В случае $\Delta > 0$ говорят, что упорядоченная тройка векторов **a**, **b**, **c** ориентирована так же, как тройка $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$, в то время как в случае $\Delta < 0$ тройка, **a**, **b**, **c** ориентирована противоположно ориентации тройки $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$.

Подобная характеристика (1-го и 2-го случаев) может быть дана и для пар векторов **a**, **b** на плоскости (см. еще далее § 13.8).

Чтобы обосновать сказанное, начнем с того, что на протяжении отрезка времени [0, 1/4] непрерывно деформируем векторы **a**, **b**, **c**, не изменяя их направления, так, чтобы в результате получились три единичных вектора. Иначе говоря, вводим вектор-функции $\alpha(t) = \varphi(t)\mathbf{a}$, $\beta(t) = \psi(t)\mathbf{b}$, $\gamma(t) = \chi(t)\mathbf{c}$, где φ, ψ, χ — непрерывные положительные на [0, 1/4] функции, удовлетворяющие условиям

$$\varphi(0) = \psi(0) = \chi(0) = 1, \quad \varphi\left(\frac{1}{4}\right) = |a|^{-1}, \quad \psi\left(\frac{1}{4}\right) = |b|^{-1}, \quad \chi\left(\frac{1}{4}\right) = |c|^{-1}.$$

Пусть L есть плоскость векторов **a** и **b**. Оставляя векторы $\alpha(1/4)$ и $\gamma(1/4)$ постоянными на протяжении отрезка времени [1/4, 1/2], поворачиваем вектор $\beta(1/4)$ в плоскости L на кратчайший угол до положения, перпендикулярного вектору

$$\alpha(1/4) = \alpha(1/2).$$

Теперь при фиксированных векторах $\alpha(1/2)$, $\beta(1/2)$, поворачиваем в течение времени $t \in [1/2, 3/4]$ на кратчайший угол только вектор γ до положения, перпендикулярного плоскости L. В результате векторы $\alpha(3/4)$, $\beta(3/4)$, $\gamma(3/4)$ образуют репер взаимно перпендикулярных единичных векторов. Теперь на протяжении отрезка времени [3/4, 1] вращаем этот репер как твердое тело так, чтобы векторы $\alpha(1)$, $\beta(1)$, соответственно, совпали с ортами $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$. Тогда, очевидно,

$$\alpha(1) = \mathbf{i}_1, \ \beta(1) = \mathbf{i}_2, \ \gamma(1) = \pm\mathbf{i}_3.$$

При этом будет знак «+», если $\Delta > 0$, и знак «—», если $\Delta < 0$. Ведь наш процесс описывается непрерывными не компланарными векторами $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$, для которых определитель $\Delta(t)$ (составленный по образцу (2)) не равен нулю при любом $t \in [0, 1]$. Но тогда знаки $\Delta(0) = \Delta$ и $\Delta(1)$ совпадают, что возможно лишь, если $\gamma(1) = \mathbf{i}_3$ при $\Delta > 0$ и $\gamma(1) = -\mathbf{i}_3$ при $\Delta < 0$.

§ 12.15. Замена переменных в кратном интеграле. Простейший случай

Покажем, как видоизменяется интеграл

$$\iint\limits_{\Omega'} f(x_1', x_2')\, dx_1' dx_2', \tag{1}$$

если в нем произвести замену переменных

$$\begin{aligned} x_1' &= ax_1 + bx_2, \\ x_2' &= cx_1 + dx_2 \end{aligned} \quad \left(D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0\right). \tag{2}$$

Будем считать, что Ω' — область с непрерывной кусочно гладкой границей Γ' (рис. 12.10).

Преобразование, обратное к (2), отображает Ω' на некоторую область Ω плоскости (x_1, x_2) с кусочно гладкой границей Γ

(рис. 12.11), и на Ω определена функция

$$F(x_1, x_2) = f(ax_1 + bx_2, cx_1 + dx_2) \qquad ((x_1, x_2) \in \Omega).$$

Введем на плоскости (x_1, x_2) прямоугольную сетку со сторонами квадратов Δ длины h. Она отображается при помощи уравнений (2), вообще говоря, в косоугольную сетку, делящую

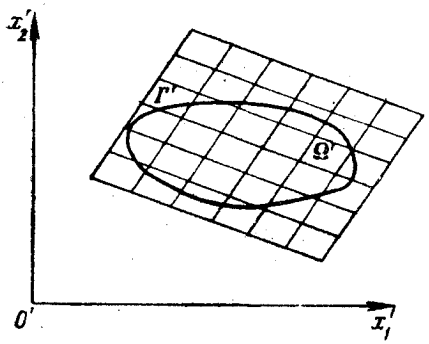

Рис. 12.10.

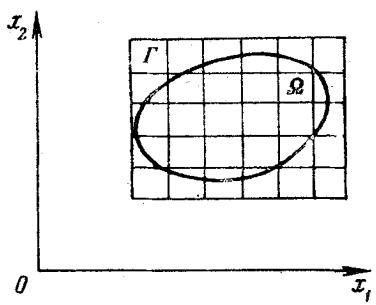

Рис. 12.11.

плоскость (x_1', x_2') на равные параллелограммы Δ' (образы Δ), имеющие площадь

$$|\Delta'| = |D||\Delta| = |D|h^2, \quad D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}. \tag{3}$$

Тем самым определены разбиения ρ, ρ' соответственно областей Ω, Ω'.

Имеем

$$S_{\rho'}(f) = \sum f(x_1', x_2')|\Delta'| =$$
$$= \sum F(x_1, x_2)|D||\Delta| = S_\rho(|D|F) \quad ((x_1, x_2) \in \Delta). \tag{4}$$

Мы считаем, что вторая сумма в этой цепи распространена только на полные квадраты $\Delta \subset \Omega$, соответственно первая — на соответствующие им «полные» параллелограммы Δ' (см. теорему 4 § 12.7). Переходя к пределу в (4) при $h \to 0$, получим формулу

$$\iint\limits_{\Omega'} f(x_1', x_2')\,dx_1'dx_2' = \iint\limits_{\Omega} F(x_1, x_2)|D|\,dx_1dx_2 =$$
$$= |D| \iint\limits_{\Omega} F(x_1, x_2)\,dx_1dx_2. \tag{5}$$

В этом рассуждении можно считать, что функция f непрерывна на $\overline{\Omega}'$, и тогда функция F будет непрерывной на $\overline{\Omega}$, и оба интеграла (5) существуют, а выше доказан факт равенства (5). Достаточно, впрочем, считать, что функция f интегрируема на

Ω', и тогда первая сумма в (4) имеет предел, когда $d(\Delta') \to 0$, что автоматически влечет существование равного ему предела второй суммы, когда $d(\Delta) \to 0$, т. е. существование второго интеграла (5), равного первому.

В следующем параграфе дана более общая формула.

§ 12.16. Замена переменных в кратном интеграле

Теорема 1. *Пусть в n-мерном пространстве R точек $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ задана измеримая область Ω и рассматривается еще другое n-мерное пространство R' точек $\mathbf{x}' = (x_1', \ldots, x_n')$, а в нем измеримая область Ω'.*

Предположим, что точки $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}$ переходят в точки $\mathbf{x}' \in \overline{\Omega}'$ при помощи отображения (операции)

$$x_j' = \varphi_j(\mathbf{x}) = \varphi_j(x_1, \ldots, x_n) \quad (j = 1, \ldots, n;\ \mathbf{x} \in \overline{\Omega}), \tag{1}$$

которое мы будем еще обозначать так:

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}. \tag{1'}$$

Мы будем предполагать, что операция A обладает следующими свойствами:

1) *Она взаимно однозначно отображает Ω на Ω' *):*

$$\Omega \rightleftarrows \Omega' \tag{2}$$

(взаимно однозначное соответствие при отображении A между точками границ Ω и Ω' не требуется).

2) *Функции $\varphi_j(\mathbf{x})$ непрерывны и имеют на $\overline{\Omega}$ непрерывные частные производные с якобианом **)*

$$D(\mathbf{x}) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}. \tag{3}$$

Пусть, далее, задана интегрируемая на Ω' функция

$$f(\mathbf{x}') = f(x_1', \ldots, x_n'),$$

преобразующаяся при помощи подстановок (1) в функцию

$$F(\mathbf{x}) = f(A\mathbf{x}) = f[\varphi_1(\mathbf{x}), \ldots, \varphi_n(\mathbf{x})] \quad (\mathbf{x} \in \Omega). \tag{4}$$

---

*) Можно заранее не предполагать, что Ω' есть область. Это следует из непрерывности $A\mathbf{x}$ на Ω и (2) (см. далее § 12.20, теорема 3).

**) На знак $D(x)$ никаких условий не накладывается. Однако на самом деле условия теоремы автоматически влекут либо неравенство $D(\mathbf{x}) \geqslant 0$ всюду на Ω, либо неравенство $D(\mathbf{x}) \leqslant 0$ всюду на Ω (см. § 12.21).

Тогда имеет место формула замены переменных в кратном интеграле

$$\int_{\Omega'} f(\mathbf{x}')\,d\mathbf{x}' = \int_{\Omega} F(\mathbf{x})\,|D(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x} \tag{5}$$

(утверждающая существование интеграла в правой части (5) *и равенство* (5)).

В частности, если функция $f(\mathbf{x}')$ непрерывна на $\overline{\Omega}'$, то непрерывна также функция F на $\overline{\Omega}$ и оба интеграла в (5) *существуют, а формула* (5) *утверждает их равенство.*

Трудность теоремы заключается в лемме, которая будет доказана в § 12.17. Мы ее сформулируем и сразу же покажем, как с ее помощью доказывается равенство (5).

Лемма 1. *Пусть выполняются условия теоремы и $\Delta \subset \Omega$ есть произвольный куб с ребром h, а $\Delta' = A(\Delta)$ — его образ на Ω' при помощи операции A. Тогда имеет место равенство*

$$|\Delta'| = |D(\mathbf{x})|\,|\Delta| + O(h^n\omega(h)), \tag{6}$$

где $D(\mathbf{x})$ — значение якобиана D в одной из точек $\mathbf{x} \in \Delta$, а

$$\omega(h) = \sup_{i,j=1,\ldots,n} \omega_{ij}(h),$$

$$\omega_{ij}(h) = \sup_{\substack{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|<h \\ \mathbf{x},\mathbf{y}\in\overline{\Omega}}} \left| \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) - \frac{\partial\varphi_i}{\partial\varphi_j}(\mathbf{y}) \right| \tag{7}$$

(модуль непрерывности $\dfrac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}$ на $\overline{\Omega}$) и константа C, входящая в O, не зависит от Δ (т. е. от h и положения Δ на Ω).

Важно заметить, что так как частные производные $\dfrac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}$ по условию теоремы непрерывны на ограниченном замкнутом множестве $\overline{\Omega}$, то их модули непрерывности $\omega_{ij}(h) \to 0$ $(h \to 0)$, но тогда и

$$\omega(h) \to 0 \qquad (h \to 0). \tag{8}$$

Поэтому остаточный член в формуле (6) удовлетворяет неравенству

$$|O(h^n\omega(h))| \leqslant Ch^n\omega(h) = o(h^n) \qquad (h \to 0) \tag{9}$$

и притом равномерно относительно $\mathbf{x} \to \overline{\Omega}$, потому что правая часть (9) не зависит от $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}$. Что касается первого члена правой части (6), то он равен

$$|D(\mathbf{x})|\,|\Delta| = |D(\mathbf{x})|h^n, \text{ т. е. } |\Delta'| = |D(\mathbf{x})|h^n + o(h^n) \qquad (h \to 0).$$

Из этого равенства, в частности, следует, что для любого $\mathbf{x} \in \Omega$ имеет место равенство ($x \in \Delta \subset \Omega$)

$$\lim_{h \to 0} \frac{|\Delta'|}{\Delta} = |D(\mathbf{x})| \quad (\mathbf{x} \in \Omega), \tag{10}$$

показывающее, что *величина* $|D(\mathbf{x})|$ *с точностью до бесконечно малых о* (1), $h \to 0$, *есть коэффициент увеличения элементарного объема, сконцентрированного возле точки* $\mathbf{x}$ *при преобразовании его посредством операции* A.

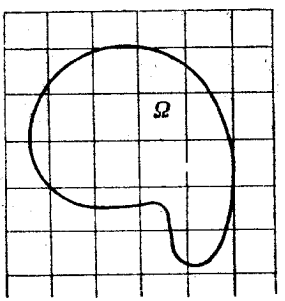

Рис. 12.12.

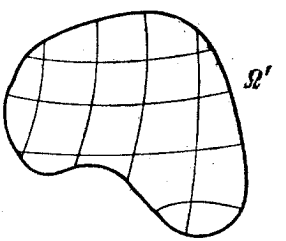

Рис. 12.13.

Разобьем Ω h-сеткой, состоящей из кубов с ребрами длины h (рис. 12.12). Часть сетки, содержащаяся в Ω, при помощи операции A переходит в криволинейную сетку поверхностей, разбивающую Ω' на измеримые части (рис. 12.13) (см. теорему 3, § 12.5).

Обозначим через Δ полные кубы сетки, входящие вместе со своими границами в Ω. При помощи операции A открытое ядро Δ переходит в открытое ядро Δ', а граница Δ — в границу Δ' (формально это утверждение требует доказательства, см. § 12.20, теорему 3 и замечание к ней). При этом, если $h \to 0$, то максимальный диаметр частичных множеств соответствующего разбиения Ω' стремится к нулю, потому что в преобразовании (1) функции $\varphi_j(\mathbf{x})$ равномерно непрерывны на $\overline{\Omega}$.

На основании леммы 1

$$\sum f(\mathbf{x}')|\Delta'| = \sum F(\mathbf{x})\left(|D(\mathbf{x})||\Delta| + O\left(\omega(h)h^n\right)\right), \tag{11}$$

где $\Delta' = A(\Delta)$, сумма распространена на все Δ, а $f(\mathbf{x}')$ и $F(\mathbf{x})$, $D(\mathbf{x})$ обозначают значения f, F, D соответственно в одной из точек Δ' или Δ. Из (11) после перехода к пределу при $h \to 0$ получим равенство (5). В самом деле, входящая в O константа C — одна и та же для всех слагаемых правой части (11), поэтому, учитывая ограниченность F на Ω ($|F| < K$)

$$\sum F(\mathbf{x})\, O\left(\omega(h)\left(h^n\right)\right| \leqslant KC\omega(h) \sum |\Delta| \leqslant KC\omega(h)|\Omega| \to 0 \quad (h \to 0).$$

Далее, в силу интегрируемости f на Ω'

$$\lim_{h\to 0}\sum f(\mathbf{x}')\,|\Delta'| = \lim_{\max|\Delta'|\to 0}\sum f(\mathbf{x}')\,|\Delta'| = \int_{\Omega'} f(\mathbf{x}')\,d\mathbf{x}'.$$

Но тогда существует равный этому интегралу предел

$$\lim_{h\to 0}\sum F(\mathbf{x})\,|D(\mathbf{x})|\,|\Delta| = \int_{\Omega} F(\mathbf{x})\,|D(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x}.$$

Таким образом, существует интеграл от $F(\mathbf{x})|D(\mathbf{x})|$ на Ω. Итак, формула (5) доказана.

§ 12.17. Доказательство леммы 1 § 12.16

Все рассуждения проведем в двумерном случае

$$x_i' = \varphi_i(x_1, x_2) \quad (i = 1, 2). \tag{1}$$

В n-мерном случае, как будет видно, они совершенно аналогичны.

Итак, пусть $\Delta = \{x_i^0 < x_i < x_i^0 + h;\ i = 1, 2\}$ *) — квадрат PA_1CA_2 (рис. 12.14) и Δ' — его образ — криволинейный параллелограмм $P'A_1'C'A_2'$ (рис. 12.15). Δ' есть область, граница ее γ' есть образ

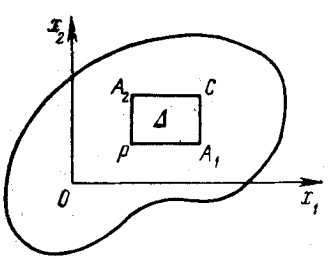

Рис. 12.14.

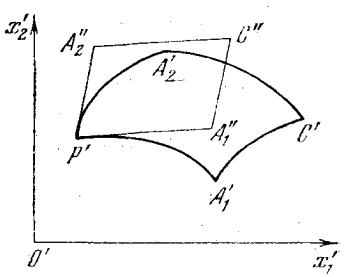

Рис. 12.15.

при помощи A границы γ квадрата Δ (см. § 12.20, теорема 3). Например, сторона Δ, имеющая уравнение $x_2 = x_2^0$, имеет в качестве своего образа кривую

$$x_1' = \varphi_1(x_1, x_2^0), \quad x_2' = \varphi_2(x_1, x_2^0) \quad (x_1^0 \leqslant x_1 \leqslant x_1^0 + h),$$

определяемую непрерывно дифференцируемыми функциями параметра x_1 **). Мы не называем эту кривую гладкой, потому что не исключаем, что для какого-либо значения x_1 частные произ-

*) В n-мерном случае $\Delta = \{x_i^0 < x_i < x_i^0 + h;\ i = 1, \ldots, n\}$.

**) В n-мерном случае кусок границы Δ', соответствующей грани $x_j = x_j^0$, определяется уравнениями $x_i' = \varphi_i(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j^0, x_{j+1}, \ldots, x_n)$ $(i = 1, \ldots, n)$.

водные $\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}(x_1, x_2^0)$ и $\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}(x_1, x_2^0)$ могут одновременно равняться нулю. Все же она имеет меру нуль (см. теорему 3 § 12.5).

