была интегрируемой на Ω, необходимо и достаточно, чтобы она была непрерывной на Ω, за исключением множества точек, имеющих Лебегову меру нуль.*

Пример. Рассмотрим функцию $\psi(x, y) = \sin\dfrac{1}{xy}$ на полуоткрытом прямоугольнике $\Delta' = \{0 < x,\ y < \pi/2\}$. Чтобы применить к ней теорему 2, будем рассуждать так. Доопределим ψ на отрезке $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$ оси x и отрезке $0 \leqslant y \leqslant \pi/2$ оси y какими-нибудь значениями, однако ограниченными в совокупности. Продолженная таким образом на замкнутый прямоугольник $\Delta = \Delta'$ функция ψ ограничена на Δ и непрерывна всюду на Δ, за исключением множества (состоящего из указанных двух отрезков) жордановой двумерной меры нуль. Но тогда по теореме 2 существует интеграл

$$\iint\limits_{\Delta} \psi(x, y)\, dx\, dy = \iint\limits_{\Delta'} \psi(x, y)\, dx\, dy$$

(см. далее § 12.11, теорема 1 и следствие из нее).

§ 12.9. Множество лебеговой меры нуль *)

Произвольный открытый прямоугольный параллелепипед (прямоугольник)

$$\Delta = \{a_j < x_j < b_j;\quad j = 1, \ldots, n\}$$

в n-мерном пространстве R называют еще *интервалом* (*в* R).

---

*) Сведения, излагаемые в этом параграфе, содержатся в § 19.1,

Объем (n-мерная мера) Δ равен

$$|\Delta| = \prod_{j=1}^{n} (b_j - a_j),$$

потому что замкнутый прямоугольник отличается от соответствующего открытого на множество меры (n-мерной) нуль.

По определению множество E *имеет лебегову меру нуль*, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать конечное или счетное число интервалов $\Delta^1, \Delta^2, \ldots$, покрывающих E $\left(E \subset \sum \Delta^k\right)$, сумма объемов которых меньше ε: $\sum |\Delta^k| < \varepsilon$.

Лемма 1. *Сумма конечного или счетного числа множеств $E^1, E^2, \ldots$, каждое из которых имеет лебегову меру нуль, имеет в свою очередь лебегову меру нуль.*

В самом деле, зададим $\varepsilon > 0$ и покроем наши множества следующим образом: E^k покроем счетной (или конечной) системой интервалов Δ_j^k, $E^k \subset \sum_j \Delta_j^k$ таких, что $\sum_j |\Delta_j^k| < \varepsilon/2^k$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Так как интервалы Δ_j^k $(j, k = 1, 2, \ldots)$ можно заново перенумеровать и все они покрывают $E = \sum E^k$ и сумма их объемов меньше $\varepsilon = \sum_k (\varepsilon/2^k)$, то в силу произвольности ε множество E имеет лебегову меру нуль.

Если множество E имеет жорданову меру нуль, то это значит, что для всякого $\varepsilon > 0$ его можно покрыть конечным числом интервалов с общим объемом, меньшим чем ε. Следовательно, E имеет также лебегову меру нуль. Этим объясняется, что мы пользуемся одним и тем же обозначением $(mE = 0)$ для жордановой и лебеговой меры. Впрочем, мы определили здесь только весьма частный случай меры Лебега, именно меры Лебега нуль.

Следует, однако, отметить, что множество может иметь лебегову меру нуль и в то же время не быть измеримым по Жордану. Например, множество рациональных чисел, содержащихся в отрезке $[0, 1]$, имеет лебегову меру нуль, так как оно счетно. Но оно не измеримо (в одномерном смысле) по Жордану — верхняя жорданова его мера равна 1, а нижняя — нулю.

Отметим, что если множество F замкнуто, ограничено и имеет лебегову меру нуль, то для любого $\varepsilon > 0$ можно указать счетную систему покрывающих F интервалов, общий объем которых меньше, чем $\varepsilon > 0$. Но согласно лемме Бореля в силу ограниченности и замкнутости F в этом покрытии можно оставить конечное число интервалов, все же покрывающих F. Их общий объем тем более меньше, чем ε. Но тогда F измеримо по Жордану. Мы доказали следующую лемму:

Лемма 2. *Замкнутое ограниченное множество лебеговой меры нуль измеримо по Жордану и имеет, таким образом, жорданову меру нуль.*

§ 12.10. Доказательство теоремы Лебега. Интегрируемость и ограниченность функции

В § 7.10 было введено понятие колебания $\omega(x)$ $(\omega(x) \geqslant 0)$ функции f на множестве Ω в точке $x \in \Omega$ и замечено, что (§ 7.10, теорема 5) функция непрерывна в точке тогда и только тогда, когда ее колебание в этой точке равно нулю $(\omega(x) = 0)$. Таким образом, в точке разрыва функции ее колебание — заведомо положительная величина. Обозначим через E_λ множество всех точек $x \in \Omega$, где колебание f не менее $\lambda > 0$ $(\omega(x) \geqslant \lambda)$. Важно отметить, что если Ω — замкнутое множество, то E_λ — множество, замкнутое при любом λ (см. § 7.10, теорема 6).

Доказательство достаточности условия теоремы. Пусть функция f ограничена на замкнутом измеримом множестве Ω,

$$|f(x)| \leqslant K \qquad (x \in \Omega), \tag{1}$$

и множество E ее точек разрыва имеет лебегову меру нуль $(E \subset \Omega)$.

Будем предполагать, что $m\Omega > 0$, иначе утверждение тривиально. Зададим $\varepsilon > 0$, и пусть $\lambda > 0$ удовлетворяет неравенству $4\lambda m\Omega < \varepsilon$.

