

где в правой части стоит обычный кратный интеграл по G , в котором в P , Q и R надо поставить вместо x , y , z соответственно функции φ , ψ , χ от u , v . Это равенство следует из (2) и формулы § 13.6, (3).

Часто удобно вычислить интеграл (4) в декартовых координатах. Покажем, к каким вычислениям это приводит в предположении, что гладкий кусок \bar{S} поверхности взаимно однозначно проектируется на измеримые части всех трех плоскостей координат. Многие гладкие поверхности можно разбить на конечное число таких кусков.

Итак, пусть гладкий кусок \bar{S} описывается любой из трех функций

$$x = f_1(y, z) \quad ((y, z) \in \bar{S}_x), \quad (4')$$

$$y = f_2(z, x) \quad ((z, x) \in \bar{S}_y), \quad (4'')$$

$$z = f_3(x, y) \quad ((x, y) \in \bar{S}_z), \quad (4''')$$

непрерывных соответственно на проекциях \bar{S} на плоскости $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ и имеющих непрерывные частные производные, вообще говоря, только на открытых измеримых ядрах S_x , S_y , S_z этих проекций (т. е. на проекциях без их границ).

Обозначим еще через S_x^* , S_y^* , S_z^* соответствующие ориентированные проекции ориентированной поверхности S^* на плоскости $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Обход контура S^* определяет при проектировании соответствующий обход площадок S_x , S_y , S_z (см. рис. 13.19). Нормаль n к S образует угол с осью z , косинус которого равен

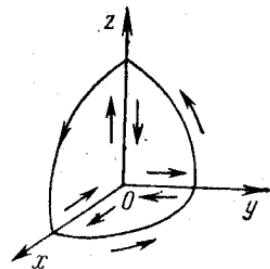


Рис. 13.19.

$$\cos(n, z) = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \quad \left(p = \frac{\partial f_3}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial f_3}{\partial y} \right),$$

где надо взять «+» или «-» в зависимости от ориентации S^* . Имеем (см. § 13.6, (5))

$$\begin{aligned} \int_S R \cos(n, z) dS &= \int_{S_z} R(x, y, f_3(x, y)) \frac{(\pm 1)}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \times \\ &\times \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx dy = \pm \int_{S_z} R(x, y, f_3(x, y)) dx dy = \\ &= \int_{S_z^*} R(x, y, f_3(x, y)) dx dy = \int_{S^*} R(x, y, z) dx dy, \end{aligned} \quad (5)$$

где предпоследний интеграл взят по ориентированной площадке S_z^* (см. § 13.8). Что касается последнего интеграла в этой цепи,

то его надо рассматривать как обозначение предпоследнего. Это так называемый интеграл второго рода. Чтобы его вычислить, надо подставить $f_3(x, y)$ вместо z и проинтегрировать по ориентированной проекции S_z^* . Из § 13.8 мы знаем, что $\int_{S_z^*} = \pm \int_{S_z}$

где надо взять «+» или «-» в зависимости от того, будет ли площадка S_z^* ориентирована положительно или отрицательно. Аналогичные рассуждения могут быть проведены и в отношении остальных двух интегралов (рис. 13.19):

$$\int_S R \cos(n, x) dS = \int_{S_x^*} P(f_1(y, z), y, z) dy dz = \int_{S^*} P(x, y, z) dy dz,$$

$$\int_S Q \cos(n, y) dS = \int_{S_y^*} Q(x, f_2(z, x), z) dz dx = \int_{S^*} Q(x, y, z) dz dx.$$

Мы доказали, что поток вектора a через ориентированную поверхность S^* , определяемую нормалью n , может быть вычислен по формуле

$$\int_S (an) dS = \int_{S^*} (P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dz dx + R(x, y, z) dx dy). \quad (5)$$

Если поверхность S^* может быть разрезана на конечное число частей, $S^* = \sum S_k^*$, каждая из которых проектируется на все три координатные плоскости, то чтобы вычислить поток a через S^* , можно вычислить потоки a через каждый из кусков S_k^* указанным способом и сложить их.

Шаровая поверхность с центром в нулевой точке естественно разрезывается плоскостями координат на 8 кусков, обладающих указанным свойством. Тор, рассмотренный в примере 3 § 7.20, разрезывается на шестнадцать таких кусков плоскостями координат и еще цилиндрической круговой поверхностью радиуса b с осью, идущей по оси y .

§ 13.10. Дивергенция. Теорема Гаусса — Остроградского *)

Пусть E есть пространство, где задана прямоугольная система координат x, y, z , $G \subset E$ — область с кусочно гладкой границей S и на G определено поле вектора

$$a(x, y, z) = Pi + Qj + Rk \quad ((x, y, z) \in G). \quad (1)$$

Мы будем предполагать, что $P, Q, R, \frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$ непрерывны на \bar{G} , откуда следует, что для вектора a имеет смысл непрерыв-

*) К. Ф. Гаусс (1777—1855) — выдающийся немецкий математик. Остроградский — см. § 8.7.

ная функция

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \quad ((x, y, z) \in \bar{G}), \quad (2)$$

называемая *дивергенцией вектора* \mathbf{a} .

Будем считать, что поверхность S ориентирована при помощи единичной нормали \mathbf{n} , направленной во внешность G .

Целью нашей будет доказать равенство

$$\int_G \operatorname{div} \mathbf{a} dG = \int_S (\mathbf{a} \mathbf{n}) dS \quad (3)$$

при некоторых дополнительных условиях, налагаемых на G . Это равенство называют *формулой Гаусса — Остроградского* по имени математиков, ее доказавших.

Формула Гаусса — Остроградского говорит, что *объемный интеграл от дивергенции вектора по области G равен потоку вектора через границу этой области, ориентированную в направлении ее внешней нормали*.

Начнем с того, что рассмотрим область Λ , изображенную на рис. 13.20, которую мы будем называть *элементарной H_z -областю*. Сверху и снизу Λ ограничена поверхностями σ_1 и σ_2 (с кусочно гладкими краями), определяемыми соответственно уравнениями

$$z = \lambda_1(x, y), \quad z = \lambda_2(x, y), \\ \lambda_1(x, y) \leq \lambda_2(x, y) \quad ((x, y) \in \bar{\Lambda}_z),$$

где Λ_z — плоская область с (кусочно гладкой) границей γ , а λ_1 , λ_2 непрерывны на Λ_z и имеют непрерывные частные производные на открытом множестве Λ_z . С боков Λ ограничена цилиндрической поверхностью σ^* с направляющей γ и образующей параллельной оси z .

Пусть S^* есть граница Λ , ориентированная при помощи внешней к Λ нормали. Тем самым нижний и верхний куски σ_1^*, σ_2^* , так же как боковая поверхность σ^* области Λ , соответственно ориентированы. Для области Λ имеют место равенства (пояснения ниже)

$$\begin{aligned} \int_{\Lambda} \frac{\partial R}{\partial z} d\Lambda &= \iint_{\Lambda_z} dx dy \int_{\lambda_1(x,y)}^{\lambda_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz = \\ &= \iint_{\Lambda_z} \{R(x, y, \lambda_2(x, y)) - R(x, y, \lambda_1(x, y))\} dx dy = \end{aligned}$$

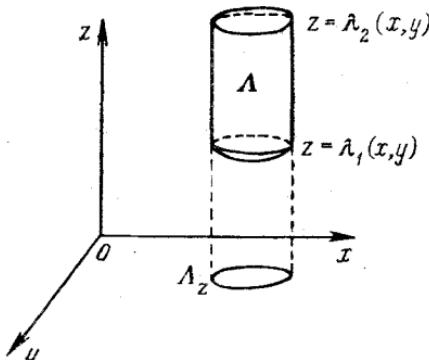


Рис. 13.20.

$$\begin{aligned}
 &= \iint_{\sigma_{2,z}^*} R((x, y, \lambda_2(x, y))) dx dy + \iint_{\sigma_{1,z}^*} R(x, y, \lambda_1(x, y)) dx dy = \\
 &\quad = \iint_{S^*} R(x, y, z) dx dy. \quad (4)
 \end{aligned}$$

Нормаль \mathbf{n} к σ_1^*, σ_2^* образует с осью z соответственно тупой и острый углы, поэтому проекции $\sigma_{1,z}^*, \sigma_{2,z}^*$ кусков σ_1^*, σ_2^* на плоскость $z = 0$ ориентированы первая отрицательно, а вторая положительно. Это обосновывает переход от третьего члена цепи (4) к четвертому. К сумме, составляющей четвертый член, можно формально добавить интеграл

$$\iint_{\sigma^*} R(x, y, z) dx dy = 0,$$

равный нулю, потому что $\cos(n, z) = 0$ вдоль σ^* . Но тогда полученная сумма трех интегралов равна интегралу, стоящему в качестве последнего члена цепи (4) (потоку вектора $(0, 0, R)$ через S^*).

Этим мы доказали теорему Гаусса — Остроградского для элементарной H_z -области и вектора $(0, 0, R)$.

Назовем теперь область G H_z -областью, если ее замыкание \bar{G} можно разрезать на конечное число замыканий элементарных H_z -областей:

$$\bar{G} = \sum_{k=1}^N \bar{G}_k$$

так, что нижние и верхние куски границы G_k суть части ориентированной границы S^* области G , и докажем, что для G и вектора $(0, 0, R)$ тоже справедлива теорема Гаусса — Остроградского.

В самом деле, обозначим соответственно через $S_{1,k}, S_{2,k}$ нижние и верхние куски границ \bar{G}_k и через S_k — боковые куски G_k . Тогда (пояснения ниже)

$$\begin{aligned}
 \int_G \frac{\partial R}{\partial z} dG &= \sum_{k=1}^N \int_{G_k} \frac{\partial R}{\partial z} dG = \\
 &= \sum_{k=1}^N \left(\int_{S_{1,k}^*} R(x, y, z) dx dy + \int_{S_{2,k}^*} R(x, y, z) dx dy + \right. \\
 &\quad \left. + \int_{S_k^*} R(x, y, z) dx dy \right) = \iint_{S^*} R(x, y, z) dx dy,
 \end{aligned}$$

потому что интегралы по S_k^* , очевидно, равны нулю, а куски $S_{1,k}^*$ и $S_{2,k}^*$ либо составляют в совокупности поверхность S^* ,

либо, если это не так, то множество

$$\sigma = S^* - \sum_1^N S_{1,h}^* - \sum_1^N S_{2,h}^*$$

есть часть S^* , нормаль в любой точке которой перпендикулярна оси z . Но тогда интеграл по σ равен нулю.

По аналогии можно ввести понятия H_x -области и H_y -области. Например, H_x -область обладает тем свойством, что ее замыкание можно разрезать на конечное число замыканий элементарных H_x -областей. Элементарная же H_x -область определяется так же, как элементарная H_z -область, только роль z теперь играет x . По аналогии доказывается, что для H_x -области G имеет место равенство

$$\int_G \frac{\partial P}{\partial x} dG = \iint_{S^*} P(x, y, z) dy dz,$$

т. е. формула Гаусса — Остроградского для вектора $(P, 0, 0)$, а для H_y -области G — формула

$$\int_G \frac{\partial Q}{\partial y} dG = \iint_{S^*} Q(x, y, z) dz dx.$$

Если теперь G есть одновременно H_x , H_y и H_z -область, то для нее, очевидно, верна теорема Гаусса — Остроградского для произвольного непрерывно дифференцируемого на \bar{G} вектора $\mathbf{a} = (P, Q, R)$, т. е. верно равенство

$$\begin{aligned} \iint_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz &= \\ &= \iint_{S^*} (P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dz dx + R(x, y, z) dx dy), \quad (5) \end{aligned}$$

где интеграл справа есть интеграл по поверхности S^* , ориентированной внешней нормалью к G .