Нам предстоит доказать равенство

$$|\Delta'| = |D(\mathbf{x}^0)|\,|\Delta| + O(h^2\omega(h)), \tag{2}$$

где константа в O не зависит от $\mathbf{x}^0 \in \Omega$. Но тогда это равенство верно при замене в нем $\mathbf{x}^0$ на произвольную точку $\mathbf{x} \in \Delta$ *).

В силу непрерывной дифференцируемости φ_i имеем

$$x_i' = x_i^{0\prime} + \left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_1}\right)_1 (x_1 - x_1^0) + \left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_2}\right)_1 (x_2 - x_2^0) \quad (i = 1, 2;\ \mathbf{x} \in \Delta), \tag{1'}$$

где $(\quad)$ обозначает результат подстановки в $(\quad)$ некоторой определенной точки $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \Delta$.

Наряду с отображением (1), которое записано еще в виде (1′), мы рассматриваем линейное преобразование $\mathbf{x}'' = A^*\mathbf{x}$,

$$x_i'' = x_i^{0\prime} + \left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_1}\right)_0 (x_1 - x_1^0) + \left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_2}\right)_0 (x_2 - x_2^0) \quad (i = 1, 2), \tag{3}$$

с постоянными коэффициентами $\left(\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}\right)_0 \text{ — результат подстановки в } \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j} \text{ точки } \mathbf{x}^0\right)$, отображающее Δ на некоторый параллелограмм Δ'' с границей γ''. Стороны Δ'', прилегающие к точке $\mathbf{x}^{0\prime}$, суть (приложенные к $\mathbf{x}^{0\prime}$) векторы

$$P'A_i'' = \left(h\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_i}\right)_0,\quad h\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_i}\right)_0\right) \quad (i = 1, 2).$$

Длина их

$$|P'A_i''| = ha_i, \quad a_i = \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_i}\right)_0^2 + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_i}\right)_0^2}. \tag{4}$$

Оценим расстояние между точками $\mathbf{x}'$ и $\mathbf{x}''$, соответствующими одной и той же точке $\mathbf{x} \in \Delta$. Из равенства

$$x_i' - x_i'' = \left[\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_1}\right)_1 - \left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_1}\right)_0\right](x_1 - x_1^0) + \left[\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_2}\right)_1 - \left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_2}\right)_0\right](x_2 - x_2^0) \quad (i = 1, 2)$$

---

*) В силу § 12.16, (7) имеем $\big||D(\mathbf{x})| - |D(\mathbf{x}^0)|\big| \leqslant |D(\mathbf{x}) - D(\mathbf{x}^0)| \leqslant C\omega(h\sqrt{2}) \leqslant 2C\omega(h)$.

следует (см. (10), § 7.10)*)

$$|x_i'' - x_i'| \leqslant \omega(\sqrt{2}h)h + \omega(\sqrt{2}h)h \leqslant 4\omega(h)h, \tag{5}$$

$$|\mathbf{x}'' - \mathbf{x}'| = \sqrt{(x_1'' - x_1')^2 + (x_2'' - x_2')^2} \leqslant 6\omega(h)h = \lambda. \tag{6}$$

Таким образом, точка $\mathbf{x}'$ находится внутри круга с центром в $\mathbf{x}''$ радиуса λ.

Опишем из каждой точки $\mathbf{x}'' \in \gamma''$ (границы Δ'') кружок $v_{x''}$ радиуса λ. Объединение всех $v_{x''}$, соответствующих всем $x \in \gamma$, обозначим через e. Если параллелограмм Δ'' не слишком скошен, то получим картину, как на рис. 12.16.

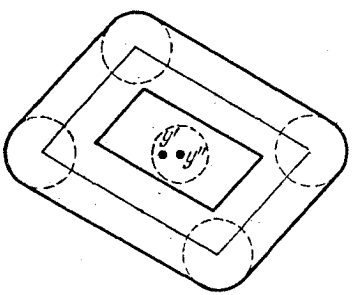

Рис. 12.16.

Множество e имеет вид рамки с закругленными внешними углами, внутри нее имеется параллелограмм $\Delta'' - e$. Круг $v_{y''}$, где $\mathbf{y}''$ — центр параллелограмма Δ'', полностью содержится в $\Delta'' - e$. Так как центр y квадрата Δ при помощи A^* переходит в $\mathbf{y}''$, то $\mathbf{y}' \subset v_{y''} \subset \Delta'' - e$.

Обозначим через H_i высоту Δ'', перпендикулярную i-й стороне (длины $a_i h$: $i = 1, 2$). Изображенная на рис. 12.16 картина во всяком случае будет иметь место, если

$$H_i > 4\lambda \qquad (i = 1, 2). \tag{7}$$

Площадь рамки e не превышает, очевидно, сумму площадей четырех кружков радиуса λ, описанных из угловых точек γ'' как из центров, плюс сумму площадей прямоугольников высоты 2λ с основаниями, равными длинам сторон параллелограммов Δ''.

Следовательно **),

$$|e| \leqslant 4\pi\lambda^2 + 2\sum_{i=1}^{2} 2\lambda a_i h \leqslant Kh^2\omega(h). \tag{8}$$

$\left(\varphi_i, \dfrac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}\right.$ ограничены на $\overline{\Omega}$, поэтому и a_i, и $\left.\omega(h)!\right)$, где K — константа, не зависящая от h и положения Δ на Ω.

Так как γ' содержится в рамке e и Δ' является ограниченным множеством (функции φ_i непрерывны, следовательно, ограничены на $\overline{\Omega}$), то интуитивно ясно, что

$$\Delta'' - \mathbf{e} \subset \Delta' \subset \Delta'' + \mathbf{e}. \tag{9}$$

---

*) В n-мерном случае в правых частях (5), (6) вместо чисел 4, 6 можно взять соответственно $n(\sqrt{n}+1)$, $\sqrt{n^3(\sqrt{n}+1)^2}$.

**) В n-мерном случае в правой части будет $K\omega(h)h^n$.

Ниже мы докажем это утверждение аккуратно, а сейчас воспользуемся им, чтобы оценить $|\Delta'|$.

Из (9) вытекает, что $|\Delta'| = |\Delta''| + \theta|e|(-1 \leqslant \theta \leqslant 1)$.

Следовательно, в силу (8) и учитывая, что площадь параллелограмма Δ'' равна абсолютной величине определителя, составленного по векторам, определяющим его стороны, получим

$$|\Delta'| = |D(\mathbf{x}^0)|h^2 + O(h^2\omega(h)),$$

где константа в O не зависит от $\mathbf{x}^0$ и h.

Докажем (9). Вложение $\Delta'' - e \subset \Delta'$ следует из того, что $\Delta'' - e$ заведомо содержит одну точку $\mathbf{y}' \in \Delta'$ и ни одной граничной точки Δ', ведь все граничные точки Δ' содержатся в e. Если бы в $\Delta'' - e$ нашлась точка $\mathbf{z}$, не принадлежащая Δ', то отрезок $\overline{\mathbf{y}'\mathbf{z}}$ (соединяющий точку $\mathbf{y}' \in \Delta'$ с точкой $z \overline{\in} \Delta'$) содержал бы в себе граничную точку Δ'.

Вложение же $\Delta' \subset \Delta'' + e$ вытекает из следующих соображений. Допустим, что существует точка $\mathbf{z}' \in \Delta' - (\Delta'' + e)$. Выпустим из центра Δ'' луч, проходящий через $\mathbf{z}'$, и будем двигаться из $\mathbf{z}'$ по этому лучу в бесконечность. Так как Δ' — ограниченное множество (функции φ_1 и φ_2 ограничены на $\overline{\Delta}$), то мы обязательно должны наткнуться на точку γ' (границы Δ'). Но этого не может быть, потому что $\gamma' \subset e$.

Но еще надо рассмотреть случай, когда для некоторого $i = 1, 2$ имеет место неравенство

$$H_i \leqslant 4\lambda \tag{10}$$

(в частности, если $D(\mathbf{x}^0) = 0$ и параллелограмм Δ'' вырождается).

Тогда в силу (10), (6), (8) имеем

$$\begin{aligned} \big|\,|\Delta'| - |D(x^0)|h^2\big| &= \big|\,|\Delta'| - |\Delta''|\,\big| \leqslant |\Delta'| + |\Delta''| \leqslant \\ &\leqslant (|\Delta''| + |e|) + |\Delta''| = 2|\Delta''| + |e| \leqslant 2a_i h H_1 + |e| \leqslant \\ &\leqslant O(h^2\omega(h)) + O(h^2\omega(h)) = O(h^2\omega(h)). \end{aligned}$$

Поэтому $|\Delta'| - |D(x^0)|h^2 = O(h^2\omega(h))$, и верно (2).

Итак, во всех возможных случаях имеет место равенство (2). При этом константа C, входящая в остаток правой его части, не зависит от h и $\mathbf{x}^0 \in \Omega$. Из примечаний, которые делались попутно, видно, что доказательство в общем случае n совершенно аналогично.

§ 12.18. Полярные координаты в плоскости

Система уравнений

$$x = \rho\cos\theta, \quad y = \rho\sin\theta \tag{1}$$

осуществляет преобразование полярных координат в декартовы. Правые части (1) — непрерывно дифференцируемые функции с якобианом

$$D = \frac{D(x, y)}{D(\rho, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\rho\sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho \geqslant 0. \tag{2}$$

Введем чисто формально новую плоскость с декартовой системой (ρ, θ) и принадлежащую ей область

$$\Lambda = \{\rho > 0,\ 0 < \theta < 2\pi\}. \tag{3}$$

Очевидно, преобразование (1) взаимно однозначно отображает Λ на Λ' — плоскость xy без луча $\theta = 0$. К тому же на Λ якобиан $D > 0$.

Пусть в плоскости x, y задана произвольная измеримая (в двумерном смысле) область, а на ее замыкании — непрерывная функция $f(x, y)$. Выкинем из этой области точки луча $\theta = 0$, если они есть, и оставшееся множество обозначим через Ω'. Будем считать, что Ω' есть область или сумма конечного числа непересекающихся попарно областей. Множеству Ω' соответствует в силу (1) некоторое множество $\Omega \subset \Lambda$ (которое предполагается измеримым), $\Omega \rightleftarrows \Omega'$. Справедливо равенство

$$\iint\limits_{\Omega'} f(x, y)\, dx\, dy = \iint\limits_{\Omega} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\, \rho\, d\rho\, d\theta, \tag{4}$$

потому что мы находимся в условиях теоремы о замене переменных в кратном интеграле (f непрерывна на Ω', преобразование (1) непрерывно дифференцируемо на $\overline{\Omega}$ с якобианом $\rho > 0$ и $\Omega \rightleftarrows \Omega'$).

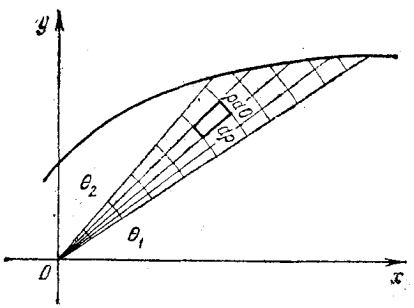

Рис. 12.17.

В полученной формуле (4) можно теперь заменить Ω, Ω' соответственно на их замыкания $\overline{\Omega}$, $\overline{\Omega}'$, потому что этим добавляются только множества двумерной меры нуль.

Если область Ω имеет вид сектора, ограниченного лучами $\theta = \theta_1$, $\theta = \theta_2 (\theta_1 < \theta_2 \leqslant \theta_1 + 2\pi)$ и непрерывной кривой $\rho = \psi(\theta)$, то

$$\iint\limits_{\Omega'} f(x, y)\, dx\, dy = \int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int\limits_{0}^{\psi(\theta)} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\, \rho\, d\rho. \tag{5}$$

Впрочем, формулу (4) можно получить из естественных геометрических соображений, не прибегая к искусственной декартовой плоскости (ρ, θ). Плоскость x, y разбиваем на элементарные фигуры близкими концентрическими окружностями и выходящими из нулевой точки лучами (рис. 12.17). Площадь каждой такой элементарной фигуры (возле точки (ρ, θ)) или, как говорят, элемент площади в полярных координатах, равна с точностью до бесконечно малых высшего порядка $\Delta S \sim \rho\, d\rho\, d\theta$. Поэтому, если

наш интеграл просуммировать по этим элементам, то получим

$$\lim_{\Delta\rho,\Delta\theta\to 0} \sum f_j\rho_j\Delta\rho\,\Delta\theta = \iint\limits_{\Omega} f(\rho,\theta)\,\rho\,d\rho\,d\theta.$$

Пример:

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2} e^{(x^2+y^2)}dx\,dy = \int\limits_0^R\int\limits_0^{2\pi} e^{\rho^2}\rho\,d\rho\,d\theta = \pi\left(e^{R^2}-1\right).$$

Замечание. Операция (1) непрерывна на замыкании $\overline{\Lambda}$ области $\Lambda = \{0<\rho<1;\ 0<\theta<2\pi\}$ и устанавливает взаимно однозначное соответствие $\Lambda \rightleftarrows \Lambda'$, но при этом взаимно однозначного соответствия между границами Λ и Λ' нет (см. теорему 1, § 12.16).

§ 12.19. Полярные и цилиндрические координаты в пространстве

Система уравнений

$$x = \rho\cos\theta\cos\varphi;\ y = \rho\cos\theta\sin\varphi,\ z = \rho\sin\theta \tag{1}$$

осуществляет переход от полярных координат в пространстве к декартовым (рис. 12.18). Здесь ρ — расстояние точки $P(x, y, z)$ до начала координат (полюса полярной системы), θ — угол между радиус-вектором $\boldsymbol{\rho}$ точки P и его проекцией на плоскость (x, y), φ — угол между указанной проекцией и положительным направлением оси x. Его отсчитывают в том направлении, в котором надо вращать вокруг оси z положительно направленную ось x, чтобы прийти к положительно направленной оси y кратчайшим путем.

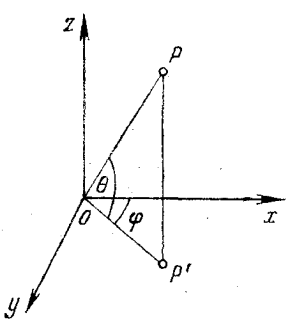

Рис. 12.18.

Функции справа в (1) непрерывно дифференцируемы с якобианом

$$D = \frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \varphi, \theta)} = \rho^2\cos\theta. \tag{2}$$

Введем формально новое трехмерное пространство с декартовой системой координат (ρ, θ, φ) и в нем открытое множество

$$\Lambda = \left\{0<\rho,\ -\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2},\ 0<\varphi<2\pi\right\}. \tag{3}$$

Преобразования (1) взаимно однозначно отображают Λ на Λ', т. е. на пространство xyz с выкинутой полуплоскостью $\varphi = 0$ (множеством точек $(x, 0, z)$, где $x \geqslant 0$):

$$\Lambda \rightleftarrows \Lambda'. \tag{4}$$

Пусть теперь в пространстве xyz задана произвольная измеримая в трехмерном смысле область, а на ее замыкании — непрерывная функция $f(x, y, z)$. Выкинем из этой области точки полуплоскости $\varphi = 0$ и оставшееся множество обозначим через Ω'. Будем считать, что Ω' есть область или сумма конечного числа непересекающихся попарно областей. Множеству Ω' соответствует в силу (4) некоторое множество $\Omega \subset \Lambda$, которое мы будем предполагать измеримым.

Справедливо равенство

$$\iiint\limits_{\Omega'} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint\limits_{\Omega} F(\rho, \theta, \varphi)\, \rho^2 \cos\theta\, d\rho\, d\theta\, d\varphi, \qquad (5)$$

где

$$F(\rho, \theta, \varphi) = f(\rho\cos\theta\cos\varphi,\ \rho\cos\theta\sin\varphi,\ \rho\sin\theta), \qquad (6)$$

потому что мы находимся в условиях теоремы о замене переменных в кратном интеграле.

Теперь в (5) можно при желании заменить Ω, Ω' на $\overline{\Omega}$, $\overline{\Omega}'$ потому, что эти множества отличаются соответственно на множества трехмерной меры нуль.

Пусть σ есть поверхность, описываемая в полярных координатах функцией $\rho = \psi(\theta, \varphi)((\theta, \varphi) \in \omega)$, непрерывной на замыкании области ω, и пусть Ω — трехмерная измеримая область пространства (x, y, z), ограниченная поверхностью σ и конической поверхностью, лучи которой выходят из нулевой точки и опираются на σ. Тогда для непрерывной на $\overline{\Omega}$ функции $f(x, y, z)$ имеет место

$$\iiint\limits_{\Omega} f\, dx\, dy\, dz = \iint\limits_{\omega} d\theta\, d\varphi \int\limits_0^{\psi(\theta,\varphi)} F\rho^2 \cos\theta\, d\rho.$$

В частности, если ω соответствует всей единичной сфере, то последний интеграл равен

$$\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta\, d\theta \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\psi(\theta,\varphi)} F\rho^2\, d\rho.$$

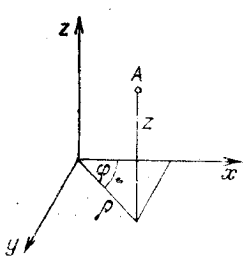

Рис. 12.19.

Чтобы наглядно получить элемент объема в полярных координатах, рассечем пространство на малые части концентрическими шаровыми поверхностями с центром в полярном полюсе (точке $\rho = 0$) плоскостями, проходящими через ось z, и круговыми коническими поверхностями, имеющими своей осью ось z. Полученные ячейки имеют объем, равный с точностью до бесконечно малых высшего порядка $\Delta v \sim \rho^2 \cos\theta\, d\rho\, d\theta\, d\varphi$, где (ρ, θ, φ) — одна из точек ячейки.

Замечание. Операция (1) непрерывна на замыкании $\bar{\Lambda}$ области $\Lambda = \{0 < \rho < 1, -\pi/2 < \theta < \pi/2, 0 < \varphi < 2\pi\}$ и устанавливает взаимно однозначное соответствие $\Lambda \rightleftarrows \Lambda'$. Однако при этом нет взаимно однозначного соответствия точек границ Λ и Λ'.