Так как лебегова мера $mE = 0$, то и лебегова мера $mE_\lambda = 0$ при любом $\lambda > 0$. Но E_λ замкнуто и ограничено, поэтому и жорданова мера $mE_\lambda = 0$. Но тогда для любого $\varepsilon > 0$ можно указать покрывающее E_λ множество G, представляющее собой конечную систему интервалов меры $|G| < \varepsilon/4K$. G есть открытое измеримое множество, и так как множество Ω замкнуто и ограничено, то Ω можно записать в виде суммы непересекающихся измеримых по Жордану множеств $\Omega = \Omega_1 + \Omega''$, где $\Omega_1 = G\Omega$, $\Omega'' = \Omega - G$, $m\Omega_1 \leqslant |G| < \varepsilon/4K$ и Ω'' к тому же — замкнутое ограниченное множество. Во всех точках Ω'' наша функция имеет колебание, меньшее, чем λ. Но тогда, согласно теореме 3 § 7.10, можно указать такое $\delta > 0$, что каковы бы ни были точки P, $P' \in \Omega''$, такие, что $|P - P'| < \delta$, имеет место $|f(P) - f(P')| < 2\lambda$. Произведем разбиение Ω'' на части $\Omega'' = \sum_2^N \Omega_j$ диаметра, меньшего, чем число δ. Эти части вместе с уже определенным выше множеством Ω_1 образуют разбиение ρ всего множества Ω. Для него, очевидно, имеют место оценки

$$\bar{S}_\rho - \underline{S}_\rho = (M_1 - m_1)\, m\Omega_1 + \sum_{j=2}^{N} (M_j - m_j)\, m\Omega_j \leqslant$$

$$\leqslant 2K\frac{\varepsilon}{4K} + 2\lambda \sum_{j=2}^{N} m\Omega_j < \frac{\varepsilon}{2} + 2\lambda m\Omega < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Следовательно, в силу произвольности ε на основании основной теоремы функция f интегрируема на Ω.

Доказательство необходимости условия теоремы. Пусть функция f ограничена на замкнутом измеримом множестве Ω и интегрируема на нем. Тогда, согласно основной теореме, для любых $\varepsilon > 0$ и $\lambda > 0$ можно указать такое разбиение ρ множества Ω, что (пояснения ниже)

$$\varepsilon\lambda > \bar{S}_\rho - \underline{S}_\rho = \sum (M_j - m_j)\, m\Omega_j > \sum{}' (M_j - m_j)\, m\Omega_j \geqslant \lambda \sum{}' m\Omega_j. \tag{2}$$

Сумма $\sum'$ распространена только на те слагаемые, которые соответствуют множествам Ω_j, содержащим в себе хотя бы одну внутреннюю точку P из E_λ. Такую точку можно покрыть принадлежащим к Ω_j шаром V_δ с цент-

ром в ней, и поэтому выполняются неравенства

$$M_j - m_j \geqslant M_\delta - m_\delta \geqslant \omega(P) \geqslant \lambda, \quad M_\delta = \sup_{x \in V_\delta} f(x), \quad m_\delta = \inf_{x \in V_\delta} f(x).$$

Из (2) после сокращения на λ получим неравенства

$$\varepsilon > \sum{}' m\Omega_j = m\left(\sum{}' \Omega_j\right),$$

где $\sum' \Omega_j$ содержит в себе точки E_λ, каждая из которых — внутренняя по отношению к какому-нибудь из множеств Ω_j разбиения ρ. Остальные точки E_λ, не попавшие в $\sum' \Omega_j$, могут оказаться только на границах множеств Ω_j $(j = 1, \ldots, N)$, имеющих общую меру нуль. Таким образом, для любых $\lambda > 0$ и $\varepsilon > 0$ $mE_\lambda < \varepsilon$, т. е. $mE_\lambda = 0$. Но множество всех точек разрыва f можно записать в виде

$$E = \sum_{k=1}^{\infty} E_{1/k},$$

и так как $mE_{1/k} = 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$, то и $mE = 0$.

Необходимость условия теоремы доказана.

Введем следующее полезное определение. Будем говорить, что множество $\Omega \subset R$ *удовлетворяет свойству* (A), если оно измеримо и если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать разбиение $\Omega = \sum_k^N \Omega_j$ на измеримые части положительной меры $(m\Omega > 0)$ с диаметром $d(\Omega_j) < \varepsilon$.

Произвольное открытое измеримое множество Ω обладает свойством (A).

В самом деле, прямоугольная сетка с кубиками Δ диаметра, меньшего $\varepsilon > 0$, разрезает Ω на непустые измеримые части Ω_j. Пусть Ω_j есть часть Δ, $x^0 \subset \Omega_j \subset \Omega$, тогда найдется шар V_{x^0} с центром в x^0, содержащийся в Ω, и пересечение $V_{x^0}\Delta \subset \Omega_j$. Но легко видеть, что мера $m\left(V_{x^0}\Delta\right) > 0$.

Конечно, вместе с открытым измеримым множеством Ω обладает свойством (A) и его замыкание $\overline{\Omega}$.

Прямоугольник, круг, эллипс (точнее, его внутренность) — все это примеры двумерных множеств, обладающих свойством (A). Примерами одномерных множеств со свойством (A) могут служить отрезок, конечная система отрезков, интервал, а примерами трехмерных множеств со свойством (A) — шар, куб, фигура, эллипсоид, тор.

С другой стороны, плоское множество Ω, изображенное на рис. 12.4, состоящее из круга σ и отрезка $[0, 2]$ на оси x, не обладает свойством (A). Оно измеримо, потому что его граница состоит из конечного числа гладких кусков. Однако, например, при $\varepsilon < 1/2$ нельзя Ω разбить на измеримые (в двухмерном смысле) части положительной меры с диаметром, меньшим чем ε.

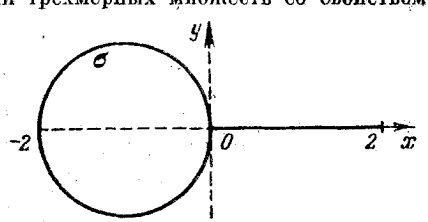

Рис. 12.4.