Если в формуле Гаусса — Остроградского положить $P = x$, $Q = y$, $R = z$, то получим выражение для объема области G :

$$|G| = \frac{1}{3} \iint_{S^*} (x dy dz + y dz dx + z dx dy)$$

через интеграл по ее ориентированной (внешней нормалью) границе S^* .

Области, с которыми приходится обычно иметь дело, являются одновременно H_x , H_y и H_z -областями.

Пример 1. Шар $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ есть H_z -область, даже элементарная H_z -область, потому что вся его внутренность ограничена двумя лежащими друг над другом гладкими на $x^2 + y^2 < 1$ поверхностями $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$,

$z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$, непрерывными на замкнутом круге $x^2 + y^2 \leq 1$, имеющим гладкую границу. Очевидно, шар есть также H_x и H_y -области.

Пример 2. Возьмем тор T , полученный вращением заданного в плоскости (x, y) круга $(x - b)^2 + y^2 = a^2$ ($0 < a < b$) вокруг оси y . Чтобы убедиться в том, что T есть H_y -область, достаточно поверхность T разделить на две части плоскостью x, z . Далее, плоскости $x = b - a$, $x = a - b$ рассекают T на четыре элементарные H_z -области, а плоскости $z = b - a$, $z = a - b$ — на четыре элементарные H_x -области.

Формула Гаусса — Остроградского преобразует объемный интеграл в интеграл по поверхности. В следующем параграфе доказывается формула Стокса, при помощи которой при определенных условиях интеграл по поверхности преобразуется в криволинейный интеграл.

Чтобы выяснить физическое значение понятия дивергенции, будем считать, что в G имеет место стационарное течение жидкости, скорость которой в произвольной точке (x, y, z) равна $\mathbf{a} = \mathbf{a}(x, y, z)$. Зададим произвольную, но фиксированную точку $A = (x, y, z) \in G$ и окружим ее шаром $V_\epsilon \subset G$ радиуса $\epsilon > 0$. Пусть S_ϵ^* есть его граница (шаровая поверхность), ориентированная посредством внешней нормали. Тогда на основании формулы Гаусса — Остроградского

$$\iint_{S_\epsilon^*} (\mathbf{a} \, d\mathbf{s}) = \iiint_{V_\epsilon} \operatorname{div} \mathbf{a} \, dx \, dy \, dz.$$

Левая часть этого равенства выражает количество жидкости, вытекающее из V_ϵ (вовне S_ϵ) за единицу времени.

Применяя к правой его части теорему о среднем, получим

$$\iint_{S_\epsilon^*} (\mathbf{a} \, d\mathbf{s}) = |V_\epsilon| \operatorname{div} \mathbf{a}_1, \quad (6)$$

где $|V_\epsilon|$ есть объем V_ϵ , а \mathbf{a}_1 — скорость жидкости в некоторой точке из V_ϵ . Разделив обе части полученного равенства на $|V_\epsilon|$ и перейдя к пределу при $\epsilon \rightarrow 0$, получим, в силу непрерывности $\operatorname{div} \mathbf{a}$, что существует предел, равный дивергенции \mathbf{a} :

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|V_\epsilon|} \iint_{S_\epsilon^*} (\mathbf{a} \, d\mathbf{s}) \quad (7)$$

в точке (x, y, z) . Таким образом, $\operatorname{div} \mathbf{a}$ представляет собой производительность источников, непрерывно распределенных по G , в точке $A = (x, y, z)$. Если в точке A (или всюду на G) $\operatorname{div} \mathbf{a} = 0$, то это значит, что в A (или всюду на G) производительность источников равна пулю. Если $\operatorname{div} \mathbf{a} < 0$, то это означает, что на самом деле в соответствующей точке имеет место сток.

Из физических соображений ясно, что $\operatorname{div} \mathbf{a}$ есть инвариант относительно любых преобразований прямоугольных координат. Но это заключение можно сделать и на основании математических со-

образений, если учесть, что поток вектора через поверхность S_e есть инвариант.

Этим доказано, что если одно и то же поле вектора определяется в двух прямоугольных системах координат (x, y, z) , (x', y', z') соответственно функциями

$$\mathbf{a} = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k} = \\ = P_1(x', y', z')\mathbf{i}_1 + Q_1(x', y', z')\mathbf{j}_1 + R_1(x', y', z')\mathbf{k}_1,$$

то в одной и той же точке

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial P_1}{\partial x'} + \frac{\partial Q_1}{\partial y'} + \frac{\partial R_1}{\partial z'}.$$

Конечно, это утверждение можно доказать непосредственно, не прибегая к теореме Гаусса — Остроградского.

Дивергенцию \mathbf{a} можно рассматривать еще как (символическое) скалярное произведение оператора ∇ Гамильтона на вектор \mathbf{a} :

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \nabla \cdot \mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}.$$

С этой точки зрения указанную инвариантность можно доказать следующим образом. ∇ и \mathbf{a} — векторы, а скалярное произведение двух векторов инвариантно относительно преобразований прямоугольных координат, поэтому этим свойством обладает и дивергенция $\nabla \cdot \mathbf{a}$.

Формулу Гаусса — Остроградского можно записать в плоском случае, когда G есть область в плоскости (x, y) и $\mathbf{a}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ — определенное на ней поле. Если $\mathbf{n}(A)$ есть внешняя нормаль к кусочно гладкому контуру Γ области G ($A \in \Gamma$), то имеет место равенство

$$\iint_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\Gamma} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) ds,$$

где ds — дифференциал дуги Γ .

Если считать, что направление касательной в точке контура Γ совпадает с положительным направлением обхода по Γ , вдоль которого исчисляется также длина дуги контура Γ , то

$$\cos(n, x) = \cos(T, y) = \frac{dy}{ds}, \quad \cos(n, y) = -\cos(T, x) = -\frac{dx}{ds}.$$

Поэтому $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) ds = P dy - Q dx$,

$$\iint_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\Gamma} (P dy - Q dx).$$

Если в этой формуле заменить соответственно P, Q на $Q, -P$, то мы приедем к формуле Грина, которая уже была получена в § 13.5.

Пусть G есть ограниченная область с гладкой дважды непрерывно дифференцируемой границей S и G_λ — часть G , ограниченная поверхность S_λ , точки которой отстоят от S по направлению нормали к S на расстоянии $\lambda > 0$ (см. § 7.25). Пусть еще задано поле вектора \mathbf{a} , непрерывного на G и имеющего непрерывные частные производные на G . Вблизи границы G последние могут быть неограниченными. Будем считать, что область G_λ при достаточно малом λ удовлетворяет требованиям, которые предъявляются к областям, чтобы для них была верна теорема Гаусса — Остроградского.

Покажем, что в этом случае формула Гаусса — Остроградского ($\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$)

$$\int_G \operatorname{div} \mathbf{a} d\mathbf{x} = \int_S (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) ds \quad (8)$$

остается верной, если ее левую часть понимать в следующем несобственном смысле:

$$\int_G \operatorname{div} \mathbf{a} d\mathbf{x} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{G_\lambda} \operatorname{div} \mathbf{a} d\mathbf{x}. \quad (9)$$

Что касается правой части (8), то это есть обычный интеграл второго рода по гладкой ориентированной в сторону внешней нормали поверхности S , потому что вектор \mathbf{a} непрерывен на S .

В самом деле, на основании уже доказанной теоремы Гаусса — Остроградского

$$\int_{G_\lambda} \operatorname{div} \mathbf{a} d\mathbf{x} = \int_{S_\lambda} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) ds_\lambda \quad (0 < \lambda \leq \mu), \quad (10)$$

где μ достаточно мало, потому что S_λ при достаточно малом λ есть гладкая поверхность (§ 7.25), а вектор \mathbf{a} не только непрерывен на G_λ , но и имеет там непрерывные частные производные.

Покажем, что

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{S_\lambda} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) ds_\lambda = \int_S (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) ds, \quad (11)$$

откуда в силу (10) следует (8) и (9) в предположении, что S можно разрезать на конечное число элементарных гладких кусков:

$$S = \sum_{l=1}^N S^l. \quad (12)$$

Соответственно, S_λ разрезается на куски:

$$S_\lambda = \sum_{l=1}^N S_\lambda^l, \quad (13)$$

где S_λ^l состоит из точек G , лежащих на нормали \mathbf{n} к S^l на расстоянии λ до S^l . Пусть S^l определяется равенством $z = f(x, y)$, $(x, y) \in \Omega$. Тогда декартовы координаты (ξ, η, ζ) точек S_λ^l определяются уравнениями

$$\xi = \varphi(x, y, \lambda), \quad \eta = \psi(x, y, \lambda), \quad \zeta = \chi(x, y, \lambda) \quad (x, y) \in \Omega,$$

где Ω — замыкание плоской ограниченной области с кусочно гладкой границей, а φ, ψ, χ — непрерывно дифференцируемые функции от (x, y, λ) , описывающие на $0 \leq \lambda \leq \mu$ при достаточно малом μ гладкую поверхность S_λ^l . Эффективные выражения этих функций см. § 7.25 (5), $n = 3$, $t = \lambda$.

Тогда имеем (пояснения ниже)

$$\int_{S_\lambda^l} (\mathbf{a} \mathbf{n}) dS_\lambda^l = \pm \iint_{\Omega} \frac{\mathbf{a} (\dot{\mathbf{r}}_x \times \dot{\mathbf{r}}_y)}{|\dot{\mathbf{r}}_x \times \dot{\mathbf{r}}_y|} dx dy \rightarrow \iint_{S^l} (\mathbf{a} \mathbf{n}) ds \quad (\lambda \rightarrow 0), \quad (14)$$

$$\dot{\mathbf{r}}_x \times \dot{\mathbf{r}}_y = \frac{D(\psi, \chi)}{D(x, y)} \mathbf{i} + \frac{D(\chi, \varphi)}{D(x, y)} \mathbf{j} + \frac{D(\varphi, \psi)}{D(x, y)} \mathbf{k},$$

где в $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\xi, \eta, \zeta)$ надо ξ, η, ζ заменить соответственно функциями φ, ψ, χ . В самом деле, под интегралом во втором члене (14) стоит непрерывная функция от (x, y, λ) на замкнутом ограниченном множестве $(x, y) \in \Omega$, $0 \leq \lambda \leq \mu$, и можно переходить к пределу при $\lambda \rightarrow 0$ под знаком интеграла (см. § 12.13, теорема 1). Подобные факты имеют место, если S^l проектируется взаимно однозначно на плоскость $x = 0$ или $y = 0$. Из (14), (12) и (13) следует (9) и (8).