Цилиндрические координаты (ρ, θ, z) связаны с декартовыми координатами (x, y, z) равенствами (см. рис. 12.19)

$$x = \rho \cos \varphi, \ y = \rho \sin \varphi, \ z = z. \tag{7}$$

Здесь ρ — расстояние от проекции точки $A = (x, y, z)$ на плоскость (x, y), до начала декартовой системы, а φ — угол радиус-вектора указанной проекции с осью x. Якобиан преобразования (7) равен

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \varphi, z)} = \rho.$$

§ 12.20. Общие свойства непрерывных операций

Ниже мы будем изучать операцию

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega \subset R, \quad \mathbf{x}' = (x_1', \ldots, x_n') \in \Omega' \subset R',$$

приводящую во взаимно однозначное соответствие $\Omega \rightleftarrows \Omega'$ некоторые множества $\Omega \subset R$ и $\Omega' \subset R'$.

Таким образом, существует обратная операция ($\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{x}'$ $(\mathbf{x}' \in \Omega')$).

Условимся в обозначениях. Если некоторая точка Ω' обозначена через $\mathbf{x}'$, то это значит, что $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ $(\mathbf{x} \in \Omega)$; $\mathbf{e}' = A\mathbf{e}$, где $\mathbf{e} \subset \Omega$; $\sigma_{\mathbf{x}}$, $\sigma_{\mathbf{x}'}$ — шары в R, соответственно в R', с центрами в точках $\mathbf{x}$ $(\in R)$, $\mathbf{x}'$ $(\in R')$.

Теорема 1. *Если операция A отображает непрерывно и взаимно однозначно замкнутое ограниченное множество F на множество F', то F' тоже ограничено и замкнуто и обратная операция A^{-1} непрерывна на F'.*

В самом деле, пусть $\mathbf{x}_l' \in F'$ $(l = 1, 2, \ldots)$, $\mathbf{y}_0 \in R'$ и $\mathbf{x}_l' \to \mathbf{y}_0$. Тогда существует подпоследовательность $\mathbf{x}_{l_k}$ и точка $\mathbf{x}_0 \in F$ (ограниченность и замкнутость F!) такая, что $\mathbf{x}_{l_k} \to \mathbf{x}_0$, и в силу непрерывности A на F имеет место $\mathbf{x}_{l_k}' = A\mathbf{x}_{l_k} \to A\mathbf{x}_0$. Следовательно, $\mathbf{y}_0 = A\mathbf{x}_0$ и F' — замкнутое множество. Оно ограничено, иначе существовала бы последовательность $\mathbf{x}_l'$ с $|\mathbf{x}_l'| \to \infty$, что невозможно, потому что для некоторой подпоследовательности $\mathbf{x}_{l_k}$ и некоторой точки $\mathbf{x}_0 \in F$ должно было бы быть $A\mathbf{x}_{l_k} \to A\mathbf{x}_0$.

Пусть теперь $\mathbf{x}_l'$, $\mathbf{x}_0' \in F'$ $(l = 1, 2, \ldots)$ и $\mathbf{x}_l' \to \mathbf{x}_0'$. Если бы точка $\mathbf{x}_l$ не стремилась к $\mathbf{x}_0$, то нашлись бы подпоследовательность $\mathbf{x}_{l_k}$ и точка $\mathbf{x}_* \neq \mathbf{x}_0$ (ограниченность и замкнутость F!) такие, что $\mathbf{x}_{l_k} \to \mathbf{x}_*$ $(k \to \infty)$, но тогда $\mathbf{x}_{l_k}' \to A\mathbf{x}_*$, и так как $\mathbf{x}_{l_k}' \to A\mathbf{x}_0$, то $A\mathbf{x}_0 = A\mathbf{x}_*$, и вследствие предположенной взаимной однозначности получили бы $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_*$, что противоречит сделанному предположению.

Теорема 2. *В предположениях теоремы 1 образ $(\sigma_{\mathbf{x}})'$ шара $\sigma_{\mathbf{x}} \subset F$ содержит в себе некоторый шар $\sigma_{\mathbf{x}'}$, т. е. если $g \subset F$ — открытое множество (или область), то открыто также и множество g' (соответственно область).*

Эта глубокая теорема (Брауэра) приводится без доказательства. Доказательство можно найти в книге: В. Гуревич и Г. Волмен, Теория размерности, ИЛ, 1948, стр. 64.

В случае, когда A — непрерывно дифференцируемая операция с не равным нулю на g якобианом, эта теорема доказана в § 7.18.

Теорема 3. *Пусть Ω — область, и непрерывная на Ω операция $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ приводит во взаимно однозначное соответствие множества Ω и Ω':*

$$\Omega \rightleftarrows \Omega' \quad (\mathbf{x} \in \Omega,\ \mathbf{x}' \in \Omega').$$

Тогда

1) *если $g \subset \Omega$ — ограниченная область и $\bar{g} \subset \Omega$, то g имеет непустую границу γ; при этом g' — область, а ее граница есть γ';*

2) *если $g \subset \Omega$ — произвольная область, то g' — также область*; в частности, Ω' — область. Взаимно однозначного соответствия между границами g и g', в частности, между границами Ω и Ω' может и не быть (см. замечания в конце §§ 12.18 и 12.19).

Так как по условию утверждения 1) непрерывная операция A взаимно однозначно отображает замкнутые ограниченные множества γ, $g + \gamma$ соответственно на множества γ', $g' + \gamma'$, то последние по теореме 1 тоже ограничены и замкнуты, а g' как образ области $g \subset g + \gamma$ по теореме 2 есть область. Очевидно, граница g' принадлежит γ'. С другой стороны, если $v' \subset \Omega'$ есть шар с центром в $\mathbf{x}_0' \in \gamma'$, то на основании сказанного его прообраз v есть область, содержащая $\mathbf{x} \in \gamma$. Но тогда v' содержит в себе точки, принадлежащие и не принадлежащие g', потому что v содержит точки, принадлежащие и не принадлежащие g. Мы доказали, что γ' есть граница g'.

Пусть теперь $g \subset \Omega$ — произвольная область (не требуется ее ограниченность и принадлежность $\bar{g}$ области Ω!), $\mathbf{x}_0' \in g'$ и $\sigma_{\mathbf{x}_0} \subset g$ — открытый шар (ограниченная область) такой, что $\bar{\sigma}_{\mathbf{x}_0} \subset g$. По доказанному $(\sigma_{\mathbf{x}_0})'$ есть область, содержащая, таким образом, в себе некоторый шар $\sigma_{\mathbf{x}_0}'$, т. е. g' — открытое множество. Связность g' вытекает из связности g и непрерывности $A\mathbf{x}$.

Замечание. Пусть выполняются условия теоремы § 12.16 о замене переменных в кратном интеграле. Тогда имеют место утверждения:

1) Если Δ — (замкнутый) куб, содержащийся в Ω, то его открытое ядро отображается операцией A на открытое ядро Δ', а граница Δ — на границу Δ' (см. теорему 3, утверждение 1)).

2) Множество $\Omega_0 = \{D(\mathbf{x}) = 0\}$ не содержит в себе ни одного куба, потому что если бы некоторый куб $\Delta \subset \Omega_0$, то его открытое ядро отображалось бы операцией A на непустое открытое множество, поэтому $|\Delta'| > 0$, но, с другой стороны, $|\Delta'| = \int_{\Delta} |D(\mathbf{x})|\, d\mathbf{x} = 0$, и получилось бы противоречие.

§ 12.21. Дополнение к теореме о замене переменных в кратном интеграле

Пусть выполняются условия теоремы § 12.16, тогда не существует пары точек $\mathbf{y}, z \in \Omega$ таких, что $D(\mathbf{y}) > 0$, $D(\mathbf{z}) < 0$.

Будем рассуждать от противного. Предположим, что такие точки существуют, тогда существует и куб $\Delta \subset \Omega$, где происходит перемена знака у D.

Чтобы доказать это, соединим $\mathbf{y}$ и $\mathbf{z}$ непрерывной кривой $C \subset \Omega$. Каждую точку C покроем принадлежащим Ω открытым кубом (с ребрами, параллельными осям!) с центром в ней. Среди этих кубов оставим конечное

число все же покрывающих C. Перенумеруем их $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_N$ так, чтобы их центры следовали друг за другом вдоль ориентированной от $\mathbf{y}$ до $\mathbf{z}$ кривой C. Один из них обязательно удовлетворяет высказанному утверждению. В самом деле, если на Δ_1 имеет место перемена знака, то утверждение доказано. Если это не так, то пусть для определенности $D(\mathbf{x}) \geqslant 0$ на Δ_1 и пусть k — наибольшее среди j, для которых $D(\mathbf{x}) \geqslant 0$ на Δ_j $(j = 1, \ldots, k)$; тогда на Δ_{k+1} может быть либо перемена знака $D(\mathbf{x})$, либо $D(\mathbf{x}) \leqslant 0$. Но последнее невозможно, потому что на непустом прямоугольнике $\Delta_k \Delta_{k+1}$ было бы $D(\mathbf{x}) \equiv 0$ (см. замечание 2, § 12.20). Утверждение доказано.

Если внутри прямоугольника Δ имеет место перемена знака, т. е. существуют внутренние в Δ точки $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$, для которых $D(\mathbf{y}) > 0$, $D(\mathbf{z}) < 0$, то эти точки всегда можно считать находящимися на одной из плоскостей $x_j = \alpha$ при некотором числе α.

В самом деле, определим состоящие из внутренних точек Δ кубы Δ', Δ'' с центрами соответственно в $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ так, что $D(\mathbf{x}) > 0$ на Δ' и $D(\mathbf{x}) < 0$ на Δ''. Пусть нижняя и верхняя в направлении x_1 грани Δ' будут $x_1 = \alpha_1$, $x_1 = \alpha_2$ $(\alpha_1 < \alpha_2)$. Тогда, допуская, что высказанное утверждение неверно, придется заключить, что $D(\mathbf{x}) \geqslant 0$ на прямоугольнике $\Delta_{\alpha_1\alpha_2}$, состоящем из всех точек $\mathbf{x} \in \Delta$, у которых $\alpha_1 \leqslant x_1 \leqslant \alpha_2$. Кроме того, $D(\mathbf{x}) \leqslant 0$ для всех точек $\mathbf{x} \in \Delta$, принадлежащих прямоугольнику Π с образующей, параллельной оси x_1, опирающемуся на Δ''. Но тогда $D(\mathbf{x}) = 0$ на непустом пересечении $\Pi\Delta_{\alpha_1\alpha_2}$, содержащем в себе куб, что невозможно (см. замечание 2, § 12.20). На рис. 12.20 изображен плоский случай, где $\mathbf{x}'$ соответствует точке $\mathbf{y}$, а $\mathbf{x}''$ — точке $\mathbf{z}$.

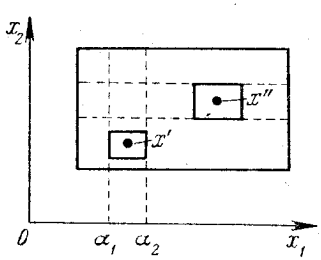

Рис. 12.20.

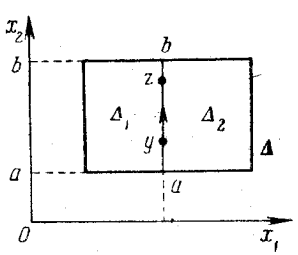

Рис. 12.21.

Перемены знака, о которой идет речь, вообще не может быть.

Рассмотрим двумерный открытый прямоугольник Δ (рис. 12.21).

Ориентированный от a до b отрезок $[a, b]$ делит прямоугольник Δ на два открытых прямоугольника $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$. При помощи операции A отрезок $[a, b]$ переходит в ориентированный кусок непрерывной кривой *) a', b', разрезающий Δ' на две области Λ и Ω (рис. 12.22).

Таким образом, либо 1) $\Delta_2' = \Lambda$, либо 2) $\Lambda_2' = \Omega$. Но если допустить, что верно 1), то это противоречит неравенству $D(\mathbf{z}) < 0$, в силу которого точки Δ_2, близкие к $\mathbf{z}$, должны при помощи операции A перейти в точки, находящиеся слева от ориентированной кривой $a'b'$ по ее ходу, откуда бы следовало 2).

---

*) Определяющие кусок кривой $a'b'$ функции $x_1' = \varphi(x_1, x_2)$, $x_2' = \psi(x_1, x_2)$ от x_2 непрерывны вместе со своими первыми производными. Последние могут одновременно в некоторых точках x_2 быть равными нулю, но это не влияет на ход дальнейших рассуждений.

Наоборот, 2) противоречит неравенству $D(\mathbf{y}) > 0$, в силу которого точки Λ_2, близкие к z, переходят при преобразовании A в точки, находящиеся справа по ходу кривой $a'b'$.

Этим наше утверждение в двумерном случае доказано.

В трехмерном случае Δ есть трехмерный прямоугольник (прямоугольный параллелепипед). Роль направленного отрезка $[a, b]$ играет теперь прямоугольная площадка σ, вырезаемая из Δ плоскостью $x_1 = \alpha$. σ разрезает Δ на две части с открытыми ядрами Λ_1 и Λ_2. Ориентируем σ. Этим каждый гладкий замкнутый контур $\Gamma \subset \sigma$ получит определенное направление обхода, и в этом смысле σ' будет тоже соответственно ориентирована. Однако в точках σ, где $D(\mathbf{x}) = 0$, нормаль может и не существовать, и принятое определение ориентированности полностью неприменимо к σ'. Пусть $D(\mathbf{y}) > 0$, $D(\mathbf{z}) < 0$, где $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ — внутренние точки Δ, лежащие на σ. На нормалях в точках $\mathbf{y}', \mathbf{z}' \in \sigma'$ к σ' в Λ_1' выберем соответственно точки $\mathbf{y}''$, $\mathbf{z}''$ так, чтобы векторы $\overrightarrow{\mathbf{y}'\mathbf{y}''}$, $\overrightarrow{\mathbf{z}'\mathbf{z}''}$ (без начальных точек) полностью принадлежали Λ'. Эти последние вместе с малыми, содержащими $\mathbf{y}'$, $\mathbf{z}'$, ориентированными площадками $\sigma'_{y'}$, $\sigma'_{z'} \subset \sigma'$ образуют штопоры. Штопор, выходящий из $\mathbf{y}'$, преобразованием A^{-1} переводится в одноименный ($D(\mathbf{y}) > 0$), а выходящий из $\mathbf{z}'$ — в разноименный ($D(\mathbf{z}) < 0$). Выходит, что Λ_1 имеет вблизи $\mathbf{y}$ и $\mathbf{z}$ точки, лежащие по разные стороны от σ, что невозможно.

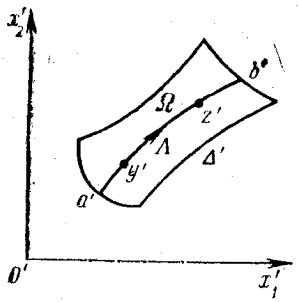

Рис. 12.22.

§ 12.22. Несобственный интеграл с особенностями вдоль границы области. Замена переменных

Лемма 1. *Пусть задана последовательность открытых множеств Ω_1, Ω_2, Ω_3, ... Тогда $\Omega = \sum_1^\infty \Omega_k$ есть открытое множество.*

Действительно, если точка $\mathbf{x}^0 \in \Omega$, то найдется k, при котором $\mathbf{x}^0 \in \Omega_k$. Но Ω_k — открытое множество, и потому найдется шар V с центром в $\mathbf{x}^0$, содержащийся в Ω_k, следовательно, и в Ω.

Лемма 2. *При условиях леммы 1, если еще $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \Omega_3 \subset \ldots$, то, каково бы ни было замкнутое ограниченное множество $F \subset \Omega$, найдется такое k, при котором $F \subset \Omega_k$.*

Действительно, если бы это было не так, то для любого $k = 1, 2, \ldots$ нашлась бы точка $\mathbf{x}_k$, принадлежащая F, но не принадлежащая Ω_k. Так как F — ограниченное замкнутое множество, то из принадлежащей ему последовательности $\{\mathbf{x}_k\}$ можно выделить подпоследовательность $\{x_{k_j}\}$, сходящуюся в некоторой точке $\mathbf{x}_0 \in F\left(x_{k_j} \to x_0\right)$. Но $\mathbf{x}_0 \in F \subset \Omega$, следовательно, $\mathbf{x}_0 \in \Omega_{k_0}$ при некотором k_0. Так как Ω_{k_0} открыто, то найдется шар V с центром в $\mathbf{x}^0$, принадлежащий Ω_{k_0}. Но шару V принадлежат точки x_{k_j} при достаточно больших j. Возьмем одну из них с $k_j > k_0$ для нее $x_{k_j} \in V \subset \Omega_{k_0} \subset \Omega_{k_j}$, и мы пришли к противоречию.

Лемма 3. *При условиях леммы 2, если еще Ω и Ω_k измеримы, то*

$$\lim_{k\to\infty} |\Omega_k| = |\Omega|. \tag{1}$$

Доказательство. Очевидно, $|\Omega_k| \leqslant |\Omega_{k'}| \leqslant |\Omega|$ $(k \leqslant k')$. С другой стороны, для любого $\varepsilon > 0$ можно указать замкнутое измеримое множество $F \subset \Omega$ такое, что $|F| > |\Omega| - \varepsilon$. В качестве F можно, например, взять фигуру, состоящую из кубиков $\Delta \subset \Omega$ достаточно густой прямоугольной сетки. Согласно лемме 2 найдется k_0, для которого $F \subset \Omega_{k_0}$. Для него $|\Omega| - \varepsilon < |F| < |\Omega_{k_0}| < |\Omega_k|$ $(k \geqslant k_0)$, и равенство (1) доказано.