Теорема 1. *Функция f, интегрируемая на множестве Ω со свойством (A), ограничена на Ω.*

В самом деле, зададим $\delta > 0$ и возьмем разбиение ρ множества Ω на части Ω_j $(j = 1, \ldots, N)$ положительной меры с $\delta_\rho = \max_j d(\Omega_j) < \delta$. Пусть

функция f неограничена на Ω; тогда она неограничена по крайней мере на одном из множеств Ω_j — пусть на Ω_1. Соответствующую интегральную сумму запишем в виде

$$S_\rho = f(p_1)\, m\Omega_1 + \sum_{j=2}^{N} f(p_j)\, m\Omega_j. \tag{3}$$

При данном ρ и фиксированных p_j $(j = 2, \ldots, n-1)$ сумма $\sum_{j=2}^{N} f(p_j)\, m\Omega_j$ постоянна, а величина $f(p_1)\, m\Omega_1$ при произвольном изменении p_1 в пределах Ω_1 не ограничена (ведь $m\Omega_1 > 0$). Но тогда интегральная сумма S_ρ не ограничена. Это показывает, что S_ρ для указанных ρ и $\delta_\rho \to 0$ (при любых $p_j \in \Omega_j$!) не может стремиться ни к какому конечному пределу, и, следовательно, наша функция f не интегрируема на Ω (ср. с теоремой 1 § 9.2).

Для множеств, обладающих свойством (A), теорему Лебега можно, очевидно, сформулировать следующим образом:

Теорема 2. *Пусть Ω есть замкнутое множество, обладающее свойством (A). Для того чтобы определенная на Ω функция f была интегрируемой на Ω, необходимо и достаточно, чтобы она была ограниченной на Ω и непрерывной на Ω, за исключением точек множества лебеговой меры нуль.*

§ 12.11. Свойства кратных интегралов

Теорема 1. *Если функция f ограничена и интегрируема на $\Omega = \Omega' + \Omega''$, где Ω' и Ω'' измеримы и пересекаются разве что по своим границам, то она также интегрируема на Ω' и Ω'', и наоборот. При этом* *)

$$\int_\Omega f\, d\mathbf{x} = \int_{\Omega'} f\, d\mathbf{x} + \int_{\Omega''} f\, d\mathbf{x}. \tag{1}$$

Берем произвольную последовательность разбиений ρ_k $(k = 1, 2, \ldots)$ множества Ω, содержащих в себе границы Ω' и Ω''. Они индуцируют на Ω', Ω'' разбиения ρ_k' и ρ_k''. Дальше надо рассуждать в точности так же, как при доказательстве одномерной теоремы 1 из § 9.7, только теперь роль отрезков $[a, c]$, $[c, b]$ играют множества Ω' и Ω''.

Следствие. *Если ограниченную и интегрируемую на Ω функцию f видоизменить на любом множестве $E \subset \Omega$, имеющем жорданову меру нуль, так что видоизмененная функция f_1 останется ограниченной на Ω, то f_1 будет интегрируемой на Ω и*

$$\int_\Omega f\, d\Omega = \int_\Omega f_1\, d\Omega.$$

---

*) Для неограниченных f равенство (1) может нарушиться. Например, если $f = 0$ на σ (рис. 12.4) и $f = x^{-1}$ на полуинтервале $\gamma = (0, 2]$ оси x, то $\iint_\sigma f\, dx\, dy = \iint_\gamma f\, dx\, dy = 0$. Но $\iint_{\sigma+\gamma} f\, dx\, dy$ не существует.

В самом деле, $\Omega - E$ измеримо вместе с Ω, поэтому f интегрируема на $\Omega - E$, кроме того,

$$\int_E f\,d\Omega = \int_E f_1\,d\Omega = 0.$$

Но тогда f_1 интегрируема на Ω и

$$\int_\Omega f_1\,d\Omega = \int_{\Omega-E} f_1\,d\Omega + \int_E f_1\,d\Omega = \int_{\Omega-E} f\,d\Omega + \int_E f\,d\Omega = \int_\Omega f\,d\Omega.$$

В силу этого утверждения, если функция f ограничена на незамкнутом измеримом множестве Ω и интегрируема на нем, то *пишут*

$$\int_\Omega f\,d\mathbf{x} = \int_{\overline{\Omega}} f\,d\mathbf{x},$$

хотя функция f могла не быть определенной на $\overline{\Omega} - \Omega$. Ведь все равно, если бы f была определена на $\overline{\Omega} - \Omega$ так, что совокупность ее значений на $\overline{\Omega} - \Omega$ ограничена, то интегралы от f на Ω и $\overline{\Omega}$ совпадают.

Теорема 2. *Если $f(\mathbf{x})$ и $\varphi(\mathbf{x})$ — ограниченные интегрируемые на Ω функции и c — постоянная, то функции*

1) $f(\mathbf{x}) \pm \varphi(\mathbf{x})$, 2) $cf(\mathbf{x})$, 3) $|f(\mathbf{x})|$, 4) $f(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x})$, 5) $1/f(\mathbf{x})$,

где $|f(\mathbf{x})| > d > 0$, интегрируемы на Ω. При этом

$$\int_\Omega (f \pm \varphi)\,d\mathbf{x} = \int_\Omega f\,d\mathbf{x} \pm \int_\Omega \varphi\,d\mathbf{x}, \tag{2}$$

$$\int_\Omega cf\,d\mathbf{x} = c\int_\Omega f\,d\mathbf{x}. \tag{3}$$

Заметим, что факт интегрируемости указанных функций непосредственно следует из теоремы Лебега, если принять во внимание, что лебегова мера суммы двух множеств, имеющих лебегову меру нуль, очевидно, в свою очередь равна нулю.

Равенства (2) и (3) доказываются вполне аналогично тому, как это делалось в теореме 2 § 9.7. Существование интегралов от функций 1)—5) можно доказать и не прибегая к теореме Лебега, аналогично тому, как это было сделано в указанной одномерной теореме.

Теорема 3. *Если функции f_1, f_2 и φ ограничены и интегрируемы на Ω и*

$$f_1(P) \leqslant f_2(P),\ \varphi(P) \geqslant 0 \quad (P \in \Omega), \tag{4}$$

то

$$\int_\Omega f_1\varphi\,dP \leqslant \int_\Omega f_2\varphi\,dP. \tag{5}$$

В частности, если

$$A \leqslant f(P) \leqslant B, \quad \varphi(P) \geqslant 0, \tag{6}$$

где A и B — постоянные, то

$$A \int_{\Omega} \varphi\, dP \leqslant \int_{\Omega} f\varphi\, dP \leqslant B \int_{\Omega} \varphi\, dP, \tag{7}$$

и при некотором C

$$\int_{\Omega} f\varphi\, dP = C \int_{\Omega} \varphi\, dP \quad (A \leqslant C \leqslant B). \tag{8}$$

Доказательство. Из (4) следует, что

$$f_1(P)\varphi(P) \leqslant f_2(P)\varphi(P) \qquad (P \in \Omega),$$

откуда для любого разбиения ρ множества Ω

$$S_\rho(f_1\varphi) \leqslant S_\rho(f_2\varphi).$$

Переходя к пределу при $\delta \to 0$, где δ — максимальный диаметр частичных множеств разбиения ρ, получим (5).