§ 13.11. Ротор вектора. Формула Стокса *)

Пусть в некоторой области пространства R задано поле непрерывно дифференцируемого вектора

$$\mathbf{a} = P(x, y, z) \mathbf{i} + Q(x, y, z) \mathbf{j} + R(x, y, z) \mathbf{k}.$$

Ротор вектора \mathbf{a}

$$\text{rot } \mathbf{a} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}.$$

Его можно рассматривать как векторное произведение оператора Гамильтона ∇ и вектора \mathbf{a} :

$$\text{rot } \mathbf{a} = \nabla \times \mathbf{a}.$$

Из векторной алгебры известно, что векторное произведение двух векторов есть аксиальный вектор, т. е. опо инвариантно относительно преобразований прямоугольных систем координат, имеющих одну и ту же ориентацию, т. е. таких, что правая система переходит в правую, а левая — в левую. Но мы знаем (см. § 7.6), что символ ∇ можно рассматривать как вектор, потому что его компоненты $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ преобразовываются при переходе от прямоугольной системы (x, y, z) к другой прямоугольной системе (x', y', z') по тем же правилам, по которым преобразовываются компоненты обычных векторов. Поэтому $\text{rot } \mathbf{a} = \nabla \times \mathbf{a}$ есть аксиальный вектор, т. е. инвариантный относительно преобразований прямоугольных систем координат, не меняющих их ориентацию. Следовательно, мы можем, не вычисляя, сказать, что если наш вектор \mathbf{a} имеет в новой (также ориентированной) прямоугольной

*) Д. Стокс (1819—1903) — английский физик и математик.

системе координат компоненты

$$\mathbf{a} = P_1(x', y', z') \mathbf{i}' + Q_1(x', y', z') \mathbf{j}' + R_1(x', y', z') \mathbf{k}',$$

то имеет место тождество

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathbf{i}' + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \mathbf{j}' + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}' = \\ = \left(\frac{\partial R_1}{\partial y'} - \frac{\partial Q_1}{\partial z'} \right) \mathbf{i}' + \left(\frac{\partial P_1}{\partial z'} - \frac{\partial R_1}{\partial x'} \right) \mathbf{j}' + \left(\frac{\partial Q_1}{\partial x'} - \frac{\partial P_1}{\partial y'} \right) \mathbf{k}', \end{aligned}$$

где \mathbf{i}' , \mathbf{j}' , \mathbf{k}' — единичные орты в системе (x', y', z') .

Нам предстоит обосновать формулу Стокса *)

$$\iint_S (\mathbf{n} \operatorname{rot} \mathbf{a}) ds = \oint_{\Gamma} (\mathbf{a} dl), \quad (1)$$

выражающую, что поток вектора $\operatorname{rot} \mathbf{a}$ через ориентированную поверхность S^* равен циркуляции \mathbf{a} по контуру Γ этой поверхности, ориентированному соответственно ориентации S^* .

Начнем с доказательства теоремы Стокса для гладкого куска, взаимно однозначно проектируемого на все три координатные плоскости.

Зададим ориентированный гладкий кусок S^* поверхности с кусочно гладким краем Γ , который можно записать тремя способами:

$$\begin{aligned} z = f(x, y) \quad (x, y) \in S_x, \quad x = \varphi(y, z) \quad (y, z) \in S_y, \\ y = \psi(z, x) \quad (z, x) \in S_z. \end{aligned}$$

Предполагается, таким образом, что любое из этих уравнений разрешается относительно любой из переменных, а функции f , φ , ψ непрерывно дифференцируемы на соответствующих проекциях S на координатные плоскости.

Имеем

$$\begin{aligned} \iint_S (\mathbf{n} \operatorname{rot} \mathbf{a}) ds = \iint_S \left\{ \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos(n, x) + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos(n, y) + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos(n, z) \right\} ds. \quad (2) \end{aligned}$$

Выберем в правой части (2) члены, содержащие P . Тогда (пояснения ниже)

$$\begin{aligned} - \iint_S \left\{ \frac{\partial P}{\partial y} \cos(n, z) - \frac{\partial P}{\partial z} \cos(n, y) \right\} ds = \\ = - \iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial y} \right) \cos(n, z) ds = - \iint_{S_z^*} \frac{\partial}{\partial y} P(x, y, f(x, y)) dx dy = \end{aligned}$$

) Мы считаем, что S^ означает ориентированную посредством нормали \mathbf{n} поверхность S . Левая часть (1) есть интеграл по поверхности 1-го рода.

$$\begin{aligned}
 &= \int_{\Gamma_s} (P(x, y, f(x, y))) dx = \int_0^{s_0} P[\varphi(s), \psi(s), f(\varphi(s), \psi(s))] \varphi'(s) ds = \\
 &= \int_0^{s_0} P(\varphi(s), \psi(s), \chi(s)) \varphi'(s) ds = \int_{\Gamma} P(x, y, z) dx. \quad (3)
 \end{aligned}$$

Из пропорции

$$\frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y} : (-1) = \cos(n, x) : \cos(n, y) : \cos(n, z)$$

следует, что

$$\cos(n, y) = -\frac{\partial f}{\partial y} \cos(n, z),$$

что влечет первое равенство в цепи (3). Второе равенство см. § 13.9, (5). Третье равенство следует из формулы Грина.

Последние три равенства в цепи (3) справедливы, если считать, что ориентированный контур Γ определяется кусочно гладкими функциями $x = \varphi(s)$, $y = \psi(s)$, $z = \chi(s)$, $0 \leq s \leq s_0$.

Первые две из этих функций в свою очередь определяют Γ , — проекцию Γ на плоскость $z = 0$, соответственно ориентированную. Надо учесть, что Γ есть край поверхности S , определяемой равенством $z = f(x, y)$, и потому $\chi(s) = f(\varphi(s), \psi(s))$, $0 \leq s \leq s_0$.

По аналогии доказывается, что

$$\iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \cos(n, z) - \frac{\partial Q}{\partial z} \cos(n, x) \right) ds = \int_{\Gamma} Q(x, y, z) dy, \quad (4)$$

$$\iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} \cos(n, x) - \frac{\partial R}{\partial x} \cos(n, y) \right) ds = \int_{\Gamma} R(x, y, z) dz. \quad (5)$$

Из (3), (4), (5) следует формула Стокса (1).

Мы доказали теорему Стокса для куска ориентированной поверхности, одновременно проектирующейся на все три плоскости координат. Имеется еще один важный простой случай, который непосредственно не охвачен нашими рассмотрениями. Мы имеем в виду тот случай, когда σ^* есть кусок, принадлежащий некоторой плоскости, параллельной одной из осей координат. Для такого куска теорема Стокса тоже верна. В этом можно убедиться непосредственными вычислениями, подобными (3). Но можно рассуждать так. Интегралы, входящие в формулу Стокса, инвариантны относительно преобразований прямоугольных координат, не меняющих ориентацию последних. Всегда можно подобрать преобразование этого типа так, что σ^* будет проектироваться на любую из плоскостей координат новой системы. А в этом случае теорема доказана.

Формула Стокса остается верной для любой ориентированной поверхности S^* с кусочно гладким краем Γ , которую можно разбить при помощи кусочно гладких линий на конечное число гладких кусков, проектирующихся на все три плоскости координат.

В самом деле, пусть $S^* = \sigma_1^* + \sigma_2^* + \dots + \sigma_N^*$ есть такое разбиение и пусть $\Gamma_1, \dots, \Gamma_N$ — соответственно ориентированные контуры $\sigma_1^*, \dots, \sigma_N^*$. Тогда, согласно доказанному выше,

$$\int_S \int (\operatorname{rot} \mathbf{a} d\sigma) = \sum_{j=1}^N \int_{\sigma_j} \int (\operatorname{rot} \mathbf{a} d\sigma) = \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} (\mathbf{a} ds) = \int_{\Gamma} (\mathbf{a} ds),$$

потому что части интегралов $\int_{\Gamma_j} (j = 1, \dots, N)$, берущихся вдоль внутренних кусков Γ_j (не принадлежащих Γ), проходятся два раза в противоположном направлении и дают эффект, равный нулю.

Ориентированная поверхность, которую можно разбить на конечное число треугольников (плоских), называется *полиэдральной* поверхностью и представляет собой пример простейшей поверхности, к которой применима формула Стокса.

Сделаем еще одно замечание. Пусть σ_ε обозначает круглую определенным образом ориентированную площадку с центром в точке $A = (x, y, z)$ радиуса ε с ориентирующим ее единичным вектором \mathbf{n} и γ_ε — ее ориентированный контур. Согласно формуле Стокса

$$\int_{\sigma_\varepsilon} (\mathbf{a} dS) = \int_{\sigma_\varepsilon} (\mathbf{n} \operatorname{rot} \mathbf{a}) d\sigma_\varepsilon = \int_{\sigma_\varepsilon} \operatorname{rot}_n \mathbf{a} d\sigma_\varepsilon = |\sigma_\varepsilon| \operatorname{rot}_n \mathbf{a}_1,$$

где $\operatorname{rot}_n \mathbf{a}$ есть скалярная функция, равная проекции $\operatorname{rot} \mathbf{a}$ на направление \mathbf{n} , а $\operatorname{rot}_n \mathbf{a}_1$ есть значение этой функции в некоторой средней точке σ_ε . Отсюда следует, что значение функции $\operatorname{rot}_n \mathbf{a}$ в точке A равно

$$\operatorname{rot}_n \mathbf{a} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|\sigma_\varepsilon|} \int_{\sigma_\varepsilon} (\mathbf{a} dS), \quad (6)$$

где при предельном переходе при $\varepsilon \rightarrow 0$ предполагается, что вектор \mathbf{n} — неизменный. В любой правой (левой) системе координат правая часть (6) есть одно и то же число. Однако при замене правой системы на левую и неизменном \mathbf{n} направление обхода σ_ε изменяется на противоположное, что влечет изменение знака в правой части (6). Таким образом, мы снова, но другим путем, убедились в инвариантности $\operatorname{rot} \mathbf{a}$ относительно преобразований прямоугольных координат, сохраняющих ориентацию последних.

Замечание. Пусть на области Ω задано поле непрерывно дифференцируемого вектора \mathbf{a} такого, что $\operatorname{rot} \mathbf{a} = 0$. Если на замкнутом контуре $\Gamma \subset \Omega$ можно натянуть гладкую ориентированную

поверхность с (ориентированным) краем Γ , то согласно теореме Стокса интеграл от a по Γ равен

$$\int_{\Gamma} (a \, dl) = \iint_S (\mathbf{n} \operatorname{rot} \mathbf{a}) \, dS = 0$$

Это утверждение может служить основанием для доказательства теоремы 3 § 13.3. Но и на этом пути не избежать сложных рассуждений, потому что надо иметь в виду, что в любой области существуют замкнутые (заузливающиеся) контуры, на которые невозможно натянуть гладкую поверхность.

§ 13.12. Дифференцирование интеграла по параметру

Начнем с того, что докажем равенство

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{\Omega} f(x, \mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x}(x, \mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \quad (a \leq x \leq b), \quad (1)$$

где предполагается, что Ω — замкнутое измеримое множество пространства точек $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)$, а f и $\frac{\partial f}{\partial x}$ непрерывны на множестве $H = [a, b] \times \Omega$ ($x \in [a, b]$, $\mathbf{y} \in \Omega$).

В частности, если Ω есть отрезок $[c, d]$, то формула (1) имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_c^d f(x, y) \, dy = \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \, dy \quad (1')$$

в предположении, что f и $\frac{\partial f}{\partial x}$ непрерывны на $[a, b] \times [c, d]$.