Определение. Если на области Ω (не обязательно измеримой) задана функция $f(\mathbf{x})$, непрерывная, но неограниченная, то *несобственным интегралом* от $f(\mathbf{x})$ *по* Ω назовем предел

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\Omega_k} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f\, d\mathbf{x}, \tag{2}$$

если он существует, где $\{\Omega_k\}$ — произвольная последовательность измеримых областей, обладающих следующим свойством:

$$\overline{\Omega}_k \subset \Omega, \quad \Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \ldots, \Omega = \sum_{k=1}^{\infty} \Omega_k. \tag{3}$$

Область Ω_k имеют гладкие (кусочно гладкие границы).

Предел считается существующим, если он есть одно и то же число для любой указанной последовательности $\{\Omega_k\}$. Конечно, для неотрицательной на Ω функции $f(\mathbf{x})$, если предел (2) существует для одной указанной последовательности $\{\Omega_k\}$, то он существует и для другой $\{\Omega'_k\}$ и равен ему, потому что, каково бы ни было k, найдется по лемме 2 такое $l = l(k)$, что $\overline{\Omega}_k \subset \Omega'_l$, и потому

$$\int_{\Omega_k} f\, d\mathbf{x} = \int_{\overline{\Omega}_k} f\, d\mathbf{x} \leqslant \int_{\Omega'_l} f\, d\mathbf{x},$$

откуда следует, что предел (2) по последовательности $\{\Omega_k\}$ не превышает такой предел по последовательности $\{\Omega'_k\}$, но тогда и наоборот, потому что рассуждения можно обратить.

Теорема. *Пусть преобразование*

$$\begin{aligned} x &= \varphi(u, v), \\ y &= \psi(u, v) \end{aligned} \qquad ((u, v) \in \Omega), \tag{4}$$

непрерывно дифференцируемое на замыкании $\overline{\Omega}$ *измеримой области с якобианом*

$$D(u, v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial u} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial u} & \dfrac{\partial\psi}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad ((u, v) \in \Omega),$$

отображает взаимно однозначно Ω *на* Ω':

$$\Omega \rightleftarrows \Omega',$$

и на Ω' *задана непрерывная, но неограниченная функция* $f(x, y)$ *такая, однако, что функция*

$$F(u, v)\,|D(u, v)| = f[\varphi(u, v), \psi(u, v)]\,|D(u, v)|$$

равномерно непрерывна на Ω, *т. е. может быть продолжена по непрерывности на* $\overline{\Omega}$.

Тогда имеет место равенство

$$\iint\limits_{\Omega'} f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_{\Omega} F(u, v)\,|D(u, v)|\,du\,dv, \tag{5}$$

где интеграл слева — несобственный в смысле введенного выше определения.

Доказательство. Зададим произвольную последовательность областей $\{\Omega_k'\}$, удовлетворяющих условиям (3) (где надо всюду над Ω поставить штрихи). Ей соответствует последовательность областей $\{\Omega_k\}$, которые в силу свойств непрерывных в обе стороны отображений тоже удовлетворяют условиям (3).

Имеем

$$\iint\limits_{\Omega_k'} f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_{\Omega_k} F(u, v)\,|D(u, v)|\,du\,dv \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{6}$$

в силу основной теоремы о замене переменных (ведь f непрерывна на $\overline{\Omega}_k'$), но (см. лемму 3)

$$\left|\iint\limits_{\Omega} F(u, v)\,|D(u, v)|\,du\,dv - \iint\limits_{\Omega_k} F(u, v)\,|D(u, v)|\,du\,dv\right| =$$

$$= \left|\iint\limits_{\Omega-\Omega_k} F(u, v)\,|D(u, v)|\,du\,dv\right| \leqslant M\,|\Omega - \Omega_k| \to 0 \qquad (k \to \infty)$$

$$M \geqslant |F(u, v)\,D(u, v)| \qquad ((u, v) \in \overline{\Omega}),$$

и поэтому правая часть (6) сходится к правой части (5). Но тогда и левая часть (6) сходится к тому же числу, независимо от выбора последовательности $\{\Omega_k'\}$. Теорема доказана.

Заметим, что в силу свойств отображения (4) (с якобианом, не равным нулю на Ω!) гладкая (кусочно гладкая) граница Ω_k' переходит в гладкую (кусочно гладкую) границу Ω_k, что обеспечивает измеримость Ω_k.

Примеры см. в § 12.23, в частности, пример 1.

§ 12.23. Площадь поверхности

Зададим в трехмерном пространстве R, где определена прямоугольная система координат (x, y, z), поверхность S, описываемую уравнением

$$z = f(x, y) \qquad ((x, y) \in \overline{G}). \tag{1}$$

Мы предполагаем, что G есть измеримая открытая область, а функция f имеет непрерывные частные производные

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial f}{\partial y}$$

на $\overline{G}$ (см. § 7.11).

Согласно определению, введенному в § 7.19, наша поверхность есть гладкий кусок, проектируемый на плоскость $z = 0$.

Произведем разбиение G на конечное число измеримых (в двумерном смысле) частей $G = G_1 + G_2 + \ldots + G_N$, пересекающихся попарно разве что по своим границам. Пусть (x_j, y_j) — произвольная точка G_j $(j = 1, \ldots, N)$. Ей соответствует точка $P_j \in S$ с координатами (x_j, y_j, f_j), где $f_j = f(x_j, y_j)$. В точке P_j проведем плоскость L_j, касательную к S.

Обозначим через e_j кусок L_j $(e_j \subset L_j)$, проекцией которого на плоскость $z = 0$ служит множество G_j. Площадь e_j обозначим через $|e_j|$.

По определению *площадью поверхности* S называется предел

$$|S| = \lim_{\max(G_j)\to 0} \sum_{j=1}^{N} |e_j|.$$

Косинус острого угла нормали n_j к S в точке P_j с осью z (см. § 7.5, (13)) равен $\cos(n_j, z) = 1/\sqrt{1 + p_j^2 + q_j^2}$, где квадратный корень взят со знаком «+», а p_j, q_j обозначают результаты подстановки в p, q значений x_j, y_j. Мера G_j равна $|G_j| = |e_j| \cos(n_j, z)$, $|e_j| = |G_j|\sqrt{1 + p_j^2 + q_j^2}$ $(j = 1, \ldots, N)$ и

$$|S| = \lim \sum_{j=1}^{N} |e_j| = \lim_{\max d(G_j)\to 0} \sum_{j=1}^{N} \sqrt{1 + p_j^2 + q_j^2}\,|G_j| =$$

$$= \iint_G \sqrt{1 + p^2 + q^2}\,dx\,dy. \qquad (2)$$

Мы получили формулу площади поверхности, заданной в явном виде (1).

Покажем, как преобразуется интеграл (2), если сделать в нем подстановку

$$x = \varphi(u, v),\ y = \psi(u, v) \quad ((u, v) \in \overline{\Omega}), \qquad (3)$$

приводящую во взаимно однозначное соответствие измеримые области Ω и G в предположении, что φ и ψ непрерывно дифференцируемы на $\overline{\Omega}$ и якобиан

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} \neq 0 \quad \text{на} \quad \Omega. \qquad (4)$$

Положим $z = f(\varphi, \psi) = \chi(u, v)$. На основании теоремы о замене переменных в кратном интеграле получим равенство (см. § 7.26, (4))

$$\iint_G \sqrt{1 + p^2 + q^2}\,dx\,dy =$$

$$= \iint_\Omega \sqrt{1 + \left(\frac{D(y, z)}{D(u, v)}\Big/\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{D(z, x)}{D(u, v)}\Big/\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right)^2}\left|\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right| du\,dv,$$

из которого следует, что площадь поверхности S выражается формулой

$$|S| = \iint\limits_{\Omega} \sqrt{\left(\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{D(y, z)}{D(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{D(z, x)}{D(u, v)}\right)^2}\, du\, dv =$$

$$= \iint\limits_{\Omega} |\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v|\, du\, dv. \qquad (5)$$

Отметим равенство

$$|r'_u \times r'_v|^2 = EF - G^2,$$

где

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$

$$F = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$$

$$G = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

Формула (5) может служить основанием для определения понятия площади поверхности, заданной параметрически, не обязательно проектирующейся в целом на одну из плоскостей координат.

Пусть задана гладкая поверхность S:

$$\mathbf{r} = \varphi(u, v)\mathbf{i} + \psi(u, v)\mathbf{j} + \chi(u, v)\mathbf{k}$$

$$(|\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v| > 0,\ (u, v) \in \Omega \rightleftarrows S), \qquad (6)$$

где Ω — измеримая область плоскости параметров (u, v), а φ, ψ, χ имеют непрерывные частные производные на $\bar{\Omega}$. Знак $\Omega \rightleftarrows S$ указывает на тот факт, что равенство (6) устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками Ω и S.

Так как Ω — измеримое множество, то оно ограничено и потому имеет не пустую границу γ. Она отображается при помощи равенства (6) на край $\Gamma = \bar{S} - S$ нашей поверхности. Мы не требуем, чтобы отображение γ на Γ было взаимно однозначным. Имеется много важных примеров, когда этого нет (см. примеры ниже).

По определению назовем *площадью* S (или $\bar{S}$) величину

$$|S| = \iint\limits_{\Omega} |\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v|\, du\, dv. \qquad (7)$$

Перечислим ряд свойств интеграла (7), показывающих естественность введенного определения.

1) Величина $|S|$ инвариантна относительно допустимых преобразований параметров, т. е., если

$$u = \lambda(u', v'),\ v = \mu(u', v') \quad ((u', v') \in \Omega' \rightleftarrows \Omega),$$

где λ, μ непрерывно дифференцируемы на $\overline{\Omega}'$ и

$$\frac{D(\lambda, \mu)}{D(u', v')} \neq 0 \qquad ((u', v') \in \Omega'),$$

то

$$\iint\limits_{\Omega} |\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v|\, du\, dv = \iint\limits_{\Omega} \left\{\left(\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{D(y, z)}{D(u, v)}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{D(z, x)}{D(u, v)}\right)^2\right\}^{1/2} du\, dv = \iint\limits_{\Omega} \left\{\left(\frac{D(x, y)}{D(u', v')}\right)^2 + \left(\frac{D(y, z)}{D(u', v')}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{D(z, x)}{D(u', v')}\right)^2\right\}^{1/2} \left|\frac{D(u', v')}{D(u, v)}\right| \left|\frac{D(u, v)}{D(u', v')}\right| du'dv' = \iint\limits_{\Omega} |\dot{\mathbf{r}}_{u'} \times \dot{\mathbf{r}}_{v'}|\, du'\, dv'.$$

2) Пусть поверхность S проектируется на плоскость $z = 0$. Точнее, пусть равенства

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v) \quad (\Omega \rightleftarrows G \ni (x, y)) \tag{8}$$

устанавливают взаимно однозначное соответствие между измеримыми областями Ω и G с якобианом

$$\left|\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right| \neq 0. \tag{9}$$

Тогда для функции $z = f(x, y) = \chi(u(x, y), v(x, y))$ $((x, y) \in G)$, где $u(x, y)$, $v(x, y)$ — решения уравнений (8), в случае, если она имеет не только непрерывные (как это следует из теоремы о неявных функциях), но и равномерно непрерывные на G производные $p = \frac{\partial f}{\partial x}$, $q = \frac{\partial f}{\partial y}$, имеет место равенство

$$|S| = \iint\limits_{\Omega} |\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v|\, du\, dv = \iint\limits_{G} \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy. \tag{10}$$

Оно уже было доказано выше (см. (5)).

Таким образом, новое определение площади поверхности совпадает с исходным определением, если имеет место ситуация, возможная для последнего.

Заметим, что если бы свойство равномерной непрерывности p и q на G не соблюдалось, а p и q были только непрерывными и ограниченными на G, то все равно выполнялось бы равенство (10), потому что все условия для замены переменных в интеграле и в этом случае соблюдаются.

Больше того, если p и q непрерывны, но неограничены на G (в то время как функции φ, ψ имеют непрерывные частные про-

изводные на $\overline{\Omega}$), то все равно равенство (10) остается верным, если понимать интеграл в его правой части в несобственном смысле (см. § 12.22).

3) Если ω есть произвольное открытое измеримое множество, содержащееся в $\Omega(\omega \subset \Omega)$, то соответствующая часть $S(\omega)$ нашей гладкой поверхности, определенная равенством

$$\mathbf{r}(u, v) = \varphi\mathbf{i} + \psi\mathbf{j} + \chi\mathbf{k} \quad ((u, v) \in \omega \rightleftarrows S(\omega)), \tag{11}$$

есть в свою очередь гладкая поверхность, площадь которой равна

$$|S(\omega)| = \iint\limits_{\omega} |\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v| \, du \, dv. \tag{12}$$

Но интеграл справа в (12) имеет также смысл для произвольного измеримого подмножества $\omega \subset \overline{\Omega}$. Естественно считать, что его величина есть площадь части $S(\omega)$ гладкой поверхности S, описываемой вектор-функцией (11).

Очевидно, что

$$|S(\overline{\omega})| = |S(\omega)|.$$

и, в частности,

$$|S| = |S(\overline{\Omega})| = |S(\Omega)| = |S|. \tag{13}$$

Итак, на поверхности (множестве) $\bar{S}$ можно различать некоторые ее части $S(\omega)$, которые соответствуют при помощи равенства (11) всевозможным измеримым подмножеством $\omega \subset \Omega$. Каждой такой части можно приписать неотрицательное число $|S(\omega)|$, площадь $S(\omega)$, определяемую интегралом (12). Эта зависимость (числа от подмножества) $S(\omega)$ к тому же обладает аддитивным свойством:

$$|S(\omega_1 + \omega_2)| = |S(\omega_1)| + |S(\omega_2)|,$$

если ω_1 и ω_2 пересекаются разве что по своим границам.

Величина $|S(\omega)|$ является конкретным примером важного в математике понятия *аддитивной функции множества*. С одним таким примером — мерой (измеримого) множества — мы оперируем давно.

Выражение $dS = |\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v| du \, dv$ называется *дифференциальным элементом поверхности* S. Площадь части S, соответствующей изменению u от u до $u + du$ и v от v до $v + dv$, равна

$$\Delta S = \int\limits_{u}^{u+du} \int\limits_{v}^{v+dv} |\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v| \, du \, dv = |\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v|_{\substack{u=\xi \\ v=\eta}} du \, dv =$$

$$= (|\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v| + \varepsilon) \, du \, dv = dS + o(du \, dv) \quad (du, dv \to 0).$$

Во втором равенстве этой цепи применена теорема о среднем, в третьем в выражении $|\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v|$ заменена точка (ξ, η) на (u, v) за счет прибавления слагаемого ε, которое в силу непрерывности функции $|\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v|$ стремится к нулю при $du, dv \to 0$.

Таким образом, dS можно определить как (единственную!) величину вида $A \, du \, dv$, где A не зависит от du и dv, отличающуюся от ΔS на $o(du \, dv)$ $(du, dv \to 0)$.

Пример 1. Площадь шаровой поверхности. Уравнения

$$x = \cos\theta\cos\varphi, \quad y = \cos\theta\sin\varphi, \quad z = \sin\theta \quad (|\dot{\mathbf{r}}_\theta \times \dot{\mathbf{r}}_\varphi| = \cos\theta),$$
$$\Omega = \{0 < \varphi < 2\pi, \ -\pi/2 < \theta < \pi/2\} \tag{14}$$

определяют гладкую поверхность S — часть шара радиуса 1 с центром в нулевой точке, из которого выброшен меридиан $\varphi = 0$, $|\theta| \leqslant \pi/2$. Условия (6) здесь выполняются. В частности, имеет место взаимно однозначное соответствие $\Omega \rightleftarrows S$. Однако уравнения (14) не устанавливают взаимно однозначного соответствия между $\gamma = \bar{\Omega} - \Omega$ и $\Gamma = \bar{S} - S$. Край Γ поверхности S есть указанный выше меридиан. Каждому из его концов в силу равенств (14) соответствует бесконечное множество точек γ, заполняющих противоположные стороны Ω, а каждой прочей точке Γ соответствует пара точек γ, лежащих на других противоположных сторонах γ.

Поверхность единичного шара есть замыкание $\bar{S}$ поверхности S, описанной параметрически уравнениями (14). На основании формулы (7)

$$|\bar{S}| = |S| = \iint\limits_{\Omega} |\cos\theta|\, d\theta\, d\varphi = 2\pi \cdot 2 \int\limits_0^{\pi/2} \cos\theta\, d\theta = 4\pi.$$

Заметим, что площадь поверхности нашего единичного шара $\bar{S}$ можно рассматривать как сумму площадей восьми конгруэнтных кусков, вырезаемых из S координатными плоскостями. Один из них σ, находящийся в положительном октанте, описывается непрерывной функцией $z = +\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ $(x, y \geqslant 0, x^2 + y^2 \leqslant 1)$ с неограниченными частными производными

$$p = -x/\sqrt{1 - x^2 - y^2}, \qquad q = -y/\sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

Мы уже отмечали, что в этом случае можно вычислять площадь σ по формуле (2) площади поверхности в декартовых координатах, понимая, однако, интеграл в несобственном смысле (см. конец § 13.13, замечание 1):

$$|\sigma| = \lim_{\rho\to 1} \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\rho^2<1} \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy = \lim_{\rho\to 1} \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\rho^2<1} \frac{dx\, dy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}},$$
$$x > 0, \quad y > 0.$$

Формулу для элемента площади сферической поверхности радиуса R можно усмотреть из геометрических соображений. Сеть близких друг к другу меридианов и параллелей разрезает нашу шаровую поверхность S на элементарные частицы. Площадь ΔS такой частицы, близкой к точке $A = (R, \theta, \varphi)$ $(\theta > 0)$, может быть, очевидно, оценена следующим образом:

$$R\cos(\theta + d\theta)\, d\varphi R\, d\theta < \Delta S < R\cos\theta\, d\varphi R\, d\theta.$$

Отсюда $(\theta < \theta' < \theta + d\theta)$

$$\Delta S = R^2\cos\theta'\, d\varphi\, d\theta = R^2\cos\theta\, d\varphi\, d\theta + d\varphi\, o(d\theta) \qquad (d\theta \to 0).$$

Пример 2. Площадь поверхности тора

$$x = (b + a\cos\theta)\cos\varphi, \quad y = a\sin\theta \quad (0 < a < b),$$
$$z = (b + a\cos\theta)\sin\varphi \qquad (|\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v| = a(b + a\cos\theta) > 0). \tag{15}$$

Чтобы воспользоваться приведенными выше рассуждениями, придется эту поверхность рассматривать как замыкание $\bar{T}$ гладкой поверхности T, описываемой уравнениями (15), где (θ, φ) пробегает область $\Omega = \{0 < \theta, \varphi < 2\pi\}$.