Равенство (8) называют *теоремой о среднем для кратного интеграла.*

Примечание. Если Ω — связное измеримое замкнутое множество и функция f непрерывна на Ω, то

$$\int_{\Omega} f\varphi\, dP = f(Q) \int_{\Omega} \varphi\, dP,$$

где Q — некоторая точка Ω.

В самом деле, из непрерывности f на замкнутом измеримом множестве Ω следует, что f интегрируема на Ω, кроме того, существуют на Ω точки Q_1 и Q_2, в которых f достигает соответственно минимума и максимума (на Ω):

$$\min_{P \in \Omega} f(P) = f(Q_1) = A, \qquad \max_{P \in \Omega} f(P) = f(Q_2) = B.$$

В силу связности Ω существует находящаяся в Ω непрерывная кривая $P = P(t) = \{\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)\}$ $(t_1 \leqslant t \leqslant t_2)$, соединяющая точки $Q_1 = P(t_1)$ и $Q_2 = P(t_2)$. Непрерывная на отрезке $[t_1, t_2]$ функция

$$z = f(P(t)) = f(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)) = \psi(t) \qquad [t_1 \leqslant t \leqslant t_2]$$

принимает для некоторого $t_0 \in [t_1, t_2]$ значение $\psi(t_0) = f(Q) = C$, где $Q = P(t_0)$.

Теорема 4. *Для ограниченной интегрируемой на Ω функции f выполняются неравенства*

$$\left| \int_{\Omega} f\, d\mathbf{x} \right| \leqslant \int_{\Omega} |f|\, d\mathbf{x} \leqslant Km\Omega \qquad \left(K = \sup_{x \in \Omega} |f(\mathbf{x})|\right). \tag{9}$$

В самом деле, интегрируемость $|f|$ доказана в теореме 2. Кроме того,

$$-|f(\mathbf{x})| \leqslant f(\mathbf{x}) \leqslant |f(\mathbf{x})| \qquad (\mathbf{x} \in \Omega),$$

откуда

$$-\int_\Omega |f|\,d\mathbf{x} \leqslant \int_\Omega f\,d\mathbf{x} \leqslant \int_\Omega |f|\,d\mathbf{x}.$$

Отметим, что в неравенстве (9) недостаточно предполагать интегрируемость $|f(\mathbf{x})|$ (см. замечание в конце § 9.7).

§ 12.12. Сведение кратного интеграла к интегралам по отдельным переменным

На основании доказываемых ниже теорем вычисление кратного интеграла сводится к последовательному интегрированию по отдельным переменным $x_1, x_2, x_3, \ldots$

Теорема 1. *Пусть в плоскости переменных (u, v) задан прямоугольник $\Delta = \{a \leqslant u \leqslant b;\ c \leqslant v \leqslant d\} = [a, b] \times [c, d]$, и функция $f(u, v)$ ограничена и интегрируема на нем. Тогда имеют место равенства*

$$\iint_\Delta f(u, v)\,du\,dv = \int_a^b du \left(\int_c^d f(u, v)\,dv\right) = \int_c^d dv \left(\int_a^b f(u, v)\,du\right), \tag{1}$$

где выражение

$$\int_c^d f(u, v)\,dv \tag{2}$$

надо понимать как интеграл Римана по v при фиксированном u если он существует, если же он не существует,— то как произвольное число, находящееся между нижним и верхним интегралами функции $f(u, v)$ по $v \in [c, d]$. Интеграл по u на $[a, b]$ во втором члене в (1) существует в смысле Римана.

Если читатель ознакомился с § 12.10, то он знает, что прямоугольник Δ есть множество, удовлетворяющее свойству (A), и следовательно, на самом деле из интегрируемости f на Δ следует ее ограниченность на Δ.

Если не только существует кратный интеграл от f по Δ, но и существует интеграл (2) при любом u, то второй член в цепи (1) надо понимать как результат риманова интегрирования f сначала по v, а затем по u.

Аналогичное утверждение имеет место для третьего члена цепи (1).

Доказательство. Для любого $u \in [a, b]$ будем рассматривать $f(u, v)$ как функцию от v на $[c, d]$. Она ограничена, и следовательно, для нее существуют нижний и верхний интегралы $\underline{I}(u) \leqslant \overline{I}(u)$ $(a \leqslant u \leqslant b)$. Пусть $\Phi(u)$ — какая-либо функция, удов-

летворяющая неравенствам $I(u) \leqslant \Phi(u) \leqslant \bar{I}(u)$ $(a \leqslant u \leqslant b)$. Надо доказать, что $\Phi(u)$ интегрируема на $[a, b]$ и имеет интеграл, равный кратному интегралу от f по Δ. Для этого достаточно (см. теорему 2 § 9.4) произвести разбиение r отрезка $[a, b]$ на равные части $a = u_0 < u_1 < \ldots < u_N = b$, $h = u_i - u_{i-1} = (b-a)/N$ и показать существование предела

$$\lim_{h \to 0} S_r(\Phi) = \lim_{N \to \infty} \sum_{i=1}^{N} \Phi(\xi_i) h = \int_a^b \Phi(u)\, du = \iint_\Delta f\, du\, dv \qquad (3)$$

при любом выборе $\xi_i \subset [u_{i-1}, u_i]$ $(j = 1, \ldots, N)$.