В самом деле, пусть

$$F(x) = \int_{\Omega} f(x, \mathbf{y}) \, d\mathbf{y},$$

тогда

$$\begin{aligned} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} &= \int_{\Omega} \frac{1}{h} [f(x+h, \mathbf{y}) - f(x, \mathbf{y})] \, d\mathbf{y} = \\ &= \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x}(x + \theta h, \mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \rightarrow \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x}(x, \mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \quad (h \rightarrow 0, \quad 0 < \theta < 1), \end{aligned}$$

потому что

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x + \theta h, \mathbf{y}) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, \mathbf{y}) \right] \, d\mathbf{y} \right| &\leq \int_{\Omega} \omega \left(|h|, \frac{\partial f}{\partial x} \right) \, d\mathbf{y} = \\ &= |\Omega| \omega \left(|h|, \frac{\partial f}{\partial x} \right) \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0), \end{aligned}$$

где $\omega\left(\delta, \frac{\partial f}{\partial x}\right)$ — модуль непрерывности $\frac{\partial f}{\partial x}$ на (замкнутом ограниченном) множестве H .

Формулу (1) мы теперь обобщим, однако считая, что $f(x, y)$ есть функция от двух переменных чисел x, y .

Рассмотрим интеграл

$$F(x) = \int_{\psi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \quad (a \leq x \leq b), \quad (2)$$

где функции φ и ψ удовлетворяют неравенству $\varphi(x) \leq \psi(x)$ ($a \leq x \leq b$) и непрерывно дифференцируемы, а функция $f(x, y)$ от числовых переменных x, y непрерывна вместе со своей частной производной $\frac{\partial f}{\partial x}$ на множестве точек (x, y) (см. еще § 7.11), удовлетворяющих неравенствам $\varphi(x) \leq y \leq \psi(x)$, $a \leq x \leq b$. Покажем, что функция $F(x)$ имеет производную на $[a, b]$, определяемую по формуле

$$F'(x) = f(x, \psi(x)) \psi'(x) - f(x, \varphi(x)) \varphi'(x) + \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) dy. \quad (3)$$

Для этого введем вспомогательную функцию

$$\Phi(x, u, v) = \int_u^v f(x, y) dy, \quad (4)$$

заданную на множестве H точек (x, u, v) определяемом неравенствами $\varphi(x) \leq u \leq v \leq \psi(x)$ ($a \leq x \leq b$).

Функцию $z = F(x)$ можно рассматривать как сложную функцию $z = \Phi(x, u, v)$, $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$ ($a \leq x \leq b$), и ее производную можно вычислить по известной формуле

$$F'(x) = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial u} \varphi'(x) + \frac{\partial \Phi}{\partial v} \psi'(x), \quad (5)$$

где в правой части надо положить $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$.

Однако надо убедиться в том, что частные производные от Φ — непрерывные функции от (x, u, v) , и выразить их через f , φ , ψ .

Так как $f(x, y)$ непрерывна по y , то в силу теоремы о производной по верхнему и нижнему пределу интеграла из (4) следует

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v} = f(x, v), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial u} = -f(x, u), \quad (6)$$

и при этом правые части (6) в силу непрерывности f непрерывны по (x, u, v) , соответственно и левые.

Так как $\frac{\partial f}{\partial x}$ непрерывна по условию, то в силу (1)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \int_u^v f(x, y) dy = \int_u^v \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) dy \quad (7)$$

(см., впрочем, замечание ниже). Далее, можно формально считать, что $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \gamma(x, u, v; y)$ есть функция от переменных $(x, u, v; y)$. Она, очевидно, зависит непрерывно от этих переменных, а u и v можно считать функциями от (x, u, v) :

$$u = \lambda(x, u, v), \quad v = \mu(x, u, v), \quad (x, u, v) \in H,$$

тоже, очевидно, непрерывными. Поэтому в этих обозначениях

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \int_{\lambda(x, u, v)}^{\mu(x, u, v)} \gamma(x, u, v; y) dy.$$

Следовательно, $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ есть непрерывная функция от (x, u, v) (см. § 12.13, теорему 2).

Мы обосновали равенство (5).

Подстановка (6) и (7) в (5) и замена $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$ приводит к формуле (3).

Замечание. Равенство (7), строго говоря, доказано только в точках (x_0, u_0, v_0) , для которых

$$\varphi(x_0) < u_0 < v_0 < \psi(x_0). \quad (8)$$

В этом случае можно указать достаточно малое число $\delta > 0$ такое, что прямоугольник $\{|x - x_0| \leq \delta, u_0 \leq y \leq v_0\}$ будет принадлежать области определения $f(x, y)$. Это дает возможность применить формулу (1) (при $c = u_0$, $d = v_0$). Если $u_0 = \varphi(x_0)$ или $v_0 = \psi(x_0)$, то такого прямоугольника может и не быть при любом $\delta > 0$. Однако правая часть (7) имеет смысл и непрерывна для всех точек (x, u, v) замкнутого множества H , поэтому частная производная $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$, определенная только для точек (x_0, u_0, v_0) вида (8), продолжается непрерывно на все множество H , если ее положить равной правой части (7). Этим определяется обобщенная производная $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ на H . Теорема о производной сложной функции для обобщенных в этом смысле частных производных верна (см. § 7.11).

§ 13.13. Несобственный интеграл

Пусть G есть открытое измеримое множество n -мерного пространства и точка $x^0 \in G$.

Обозначим через $\omega(\varepsilon) = \{|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| \leq \varepsilon\}$ шар (замкнутый с центром в \mathbf{x}^0 радиуса $\varepsilon > 0$) и введем множество (открытое) $G_\varepsilon = G - \omega(\varepsilon)$.

Согласимся говорить, что *интеграл*

$$\int_G f d\mathbf{x} \quad (1)$$

имеет единственную особенность в x^0 , если функция f определена на G , не ограничена на G , но ограничена и интегрируема на G_ϵ , как бы ни было мало $\epsilon > 0$.

Подчеркнем, что если интеграл (1) имеет (единственную) особенность в точке x^0 , то подынтегральная функция $f(\mathbf{x})$ не интегрируема по Риману, ведь она не ограничена на измеримом открытом множестве G (см. теорему 1 § 12.10 и выше).

Если интеграл (1) имеет единственную особенность в точке x^0 , то говорят, что он существует как несобственный интеграл, если существует предел

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{G_\epsilon} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_G f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (2)$$

При этом мы теперь уже приписываем выражению (1) число, равное этому пределу — несобственному интегралу от f по G .

Так как при $0 < \delta_1 < \delta_2$

$$\int_{G_{\delta_1}} - \int_{G_{\delta_2}} = \int_{G_{\delta_1} - G_{\delta_2}},$$

то на основании условия Коши существования предела несобственный интеграл (2) при описанных выше условиях существует в том и только том случае, если для всякого $\epsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для любых δ_1, δ_2 , где $0 < \delta_1, \delta_2 < \delta$,

$$\left| \int_{G_{\delta_1} - G_{\delta_2}} f d\mathbf{x} \right| < \epsilon.$$

Отсюда ясно, что если Ω есть произвольное открытое измеримое множество, содержащее в себе точку x^0 и $G_1 = \Omega G$, то интегралы $\int_G f d\mathbf{x}$ и $\int_{G_1} f d\mathbf{x}$ одновременно оба существуют или одновременно

оба не существуют (рис. 13.21 и 13.22), потому что условие Коши для них одно и то же.

Обратимся к одномерному случаю. Пусть на интервале (одномерном) (a, b) задана функция $f(x)$ такая, что интеграл $\int_a^b f(x) dx$ имеет единственную особенность в точке $x^0 \in [a, b]$.

Если $x^0 = a$ или $x^0 = b$, то введенное здесь определение несобственного интеграла есть обычное его определение, с которым мы уже знакомы (см. § 9.12). Однако, если $x^0 \in (a, b)$, т. е. x^0 — внутренняя точка отрезка $[a, b]$, то согласно введенному здесь опреде-

лению несобственный интеграл считается существующим, если существует предел

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_a^{x^0-\varepsilon} f dx + \int_{x^0+\varepsilon}^b f dx \right) = \int_a^b f dx. \quad (3)$$

Но это есть определение одномерного интеграла (до Коши) в смысле главного значения (см. конец § 9.16), а не обычного (риманова) несобственного интеграла, в силу которого требуется существование пределов каждого из интегралов слева в (3) при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Имеет место очевидное равенство

$$\int_G (Af(x) + B\varphi(x)) dx = A \int_G f(x) dx + B \int_G \varphi(x) dx \quad (4)$$

(A и B — постоянные), которое, как обычно, надо читать так: *вместе с несобственными интегралами в правой части равенства (4) существует также несобственный интеграл в левой его части, равный правой части (4)*.

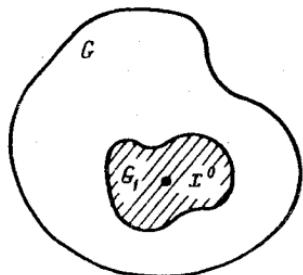


Рис. 13.21.

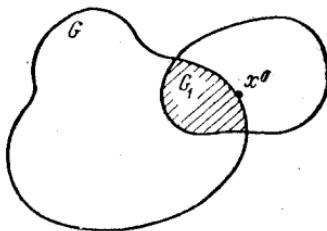


Рис. 13.22.

Если функция f неотрицательна на G , то предел (2), конечный или бесконечный, всегда существует, потому что выражение под знаком предела при монотонном стремлении ε к нулю не убывает.

В случае конечного предела принято писать:

$$\int_G f dx < \infty,$$

а в случае бесконечного —

$$\int_G f dx = \infty.$$

Ясно, что для неотрицательной функции одной переменной при $x^0 \in (a, b)$ определения интеграла в смысле главного значения и несобственного риманова интегралов совпадают — из существова-

ния предела суммы слева в (3) следует существование пределов каждого из двух слагаемых этой суммы.

Можно еще, очевидно, сказать, что *несобственный интеграл от неотрицательной на G описанной выше функции существует тогда и только тогда, когда выражение под знаком предела в (2) ограничено константой M, не зависящей от ε > 0.*

Можно дать еще одно эквивалентное определение: *несобственный интеграл по G от неотрицательной функции с единственной особенностью в точке x⁰ ∈ G есть предел*

$$\int_G f dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{G - \lambda_n} f dx, \quad (5)$$

где λ_n — области, обладающие следующими свойствами:

- 1) x⁰ ∈ λ_n,
- 2) λ_n ⊂ λ_{n+1},
- 3) диаметр d(λ_n) → 0 (n → ∞).

Если на G заданы две неотрицательные функции f и φ, интегралы от которых имеют единственную особенность в x⁰, и f(x) ≤ φ(x) (x ∈ G), то для любого ε > 0

$$\int_{G_\epsilon} f dx \leq \int_{G_\epsilon} \varphi dx.$$

Обе части этого неравенства монотонно возрастают при убывании ε, поэтому после перехода к пределу при ε → 0 получим неравенство

$$\int_G f dx \leq \int_G \varphi dx, \quad (6)$$

члены которого могут быть конечными и бесконечными. Из конечности интеграла справа в (6) следует конечность интеграла слева, а из бесконечности интеграла слева в (6) следует бесконечность интеграла справа.