В этом случае соотношения (6) и сопровождающие их условия непрерывной дифференцируемости будут выполняться, если считать $T = S$, поэтому

$$|\overline{T}| = |T| = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} a\,(b + a\cos\theta)\,d\theta = 2\pi a\,(2\pi b + 0) = 4\pi^2 ab.$$

Пример 3. Рассмотрим круговой цилиндр радиуса R и высоты H. Его боковую поверхность обозначим через σ, а ее площадь через $|\sigma|$. Разрежем σ равностоящими плоскостями, перпендикулярными оси цилиндра так, чтобы соседние плоскости находились на расстоянии, равном H/N^3. Эти плоскости пересекают σ по окружностям $C_0, C_1, \ldots, C_{N^3}$, которые мы перенумеровали по порядку снизу вверх по направлению оси. Окружность C_0 разделим равноотстоящими точками на $2N$ равных частей. Эти точки мы тоже перенумеруем в порядке их следования по C_0, кроме того, через каждую из них проведем образующую нашей цилиндрической поверхности σ, которая пересечет окружности C_k в некоторых точках. Полученные точки на C_k мы тоже занумеруем, руководствуясь правилом, что точки всех C_k, лежащие на одной и той же образующей, имеют один и тот же номер. Теперь на окружностях C_k с четными k оставим только точки с четными номерами, а на окружностях C_k с нечетными k — только точки с нечетными номерами. В результате на поверхности σ нанесено некоторое конечное число точек. Каждые три соседние такие точки являются вершинами некоторого треугольника Δ, а вся совокупность последних образует некоторую многогранную поверхность σ_N, вписанную в σ. Чтобы не было недоразумений, отметим, что две из любых трех точек суть соседние точки, лежащие на C_k, а третья лежит на C_{k+1} или C_{k-1} и образующая, к которой она принадлежит, находится между (в меньшем центральном углу) образующими, к которым принадлежат первые две точки.

Число треугольников Δ, очевидно, равно $2N \cdot N^3 = 2N^4$, площадь же каждого Δ равна

$$|\Delta| = \frac{1}{2}\cdot 2\sin\frac{\pi}{N}R\sqrt{R^2\left(1-\cos\frac{\pi}{N}\right)^2 + \left(\frac{H}{N^3}\right)^2} \sim \frac{\pi}{N}RR\,\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{N}\right)^2 > cN^{-3}$$

$$(N \to \infty, \quad c > 0).$$

Но тогда

$$|\sigma_N| > c_1 N^4 N^{-3} = c_1 N,$$

несмотря на то что при $N \to \infty$ диаметр Δ стремится к нулю.

Мы видим, что площадь поверхности нельзя определять как предел площади вписанной в нее многогранной поверхности со стремящимся к нулю максимальным диаметром ее грани. Такое определение неэффективно даже для очень простых поверхностей.

Глава 13

ТЕОРИЯ ПОЛЯ. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ПАРАМЕТРУ. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 13.1. Криволинейный интеграл первого рода

Пусть в трехмерном пространстве E, где определена прямоугольная система координат (x, y, z), задана непрерывная кусочно гладкая кривая Γ

$$x=\varphi(s), \quad y=\psi(s), \quad z=\chi(s) \quad (0 \leqslant s \leqslant \Lambda), \tag{1}$$

где параметром служит длина дуги s. Таким образом, функции φ, ψ, χ непрерывны на $[0, \Lambda]$ и отрезок $[0, \Lambda]$ можно разбить на конечное число частей $0=s_0<s_1<\ldots<s_N=\Lambda$ так, что на каждом (замкнутом) частичном отрезке $[s_j, s_{j+1}]$ функции φ, ψ, χ имеют непрерывные производные, удовлетворяющие условию

$$\varphi'(s)^2+\psi'(s)^2+\chi'(s)^2=1, \tag{2}$$

считая, что в концевых точках s_j, s_{j+1} они понимаются соответственно как правая и левая производные. Кривая Γ соответственно делится на конечное число гладких кусков $\Gamma=\sum_1^N \Gamma_j$. Пусть еще на Γ или на некотором множестве, содержащем Γ, задана функция $F(x, y, z)$, непрерывная на каждом гладком куске Γ_j, т. е. функция $F(\varphi(s), \psi(s), \chi(s))$, если имеет разрывы, то только в точках s_j и притом первого рода.

По определению, выражение

$$\int_\Gamma F(x, y, z)\, ds=\int_0^\Lambda F(\varphi(s), \psi(s), \chi(s))\, ds \tag{3}$$

называется *криволинейным интегралом первого рода* от функции F вдоль кривой Γ (или по Γ).

Левая часть (3) есть обозначение криволинейного интеграла первого рода, а правая показывает, как его надо вычислять — это обычный риманов интеграл. Например, если кривая Γ обладает массой с плотностью распределения, равной $F(x, y, z)$ в точках $(x, y, z) \in \Gamma$, то общая масса кривой вычисляется посредством интеграла (3).

Пусть гладкая кривая Γ задана через произвольный параметр $t \in [a, b]$:

$$x=\varphi_1(t), \quad y=\psi_1(t), \quad z=\chi_1(t) \quad [a \leqslant t \leqslant b],$$

где, таким образом, φ_1, ψ_1, χ_1 — непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие условию $\varphi_1'^2 + \psi_1'^2 + \chi_1'^2 > 0$ на $[a, b]$. Параметр t выражается через длину дуги s кривой Γ при помощи некоторой функции $t = \lambda(s)$, $0 \leqslant s \leqslant \Lambda$, имеющей не равную нулю непрерывную производную. Следовательно,

$$\int_\Gamma F(x, y, z)\, ds = \int_0^\Lambda F(\varphi(s), \psi(s), \chi(s))\, ds =$$

$$= \int_a^b F(\varphi_1(t), \psi_1(t), \chi_1(t)) \sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \psi_1'(t)^2 + \chi_1'(t)^2}\, dt,$$

$$\varphi_1(t) = \varphi[\lambda(t)], \quad \psi_1(t) = \psi[\lambda(t)], \quad \chi_1(t) = \chi[\lambda(t)], \tag{4}$$

$$ds = \sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \psi_1'(t)^2 + \chi_1'(t)^2}.$$

Кривую Γ можно также задать уравнениями $x = \varphi(\Lambda - s)$, $y = \psi(\Lambda - s)$, $z = \chi(\Lambda - s)$ $(0 \leqslant s \leqslant \Lambda)$, но величина интеграла (3) от этого не меняется:

$$\int_0^\Lambda F(\varphi(\Lambda - s), \psi(\Lambda - s), \chi(\Lambda - s))\, ds = -\int_\Lambda^0 F(\varphi(s'), \psi(s'), \chi(s'))\, ds' =$$

$$= \int_0^\Lambda F(\varphi(s), \psi(s), \chi(s))\, ds.$$

Таким образом, криволинейный интеграл первого рода по Γ не зависит от ориентации Γ.

§ 13.2. Криволинейный интеграл второго рода

Пусть в пространстве E, где определена прямоугольная система координат (x, y, z), задана ориентированная непрерывная кусочно гладкая кривая Γ с начальной точкой A_0 и конечной A_1. Если кривая замкнута, то A_1 совпадает с A_0. Пусть

$$x = \varphi(s), \quad y = \psi(s), \quad z = \chi(s) \quad (0 \leqslant s \leqslant \Lambda) \tag{1}$$

— уравнения Γ, где s — длина дуги Γ (см. § 10.3). При этом значению $s = 0$ соответствует точка A_0, а значению $s = \Lambda$ — точка A_1 и возрастанию s соответствует ориентация Γ.

В каждой внутренней (не угловой) точке A любого гладкого куска Γ тогда однозначно определен единичный вектор τ, касательный к Γ (в направлении возрастания s).

Пусть, кроме того, на Γ или на некотором открытом множестве Ω, содержащем Γ, задано поле непрерывного вектора (или задан вектор)

$$\mathbf{a} = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k},$$

где, таким образом, P, Q, R — непрерывные функции на Γ (или Ω),

По определению *криволинейным интегралом от вектора* **a** *вдоль ориентированной кривой* Г называется величина

$$\int_{\Gamma} (\mathbf{a}\, d\mathbf{s}) = \int_{\Gamma} (P\, dx + Q\, dy + R\, dz) = \int_{\Gamma} (\mathbf{a}\boldsymbol{\tau})\, ds = \int_{0}^{\Lambda} (\mathbf{a}\boldsymbol{\tau})\, ds. \qquad (2)$$

Первый и второй члены в (2) — это обозначения криволинейного интеграла от **a** по Г, а третий и четвертый являются его определением и указывают, как его вычислить. Функция $(\mathbf{a}\boldsymbol{\tau})$, вообще говоря, кусочно непрерывна с разрывами первого рода в угловых точках Г. Третий член есть интеграл первого рода от нее по Г. Мы считаем $d\mathbf{s} = \boldsymbol{\tau}\, ds$, где, таким образом, $d\mathbf{s}$ есть вектор, имеющий длину ds и направление $\boldsymbol{\tau}$. Это объясняет обозначение криволинейного интеграла, выражаемое первым членом в (2).

Если Γ_- — та же кривая, но с противоположной ориентацией, то единичный вектор ее касательной равен $-\boldsymbol{\tau}$, поэтому $\int_{\Gamma_-} (\mathbf{a}\, d\mathbf{s}) = -\int_{\Gamma} (\mathbf{a}\, d\mathbf{s})$. Так как $\cos(\tau, x) = \varphi'(s)$, $\cos(\tau, y) = \psi'(s)$, $\cos(\tau, z) = \chi'(s)$, то криволинейный интеграл (2) может быть записан в виде

$$\int_{\Gamma} (\mathbf{a}\, d\mathbf{s}) = \int_{\Gamma} \{P \cos(\boldsymbol{\tau}, x) + Q \cos(\boldsymbol{\tau}, y) + R \cos(\boldsymbol{\tau}, z)\}\, ds =$$

$$= \int_{0}^{\Lambda} [P(\varphi(s), \psi(s), \chi(s))\, \varphi'(s) + Q(\varphi(s), \psi(s), \chi(s))\, \psi'(s) +$$

$$+ R(\varphi(s), \psi(s), \chi(s))\, \chi'(s)]\, ds, \qquad (3)$$

где правая часть представляет собой обычный определенный интеграл.

Ориентированную гладкую кривую Г можно задать при помощи некоторого параметра t посредством уравнений

$$x = \varphi_1(t), \quad y = \psi_1(t), \quad z = \chi_1(t) \quad (t_0 \leqslant t \leqslant T_0), \qquad (4)$$

где $t = \lambda(s)$ — функция, имеющая на $[0, \Lambda]$ непрерывную производную $\lambda'(s) > 0$. Тогда интеграл (2) будет вычисляться по формуле

$$\int_{\Gamma} (\mathbf{a}\, d\mathbf{s}) = \int_{t_0}^{T_0} [P(\varphi_1(t), \psi_1(t), \chi_1(t))\, \varphi_1'(t) +$$

$$+ Q(\varphi_1(t), \psi_1(t), \chi_1(t))\, \psi_1'(t) + R(\varphi_1(t), \psi_1(t), \chi_1(t))\, \chi_1'(t)]\, dt. \qquad (5)$$

Мы произвели замену переменной s на t в определенном интеграле, стоящем справа в (3). В силу этой замены, например,

$$\varphi'(s)\,ds = \left(\varphi_1'(t)\frac{dt}{ds}\right)\left(\frac{ds}{dt}\,dt\right) = \varphi_1'(t)\,dt.$$

Второе выражение в (2) считается удобным обозначением криволинейного интеграла от **a** по ориентированной кривой Г. Его еще называют *криволинейным интегралом второго рода*. Оно не только обозначает этот интеграл, но и указывает, что надо сделать, чтобы его вычислить. Нужно кривую Г записать в виде уравнений (4) с параметром t, возрастающим соответственно ориентации Г, положить в указанном выражении $x = \varphi_1(t), \ldots, dx = \varphi_1'(t)\,dt, \ldots$ и вычислить определенный интеграл от полученной функции от t по отрезку $[t_0, T_0]$.

Ориентированную кривую Г можно рассматривать как сумму двух ориентированных кривых Γ_1, Γ_2, соответствующих изменению параметра s на отрезках $[0, s_*]$, $[s_*, \Lambda]$ $(0 < s_* < \Lambda)$. Тогда, очевидно

$$\int_{\Gamma}(P\,dx + Q\,dy + R\,dz) =$$
$$= \int_{\Gamma_1}(P\,dx + Q\,dy + R\,dz) + \int_{\Gamma_1}(P\,dx + Q\,dy + R\,dz).$$

Если ориентированный контур Г замкнут, то взятый вдоль него криволинейный интеграл от **a** называют еще *циркуляцией вектора* **a** по Г.

Бывает так, что имеется несколько ориентированных кривых $C_1, \ldots, C_m$, вовсе не связанных друг с другом, и удобно обозначить через $C = C_1 + \ldots + C_m$ их объединение — тоже ориентированную кривую. Тогда по определению считают, что криволинейный интеграл от **a** по C равен сумме криволинейных интегралов от **a** по C_k:

$$\int_C = \sum_1^m \int_{C_k}.$$

Формула (5) верна не только для гладкой, но и для кусочно гладкой непрерывной кривой (4). Ведь тогда Г есть конечная сумма гладких ориентированных кусков Γ_j, соответствующих отрезкам $[s_j, s_{j+1}]$ или $[t_j, t_{j+1}]$ изменения дуги s или параметра t. Поэтому

$$\int_{\Gamma}(\mathbf{a}\,d\mathbf{s}) = \sum^N \int_{\Gamma_j}(\mathbf{a}\,d\mathbf{s}) = \sum_1^N \int_{t_j}^{t_{j+1}} = \int_0^{T_0},$$

где под интегралом справа подразумевается такое же выражение, как под интегралом справа в (5).

Наконец, заметим, что если **a** есть поле некоторой силы, то интеграл (криволинейный) от **a** по Г есть, очевидно, работа **a** вдоль ориентированного пути Г.

§ 13.3. Поле потенциала

Очень важным случаем поля вектора **a** является тот, когда на области G, где задано поле, существует функция $U(x, y, z)$, имеющая непрерывные частные производные, для которых выполняются равенства

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Q, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = R \text{ (на } G).$$

Такую функцию U называют *потенциальной функцией вектора* **a**. Говорят еще (см. § 7.6), что вектор **a** есть *градиент функции* U, и пишут

$$\operatorname{grad} U = \frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{k} = \mathbf{a}.$$

Докажем теорему.

Теорема 1. *Пусть на области $G \subset E$ задано поле вектора* **a**, *непрерывного на G. Следующие утверждения эквивалентны:*

1 *Существует на G однозначная функция $U = U(x, y, z)$, имеющая непрерывные частные производные, для которой на G выполняется равенство* $\operatorname{grad} U = \mathbf{a}$.

2) *Интеграл от* **a** *по любому замкнутому непрерывному кусочно гладкому контуру C, принадлежащему к G, равен нулю:*

$$\int_C (\mathbf{a}\, d\mathbf{s}) = 0.$$

3) *Если A_0 — определенная фиксированная точка G, то интеграл* $\int\limits_{C_{A_0A}} (\mathbf{a}\, d\mathbf{s})$ *по любой ориентированной кусочно гладкой кривой $C_{A_0A} \subset G$ с началом в A_0 и с концом в A зависит от A_0 и A, но не зависит от ее формы. Таким образом, при фиксированной точке A_0*

$$\int\limits_{C_{A_0A}} (\mathbf{a}\, d\mathbf{s}) = V(A) = V(x, y, z).$$

Функция $V(x, y, z)$ есть потенциальная функция вектора **a** *на G (однозначная). Она отличается от U на константу.*

Доказательство. Из утверждения 1) следует 3). В самом деле, пусть на G существует функция U, потенциальная для **a**.

Зададим на G определенную точку $A_0 = (x_0, y_0, z_0)$ и переменную точку $A = (x, y, z)$. Соединим A_0 с A непрерывной кусочно

гладкой кривой $C = C_{A_0A}$, определенной уравнениями

$$x = \varphi(\tau), \quad y = \psi(\tau), \quad z = \chi(\tau) \qquad (t_0 \leqslant \tau \leqslant t).$$

Таким образом, значениям t_0 и t параметра τ соответствуют точки A_0 и A.