Разделим еще отрезок $[c, d]$ на N равных частей $c = v_0 < v_1 < \ldots < v_N = d$, $k = v_j - v_{j-1} = (d-c)/N$ разбиением ρ. Это приводит к разбиению прямоугольника Δ на равные прямоугольники $\Delta_{ij} = [u_{i-1}, u_i] \times [v_{j-1}, v_j]$ и к верхней и нижней суммам f на Δ:

$$\bar{S}_{r \times \rho}(f) = hk \sum_i \sum_j M_{ij}, \quad \underline{S}_{r \times \rho}(f) = hk \sum_i \sum_j m_{ij}.$$

Так как

$$\Phi(\xi_i) \leqslant \bar{I}(\xi_i) \leqslant k \sum_j \sup_{v_{j-1} \leqslant v \leqslant v_j} f(\xi_i, v) \leqslant k \sum_j M_{ij},$$

и аналогично

$$\Phi(\xi_i) \geqslant k \sum_j m_{ij},$$

то

$$\underline{S}_{r \times \rho}(f) \leqslant \sum_{j=1}^{N} \Phi(\xi_i) h \leqslant \bar{S}_{r \times \rho}(f).$$

Но по условию f интегрируема на Δ, поэтому существуют пределы

$$\lim_{N \to \infty} \underline{S}_{r \times \rho}(f) = \lim_{N \to \infty} \bar{S}_{r \times \rho}(f) = \int_\Delta f\, du\, dv.$$

Поэтому существует предел (3), и мы доказали первое равенство (1). Второе доказывается аналогично.

Рассмотрим теперь n-мерный прямоугольник $\Delta = \{a_j \leqslant x_j \leqslant b_j;\ j = 1, \ldots, n\}$. Обозначим через Δ' проекцию Δ на координатное подпространство точек $\mathbf{u} = (x_1, \ldots, x_m)$: $\Delta' = \{a_j \leqslant x_j \leqslant b_j;\ j = 1, \ldots, m\}$ $(1 \leqslant m < n)$, и через Δ'' — проекцию Δ на координатное подпространство точек $\mathbf{v} = (x_{m+1}, \ldots, x_n)$: $\Delta'' = \{a_j \leqslant x_j \leqslant b_j;\ j = m+1, \ldots, n\}$. Будем писать

$$\mathbf{x} = (\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \Delta = \Delta' \times \Delta''.$$

Имеет место теорема, обобщающая теорему 1:

Теорема 2. *Пусть функция $f(x_1, \ldots, x_n) = f(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ интегрируема на прямоугольнике $\Delta = \Delta' \times \Delta''$ $(\mathbf{u} \in \Delta',\ \mathbf{v} \in \Delta'')$. Тогда*

справедливо равенство

$$\int\int_{\Delta} f(\mathbf{u}, \mathbf{v})\, d\mathbf{u}\, d\mathbf{v} = \int_{\Delta'} d\mathbf{u} \int_{\Delta''} f(\mathbf{u}, \mathbf{v})\, d\mathbf{v}, \tag{4}$$

где выражение $\int_{\Delta''} f(\mathbf{u}, \mathbf{v})\, d\mathbf{v}$ *надо понимать как интеграл Римана по* $\mathbf{v}$ *при фиксированном* $\mathbf{u}$ *или, если он не существует, как произвольное число между нижним и верхним интегралом от* $f(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ *по* $\mathbf{v} \in \Delta''$. *Интеграл по* $\mathbf{u}$ *на* Δ' *в правой части* (4) *существует в смысле Римана. Если, в частности, кроме условия теоремы, известно, что функция* $f(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ *интегрируема по* $\mathbf{v} \in \Delta''$ *для любого* $\mathbf{u} \in \Delta'$, *то правая часть* (4) *без всяких оговорок есть результат последовательного интегрирования* f *по Риману сначала по* $\mathbf{v} \in \Delta''$, *а затем по* $\mathbf{u} \in \Delta'$.

Доказательство совершенно аналогично доказательству теоремы 1. Производится разбиение r (m-мерного) прямоугольника Δ' на N^m равных прямоугольников $\Delta_1', \Delta_2', \ldots$ с m-мерными мерами

$$h = |\Delta_i'|^m = h_1 \ldots h_m = \frac{(b_1 - a_1) \ldots (b_m - a_m)}{N^m}$$

и разбиение $(n-m)$-мерного прямоугольника Δ'' на N^{n-m} равных прямоугольников $\Delta_1'', \Delta_2'', \ldots$ с $(n-m)$-мерными мерами

$$g = |\Delta_j''|^{n-m} = h_{m+1} \ldots h_n = \frac{(b_{m+1} - a_{m+1}) \ldots (b_n - a_n)}{N^{n-m}}.$$

В результате естественным образом получается разбиение $r \times \rho$

$$\Delta = \sum_i \sum_j \Delta_i' \times \Delta_j''.$$

Ему соответствуют верхняя и нижняя суммы $\overline{S}_{r\times\rho}(f) = hg \sum_i \sum_j M_{ij}$, $\underline{S}_{r\times\rho}(f) = hg \sum_i \sum_j m_{ij}$.

Функция $\Phi(\mathbf{u})$ определяется как любая функция, удовлетворяющая неравенствам $\underline{I}(\mathbf{u}) \leqslant \Phi(\mathbf{u}) \leqslant \overline{I}(\mathbf{u})$, где $\underline{I}(\mathbf{u})$ и $\overline{I}(\mathbf{u})$ — нижний и верхний интегралы от $f(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ по $\mathbf{v} \in \Delta''$.

Дальше мы должны рассуждать, как при доказательстве предыдущей теоремы, заменяя там $\xi_i \in [u_{i-1}, u_i]$ на $\xi_i' \in \Delta_i'$.

Теорема 3. *Пусть функция* $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ *не только интегрируема на прямоугольнике* Δ, *но каково бы ни было натуральное* $k = 1, \ldots, n-1$ *и при любых допустимых* $(x_1, \ldots, x_k)$ *она интегрируема по* Δ^k — *проекции* Δ *на подпространство*

$\mathbf{u}^n = (x_{k+1}, \ldots, x_n)$. *Тогда имеет место равенство* ($\Delta = \{a_j \leqslant x_j \leqslant b_j\}$)

$$\int_\Delta \ldots \int f\, dx_1 \ldots dx_n = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} dx_2 \ldots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_n,$$

где интегралы в правой части понимаются в смысле Римана.