Интеграл (1), имеющий единственную особенность в конечной точке x⁰, называется *абсолютно сходящимся*, если сходится интеграл

$$\int_G |f| dx < \infty \quad (7)$$

от абсолютной величины f(x). Если интеграл (1) абсолютно сходится, то он сходится, потому что из (7) следует, что для любого ε > 0 найдется такое δ > 0, что

$$\varepsilon > \int_{G_{\delta_1} - G_{\delta_2}} |f| dx \geq \left| \int_{G_{\delta_1} - G_{\delta_2}} f dx \right|, \quad 0 < \delta_1 < \delta_2 < \delta.$$

Пример 1. Рассмотрим интеграл

$$\int_{\Omega} \frac{dx}{r^\alpha}, \quad (8)$$

где $r = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ и Ω — единичный шар в n -мерном пространстве с центром в начале координат.

При $\alpha > 0$ (8) есть, очевидно, несобственный интеграл с единственной особенностью в нулевой точке. Его величина определяется как предел

$$\int_{\Omega} \frac{d\mathbf{x}}{r^\alpha} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\epsilon} \frac{d\mathbf{x}}{r^\alpha}.$$

Переход к полярным координатам

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos \varphi_1, \\ x_2 &= r \sin \varphi_1 \cos \varphi_2, \\ &\dots \\ x_{n-1} &= r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \dots \sin \varphi_{n-2} \cos \varphi_{n-1}, \\ x_n &= r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \dots \sin \varphi_{n-2} \sin \varphi_{n-1} \end{aligned}$$

с якобиапом

$$I = r^{n-1} \sin \varphi_1^{n-2} \sin \varphi_2^{n-3} \dots \sin \varphi_{n-2}$$

приводит к равенству

$$I_\alpha = \sigma_n \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^1 r^{n-\alpha-1} dr, \quad (9)$$

где $\sigma_n = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$ есть площадь поверхности сферы единичного шара в n -мерном пространстве.

Из (9) следует, что

$$\begin{aligned} I_\alpha &< \infty, \text{ если } \alpha < n, \\ I_\alpha &= \infty, \text{ если } \alpha \geq n. \end{aligned}$$

Этот пример можно обобщить, рассматривая интеграл

$$\int_{\Omega} \frac{|\varphi(\mathbf{x})| d\mathbf{x}}{r^\alpha}, \quad (10)$$

где φ — непрерывная функция на Ω . Положим

$$M = \max_{x \in \Omega} |\varphi(x)|.$$

При $\alpha < n$

$$\int_{\Omega} \frac{|\varphi(\mathbf{x})| d\mathbf{x}}{r^\alpha} \leq M \int_{\Omega} \frac{d\mathbf{x}}{r^\alpha} < \infty,$$

т. е. интеграл (10) абсолютно сходится.

Пусть теперь $\alpha \geq n$ и $|\varphi(0)| > 0$. Тогда существует шар ω с центром в нулевой точке, настолько малый, что на нем $|\varphi(\mathbf{x})| > \frac{|\varphi(0)|}{2} = m > 0$. Поэтому

$$\left| \int_{\omega} \frac{|\varphi(\mathbf{x})|}{r^\alpha} d\mathbf{x} \right| = \int_{\omega} \frac{|\varphi(\mathbf{x})|}{r^\alpha} d\mathbf{x} \geq m \int_{\omega} \frac{1}{r^\alpha} d\mathbf{x} = \infty,$$

и, следовательно, интеграл (10) при $\alpha \geq n$ расходится.

Понятие кратного интеграла в смысле Римана определяется для измеримой, следовательно, ограниченной области. Если область неограничена, то при известных условиях можно ввести понятие несобственного интеграла.

Пусть в n -мерном пространстве задано неограниченное множество G , обладающее тем свойством, что любой шар $\omega(R)$ с центром в нулевой точке и радиуса R пересекается с G по измеримому множеству $G(R) = G \cap \omega(R)$. Пусть, далее, на G определена функция $f(x)$, интегрируемая на $G(R)$ для любого R . В этом случае будем говорить, что f имеет единственную особенность в бесконечно удаленной точке (или на бесконечности), и определим несобственный интеграл от f на G как предел

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{G(R)} f dx = \int_G f dx. \quad (11)$$

Все, что мы говорили о несобственном интеграле с единственной особенностью в конечной точке x^0 , можно повторить с понятными видоизменениями для несобственного интеграла, имеющего единственную особенность на бесконечности. Нет необходимости это делать.

Пример 2. Интеграл

$$I_\alpha = \int_{r>1} \frac{dx}{r^\alpha} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{1 < r < R} \frac{dx}{r^\alpha}$$

с помощью введения полярных координат сводится к выражению

$$I_\alpha = \sigma_n \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R r^{n-\alpha-1} dr = \begin{cases} \frac{\sigma_n}{n-\alpha}, & \alpha > n, \\ \infty, & \alpha \leq n. \end{cases}$$

Наконец, может быть более общий случай, когда замыкание области G , где задана функция f , может быть разбито на конечное число попарно пересекающихся разве что по своим границам замыканий открытых множеств

$$\bar{G} = \bar{G}_1 + \dots + \bar{G}_N. \quad (12)$$

При этом каждый из интегралов $\int_{\bar{G}_j} f dx$ имеет единственную особенность (особую точку x^j), и если G неограничена, то только один из них имеет в качестве особой точки бесконечно удаленную. Кроме того, все точки x^j различны.

Несобственный интеграл от f на G определяется как сумма

$$\int_G f dx = \sum_{j=1}^N \int_{\bar{G}_j} f dG. \quad (13)$$

Если хотя бы один интеграл, входящий в эту сумму, расходится, то интеграл слева в (13) считается расходящимся. Подоб-

ным образом этот последний считается абсолютно сходящимся тогда и только тогда, когда абсолютно сходятся все интегралы, входящие в сумму (13).

Мы не будем приводить простые рассуждения, показывающие, что сделанное определение приводит к результату (числу), независимому от возможных способов разбиения G на части.

Пример 3. Очевидно, что интеграл $\int_{R_n} \frac{dx}{r^\alpha}$, где R_n — все n -мерное пространство, расходится при любом действительном α .

Пример 4. Интеграл

$$I = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x^2-y^2} dx dy$$

можно определить как предел

$$I = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N \int_0^N e^{-x^2-y^2} dx dy = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N e^{-x^2} dx \int_0^N e^{-y^2} dy = \left(\int_0^\infty e^{-x^2} dx \right)^2,$$

где несобственный интеграл от одной переменной справа сходится. Но если $\Omega(N)$ есть четверть круга из первого квадранта с центром в начальной точке радиуса N и (ρ, θ) — полярные координаты точек плоскости, то

$$I = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\Omega(N)} \int e^{-\rho^2} \rho d\rho d\theta = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{\pi/2} d\theta \frac{1}{2} \int_0^N e^{-\rho^2} d(\rho^2) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

Отсюда

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Пример 5. Функция $\psi(x)$, равная $\frac{e^{-|x|}}{|x|}$ в точках $x = (x_1, \dots, x_n)$ с иррациональными координатами и $-\frac{e^{-|x|}}{|x|}$ в остальных точках n -мерного пространства R_n , не является абсолютно интегрируемой, несмотря на то что интеграл

$$\int_{R_n} |\psi| dx < \infty$$

сходится. Ведь $\psi(x)$ всюду разрывна на R_n .

Упражнение Проверить, сводя вопрос к полярным координатам, что для фундаментального решения уравнения теплопроводности v (§ 7.7, упражнение)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} v dx dy dz = 1 \quad (t_0 > t).$$

Замечание. Пусть ограниченная область Ω имеет дважды непрерывно дифференцируемую гладкую границу S . Обозначим через S_λ принадлежащую Ω поверхность, отстоящую по направ-

лению внутренних нормалей к S на расстоянии $\lambda > 0$ (см. § 7.25), и пусть $\Omega_\lambda \subset \Omega$ — область с границей S_λ .

Если на Ω задана неограниченная функция $f(x)$, но интегрируемая на Ω_λ при любом достаточно малом $\lambda > 0$, то можно определить несобственный интеграл от f на Ω как предел

$$\int_{\Omega} f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{\Omega_\lambda} f(x) dx,$$

если он существует.

На основе этого определения можно ввести также понятие абсолютно сходящегося интеграла.

Данное определение несобственного интеграла для функции, имеющей особенности вдоль границы области, но идея соответствует определению (2), рассматриваемому в этом параграфе. Более жесткое определение было дано в § 12.22. Для неотрицательной функции оба они для указанной здесь области, конечно, совпадают. Но данное определение является более общим, потому что можно показать, что если интеграл в смысле § 12.22 сходится, то он сходится абсолютно. Данное определение уже применялось при выводе обобщенной теоремы Гаусса — Остроградского (см. конец § 13.5, §§ 13.6, 13.10).

§ 13.14. Равномерная сходимость несобственного интеграла

Пусть $\Omega \subset R_m$ и $D \subset R_n$ — множества m - и n -мерных пространств, а D , кроме того, измерима. Пусть еще $y^0 \in \overline{D}$ и ω_δ обозначает открытый шар радиуса δ с центром в y^0 .

Рассмотрим интеграл

$$F(x) = \int_D f(x, y) dy \quad (x \in \Omega), \quad (1)$$

имеющий единственную особенность в точке y^0 . Таким образом, $f(x, y)$ неограничена по y на D , однако ограничена и интегрируема на $D \setminus \omega_\delta$ при любом $\delta > 0$. По определению интеграл (1) равномерно сходится относительно $x \in \Omega$, если он сходится для любого $x \in \Omega$ и для любого $\epsilon > 0$ можно указать $\delta_0 > 0$ такое, что при любом δ , удовлетворяющем неравенствам $0 < \delta < \delta_0$, имеет место ($D \omega_\delta = D \cap \omega_\delta$)

$$\left| \int_{D \setminus \omega_\delta} f(x, y) dy \right| \leq \epsilon \quad (2)$$

для любого $x \in \Omega$. Здесь важно, что δ_0 (и δ) не зависит от $x \in \Omega$.

Введем для положительного $\delta > 0$ интеграл

$$F_\delta(x) = \int_{\overline{D} \setminus \omega_\delta} f(x, y) dy,$$

очевидно, не имеющий особенностей. Неравенство (2) можно переписать так:

$$|F(x) - F_\delta(x)| = \left| \int_{\omega_\delta} f(x, y) dy \right| < \varepsilon,$$

и мы получим, что для любого $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое δ_0 , что для всех δ , удовлетворяющих неравенствам $0 < \delta < \delta_0$, и любых $x \in \Omega$

$$|F(x) - F_\delta(x)| < \varepsilon.$$

Но это свойство, как мы знаем, выражает, что

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} F_\delta(x) = F(x) \text{ равномерно на } \Omega \quad (3)$$

Очевидно, и наоборот — из (3) следует (2).

Таким образом, равенство (3) можно рассматривать как другое эквивалентное определение равномерной сходимости интеграла (1) на Ω .

Справедлива теорема.

Теорема 1. Если функция $f(x, y)$ непрерывна на $\bar{\Omega} \times \bar{D}$, за исключением точек (x, y^0) , и интеграл (1) равномерно сходится относительно $x \in \bar{\Omega}$, то он есть непрерывная функция от $x \in \bar{\Omega}$.

Доказательство. Из условия теоремы следует, что функция $f(x, y)$ непрерывна в точках (x, y) , принадлежащих замкнутому ограниченному множеству

$$\bar{\Omega} \times (\bar{D} \setminus \omega_0), \quad (4)$$

где $\bar{D} \setminus \omega_0$ к тому же измеримо.