Если подставить в U вместо x, y, z соответственно функции φ, ψ, χ, то U будет непрерывной кусочно гладкой функцией от τ. На основании теоремы о производной сложной функции в точках гладкости C (где C имеет касательную)

$$\frac{dU}{d\tau} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{d\varphi}{d\tau} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{d\psi}{d\tau} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{d\chi}{d\tau}.$$

Отсюда следует, что

$$\int_C (Pdx + Qdy + Rdz) = \int_{t_0}^{t} \frac{dU}{d\tau}\, d\tau =$$

$$= U(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) - U(\varphi(t_0), \psi(t_0), \chi(t_0)) =$$

$$= U(x, y, z) - U(x_0, y_0, z_0) = U(A) - U(A_0) = V(A),$$

т. е. криволинейный интеграл при фиксированной точке A_0 зависит только от положения точки $A \in G$, но не от пути, по которому она достигается из точки A_0.

Наоборот, из 3) следует 1). В самом деле, зададим фиксированную точку $A_0 \in G$. Пусть известно, что данное поле вектора $\mathbf{a}$ таково, что криволинейный интеграл по любой кусочно гладкой кривой, соединяющей A_0 с произвольной точкой $A \in G$, не зависит от этой кривой, а зависит только от точки A. Таким образом, существует функция $V(A)$ такая, что

$$\int_{C_{A_0A}} (Pdx + Qdy + Rdz) = V(A) = V(x, y, z).$$

Чтобы доказать, что $\frac{\partial V}{\partial x} = P$ в точке $A = (x, y, z)$, принадлежащей G, будем рассуждать следующим образом. В пределах области G проведем отрезок A_2A_1, параллельный оси x, где $A_2 = (x_2, y, z)$, $A_1 = (x, y, z)$, $x_2 \leqslant x \leqslant x_1$. Соединим A_0 с $A_2 = (x_2, y_1, z_1)$ произвольной непрерывной, кусочно гладкой, ориентированной в направлении от A_0 к A_2 кривой C_1 и обозначим через C' отрезок A_2A, ориентированный от A_2 к $A \in A_2A_1$. Тогда $C = C_1 + C'$ (рис. 13.1) и

$$V(x, y_1, z_1) = \int_{C_1} (Pdx + Qdy + Rdz) + \int_{C'} P\,dx, \tag{1}$$

так как очевидно, что $\int_{C'} Q\,dy = \int_{C'} R\,dz = 0$.

Кривая C_1 в дальнейшем рассуждении не будет изменяться, и потому первый интеграл в правой части (1) можно считать константой, которую мы обозначим через K. Таким образом,

$$V(x, y, z) = K + \int_{x_2}^{x} P(t, y, z)\, dt.$$

Функция P непрерывна, в частности, непрерывна по x, поэтому $\frac{\partial V}{\partial x} = P(x, y, z)$ и мы доказали нужное равенство. Аналогично доказываются равенства

$$\frac{\partial V}{\partial y} = Q, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = R,$$

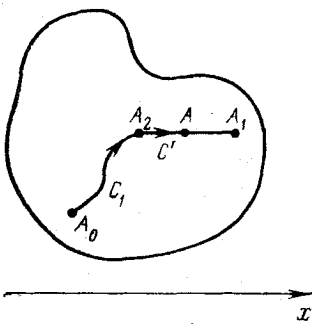

Рис. 13.1.

строя специальные, соединяющие точки A_0 и A_1, кривые, заканчивающиеся при подходе к A_1 отрезками, в первом случае параллельными оси y, и во втором — оси z. Мы доказали 1) при $U = V$.

Эквивалентность 2) и 3) тривиальна. В самом деле, пусть имеет место 2) и $C' = C'_{A_0A}$, $C'' = C''_{A_0A}$ — два принадлежащих к G пути, соединяющих точки A_0 и A. Тогда $C' + C''_-$ — замкнутый контур и

$$0 = \int_{C'} + \int_{C''_-} = \int_{C'} - \int_{C''},$$

т. е. выполняется 3). Наоборот, если имеет место 3) и $C \subset G$ — замкнутый контур, то, представив его в виде суммы $C = C' + C''$ каких-либо контуров, получим

$$\int_{C} = \int_{C'} + \int_{C''} = \int_{C'} - \int_{C''_-} = 0,$$

так как C' и C''_- соединяют одну и ту же пару точек.

Если определенный на открытом множестве G вектор

$$\mathbf{a} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$$

является не только непрерывным, но и имеет непрерывные частные производные, то имеет смысл вектор

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k},$$

называемый *ротором вектора* $\mathbf{a}$.

Если для вектора $\mathbf{a}$ выполняется одно из утверждений 2) или 3) предыдущей теоремы, то на основании этой теоремы на G

можно определить однозначную (потенциальную) функцию $U(x, y, z)$, имеющую непрерывные частные производные, так что $\frac{\partial U}{\partial x} = P$, $\frac{\partial U}{\partial y} = Q$, $\frac{\partial U}{\partial z} = R$.

В таком случае, если функции P, Q, R имеют на G непрерывные частные производные, то U имеет непрерывные частные производные второго порядка и имеют место равенства

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial z} - \frac{\partial^2 U}{\partial z\,\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial z\,\partial x} - \frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial z} = 0.$$

Мы пришли к следующей теореме.

Теорема 2. *Если поле вектора* **a**, *имеющего на открытом множестве G непрерывные частные производные, обладает тем свойством, что для любого ориентированного кусочно гладкого замкнутого контура $C \subset G$*

$$\int_C (\mathbf{a}\, d\mathbf{s}) = 0, \tag{2}$$

то

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \mathbf{0} \text{ на } G. \tag{3}$$

Обратная теорема для произвольного, пусть даже связного, множества G не верна. Но она верна во всяком случае, если $G = \{a_1 \leqslant x \leqslant b_1,\ a_2 \leqslant y \leqslant b_2,\ a_3 \leqslant z \leqslant b_3\}$ есть прямоугольный параллелепипед). В этом случае для определенного на G непрерывно дифференцируемого вектора **a**, имеющего $\operatorname{rot} \mathbf{a} = \mathbf{0}$, эффективно строится его потенциал по формуле

$$U(x, y, z) = \int_{x_0}^{x} P(u, y_0, z_0)\, du + \int_{y_0}^{y} Q(x, v, z_0)\, dv +$$

$$+ \int_{z_0}^{z} R(x, y, v)\, dv + U(x_0, y_0, z_0) \quad ((x, y, z) \in G), \tag{4}$$

где $(x_0, y_0, z_0) \in G$ — произвольная фиксированная точка и $U(x_0, y_0, z_0)$ — произвольная константа. В самом деле (пояснения ниже),

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P(x, y_0, z_0) + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial Q}{\partial x}(x, v, z_0)\, dv + \int_{z_0}^{z} \frac{\partial R}{\partial x}(x, y, w)\, dw =$$

$$= P(x, y_0, z_0) + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial P}{\partial y}(x, v, z_0)\, dv + \int_{z_0}^{z} \frac{\partial P}{\partial z}(x, y, w)\, dw =$$

$$= P(x, y_0, z_0) + [P(x, y, z_0) - P(x, y_0, z_0)] +$$

$$+ [P(x, y, z) - P(x, y, z_0)] = P(x, y, z),$$

где мы применили формулу Ньютона — Лейбница, свойство (3), и, кроме того, дифференцирование под знаком интеграла. То, что последнее в данном случае законно, будет обосновано позже (в § 13.12). Аналогично доказывается, что $\frac{\partial U}{\partial y} = Q$, $\frac{\partial U}{\partial z} = R$. Таким образом, $\operatorname{grad} U = \mathbf{a}$ и, следовательно, выполняются равенства (2) для любого ориентированного (замкнутого) контура $C \subset G$.

Заметим, что правая часть (4) без последнего члена представляет собой криволинейный интеграл от вектора вдоль трехзвенной ломаной.

Но имеет место более общая

Теорема 3. *Пусть область G односвязна, т. е. такова, что любой принадлежащий ей кусочно гладкий контур можно стянуть в точку $P^0 \subset G$ так, что в процессе стягивания*) он будет находиться в G. Тогда из того, что определенный на G непрерывно дифференцируемый вектор* $\mathbf{a}$ *имеет* $\operatorname{rot} \mathbf{a} = \mathbf{0}$, *следует выполнение равенства* (2) *для любого ориентированного замкнутого контура $C \subset G$.*

Доказательство ниже. Таким образом, из теоремы 3 следует существование определенной на G однозначной функции, потенциальной для вектора $\mathbf{a}$ на G.

Область, находящаяся между двумя концентрическими шаровыми поверхностями, удовлетворяет условию теоремы, между тем как область, представляющая собой все пространство без оси z, не удовлетворяет этому условию, и в этом последнем случае можно указать пример (см. ниже) поля вектора, для которого теорема 3 не верна.

В дальнейшем будут доказаны теоремы Грина и Стокса. Применение их приводит к неполному доказательству теоремы 3 и уж во всяком случае может служить неплохим наводящим соображением справедливости этой теоремы (см. замечание в конце § 13.11).

Все понятия и теоремы, о которых была речь выше, легко переносятся на плоский случай. В плоскости E рассматриваются произвольные кусочно гладкие ориентированные кривые

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t) \quad (a \leqslant t \leqslant b;\ a < b),$$

---

*) Математическое описание понятия «стягивание в одну точку» дается в конце этого параграфа мелким шрифтом.

принадлежащие заданной области G. На G задается поле непрерывного вектора $\mathbf{a} = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$.

Криволинейный интеграл от $\mathbf{a}$ по кривой C определяется в точности так же, как в трехмерном случае. Его можно рассматривать как частный случай § 13.2, (3), полагая

$$R \equiv 0, \ P = P(x, y) \quad \text{и} \quad Q = Q(x, y).$$

Таким образом,

$$\int_C (\mathbf{a}\, d\mathbf{s}) = \int_C (P\, dx + Q\, dy) =$$

$$= \int_a^b \{P[\varphi(t), \psi(t)]\, \varphi'(t) + Q[\varphi(t), \psi(t)]\, \psi'(t)\}\, dt.$$

Теперь уже потенциальная функция U вектора $\mathbf{a}$, если она существует на G, есть однозначная определенная на G функция $U = U(x, y)$ от двух переменных. Ее градиент

$$\operatorname{grad} U = \frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{j} = \mathbf{a}.$$

Пример 1. Вектор $\mathbf{a}$ с компонентами

$$P(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

имеет непрерывные частные производные на области G, представляющей собой плоскость с выкинутой нулевой точкой. Легко проверить, кроме того, что $\operatorname{rot} \mathbf{a} = \mathbf{0}$ на G. Область G не удовлетворяет условию теоремы 3, и сама теорема в данном случае неверна.

В самом деле, введем область G^*, полученную из плоскости (x, y) выкидыванием из нее отрицательного луча $x < 0$ оси x. На G^* согласно теореме 3 существует функция U с $\operatorname{grad} U = \mathbf{a}$. Ее можно определить в переменной точке (x, y), например, как криволинейный интеграл от $\mathbf{a}$ по любому пути $C \subset G^*$, соединяющему фиксированную точку, пусть $(1, 0)$ с (x, y):

$$U(x, y) = \int_C \frac{-y\, dx + x\, dy}{x^2 + y^2}.$$

Однако *эта функция не может быть продолжена с G^* на всю плоскость так, чтобы она была там однозначной и непрерывной.*

В самом деле, значение $U(x, y)$ в произвольной точке $(\cos\theta, \sin\theta) \in G^*$ окружности радиуса 1 с центром в нулевой точке равно

$$U(\cos\theta, \sin\theta) = \int_0^\theta d\theta = \theta.$$

Чтобы прийти в точку $(-1, 0)$ (лежащую на выкинутом луче), мы можем двигаться по нашей окружности, увеличивая θ до π или уменьшая θ до $-\pi$. В первом случае предельное значение U будет равно π, а во втором $-\pi$, т. е. функция U не может быть продолжена нужным образом на всю плоскость.

Так как произвольная потенциальная для $\mathbf{a}$ на G функция должна отличаться от рассмотренной функции $U(x, y)$ на постоянную, то доказано,

что вообще не существует определенной на G однозначной функции, которая была бы потенциальной для вектора **a** (всюду на G).

Мы сознательно провели сравнительно длинное рассуждение, чтобы обосновать это утверждение. Его можно заменить следующим, более кратким. Существуют замкнутые, принадлежащие к G гладкие контуры такие, что интегралы от нашего вектора **a** по ним не равны нулю. Например, таким контуром является окружность радиуса 1 с центром в нулевой точке — для нее $\int\limits_C (\mathbf{a}\, d\mathbf{s}) = \int\limits_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$. Но тогда на G не может быть определена однозначная функция U, потенциальная для **a** (всюду на G!), потому что существование такой функции противоречило бы теореме 1.

Доказательство теоремы 3. Оно основано на том, что она верна, если G есть куб.

Зададим произвольный замкнутый кусочно гладкий контур $\Gamma \subset G$:

$$x = \varphi(u), \quad y = \psi(u), \quad z = \chi(u), \quad 0 \leqslant u \leqslant 1,$$

$$\varphi(0) = \varphi(1), \quad \psi(0) = \psi(1), \quad \chi(0) = \chi(1).$$

Здесь параметр u пробегает отрезок $[0, 1]$ что, очевидно, не уменьшает общности. Тот факт, что контур Γ указанным в теореме 3 образом стягивается в точку, описывается так: существует поверхность $S \subset G$, описываемая функциями

$$\left.\begin{array}{c} x = \varphi(u, t), \quad y = \psi(u, t), \quad z = \chi(u, t), \\ \{0 \leqslant u \leqslant t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1\} = \Delta, \\ \varphi(0, t) = \varphi(t, t), \quad \psi(0, t) = \psi(t, t), \quad \chi(0, t) = \chi(t, t), \end{array}\right\} \tag{5}$$

непрерывными на треугольнике Δ и кусочно гладкими по u на $[0, t]$ и такими, что

$$\varphi(u, 1) = \varphi(u), \quad \psi(u, 1) = \psi(u), \quad \chi(u, 1) = \chi(u).$$

Так как S ограничена и замкнута, G открыто и $S \subset G$, то найдется число $d > 0$ такое, что, какова бы ни была точка $A \in S$, любой покрывающий ее куб с ребром длины d принадлежит G.

Будем обозначать через σ кубы, принадлежащие G.

Будем говорит, что множество $e' \subset S$ есть образ множества $e \subset \Delta$, если e' есть совокупность точек, полученных как отображения точек e при помощи трех функций (5).

Рассечем Δ прямоугольной сетки (рис. 13.2), настолько густой, чтобы образы полученных частиц помещались в кубах σ с ребром d.

Образ нижнего треугольника A_1B_1O принадлежит некоторому σ. Так как образы точек A_1 и B_1 совпадают, т. е. есть одна точка S, то образ отрезка A_1B_1 есть замкнутая кусочно гладкая кривая $C_{A_1B_1}$, принадлежащая кубу σ, поэтому

$$\int\limits_{C_{A_1B_1}} (\mathbf{a}\, d\mathbf{s}) = 0. \tag{6}$$

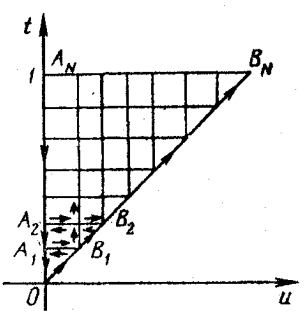

Рис. 13.2.

Ориентируем согласованно все частицы (их две) между A_1B_1 и A_2B_2 (см. рис. 13.2). Интеграл по образу этого сложного контура равен сумме интег-

ралов по образам границ отдельных указанных частиц, каждый из которых равен нулю. Но интегралы по отрезкам, по которым соседние частицы граничат, компенсируют друг друга, кроме того, имеет место (6) и равенство

$$\int\limits_{C_{A_1A_2}} = \int\limits_{C_{B_1B_2}}$$

потому что образы A_1A_2 и B_1B_2 совпадают.

Поэтому $\int\limits_{C_{A_2B_2}} = 0$. Рассуждая аналогично, по индукции мы получим, что

$$\int\limits_{C_{A_kB_k}} = 0 \qquad (k = 1, \ldots, N),$$

и так как $C_{A_NB_N} = \Gamma$, то $\int\limits_{\Gamma} (\mathbf{a}\, d\mathbf{s}) = 0$, что и требовалось доказать.

§ 13.4. Ориентация плоской области

В плоскости можно задать две прямоугольные системы координат, изображенные на рис. 13.3 и 13.4.

Они существенно отличны друг от друга в том смысле, что невозможно, передвигая обе геометрические системы в плоскости как твердые тела, совместить их так, чтобы одновременно совпали положительные направления их осей x и положительные направления их осей y.

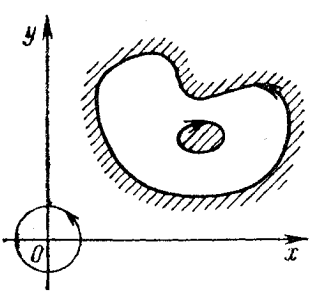

Рис. 13.3.

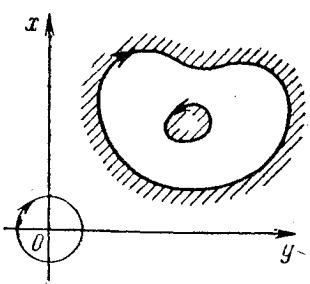

Рис. 13.4.

Зададим в обеих системах кооординат круги с центром в точках 0. На окружностях кругов зададим положительные направления обхода так, что, двигаясь по ним, проходится кратчайшее расстояние от положительного направления оси x до положительного направления оси y (четверть окружности, а не три четверти). В случае системы, изображенной на рис. 13.3, для этого придется

взять направление обхода круга против часовой стрелки, а в случае рис. 13.4 — по часовой стрелке.

В первом случае, двигаясь по окружности в положительном направлении, мы оставляем внутренние точки обходимого круга слева, а во втором случае — справа. Это обстоятельство дает основание для дальнейших обобщений.