В самом деле, применяя предыдущую теорему последовательно, получим

$$\int_\Delta f\, d\mathbf{x} = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{\Delta'} f(x_1, \mathbf{u}^1)\, d\mathbf{u}' = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} dx_2 \int_{\Delta^2} f(x, x_2, \mathbf{u}^2)\, d\mathbf{u}^2 = \ldots$$

$$= \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \ldots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_n, \qquad (5)$$

В общем случае сведение вычисления кратных интегралов к последовательному интегрированию по каждой переменной в отдельности основывается на лемме, доказываемой ниже.

Пусть Ω — ограниченное множество. Обозначим через e_1 его проекцию на ось x_1. В частности, если Ω — область, то e_1 — интервал, а если Ω — замыкание области, то e_1 — отрезок $[a, b]$, где $a = \min\limits_{x \in \Omega} x_1$, $b = \max\limits_{x \in \Omega} x_1$, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. Обозначим еще через $\Omega_{x_1^0}$ сечение Ω плоскостью $x_1 = x_1^0$, т. е. множество точек вида $(x_1^0, x_2, \ldots, x_n) \in \Omega$.

Лемма. *Справедливо равенство*

$$\int_\Omega \ldots \int f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n = \int_{e_1} dx_1 \int_{\Omega_{x_1}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_2 \ldots dx_n, \qquad (6)$$

всегда верное, если f ограничена на Ω, e_1 — измеримое одномерное множество и интегралы $\int_\Omega \ldots \int$ и $\int_{\Omega_{x_1}}$ (для любого $x_1 \in e_1$) имеют смысл.

Доказательство. Поместим Ω в некоторый n-мерный прямоугольник $\Delta = [a_1, b_1] \times \Delta'$, где $\Delta' = \{a_j \leqslant x_j \leqslant b_j;\ j = 2, \ldots, n\}$. Это возможно, потому что Ω измеримо, следовательно, ограничено.

Продолжим функцию f с Ω на Δ, положив

$$\bar{f} = \begin{cases} f \text{ на } \Omega, \\ 0 \text{ на } \Delta - \Omega. \end{cases}$$

Теперь имеем (пояснения ниже)

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \int_{\Delta} \bar{f}(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{\Delta'} \bar{f}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_2 \ldots dx_n =$$

$$= \int_{e_1} dx_1 \int_{\Omega_{x_1}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_2 \ldots dx_n.$$

Первое равенство в этой цепи верно в силу того, что Ω и Δ измеримы, $f=0$ на $\Delta-\Omega$, и f интегрируема на Δ.

Второе — по теореме 2. Ведь, кроме того, что функция f интегрируема на Ω, она при фиксированных допустимых x_1 как функция от $(x_2, \ldots, x_n)$ интегрируема по Ω_{x_1}, следовательно, и на Δ', потому что она равна нулю вне Ω_{x_1}.

Третье равенство верно, потому что e_1 измеримо, $f=0$ для $x_1 \overline{\in} e_1$ и для $x_1 \in e_1$, когда $(x_2, \ldots, x_n) \overline{\in} \Omega_{x_1}$.

Пример 1. Площадь S эллипса W: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \leqslant 1$ $(a, b>0)$ (рис. 12.5) вычисляется следующим образом (пояснения ниже):

$$S = \iint_W 1dx\,dy = \int_{-a}^{a} dx \int_{-b\sqrt{1-(x^2/a^2)}}^{b\sqrt{1-(x^2/a^2)}} dy = \int_{-a}^{a} 2b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx =$$

$$= 4\frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx = 2ab\left(\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{a^2}\sqrt{a^2-x^2}\right)_0^a = \pi ab.$$

Первое равенство в этой цепи следует из того, что W — измеримое в двумерном смысле множество, ведь его граница — гладкая кривая.

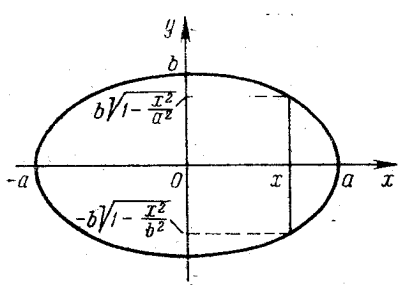

Рис. 12.5.

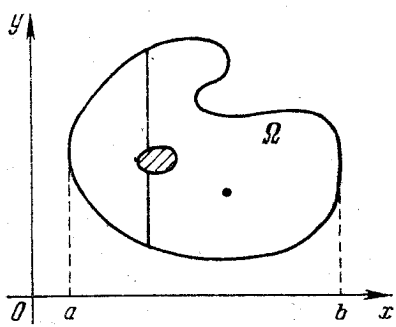

Рис. 12.6.

Второе — из доказанной выше леммы. Ведь $[-a, a]$ есть измеримая проекция W на ось x, и сечение W_x эллипса прямой параллельной оси y, проходящей через точку $x \in [a, b]$, есть отрезок $[-b\sqrt{1-(x^2/a^2)},$

$b\sqrt{1-(x^2/a^2)}]$, т. е. измеримое в одномерном смысле множество, на котором функция, равная 1, интегрируема.

Пример 2. На рис. 12.6 изображено замкнутое множество Ω с границей Γ, состоящей из двух кусочно гладких замкнутых контуров и точки. Ω, таким образом, измеримое в двумерном смысле. Его проекция на ось x есть отрезок $[a, b]$. Любое его сечение Ω_x прямой, параллельной оси y, проходящей через точку $x \in [a, b]$, есть отрезок или система двух отрезков, или точка,— все измеримые в одномерном смысле замкнутые множества. Поэтому если $f(x, y)$ непрерывна на Ω, то она интегрируема на Ω и на любом указанном сечении Ω_x, и к f применима доказанная лемма

$$\iint\limits_{\Omega} f\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\Omega_x} f\,dy.$$

Теперь мы можем попытаться применить нашу лемму к внутреннему интегралу правой части (6).

Пусть $e_2(x)$ есть проекция сечения Ω_{x_1} на ось x_2, а $\Omega_{x_1x_2}$ — сечение ($(n-1)$-мерного множества) Ω_{x_1} плоскостью $x_2 = x_2^0$. Тогда

$$\int\limits_{\Omega} f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \int\limits_{e_1} dx_1 \int\limits_{e_2(x_1)} dx_2 \int\limits_{\Omega_{x_1x_2}} f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)\,dx_3 \ldots dx_n,$$

если все множества $\Omega_{x_1x_2}$ $(x_2 \in e_2(x_1))$ измеримы в $(n-2)$-мерном смысле, а функция $f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ от $(x_3, \ldots, x_n)$ интегрируема на $\Omega_{x_1x_2}$.