Поэтому функции $F_\delta(x)$ непрерывны на $\bar{\Omega}$ (см. теорему 1 § 12.13). Кроме того, $F_\delta(x) \rightarrow F(x)$ при $\delta \rightarrow 0$ равномерно на $\bar{\Omega}$. Но тогда на основании теоремы 2 § 11.7 функция $F(x)$ непрерывна на $\bar{\Omega}$.

Правда, эта теорема была доказана для последовательности функций $\{f_n\}$, зависящих от натурального параметра n , но она, очевидно, верна и доказательство ее аналогично, если считать, что n непрерывно стремится к некоторому числу n_0 .

Теорема 2. При условиях теоремы 1 и если Ω измеримо ($\in R_m$), функцию $F(x)$:

$$F(x) = \int_D f(x, y) dy \quad (x \in \bar{\Omega}) \quad (5)$$

можно интегрировать по Ω под знаком интеграла:

$$\int_{\Omega} F(x) dx = \int_D dy \int_{\Omega} f(x, y) dx. \quad (6)$$

Доказательство. Из доказательства теоремы 1 мы знаем, что при условиях этой теоремы функции $F_\delta(x)$ и $F(x)$ непрерывны

на Ω и $F_\delta(x) \rightarrow F(x)$, $\delta \rightarrow 0$ равномерно на Ω . Это значит, что

$$\eta_\delta = \max_{x \in \Omega} |F_\delta(x) - F(x)| \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0. \quad (7)$$

Но тогда

$$\int_{\Omega} F_\delta(x) dx \rightarrow \int_{\Omega} F(x) dx, \quad \delta \rightarrow 0, \quad (8)$$

потому что

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} F_\delta(x) dx - \int_{\Omega} F(x) dx \right| &\leq \int_{\Omega} |F_\delta(x) - F(x)| dx \leq \\ &\leq \eta_\delta |\Omega| \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Из (7) следует:

$$\begin{aligned} \int_{D \setminus \omega_\delta} dy \int_{\Omega} f(x, y) dx &= \int_{\Omega} dx \int_{D \setminus \omega_\delta} f(x, y) dy = \\ &= \int_{\Omega} F_\delta(x) dx \rightarrow \int_{\Omega} F(x) dx = \int_{\Omega} dx \int_D f(x, y) dy, \quad \delta \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (10)$$

что доказывает равенство (6).

Первое равенство в цепи (10) при любом $\delta > 0$ представляет собой обычную перестановку интегралов по x и y для функции $f(x, y)$ непрерывной на замкнутом измеримом множестве $\Omega \times (\bar{D} \setminus \omega_\delta)$ (см. § 12.12).

Заметим, что интеграл по y в правой части (6) есть несобственный интеграл с единственной особой точкой $y^0 \in \bar{\Omega}$. Существование его доказано.

Теорема 3. Пусть G есть открытое измеримое множество пространства R_n , $y^0 \in G$ и $[a, b]$ — отрезок изменения числовой переменной x . Пусть, далее, функция $f(x, y)$ непрерывна и имеет непрерывную частную производную $\frac{\partial f}{\partial x}$ всюду на множестве $[a, b] \times G$ ($x \in [a, b]$, $y \in G$), за исключением, быть может, точек вида (x, y^0) , в окрестности которых $f(x, y)$ вообще неограничена.

Тогда, если интеграл

$$F(x) = \int_G f(x, y) dy \quad (a \leq x \leq b) \quad (11)$$

сходится и интеграл

$$F_1(x) = \int_G \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) dy \quad (12)$$

равномерно сходится относительно $x \in [a, b]$, то интеграл (11) равномерно сходится на $[a, b]$ и

$$F'(x) = F_1(x), \quad (13)$$

т. е. законно дифференцировать F под знаком интеграла:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_G f(x, y) dy = \int_G \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) dy. \quad (14)$$

Доказательство этой теоремы основано на следующей теореме, которая уже была доказана (см. § 11.8, теорема 3).

Теорема 4. Пусть задана последовательность непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ функций $S_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$), сходящаяся по крайней мере в одной точке этого отрезка, и пусть последовательность производных $S'_n(x)$ равномерно на $[a, b]$ сходится к некоторой функции $\varphi(x)$. Тогда последовательность $\{S_n(x)\}$ сходится во всех точках $[a, b]$ и при этом равномерно на $[a, b]$ к некоторой непрерывно дифференцируемой функции $S(x)$ и $S'(x) = \varphi(x)$.

В этой формулировке на самом деле можно считать, что n стремится непрерывно к некоторому числу n_0 или пробегая последовательность чисел n_k .

Доказательство теоремы 3. Для $\delta > 0$ положим

$$F_\delta(x) = \int_{G \setminus \omega_\delta} f(x, y) dy.$$

Тогда (см. § 13.12)

$$\frac{\partial}{\partial x} F_\delta(x) = \int_{G \setminus \omega_\delta} \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) dy = F_{1\delta}(x),$$

потому что f и $\frac{\partial f}{\partial x}$ непрерывны на $\bar{G} \setminus \omega_\delta$.

По условию для некоторого x

$$F_\delta(x) \rightarrow F(x), \quad \delta \rightarrow 0, \quad x \in [a, b]. \quad (15)$$

Кроме того, в силу равномерной сходимости интеграла (12),

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial x} F_\delta(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} F_{1\delta}(x) = F_1(x) \quad (16)$$

равномерно на $[a, b]$.

Из (15) и (16) на основании теоремы 4 следует, что $F(x)$ имеет на $[a, b]$ производную, равную $F_1(x)$.

Во всех доказанных теоремах существенную роль играло свойство несобственного интеграла быть равномерно сходящимся относительно параметра. Если это свойство не имеет места, то интеграл называется *неравномерно сходящимся* относительно параметра. Для неравномерно сходящихся интегралов, вообще говоря, указанные три теоремы не верны.

Важным критерием равномерной сходимости интеграла является *критерий Вейерштрасса*. Его можно сформулировать в виде следующей теоремы:

Теорема 5. Пусть интеграл (1) имеет особенность в точке $y^0 \in \bar{D}$ для всех $x \in \Omega$. Пусть, кроме того, существует неотрица-

тельная функция $\varphi(y)$ такая, что

$$|f(x, y)| \leq \varphi(y) \text{ для всех } (x, y) \in \Omega \times \bar{D}, \quad (17)$$

и при этом несобственный интеграл

$$\int_D \varphi(y) dy < \infty \quad (18)$$

существует. Тогда интеграл (1) равномерно сходится относительно $x \in \bar{G}$.

Доказательство. Из (18) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta_0 > 0$, что

$$\int_{D\omega_\delta} \varphi(y) dy < \varepsilon \quad (0 < \delta < \delta_0),$$

где ω_δ — шар с центром в y^0 радиуса δ . Поэтому в силу (17)

$$\left| \int_{D\omega_\delta} f(x, y) dy \right| \leq \int_{D\omega_\delta} \varphi(y) dy < \varepsilon$$

для всех $x \in \bar{G}$. Теорема доказана.

Пример 1. Интеграл

$$\psi(a) = \int_0^1 x^{a-1} dx \quad (a > 0) \quad (19)$$

существует для любых $a > 0$. При $a > 0$ он, если имеет, то единственную особую точку $x = 0$. Точнее, при $0 < a < 1$ точка $x = 0$ — особая, а при $a \geq 1$ на отрезке $[0, 1]$ подынтегральная функция непрерывна и интеграл никаких особенностей не имеет. Но при исследовании остатка интеграла на равномерную сходимость можно не думать о том, является ли точка $x = 0$ на самом деле особой или нет. Здесь важно только знать, что если существует у интеграла особая точка, то она есть $x = 0$.

Остаток интеграла, соответствующий точке $x = 0$, равен

$$\left| \int_0^\delta x^{a-1} dx \right| = \frac{\delta^a}{a}.$$

Для произвольного $\varepsilon > 0$ невозможно подобрать $\delta > 0$ так, чтобы остаток был меньшим ε для всех $a > 0$, потому что при любом фиксированном δ $\lim_{a \rightarrow 0} (\delta^a/a) = \infty$ ($a > 0$). Поэтому интеграл (19) сходится неравномерно

относительно $a > 0$. Очевидно также, что он неравномерно сходится относительно $a \in (0, a_0)$, где a_0 — произвольное фиксированное положительное число.

Однако на полупрямой $a_0 \leq a < \infty$ ($a_0 > 0$), и тем более на конечном отрезке $[a_0, a_1]$, интеграл (19) сходится равномерно, что может быть доказано с помощью признака Вейерштрасса. В самом деле, если $a_0 \leq a$, то на отрезке $[0, \delta]$, где $0 < \delta < 1$, $x^{a-1} \leq x^{a_0-1}$, а интеграл

$$\int_0^\delta x^{a_0-1} dx < \infty$$

сходится.

Функция $\psi(a)$ непрерывна для всех $a > 0$. В самом деле, зададим произвольное $a_0 > 0$, и пусть

$$0 < a_1 < a_0 < a_2.$$

Подынтегральная функция $x^{a-1} = \varphi(x, a)$ непрерывна на прямоугольнике $\Delta = \{0 \leq x \leq 1, a_1 \leq a \leq a_2\}$, за исключением, быть может, точек с $x = 0$, интеграл (19) равномерно сходится относительно $a \in [a_1, a_2]$. Тогда на основании теоремы 1 $\psi(a)$ непрерывна на $[a_1, a_2]$ и, в частности, в точке $a = a_0$.

Если $a > 0$, то справедлива формула

$$\psi'(a) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial a} x^{a-1} dx = \int_0^1 x^{a-1} \ln x dx. \quad (20)$$

Снова, если мы хотим ее проверить для $a = a_0 > 0$, подбираем числа a_1, a_2 такие, что $0 < a_1 < a_0 < a_2$, и, чтобы применить теорему 3, убеждаемся в равномерной сходимости интеграла (20) относительно $a \in [a_1, a_2]$. Здесь удобно применить признак Вейерштрасса.

Так как $\lim_{x \rightarrow 0} x^\lambda \ln x = 0$ ($\lambda > 0$) и функция $x^\lambda \ln x$ непрерывна на $(0, 1]$, то существует положительная константа C такая, что $|x^\lambda \ln x| \leq C$ ($0 < x \leq 1$). Поэтому при $0 < \lambda < a_1$ на отрезке $[0, 1]$

$$|x^{a-1} \ln x| = |x^{a-\lambda-1} x^\lambda \ln x| \leq C x^{a-\lambda-1} \leq C x^{a_1-\lambda-1}, \quad a \in [a_1, a_2],$$

интеграл справа в (20) равномерно сходится, так как интеграл

$$\int_0^1 C x^{a_1-\lambda-1} dx < \infty$$

сходится. Если еще учесть, что функция $\frac{\partial}{\partial a} x^{a-1} = x^{a-1} \ln x$ непрерывна на прямоугольнике $[0, 1] \times [a_1, a_2]$, за исключением, быть может, точек $(0, a)$, то в силу теоремы 3 равенство (20) верно.