Пусть задана область Ω с кусочно гладкой границей C, которая может состоять из конечного числа замкнутых, самонепересекающихся контуров, так что Ω находится внутри одного из них и вне остальных. Зададим на C направление обхода так, чтобы при движении по C в этом направлении область оставалась слева (см. рис. 13.3). Такое *направление обхода* в случае первой системы называется *положительным*, а противоположное — *отрицательным*. Если область Ω задана во второй системе, положительное направление соответствует такому обходу, что при этом область остается справа (см. рис. 13.4).

§ 13.5. Формула Грина *). Выражение площади через криволинейный интеграл

Для достаточно общих плоских областей Ω с положительно ориентированной границей Γ справедлива формула

$$\iint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=\int\limits_{\Gamma}(P\,dx+Q\,dy), \tag{1}$$

называемая *формулой Грина*. Здесь предполагается, что P, Q, $\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial y}$ непрерывны на $\overline{\Omega}$.

Докажем формулу Грина для прямоугольника (рис. 13.5)

$$\Delta=\{a<x<b;\ c<y<d\}.$$

$$\iint\limits_{\Delta}\frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy=\int\limits_{c}^{d}\int\limits_{a}^{b}\frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy=$$

$$=\int\limits_{c}^{d}[Q(b,y)-Q(a,y)]\,dy=\left(\int\limits_{\Gamma_{BC}}+\int\limits_{\Gamma_{DA}}\right)Q(x,y)\,dy=\int\limits_{\Gamma}Q(x,y)\,dy,$$

$$-\iint\limits_{\Delta}\frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy=-\int\limits_{a}^{b}[P(x,d)-P(x,c)]\,dx=$$

$$=\left(\int\limits_{\Gamma_{CD}}+\int\limits_{\Gamma_{AB}}\right)P(x,y)\,dx=\int\limits_{\Gamma}P(x,y)\,dx,$$

и формула (1) доказана.

*) Д. Грин (1793—1841) — английский математик. Другой вывод формулы Грина см. § 13.10.

Докажем теперь (1) для области ω, изображенной на рис. 13.6, где дуга $\overset{\smile}{AC}$ описывается непрерывной строго возрастающей на $[a, b]$ функцией $y=\lambda(x)$. Обратную к ней функцию обозначим через $x=\mu(y)$ $(c \leqslant y \leqslant d)$.

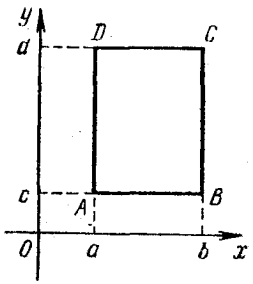

Рис. 13.5.

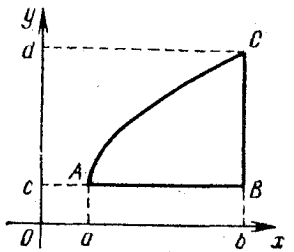

Рис. 13.6.

Имеем

$$\iint\limits_{\omega} \frac{\partial Q}{\partial x} dx\, dy = \int\limits_{c}^{d} [Q(b, y) - Q(\mu(y), y)]\, dy =$$

$$= \left(\int\limits_{\Gamma_{BC}} - \int\limits_{\Gamma_{AC}}\right) Q(x, y)\, dy = \int\limits_{\Gamma} Q(x, y)\, dy,$$

$$-\iint\limits_{\omega} \frac{\partial P}{\partial y} dx\, dy = -\int\limits_{a}^{b}\int\limits_{c}^{\lambda(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy\, dx = -\int\limits_{a}^{b} [P(x, \lambda(x)) - P(x, c)]\, dx =$$

$$= \left(\int\limits_{\Gamma_{CA}} + \int\limits_{\Gamma_{AB}}\right) P(x, y)\, dx = \int\limits_{\Gamma} P(x, y)\, dx,$$

откуда и следует (1).

Если повернуть область ω как твердое тело вокруг начала координат на угол $\pi/2$, π, $3\pi/2$, оставив систему координат неизменной, то мы получим еще три множества, которые вместе с ω мы будем называть *множествами типа* ω. Заодно будем всякий прямоугольник называть *областью типа* ω. По аналогии доказывается, что формула Грина имеет место для любого множества типа ω.

Справедлива

Теорема. *Пусть область Ω с непрерывной кусочно гладкой границей Γ обладает тем свойством, что ее замыкание $\overline{\Omega}$ может быть разрезано прямыми, параллельными осям координат (x, y), на конечное число частей, каждая из которых есть область типа ω. Тогда для Ω справедлива формула Грина.*

Доказательство. Пусть $\overline{\Omega} = \sum_1^N \omega_k$ есть разбиение $\overline{\Omega}$ на части типа ω и пусть Γ_k обозначает положительно ориентированный контур ω_k. Тогда, в силу того, что для областей ω_k формула Грина верна, получим

$$\iint_{\Omega}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=\sum_{k=1}^{N}\iint_{\omega_k}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=$$

$$=\sum_{k=1}^{N}\int_{\Gamma_k}(P\,dx+Q\,dy)=\int_{\Gamma}(P\,dx+Q\,dy).$$

Поясним последнее равенство. Общая граница C всех ω_k состоит из Γ и суммы конечного числа отрезков, каждый из которых принадлежит Ω и служит границей двух соседних областей типа ω. При этом отрезок обходится два раза в противоположных направлениях, и поэтому криволинейные интегралы, соответствующие этим обходам, компенсируют друг друга. Остается только интеграл по Γ.

На рисунке 13.7 изображена область (двухсвязная), разбитая на конечное число областей типа ω.

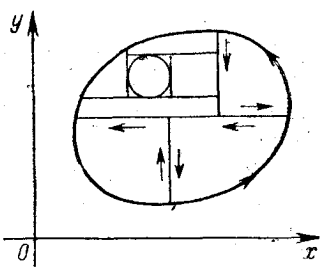

Рис. 13.7.

Замечание. На практике часто приходится иметь дело с формулой Грина в том случае, когда функции P и Q непрерывны на $\overline{\Omega}$, а их частные производные $\frac{\partial Q}{\partial x}$ и $\frac{\partial P}{\partial y}$ непрерывны только на Ω, и тогда обычно формула Грина (1) верна, только кратный интеграл в ее левой части надо понимать в несобственном смысле. Пусть в качестве примера Ω есть круг $x^2+y^2=1$. Обозначим через Ω_ε концентрический с ним круг $x^2+y^2=(1-\varepsilon)^2$ $(\varepsilon>0)$ с границей Γ_ε (окружностью радиуса $1-\varepsilon$). Тогда в силу уже доказанного

$$\iint_{\Omega_\varepsilon}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=\int_{1-\varepsilon}^{-1+\varepsilon}P\left(x,\sqrt{(1-\varepsilon)^2-x^2}\right)dx+$$

$$+\int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon}P\left(x,-\sqrt{(1-\varepsilon)^2-x^2}\right)dx+\int_{1-\varepsilon}^{-1+\varepsilon}Q\left(\sqrt{(1-\varepsilon)^2-y^2},y\right)dy+$$

$$+\int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon}Q\left(-\sqrt{(1-\varepsilon)^2-y^2},y^2\right)dy\quad(\varepsilon>0).\qquad(2)$$

Так как $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ равномерно непрерывны на Ω, то правая часть (2) при $\varepsilon\to 0$ стремится к пределу, равному результату подстановки в нее $\varepsilon=0$, но тогда и левая часть стремится к пределу к несобственному

кратному интегралу (с особенностями на Г, см. § 13.13, замечание 1):

$$\iint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=\int\limits_{\Gamma}(P\,dx+Q\,dy).$$

Пусть Ω есть плоская область, к которой применима формула Грина и Γ — положительно ориентированная ее граница. Тогда площадь Ω равна

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma}(x\,dy-y\,dx)=\frac{1}{2}\iint\limits_{\Omega}(1+1)\,dx\,dy=|\Omega|, \tag{3}$$

что следует из формулы Грина, если положить в ней $P=-y$, $Q=x$.

Из формулы (3), очевидно, следует равенство

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma_{\pm}}(x\,dy-y\,dx)=\pm|\Omega|, \tag{4}$$

где плюс соответствует случаю, когда контур Γ ориентирован положительно ($\Gamma=\Gamma_+$), а минус — когда контур Γ ориентирован отрицательно ($\Gamma=\Gamma_-$).

Пример. Площадь эллипса, точнее, площадь внутренности эллипса, заданного параметрически уравнениями $x=a\cos\theta$, $y=b\sin\theta$, $0\leqslant\theta<2\pi$, равна

$$|\Omega|=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2\pi}[a\cos\theta\,b\cos\theta-b\sin\theta(-a\sin\theta)]\,d\theta=\frac{ab}{2}\int\limits_{0}^{2\pi}d\theta=\pi ab.$$

§ 13.6. Интеграл по поверхности первого рода

Пусть гладкая поверхность S определяется уравнениями

$$\mathbf{r}(u,v)=\varphi\mathbf{i}+\psi\mathbf{j}+\chi\mathbf{k}\qquad((u,v)\in\Omega\rightleftarrows S,\ |\dot{\mathbf{r}}_u\times\dot{\mathbf{r}}_v|>0), \tag{1}$$

где Ω — измеримая область и φ,ψ,χ — непрерывно дифференцируемые на $\bar{\Omega}$ функции.

Пусть, далее, на $\bar{S}$ или в окрестности $\bar{S}$ задана непрерывная функция $F(x,y,z)$.

Интегралом первого рода функции F по поверхности S называется выражение

$$\int\limits_{S}F(x,y,z)\,ds=\int\limits_{\Omega}F(\varphi(u,v),\psi(u,v),\chi(u,v))\,|\dot{\mathbf{r}}_u\times\dot{\mathbf{r}}_v|\,du\,dv. \tag{2}$$

Слева в (2) стоит обозначение интеграла первого рода от функции F по S, а справа — его определение. Чтобы вычислить этот интеграл, надо в выражение слева подставить вместо x, y, z соответственно функции $\varphi(u,v)$, $\psi(u,v)$, $\chi(u,v)$ и считать, что

$ds = |\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v| du\, dv$ — дифференциальный элемент поверхности S (см. § 12.23).

Очевидно, если бы S представляла собой материальную поверхность с плотностью распределения массы, равной

$$\rho = F(x, y, z) = F(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)),$$

то при помощи интеграла (1) вычислялась бы масса поверхности S.

Если поверхность S задана при помощи другой пары параметров $(u', v') \in \omega'$:

$$\mathbf{r} = \varphi_1(u', v')\mathbf{i} + \psi_1(u', v')\mathbf{j} + \chi_1(u', v')\mathbf{k},$$

где

$$u = \lambda(u', v'), \quad v = \mu(u', v'), \quad (u', v') \in \Omega'$$

— непрерывно дифференцируемые функции, устанавливающие взаимно однозначное соответствие

$$(u, v) \rightleftarrows (u', v')$$

с якобианом

$$\frac{D(u', v')}{D(u, v)} \neq 0, \qquad (u, v) \in \omega,$$

то формула (1) остается инвариантной.

В самом деле, замена переменных (u, v) на (u', v') в интеграле (1) приводит к выражению

$$\int\limits_S F\, ds = \int\limits_{\Omega'} F(\varphi_1(u', v'), \psi_1(u', v'), \chi_1(u', v'))\, |\dot{\mathbf{r}}_{u'} \times \dot{\mathbf{r}}_{v'}|\, du' dv',$$

потому что

$$|\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v| \left| \frac{D(u, v)}{D(u', v')} \right| =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{D(y, z)}{D(u, v)} \cdot \frac{D(u, v)}{D(u', v')}\right)^2 + \left(\frac{D(z, x)}{D(u, v)} \frac{D(u, v)}{D(u', v')}\right)^2 + \left(\frac{D(x, y)}{D(u, v)} \frac{D(u, v)}{D(u', v')}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{D(y, z)}{D(u', v')}\right)^2 + \left(\frac{D(z, x)}{D(u', v')}\right)^2 + \left(\frac{D(x, y)}{D(u', v')}\right)^2} = |\dot{\mathbf{r}}_{u'} \times \dot{\mathbf{r}}_{v'}|.$$

Если гладкая поверхность S определяется уравнением $z = f(x, y)$ $((x, y) \in G)$, где f непрерывна вместе со своими частными производными первого порядка на $\overline{G}$, то можно считать, что она задана параметрически через параметры x, y:

$$x = x, \quad y = y, \quad z = f(x, y). \tag{3}$$

Тогда

$$|\dot{\mathbf{r}}_x \times \dot{\mathbf{r}}_y| = \sqrt{1 + p^2 + q^2} \quad \left(p = \frac{\partial f}{\partial x}, q = \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

и, следовательно,

$$\int_S F(x, y, z)\, ds = \int_G F(x, y, f(x, y)) \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy. \qquad (4)$$

Замечание. Если поверхность — гладкая, т. е. описывается параметрически уравнениями (1) с указанными там свойствами функций φ, ψ, χ и в то же время описывается уравнением вида (3), то часто функция $z = f(x, y)$ непрерывна на $\overline{G}$, но ее частные производные непрерывны только на G и неограничены при подходе к границе G. Например, такое явление имеет место при вычислении интеграла от F по верхнему полушарию. В этом случае формула (4) для интеграла от F по S остается верной, но интеграл в правой ее части надо понимать в несобственном смысле (см. § 13.13, замечание).

Интеграл по поверхности S (первого рода) функции F можно определить еще и следующим образом.

Разобьем Ω на измеримые части, пересекающиеся попарно разве что по своим границам. Каждой части Ω_j соответствует определенный кусок S_j поверхности S. Пусть $A_j = (x_j, y_j, z_j)$ — произвольная точка на S_j. Составляем сумму

$$\Pi_N = \sum_{j=1}^{N} F(A_j)\, |S_j|,$$

где $|S_j|$ — площадь S_j (см. § 12.23). Предел ее равен интегралу от F по S:

$$\lim_{\max d(\Omega_j) \to 0} \sum_{j=1}^{N} F(A_j)\, |S_j| = \int_S F(x, y, z)\, dS. \qquad (5)$$

В самом деле, пусть $A_j = (x_j, y_j, z_j)$ и $x_j = \varphi(u_j, v_j)$, $\varphi_j = \psi(u_j, v_j)$, $z_j = \chi(u_j, v_j)$,

$$j = 1, \ldots, N, \quad (u_j, v_j) \in \Omega_j.$$

Тогда

$$\Pi_N = \sum_{j=1}^{N} F(A_j) \int_{\Omega_j} |\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v|\, du\, dv = \sum_{j=1}^{N} F(A_j)\, \mu_j\, |\Omega_j| =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} F(A_j)\, |\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v|_j\, |\Omega_j| +$$

$$+ \varepsilon_N \xrightarrow[\max d(\Omega_j) \to 0]{} \iint_{\Omega} F(\varphi, \psi, \chi)\, |\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v|\, du\, dv,$$

где знак $|\ \ |_j$ обозначает, что в $|\ \ |$ подставлена точка A_j, а μ_j есть возникающее при применении теоремы о среднем число

($m_j \leqslant \mu_j \leqslant M_j$ — см. ниже). Ведь очевидно, что ($K > |F(A)|$)

$$|\varepsilon_N| = \left| \sum_{j=1}^{N} F(A_j) \left(\mu_j - |\dot{\mathbf{r}}_u \times \mathbf{r}_v|_j\right) |\Omega_j| \right| \leqslant$$

$$\leqslant K \sum_{j=1}^{N} (M_j - m_j) |\Omega_j| \to 0, \quad \max d(\Omega_j) \to 0,$$

$$M_j = \sup_{(u,v)\in\Omega_j} |\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{r}_v|, \quad m_j = \inf_{(u,v)\in\Omega_j} |\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v|.$$

§ 13.7. Ориентация поверхностей

В трехмерном пространстве имеются две существенно различные прямоугольные системы координат, изображенные на рис. 13.8 и 13.9. Отличие их друг от друга заключается в том, что невозможно осуществить такое движение одной из систем, чтобы в результате его оказались совмещенными точки 0 и одноименные положительные полуоси x, y, z обеих систем.

Первую *систему* (рис. 13.8) называют *правой*, вторую (рис. 13.9) — *левой*. Если смотреть снизу вверх вдоль положительной оси z, то для совмещения положительной оси x с положительной осью y в кратчайшем направлении в случае рис. 13.8 нужно вращать ось x в плоскости x, y слева направо, а в случае рис. 13.9 — справа налево (против часовой стрелки).

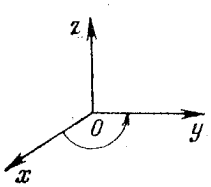

Рис. 13.8.

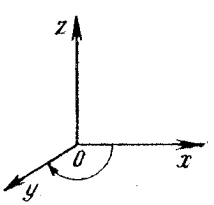

Рис. 13.9.

С каждой из рассматриваемых двух систем естественно связать «штопор» — комбинацию, состоящую из единичного, направленного в положительном направлении оси z вектора и перпендикулярного к оси z кружка (головки штопора), на границе которого (окружности) задано направление обхода от оси x к оси y в кратчайшем направлении.

Если в случае рис. 13.8 считать, что ось z есть ось винта (штопора), скрепленного с головкой и имеющего «правую нарезку», то вращая головку в направлении стрелки, мы заставим штопор двигаться в направлении положительной оси z. Того же эффекта мы достигнем в случае рис. 13.9, если ось z будет осью винта, имеющего левую нарезку.

Головка может быть искривлена, т. е. может представлять собой кусок гладкой поверхности, не обязательно плоской, но такой, что ось z есть нормаль к этому куску в точке 0. И в этом случае комбинация из такой головки, на которой задано направление обхода, и единичной нормали образует штопор — правый или левый.