Продолжив этот процесс до конца, получим

$$\int\limits_{\Omega} f\,d\mathbf{x} = \int\limits_{e_1} dx_1 \int\limits_{e_2(x_1)} dx_2 \int\limits_{e_3(x_1,x_2)} dx_3 \ldots \int\limits_{e_n(x_1,\ldots,x_{n-1})} f(x_1, \ldots, x_n)\,dx_n. \tag{7}$$

Все множества e_1, $e_2(x_1)$, ..., $e_n(x_1, \ldots, x_{n-1})$ одномерны и предполагаются измеримыми, кроме того, предполагается, что интеграл в левой части (7), а также все внутренние интегралы в правой, существуют.

Пример 3. Объем $|\Omega|$ эллипсоида Ω: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \leqslant 1$ $(a, b, c > 0)$ может быть вычислен следующим образом (пояснения ниже):

$$\Omega = \iiint\limits_{\Omega} dx\,dy\,dz = \int\limits_{-a}^{a} dx \int\limits_{\Omega_x} dy\,dz = \int\limits_{-a}^{a} dx \int\limits_{-b\sqrt{1-(x^2/a^2)}}^{b\sqrt{1-(x^2/a^2)}} dy \int\limits_{-c\sqrt{1-(x^2/a^2)-(y^2/b^2)}}^{c\sqrt{1-(x^2/a^2)-(y^2/b^2)}} dz =$$

$$= \int\limits_{-a}^{a} dx \int\limits_{-b\sqrt{1-(x^2/a^2)}}^{b\sqrt{1-(x^2/a^2)}} 2c\sqrt{1-(x^2/a^2)-(y^2/b^2)}\,dy =$$

$$= bc \int_{-a}^{a} \left[\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \arcsin \frac{y}{b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} + \frac{y}{b\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} \times \right.$$

$$\left. \times \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \right]_{-b\sqrt{1-(x^2/a^2)}}^{b\sqrt{1-(x^2/a^2)}} dx = bc \int_{-a}^{a} \pi \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \frac{4}{3} \pi abc.$$

Множество Ω измеримо, ведь граница Γ состоит из двух непрерывных кусков поверхности

$$z = \pm c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \quad \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1\right),$$

каждый из которых проектируется взаимно однозначно на замкнутое ограниченное множество плоскости x, y.

Измеримыми и замкнутыми являются также сечения Ω плоскостями и прямыми, параллельными осями координат соответственно в двумерном и одномерном смысле, ведь они, если они не пусты, представляют собой при сечении плоскостями эллипсы или точки, а при сечении прямыми — отрезки или точки.

Таким образом, функция 1 интегрируема на Ω и на всех указанных сечениях Ω, и равенство (7) применимо.

Если функция $f(x, y)$ ограничена и непрерывна на $\Delta = [a, b] \times \times [c, d]$ за исключением конечного числа точек, то для нее на основании теоремы 1 имеет место

$$\iint_{\Delta} f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\, dy,$$

потому что для любого $x \in [a, b]$ функция $f(x, y)$ по y ограничена и имеет на $[c, d]$ разве что конечное число точек разрыва, следовательно, интегрируема на $[c, d]$.

В частности, если $f(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$ и функции $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ ограничены и имеют конечное число точек разрыва соответственно на отрезках $[a, b]$, $[c, d]$, то

$$\iint_{\Delta} \varphi(x)\, \psi(y)\, dx\, dy = \int_a^b dx \int_c^d \varphi(x)\, \psi(y)\, dx\, dy = \int_a^b \varphi(x)\, dx \int_c^d \psi(y)\, dy.$$

Распространение этих фактов на многомерный случай не представляет труда.

§ 12.13. Непрерывность интеграла по параметру

Рассмотрим интеграл

$$F(\mathbf{x}) = F(x_1, \ldots, x_m) = \int \ldots \int_{\Omega} f(x_1, \ldots, x_m; y_1, \ldots, y_n) dy_1 \ldots dy_n =$$

$$= \int_{\Omega} f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, d\mathbf{y}, \qquad (1)$$

где Ω — измеримое множество n-мерного пространства точек $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, а функция $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ интегрируема по $\mathbf{y}$ на Ω. Тогда интеграл (1) есть функция F от точки $\mathbf{x}$.

Следующая теорема дает критерий непрерывности $F(\mathbf{x})$.

Теорема 1. *Если функция $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ непрерывна на множестве*

$$G \times \Omega \qquad (\mathbf{x} \in G,\ \mathbf{y} \in \Omega) \tag{2}$$

$(n+m)$-мерного пространства точек $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1, \ldots, x_m; y_1, \ldots, y_n)$, где G и Ω — замкнутые ограниченные множества в соответствующих пространствах точек $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, то интеграл (1) *(т. е. $F(\mathbf{x})$) есть непрерывная функция от $\mathbf{x} \in G$.*

Доказательство. Обозначим через $\omega(\delta, f)$ модуль непрерывности функции f на множестве (2). Так как последнее замкнуто и ограничено, а функция f непрерывна на нем, то $\omega(\delta, f) \to 0$ $(\delta \to 0)$. Поэтому для $x, x' \in G$

$$|F(\mathbf{x}') - F(\mathbf{x})| = \left| \int_\Omega [f(\mathbf{x}', \mathbf{y}) - f(\mathbf{x}, \mathbf{y})]\, d\mathbf{y} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_\Omega |f(\mathbf{x}', \mathbf{y}) - f(\mathbf{x}, \mathbf{y})|\, d\mathbf{y} \leqslant \int_\Omega \omega(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|, f)\, d\mathbf{y} =$$

$$= \omega(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|, f)\, |\Omega| \to 0 \quad (\mathbf{x}' \to \mathbf{x}),$$

и теорема доказана.