Пример 2. Бета-функция. Функция

$$B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx \quad (24)$$

называется *бета-функцией*. Интеграл (24), если имеет особенности, то только в точках $x = 0$ и $x = 1$. Поэтому при изучении равномерной сходимости этого интеграла удобно разложить его на два интеграла:

$$B_1(a, b) = \int_0^{1/2} x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx,$$

$$B_2(a, b) = \int_{1/2}^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx.$$

Интеграл B_1 , если имеет особую точку, то при $x = 0$. Он сходится при $a > 0$ и любом b , потому что

$$\int_0^{1/2} x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx \leq M_b \int_0^{1/2} x^{a-1} dx < \infty, \quad M_b = \max_{0 < x < \frac{1}{2}} (1-x)^{b-1},$$

и расходится при $a \leq 0$, потому что

$$\int_0^{1/2} x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx \geq m_b \int_0^{1/2} x^{a-1} dx = \infty, \quad m_b = \min_{1 \leq x \leq 1/2} (1-x)^{b-1} > 0.$$

Аналогично интеграл $B_2(a, b)$ сходится при $b > 0$ и расходится при $b \leq 0$. Поэтому бета-функция имеет смысл только при $a > 0$ и $b > 0$.

Чтобы показать, что $B_1(a, b)$ непрерывна (относительно (a, b)) в точке (a_0, b_0) ($a_0 > 0, b_0 > 0$), определим прямоугольник $\Delta = \{a_1 \leq a \leq a_2; b_1 \leq b \leq b_2\}$ ($a_1, b_1 > 0$), строго внутри которого находится точка (a_0, b_0) .

Остаток интеграла можно оценить следующим образом:

$$\int_0^{\delta} x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx \leq M_{b_1} \int_0^{\delta} x^{a-1} dx = M_{b_1} \frac{\delta^a}{a} \leq M_{b_1} \frac{\delta^{a_1}}{a_1}.$$

Можно для любого $\varepsilon > 0$ указать такое $\delta_0 > 0$, что для $0 < \delta < \delta_0$

$$M_{b_1} \frac{\delta^{a_1}}{a_1} \leq \frac{M_{b_1} \delta_0^{a_1}}{a_1} < \varepsilon,$$

т. е. интеграл, определяющий $B_1(a, b)$, равномерно сходится относительно $(a, b) \in \Delta$:

$$\int_0^{\delta} x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx < \varepsilon$$

для любых $(a, b) \in \Delta$ и $0 < \delta < \delta_0$, и так как под интегралом стоит непрерывная функция от (x, a, b) , $x > 0$, $(a, b) \in \Delta$, то B_1 непрерывна в точке (a_0, b_0) . Аналогично устанавливается непрерывность $B_2(a, b)$.

Имеет место

$$\frac{\partial}{\partial a} \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx = \int_0^1 x^{a-1} \ln x (1-x)^{b-1} dx \quad (0 < a, b),$$

так как оба интеграла, входящие в это равенство, сходятся, второй же интеграл, как нетрудно показать, равномерно сходится в достаточно малой окрестности точки a , и, кроме того, подынтегральная функция в правой части равенства непрерывна относительно (x, a) , за исключением точек $(0, a)$. Легко установить, рассуждая аналогично, что существует непрерывная на $[a, b]$ ($a, b > 0$) частная производная

$$\frac{\partial^{k+l} B}{\partial a^k \partial b^l} = \int_0^1 x^{a-1} \ln^k x (1-x)^{b-1} \ln^l (1-x) dx$$

при любых $k, l = 0, 1, \dots$

§ 13.15. Равномерно сходящийся интеграл для неограниченной области

Будем рассматривать интеграл

$$F(x) = \int_D f(x, y) dy \quad (x \in G) \tag{1}$$

на неограниченной области D такой, что при любом $\mathbf{x} \in G$ он имеет бесконечно удаленную точку в качестве единственной особой точки. Говорят, что *интеграл (1) равномерно сходится относительно $\mathbf{x} \in G$* , если он сходится для всех $\mathbf{x} \in G$, и для любого $\epsilon > 0$ можно указать не зависящее от \mathbf{x} достаточно большое R_0 , такое, что для любого R , удовлетворяющего неравенству $R > R_0$,

$$\left| \int_{D \setminus \omega_R} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} \right| < \epsilon,$$

где ω_R — шар радиуса R с центром в нулевой точке.

Если функция $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ непрерывна на $\bar{G} \times D$ и интеграл (1) равномерно сходится относительно $\mathbf{x} \in \bar{G}$, то функция $F(\mathbf{x})$ непрерывна на \bar{G} . Если, кроме того, G — измеримое множество, то имеет место равенство

$$\int_G F(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_G d\mathbf{x} \int_D f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int_D d\mathbf{y} \int_G f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x}. \quad (2)$$

Если теперь x есть числовая переменная, пробегающая отрезок $[a, b]$, и $f(x, \mathbf{y})$ непрерывна вместе со своей частной производной $\frac{\partial f}{\partial x}$ на $[a, b] \times D$, интеграл (1) сходится, а интеграл

$$F_1(x) = \int_D \frac{\partial}{\partial x} f(x, \mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

равномерно сходится относительно $x \in [a, b]$, то $F'(x) = F_1(x)$ или

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_D f(x, \mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int_D \frac{\partial}{\partial x} f(x, \mathbf{y}) d\mathbf{y}. \quad (3)$$

Наконец, если для нашей функции $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ выполняется неравенство $|f(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq \varphi(\mathbf{y})(\mathbf{x} \in G)$ и существует несобственный интеграл $\int_D \varphi(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$, то интеграл (1) сходится для любого $\mathbf{x} \in G$ и *притом равномерно (признак Вейерштрасса)*.

Указанные утверждения аналогичны соответствующим теоремам 1—4 предыдущего параграфа. Они и доказываются совершенно аналогично. Вообще эти утверждения аналогичны соответствующим теоремам о непрерывности, интегрируемости и дифференцируемости равномерно сходящихся рядов функций. Их можно доказать единым образом, вводя более общие несобственные интегралы (Стилтьеса), содержащие в себе как частные случаи, с одной стороны, рассматриваемые здесь интегралы, а с другой — бесконечные ряды.

Пример 1. Гамма-функция. Интеграл

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx \quad (4)$$

называется *гамма-функцией* или *эйлеровым интегралом первого рода*. Он имеет особую точку $x = \infty$, при $0 < a < 1$ еще особую точку $x = 0$. Поэтому при исследовании его свойств удобно разложить его на два интеграла:

$$\Gamma(a) = \int_0^1 x^{a-1} e^{-x} dx + \int_1^\infty x^{a-1} e^{-x} dx = \varphi_1(a) + \varphi_2(a).$$

Первый интеграл равномерно сходится для всех $a \geq a_0 > 0$, каково бы ни было положительное число a_0 . В самом деле,

$$x^{a-1} e^{-x} \leq x^{a_0-1} \cdot 1 = x^{a_0-1} \quad (0 \leq x \leq 1),$$

и так как интеграл

$$\int_0^1 x^{a_0-1} dx < \infty,$$

то наше утверждение вытекает из критерия Вейерштрасса. Относительно всех $a > 0$ первый интеграл сходится равномерно, потому что при любом $\delta < 1$

$$\int_0^\delta x^{a-1} e^{-x} dx \geq m \int_0^\delta x^{a-1} dx = \frac{m\delta^a}{a} \rightarrow \infty \quad (a \rightarrow 0), \quad m = \min_{0 \leq x \leq 1} e^{-x},$$

и, таким образом, невозможно для любого $\varepsilon > 0$ подобрать такое δ , чтобы остаток первого интеграла был меньше ε для всех $a > 0$.

Второй интеграл, очевидно, сходится для любого действительного a . Если a_0 — любое число, то для $a \leq a_0$

$$x^{a-1} e^{-x} \leq x^{a_0-1} e^{-x} \quad (1 \leq x < \infty),$$

и так как

$$\int_1^\infty x^{a_0-1} e^{-x} dx < \infty,$$

то по критерию Вейерштрасса второй интеграл равномерно сходится для всех $a \leq a_0$. Однако он не сходится равномерно для всех a , потому что для $N > 1$ и $a > 1$

$$\int_N^\infty x^{a-1} e^{-x} dx \geq N^{a-1} \int_N^\infty e^{-x} dx = N^{a-1} e^{-N} \rightarrow \infty \quad (a \rightarrow \infty)$$

при любом фиксированном N .

Во всяком случае, доказано, что если $a_0 > 0$, то на отрезке $[a_1, a_2]$ ($0 < a_1 < a_0 < a_2$) изменения a оба интеграла $\varphi_1(a)$ и $\varphi_2(a)$ равномерно сходятся и в силу очевидных непрерывных свойств подынтегральной функции гамма-функция непрерывна в a_0 (для любых $a_0 > 0$),

Легко проверяется, что интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial a} x^{a-1} e^{-x} dx = \int_0^{\infty} x^{a-1} \ln x e^{-x} dx \quad (5)$$

распадается на два интеграла (от 0 до 1 и от 1 до ∞), равномерно сходящихся на любом отрезке (a_1, a_2) изменения a , где $a_1 > 0$, откуда в силу непрерывности при $x > 0$ подынтегрального выражения (5)

$$\Gamma'(a) = \int_0^{\infty} x^{a-1} \ln x e^{-x} dx.$$

Подобным образом доказывается, что

$$\Gamma^{(k)}(a) = \int_0^{\infty} x^{a-1} (\ln x)^k e^{-x} dx$$

и, таким образом, $\Gamma(a)$ бесконечно дифференцируема ($a > 0$). На самом деле это аналитическая функция от a .

Заметим, что при $a > 1$

$$\begin{aligned} \Gamma(a) &= \int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-x} dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ -x^{a-1} e^{-x} \Big|_0^N + (a-1) \int_0^N x^{a-2} e^{-x} dx \right\} = \\ &= (a-1) \Gamma(a-1). \end{aligned} \quad (6)$$

Поэтому при $a = n$ натуральном

$$\Gamma(n+1) = n \Gamma(n) = n(n-1) \Gamma(n-1) = \dots = n! \Gamma(1) = n! \int_0^{\infty} e^{-x} dx = n!, \quad (7)$$

откуда видно, что гамма-функцию естественно рассматривать как обобщение факториала.

Пример 2. Интеграл

$$A(\lambda) = \int_0^{\infty} \frac{\sin \lambda x}{x} dx \quad (-\infty < \lambda < \infty) \quad (8)$$

имеет особенности в бесконечно удаленных точках ($x = \pm\infty$) и сходится для любого указанного λ . Однако он сходится равномерно на множестве $\lambda_0 \leq |\lambda| < \infty$ ($\lambda_0 > 0$) и неравномерно на отрезке $[0, \lambda_0]$. В самом деле, при $\lambda > 0$ его остаточный член

$$\begin{aligned} R_N(\lambda) &= \int_N^{\infty} \frac{\sin \lambda x}{x} dx = \int_N^{\infty} \frac{\sin \lambda x}{\lambda x} d(\lambda x) = \int_{N\lambda}^{\infty} \frac{\sin z}{z} dz = \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{\cos z}{z} \Big|_{N\lambda}^M - \int_{N\lambda}^M \frac{\cos z}{z^2} dz \right\} = \frac{\cos N\lambda}{N\lambda} - \int_{N\lambda}^{\infty} \frac{\cos z}{z^2} dz, \end{aligned}$$

откуда

$$|R_N(\lambda)| \leq \frac{1}{N\lambda} + \int_{N\lambda}^{\infty} \frac{dz}{z^2} = \frac{1}{N\lambda} + \frac{1}{N\lambda} = \frac{2}{N\lambda}$$

и (для $\lambda_0 \leq \lambda < \infty$)

$$|R_N(\lambda)| \leq \frac{2}{N\lambda_0} \rightarrow 0, \quad \lambda_0 \rightarrow \infty,$$

т. е. для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое N_0 , что $|R_N(\lambda)| < \varepsilon$ для всех $N > N_0$, каково бы ни было $\lambda \in [\lambda_0, \infty)$. С другой стороны, не может быть неравенства

$$\left| \int_{N\lambda}^{\infty} \frac{\sin z}{z} dz \right| < \varepsilon$$

при фиксированном, пусть очень большом, N и для всех $\lambda \in [0, \lambda_0]$, где $\varepsilon > 0$ — любое наперед заданное число. Ведь при фиксированном N и $\lambda \rightarrow 0$ левая часть этого неравенства стремится к (см. ниже (10)) интегралу

$$A = \int_0^{\infty} \frac{\sin z}{z} dz > 0.$$

Имеют место равенства

$$A(\lambda) = \begin{cases} A, & \lambda > 0, \\ 0, & \lambda = 0, \\ -A, & \lambda < 0. \end{cases}$$

Чтобы убедиться в этом, при $\lambda \neq 0$ надо сделать в интеграле (8) подстановку $u = \lambda x$.