Наконец, можно представить себе такой штопор (правый или левый) с нормальным вектором, идущим в произвольном направлении, не обязательно совпадающим с осью z. Для дальнейшего будет важно представить себе следующую конструкцию. Пусть в трехмерном пространстве задана прямоугольная система координат (правая или левая) и ориентированная поверхность S. Таким образом, из каждой точки $P \in S$ выпущена единичная нормаль $\mathbf{n}(P)$, непрерывно зависящая от P. Шар $V(P)$ достаточно малого радиуса с центром в точке P высекает из поверхности S некоторый связный кусок $\sigma(P)$, содержащий точку P. На контуре (на краю) $\gamma(P)$ этого куска определим направление обхода так, чтобы вектор $\mathbf{n}(P)$ и кусок $\sigma(P)$ образовали штопор, ориентированный так же, как данная система координат, т. е. если сисема координат — правая (левая), то и штопор должен быть правым (левым).

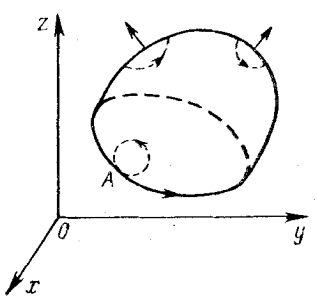

Рис. 13.10.

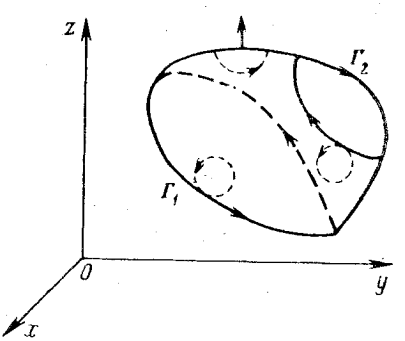

Рис. 13.11.

Если поверхность S имеет край Γ, то созданная конструкция естественным образом приводит к определенному направлению обхода на Γ (рис. 13.10). Обратим, например, внимание на точку A контура Γ. В ней направления обхода по Γ и по замкнутому искривленному принадлежащему S кружочку γ совпадают.

Если бы данная поверхность была ориентирована противоположным образом, а система координат осталась прежней, то определенные выше направления обхода нужно было бы заменить на противоположные.

На рис. 13.11 нарисована ориентированная поверхность с краем, состоящим из двух замкнутых гладких кривых Γ_1 и Γ_2.

Отметим еще следующий факт. Пусть ориентированная гладкая поверхность S разрезана на две ориентированные так же поверхности S_1, S_2 гладкой дугой h (рис. 13.12). Тогда направления обхода контуров S_1 и S_2 вдоль дуги h противоположны.

Это замечание будет руководящим для того, чтобы правильно определить понятие ориентированной кусочно гладкой поверхности.

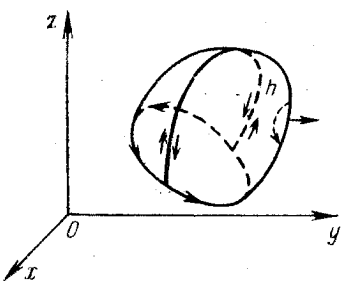

Рис. 13.12.

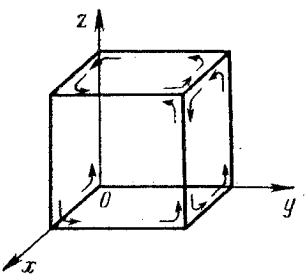

Рис. 13.13.

Кусочно гладкая поверхность S называется ориентированной, если каждый из ее гладких кусков ориентирован и возникающие при этом направления обхода контуров этих кусков согласованы в том смысле, что вдоль каждой дуги, где два таких контура совпадают, направления их обхода противоположны.

На рис. 13.13 нарисован куб, поверхность которого ориентирована при помощи ее внешней нормали.

Малые куски ориентированной поверхности (элементы поверхности) удобно считать векторами.

Пусть S есть ориентированная гладкая поверхность, таким образом, из каждой точки $A \in S$ выпущена единичная нормаль $\mathbf{n}(A)$ к S в A, непрерывно зависящая от A. Пусть σ есть гладкий кусок S. Будем считать, что $\boldsymbol{\sigma}$ есть вектор, скалярная величина которого равна площади $|\sigma|$ куска σ, а направление определяется вектором $\mathbf{n}(A)$, где A есть какая-либо точка σ. Таким образом, $\boldsymbol{\sigma} = |\sigma|\mathbf{n}(A)$.

Этим, конечно, вектор $\boldsymbol{\sigma}$ однозначно не определен. Однако, если диаметр $d(\boldsymbol{\sigma})$ мал, то направление $\mathbf{n}(A)$ не выходит за пределы некоторого малого конуса, и если σ есть переменный кусок, постоянно содержащий фиксированную точку A_0, то, очевидно, $\mathbf{n}(A) \to \mathbf{n}(A_0)$ $(d(\sigma) \to 0)$, где $d(\sigma)$ есть диаметр σ, независимо от того, как выбиралась точка $A \in \sigma$ для каждого σ.

Дифференциальный элемент ориентированной поверхности S в точке $A \in S$ естественно считать вектором $d\mathbf{S} = \mathbf{n}(A)dS$, который, таким образом, равен произведению дифференциального

элемента площади S в точке A на вектор единичной нормали $\mathbf{n}(A)$, определяющей ориентацию S.

Если S задана уравнением

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = \varphi\mathbf{i} + \psi\mathbf{j} + \chi\mathbf{k} \qquad ((u, v) \in \bar{G}),$$

то $\mathbf{n}(A)$ определяется одним из двух равенств

$$\mathbf{n}(A) = \pm \frac{\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v}{|\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v|} \tag{1}$$

и $dS = |\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v| du\, dv$. Отсюда

$$d\mathbf{S} = \pm(\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v) du\, dv. \tag{2}$$

В дальнейшем мы будем считать, что в (1), (2) выбран знак «+». Этого всегда можно достигнуть, поменяв в случае необходимости местами параметры u и v. Мы этим хотим сказать, что *если задана определенная ориентированная гладкая поверхность S, то всегда можно считать, что она описывается такой вектор-функцией $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, что единичная нормаль $\mathbf{n}(A)$ $(A \in S)$, определяющая ориентацию S, выражается равенством*

$$\mathbf{n}(A) = \frac{\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v}{|\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v|} \tag{3}$$

и соответственно

$$d\mathbf{S} = (\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v) du\, dv. \tag{4}$$

Если мы хотим, чтобы в этих выражениях при преобразовании параметров (u, v) в параметры (u', v') не появился знак минус, то нужно, чтобы якобиан преобразования $\frac{D(u, v)}{D(u', v')}$ был положительным. Действительно,

$$\mathbf{n}(A) = \frac{\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v}{|\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v|} = \frac{\frac{D(y, z)}{D(u, v)}\mathbf{i} + \frac{D(z, x)}{D(u, v)}\mathbf{j} + \frac{D(x, y)}{D(u, v)}\mathbf{k}}{\sqrt{\left(\frac{D(y, z)}{D(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{D(z, x)}{D(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right)^2}} =$$

$$= \frac{\left(\frac{D(y, z)}{D(u', v')}\mathbf{i} + \frac{D(z, x)}{D(u', v')}\mathbf{j} + \frac{D(x, y)}{D(u', v')}\mathbf{k}\right)}{\sqrt{\left(\frac{D(y, z)}{D(u', v')}\right)^2 + \left(\frac{D(z, x)}{D(u', v')}\right)^2 + \left(\frac{D(x, y)}{D(u', v')}\right)^2}} \cdot \frac{\frac{D(u', v')}{D(u, v)}}{\left|\frac{D(u', v')}{D(u, v)}\right|} =$$

$$= \frac{\dot{\mathbf{r}}_{u'} \times \dot{\mathbf{r}}_{v'}}{|\dot{\mathbf{r}}_{u'} \times \dot{\mathbf{r}}_{v'}|} \cdot \operatorname{sign} \frac{D(u', v')}{D(u, v)}.$$

Таким образом, формула (3) (со знаком «+»!) для единичной нормали $\mathbf{n}(A)$ (а вместе с ней и формула (4)) *инвариантна только по отношению к преобразованиям параметров, имеющим положительный якобиан.* Поэтому следует рекомендовать преобразования с положительным якобианом.

Однако иногда мы вынуждены рассматривать преобразования с отрицательным якобианом. Тогда надо следить за правильностью знаков.

Формальные основы ориентации поверхностей (многообразий) и их краев даны в §§ 17.1 и 17.2.

§ 13.8. Интеграл по ориентированной плоской области

Пусть в плоскости, где задана прямоугольная система координат x, y, определена область G с кусочно гладкой границей Γ и на Γ задано направление обхода. Ориентированную таким образом *область G обозначим через G_+ или G_- в зависимости от того, ориентирован ли контур Γ положительно или отрицательно.*

Пусть теперь на G задана интегрируемая функция $f(x, y)$. Введем понятие *интеграла от f по ориентированной области.* Именно, положим

$$\int\limits_{G_+} f\,dx\,dy = \int\limits_{G} f\,dx\,dy = -\int\limits_{G_-} f\,dx\,dy.$$

Полезность этих определений можно видеть из следующего факта. Зададим две плоскости, где заданы прямоугольные системы координат x, y и x', y', одинаково ориентированные. Пусть G обозначает ориентированную область плоскости x, y с кусочно гладкой (ориентированной) границей Γ и пусть непрерывно дифференцируемое преобразование

$$x' = \varphi(x, y), \quad y' = \psi(x, y) \quad ((x, y) \in \overline{G}) \tag{1}$$

отображает взаимно однозначно область G на область G' плоскости x', y' и Γ на границу Γ' области G'. Будем предполагать, что якобиан

$$D = \frac{D(x', y')}{D(x, y)} \neq 0 \quad (\text{на } G).$$

При этом преобразовании обход Γ индуцирует на Γ' вполне определенный обход и G' можно считать ориентированной областью.

Если $D > 0$, то при переходе от Γ к Γ' ориентация Γ не меняется. Если же $D < 0$, то обходы Γ и Γ' противоположны.

Докажем это утверждение в предположении, что ψ дважды непрерывно дифференцируема. Пусть ориентированный контур Γ определяется кусочно гладкими непрерывными функциями $x = \lambda(s)$, $y = \mu(s)$, $0 \leqslant s \leqslant s_0$, тогда соответствующий (тоже ориентированный) контур Γ' определяется функциями $x' = \varphi(\lambda(s), \mu(s))$, $y' = \psi(\lambda(s), \mu(s))$, $0 \leqslant s \leqslant s_0$.

Будем для определенности считать, что контур Γ' ориентирован положительно, тогда (пояснения ниже)

$$0 < |G'| = \int_{\Gamma'} x'dy' =$$

$$= \int_0^{s_0} \varphi(\lambda(s), \mu(s)) \left[\frac{\partial\psi}{\partial x}(\lambda(s), \mu(s))\lambda'(s) + \frac{\partial\psi}{\partial y}(\lambda(s), \mu(s))\mu'(s)\right] ds =$$

$$= \int_\Gamma \varphi(x, y)\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy\right) = \pm\iint_G \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)dx\,dy =$$

$$= \pm\iint_G D\,dx\,dy.$$

В предпоследнем равенстве применена формула Грина, в силу которой перед кратным интегралом надо поставить $+$, если окажется, что Γ ориентировано положительно, или $-$, если Γ ориентировано отрицательно. Но это выражение в целом положительно, что может быть, лишь если $D > 0$ и Γ ориентировано положительно или $D < 0$ и Γ ориентировано отрицательно. Надо учесть, что $\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2\psi}{\partial y\,\partial x}$.

Из сказанного следует, что для любой функции $f(x, y)$, непрерывной на замыкании $\overline{G}$ ориентированной измеримой области G,

$$\iint_G f\,dx\,dy = \iint_{G'} f\,\frac{D(x, y)}{D(x', y')}\,dx'\,dy',$$

где G' обозначает соответствующую G ориентированную область. В этой формуле замены переменных якобиан не пишется под знаком абсолютной величины.

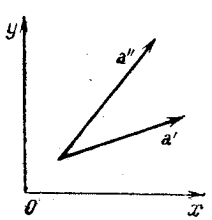

Рис. 13.14.

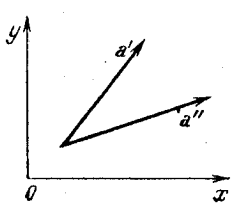

Рис. 13.15.

Остановимся еще на связи ориентации Γ со знаком D. В прямоугольной системе координат x, y зададим два неколлинеарных вектора $\mathbf{a}' = (a_1', a_2')$ и $\mathbf{a}'' = (a_1'', a_2'')$. Если определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1' & a_1'' \\ a_2' & a_2'' \end{vmatrix}$$

положителен (см. § 12.14), то это указывает на тот факт, что система $\mathbf{a}'$, $\mathbf{a}''$ ориентирована так же, как оси x, y (рис. 13.14). Если же $\Delta < 0$, то система $\mathbf{a}'$, $\mathbf{a}''$ ориентирована противоположно (рис. 13.15).

Преобразование (1) отображает прямоугольную сетку плоскости x, y в криволинейную (рис. 13.16—13.18). При этом могут иметь место два характерных случая отображений, изображенных на рис. 13.17 и на рис. 13.18.

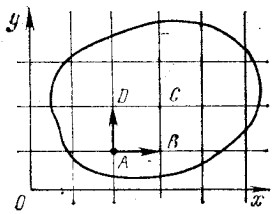

Рис. 13.16.

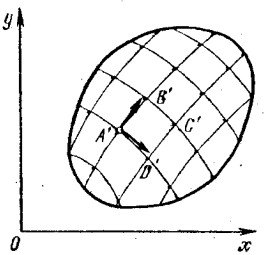

Рис. 13.17.

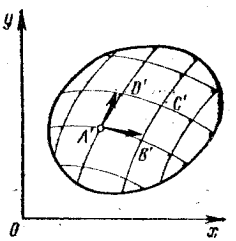

Рис. 13.18.

Квадрат $ABCD$ переходит в криволинейный параллелограмм $A'B'C'D'$, вектор $\overrightarrow{AB}$ переходит с точностью до бесконечно малых высшего порядка в касательную к дуге $\overset{\smile}{A'B'}$ в точке A', определяемую вектором $\left(\frac{\partial x'}{\partial x}, \frac{\partial y'}{\partial x}\right)$, а вектор $\overrightarrow{AD}$ — в касательную к дуге $\overset{\smile}{A'D'}$ в точке A', определяемую вектором $\left(\frac{\partial x'}{\partial y}, \frac{\partial y'}{\partial y}\right)$. Если определитель $D' = \frac{D(x', y')}{D(x, y)} > 0$, то расположение этих векторов будет таким, как на рис. 13.17, а это приводит к тому, что направления обхода у $ABCD$ и $A'B'C'D'$ совпадают, а следовательно, и обхода Γ и Γ'.

Если же $D' < 0$, то расположение касательных векторов к $\overset{\smile}{A'B'}$ и $\overset{\smile}{A'D'}$ друг к другу меняется на противоположное, что влечет за собой (рис. 13.18) тот факт, что обходы у Γ и Γ' делаются противоположными.

Аналогично определяются интегралы для областей G_+ и G_-, определенных на других координатных плоскостях yz, zx.

§ 13.9. Поток вектора через ориентированную поверхность

В трехмерном пространстве R, с прямоугольной системой координат x, y, z, дана область H и на ней определено поле непрерывного вектора

$$\mathbf{a}(x, y, z) = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}.$$

В H задана ориентированная гладкая поверхность S^*

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = \varphi\mathbf{i} + \psi\mathbf{j} + \chi\mathbf{k} \quad ((u, v) \in \Omega, \ |\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v| > 0), \tag{1}$$

где Ω — измеримая область в плоскости параметров (u, v) и φ, ψ, χ — непрерывно дифференцируемые на $\bar{\Omega}$ функции.

Будем считать, что единичная нормаль к S^* определяется векторным равенством (см. сказанное в связи с § 13.7, (1), (3))

$$\mathbf{n}(A) = \frac{\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v}{|\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v|}.$$

Тогда косинусы углов $\mathbf{n} = \mathbf{n}(A)$ с осями x, y, z выражаются равенствами

$$\begin{gathered} \cos(n, x) = \varkappa \frac{D(y, z)}{D(u, v)}, \quad \cos(n, y) = \varkappa \frac{D(z, x)}{D(u, v)}, \\ \cos(n, z) = \varkappa \frac{D(x, y)}{D(u, v)}, \qquad \varkappa = \frac{1}{|\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v|}. \end{gathered} \tag{2}$$

Будем еще обозначать через S ту же поверхность, но не ориентированную — с нее снята ориентация.

Потоком вектора $\mathbf{a}$ *через ориентированную поверхность* S^* называется интеграл (первого рода) по S

$$\int_S (\mathbf{a}\, d\mathbf{S}^*) = \int_S (\mathbf{an})\, dS \tag{3}$$

от скалярного произведения

$$(\mathbf{an}) = P\cos(n, x) + Q\cos(n, y) + R\cos(n, z),$$

вектора $\mathbf{a}$ поля и единичной нормали $\mathbf{n}$, определяющей ориентацию S^*.

Так как $(\mathbf{an})$ есть непрерывная функция от точки $A \in S$, то интеграл (3) первого рода по S имеет смысл (см. § 13.6).

Например, пусть в поле H имеет место стационарное течение жидкости, так что скорость ее $\mathbf{a}$ в какой-либо точке $A \in H$ зависит от A, но не зависит от времени. Поток ее скорости через ориентированную поверхность S^* есть количество ее, проходящее в единицу времени через S в том же направлении, в котором ориентирована S.

Справедливо равенство

$$\int_S (\mathbf{an})\, dS = \int_S (P\cos(n, x) + Q\cos(n, y) + R\cos(n, z))\, ds =$$

$$= \iint_G \left(P\frac{D(y, z)}{D(u, v)} + Q\frac{D(z, x)}{D(u, v)} + R\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right) du\, dv, \tag{4}$$