Теперь рассмотрим интеграл, обобщающий (1) только в случае, когда y есть переменное число (не вектор):

$$F(\mathbf{x}) = F(x_1, \ldots, x_m) =$$

$$= \int_{\varphi(x_1, \ldots, x_m)}^{\psi(x_1, \ldots, x_m)} f(x_1, \ldots, x_m; y)\, dy = \int_{\varphi(\mathbf{x})}^{\psi(\mathbf{x})} f(\mathbf{x}, y)\, dy \quad (x \in G), \tag{3}$$

и докажем теорему.

Теорема 2. *Если функция $f(\mathbf{x}, y)$ непрерывна на множестве H точек $(\mathbf{x}, y) = (x_1, \ldots, x_m; y)$ $(m+1)$-мерного пространства, определяемых неравенствами $\varphi(\mathbf{x}) \leqslant y \leqslant \psi(\mathbf{x})$ $(\mathbf{x} \in G)$, где $\varphi(\mathbf{x})$ и $\psi(\mathbf{x})$ — непрерывные функции на замкнутом ограниченном m-мерном множестве G точек $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m)$, то функция $F(\mathbf{x})$ непрерывна на G.*

Доказательство. Подстановка

$$y = \varphi(\mathbf{x}) + t[\psi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x})] \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1),$$

$$dy = [\psi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x})]\, dt,$$

приводит интеграл (3) к виду

$$F(\mathbf{x}) = [\psi(\mathbf{x}) - \varphi(x)] \int_0^1 f(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x}) + t[\psi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x})])\, dt. \tag{4}$$

Но $\psi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x})$ — непрерывная функция на G, а интеграл в (4) тоже есть непрерывная функция от $\mathbf{x} \in G$, что следует из теоремы 1. Ведь подынтегральная функция есть непрерывная функция от $(\mathbf{x}, t) \in G \times [0, 1]$. Следовательно, $F(\mathbf{x})$ непрерывна на G.

Пример. Пусть на единичном шаре ω задана непрерывная функция $f(x, y, z)$. Интеграл от нее по ω равен

$$\int_{\omega} f\, d\omega = \int_{-1}^{+1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} f(x, y, z)\, dz.$$

Внутренний интеграл $F(x, y) = \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} f(x, y, z)\, dz$ есть функция F от (x, y), определенная на круге σ: $x^2 + y^2 \leqslant 1$. Она непрерывна на σ. Действительно, f непрерывна на замкнутом шаре ω; поверхности, его ограничивающие, $z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ и $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ $(x^2 + y^2 \leqslant 1)$, описываются непрерывными на круге σ функциями. Непрерывность F на σ вытекает из доказанной теоремы. Таким образом,

$$\int_{\omega} f\, d\omega = \int_{-1}^{1} dx \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} F(x, y)\, dy \right)$$

Интеграл $\Phi(x) = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} F(x, y)\, dy$ в свою очередь есть непрерывная функция от $x \in [-1, +1]$ на основании этой же теоремы. Действительно, $F(x, y)$ непрерывна на круге σ (замкнутом ограниченном множестве точек x, y), а кривые $y = -\sqrt{1 - x^2}$, $y = \sqrt{1 - x^2}$ $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$, ограничивающие σ, непрерывны. По теореме $\Phi(x)$ непрерывна на $[-1, +1]$.

§ 12.14. Геометрическая интерпретация знака определителя

Зададим в плоскости прямоугольную систему координат (x_1, x_2), как на рис. 12.7 и 12.8.

Мы предполагаем для определенности, что положительное направление оси x_2 получается из положительного направления оси x_1 поворотом оси x_1 на угол 90° против часовой стрелки (рис. 12.9). Зададим два не равных нулю вектора $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$, выходящих из нулевой точки, с определителем

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{1}$$

Если $\Delta > 0$, то чтобы получить направление вектора $\mathbf{b}$, нужно повернуть (против часовой стрелки) $\mathbf{a}$ на угол, меньший чем π,

а если $\Delta < 0$, то это связано с поворотом на угол, больший чем π. В самом деле, очевидно, что $a = |a|(\cos\varphi_1, \sin\varphi_1)$ и $b = |b|(\cos\varphi_2, \sin\varphi_2)$, где φ_1, φ_2 — углы, образованные соответственно векторами $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ с осью x, откуда $\Delta = |a| \cdot |b| \sin(\varphi_2 - \varphi_1)$.

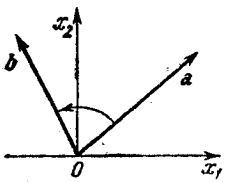

Рис. 12.7.

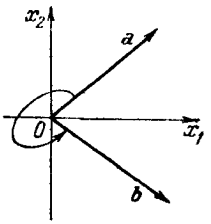

Рис. 12.8.

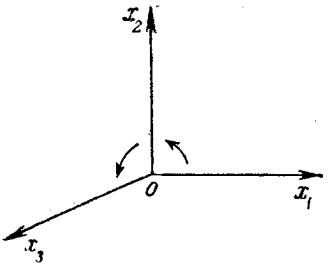

Рис. 12.9.

Рассмотрим теперь трехмерное пространство, где задана прямоугольная система координат (x_1, x_2, x_3) и три вектора $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$ с определителем

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Пусть $\mathbf{i}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{i}_2 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{i}_3 = (0, 0, 1)$ — орты осей x_1, x_2, x_3. Их определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad (> 0).$$

Если $\Delta > 0$, то можно определить три непрерывные вектор-функции

$$\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t)),$$
$$\beta(t) = (\beta_1(t), \beta_2(t), \beta_3(t)),$$
$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)) \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1)$$

такие, что будут удовлетворяться условия

$$\alpha(0) = \mathbf{a}, \quad \beta(0) = \mathbf{b}, \quad \gamma(0) = \mathbf{c}, \quad \alpha(1) = \mathbf{i}_1, \quad \beta(1) = \mathbf{i}_2, \quad \gamma(1) = \mathbf{i}_3$$

и при этом для любого $t \in [0, 1]$ определитель

$$\Delta(t) = \begin{vmatrix} \alpha_1(t) & \alpha_2(t) & \alpha_3(t) \\ \beta_1(t) & \beta_2(t) & \beta_3(t) \\ \gamma_1(t) & \gamma_2(t) & \gamma_3(t) \end{vmatrix} > 0. \tag{2}$$

Если же $\Delta < 0$, то невозможно построить три непрерывных вектор-функции с указанными свойствами.