Интеграл (8) равномерно сходится для $\lambda \in [N, N']$, где $0 < N < N'$, поэтому, учитывая, что под интегралом стоит непрерывная функция от $(\lambda, x) \in [N, N'] \times [0, \infty)$, получим

$$\int_N^{N'} d\lambda \int_0^{\infty} \frac{\sin \lambda x}{x} dx = \int_0^{\infty} dx \int_N^{N'} \frac{\sin \lambda x}{x} d\lambda = \int_0^{\infty} \frac{\cos Nx - \cos N'x}{x^2} dx. \quad (9)$$

Мы считаем здесь, что функция $\frac{\sin \lambda u}{u}$ равна λ при $u = 0$, и тогда очевидно, что функция $\frac{\sin \lambda x}{x} = \frac{\sin \lambda x}{\lambda x} \lambda$ от (λ, x) непрерывна в любой точке $(\lambda, 0)$, где $\lambda \in [0, \infty)$.

Равенство (9) верно и при $N = 0$, хотя оно пока не доказано, потому что интеграл (8) сходится неравномерно на $[0, N']$. Но его можно получить переходом к пределу в (9) при $N \rightarrow 0$, что законно — ведь разность между значением при $N = 0$ интеграла, стоящего справа в (9), и значением его для какого-либо N равна

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos Nx}{x^2} dx = 2 \int_0^1 \frac{\sin^2 \frac{N}{2} x}{x^2} dx + 2 \int_1^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{N}{2} x}{x^2} dx = \psi_1(N) + \psi_2(N).$$

При этом $\lim_{N \rightarrow 0} \psi_1(N) = \psi_1(0) = 0$ в силу непрерывности функции $x^{-2} \sin^2 \frac{N}{2} x$ в точках $(N, x) \in [0, 1] \times [0, 1]$ (теорема 1 § 12.13) и $\lim_{N \rightarrow 0} \psi_2(N) = \psi_2(0) = 0$ в силу непрерывности этой функции в точках $(N, x) \in [0, 1] \times [1, \infty]$ и равномерной сходимости интеграла \int_1^∞ относительно $N \in [0, 1]$ (см. § 13.15).

Если положить в (9) $N = 0$, $N' = 1$ и учесть, что слева в (9) интеграл по x равен A , то получим

$$A = \int_0^\infty \frac{1 - \cos x}{x^2} dx = \int_0^\infty \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 d\left(\frac{x}{2}\right) = \int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2} dx. \quad (10)$$

Пример 3. Докажем равенство

$$I(s) = \int_0^\infty e^{-x^2} \cos sx dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{s^2}{4}} \quad (-\infty < s < \infty). \quad (11)$$

В самом деле,

$$I'(s) = - \int_0^\infty e^{-x^2} x \sin sx dx. \quad (12)$$

Дифференцирование под знаком интеграла здесь законно, потому что несобственные интегралы (11), (12) подчиняются признаку Вейерштрасса

$$|e^{-x^2} \cos sx| \leq e^{-x^2}, \quad \int_0^\infty e^{-x^2} dx < \infty,$$

$$|e^{-x^2} x \sin sx| \leq xe^{-x^2}, \quad \int_0^\infty xe^{-x^2} dx < \infty,$$

кроме того, подынтегральные функции в (11), (12) непрерывны по (s, x) , $s \in (-\infty, \infty)$, $x \in [0, \infty)$.

Интегрируя (12) по частям, получим

$$I'(s) = \frac{1}{2} e^{-x^2} \sin sx \Big|_0^\infty - \frac{s}{2} \int_0^\infty e^{-x^2} \cos sx dx = -\frac{s}{2} I(s).$$

Здесь $\Big|_0^\infty = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\cdot \Big|_\varepsilon^\infty \right)$.

Мы получили для $I = I(s)$ дифференциальное уравнение

$$\frac{dI}{ds} = -\frac{s}{2} I,$$

решив которое, приняв во внимание, что

$$I(0) = \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

(см. § 13.14, пример 4), получим

$$I(s) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-s^2/4},$$

т. е. (11).

Пример 4. Справедливо равенство

$$\int_0^\infty x e^{-x^2} \sin sx dx \approx \frac{\sqrt{\pi}}{4} s e^{-\frac{s^2}{4}}$$

(указание: проинтегрировать по частям интеграл и воспользоваться равенством (11)).

Упражнения.

1. Проверить, что интеграл (Пуассона для верхней полуплоскости)

$$U(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \frac{y dt}{(x-t)^2 + y^2},$$

где $\varphi(t)$ — граничная интегрируемая на любом конечном отрезке функция, равномерно сходится вместе со своими частными производными на любом ограниченном замкнутом множестве точек (x, y) , принадлежащем верхней полуплоскости ($y > 0!$). Доказать, что U — гармоническая в верхней полуплоскости функция. Учесть, что $y/(x^2 + y^2)$ есть гармоническая функция для $x^2 + y^2 > 0$.

2. Проверить, что интеграл (Пуассона для круга)

$$U(\rho, \theta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} P_\rho(t - \theta) \varphi(t) dt$$

(см. § 11.8, пример 3), где $\varphi(t)$ — периода 2π интегрируемая на периоде функция, равномерно сходится на любом круге $\rho < \rho_0$ ($\rho_0 < 1$) вместе со своими частными производными (по ρ и θ).

§ 13.16. Равномерно сходящийся интеграл с переменной особой точкой

В §§ 13.14, 13.15 мы рассматривали несобственный интеграл

$$F(x) = \int_D f(x, y) dy \quad (x \in \Omega) \quad (1)$$

с фиксированной особой точкой y^0 , не изменяющейся при изменении x . В общем случае особая точка зависит от x ($y^0 = \alpha(x)$). Например, это явление имеет место в случае объемного

потенциала

$$F(\mathbf{x}) = \int_D \frac{\mu(\mathbf{y}) d\mathbf{y}}{r^\lambda} \quad (\mathbf{x} \in R_n), \quad (2)$$

$$0 < \lambda < n, \quad r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \left(\sum_1^n (x_j - y_j)^2 \right)^{1/2}.$$

где функция μ непрерывна на \bar{D} — замыкании измеримой области D . Здесь

$$\alpha(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \text{ при } \mathbf{x} \in \bar{D},$$

а если $\mathbf{x} \notin \bar{D}$, то интеграл вовсе не имеет особенностей.

Вот еще пример — логарифмический потенциал, представляющий собой криволинейный интеграл

$$\Phi(\mathbf{x}) = \int_C \lambda(\xi) \ln \frac{1}{r} ds, \quad (3)$$

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2),$$

где C — гладкий самопересекающийся контур в плоскости x_1, x_2 , $\lambda(\xi)$ — непрерывная функция на C , s — длина дуги C и

$$r = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2}.$$

Подобным примером может также служить потенциал простого слоя

$$\psi(\mathbf{x}) = \iint_S \frac{\lambda}{r} dS. \quad (4)$$

Интеграл (4) взят по гладкой поверхности S , принадлежащей трехмерному пространству точек $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Обычно S есть граница некоторой ограниченной области, λ — непрерывная функция, заданная на S , r — расстояние от точки \mathbf{x} до точки $\mathbf{u} \in S$, по которой производится интегрирование.

Ниже мы исследуем несобственный интеграл с переменной особой точкой следующего вида:

$$F(\mathbf{x}) = \int_D K(\mathbf{x} - \mathbf{y}(\mathbf{u})) \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{u}) d\mathbf{u}, \quad (5)$$

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega,$$

где $\Omega \subset R_n$ — некоторая область, D — измеримая область, принадлежащая другому, вообще m -мерному пространству ($1 \leq m \leq n$, $D \subset R_m$), $\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ — непрерывная функция от $\mathbf{x} \in \Omega$, $\mathbf{u} \in D$, а $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{u})$ — непрерывно дифференцируемое отображение $\mathbf{u} \in D$ в $\mathbf{y} \in R_n$, описывающее кусок S m -мерного дифференцируемого многообразия в R_n (см. § 17.1). Наконец, $K(\mathbf{z}) = K(z_1, \dots, z_n)$ —

функция от $\mathbf{z} \in R_n$, непрерывная всюду, за исключением точки $\mathbf{z} = 0$, в окрестности которой K неограничена.

Интегралы (2), (3), (4) суть частные случаи интеграла (5).

По определению будем говорить, что интеграл (5) равномерно сходится на Ω , если для любого $\epsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что *

$$\int_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}(\mathbf{u})|<\delta} |K(\mathbf{x} - \mathbf{y}(\mathbf{u})) \alpha(x, \mathbf{u})| d\mathbf{u} < \epsilon \text{ для всех } \mathbf{x} \in \Omega. \quad (6)$$

Здесь интегрирование производится по всем $\mathbf{u} \in \bar{D}$, для которых выполняется неравенство внизу. Конечно, может случиться, что точка \mathbf{x} находится настолько далеко от многообразия S , что множество указанных \mathbf{u} — пустое, и тогда интеграл в (6) равен нулю.

Например, интеграл (2) равномерно сходится, потому что $(|\mu(y)| \leq M, y \in \bar{D}; \text{ здесь } y = \mathbf{u}, \mu(y) = \alpha(x, y), K(z) = |\mathbf{z}|^{-\lambda})$

$$\int_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|<\delta} \frac{|\mu(y)|}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^\lambda} dy \leq M \int_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|<\delta} \frac{dy}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^\lambda} = M \int_{|y|<\delta} \frac{dy}{|y|^\lambda} < \epsilon, \quad (7)$$

если δ при избранном ϵ достаточно мало. Равномерную сходимость интегралов (3), (4) см. ниже.

Теорема 1. Если интеграл (5) с указанными там условиями сходится равномерно на Ω , то он сходится и абсолютно и F — непрерывная функция от \mathbf{x} на Ω .

Доказательство. Зададим $\epsilon > 0$ и подберем $\delta > 0$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\int_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}(\mathbf{u})|<3\delta} |K(\mathbf{x} - \mathbf{y}(\mathbf{u})) \alpha| d\mathbf{u} < \epsilon \quad (\mathbf{x} \in \Omega). \quad (8)$$

Затем, чтобы доказать непрерывность F в \mathbf{x}^0 , положим

$$F(\mathbf{x}) = F_1(\mathbf{x}) + F_2(\mathbf{x}),$$

где

$$\begin{aligned} F_1(\mathbf{x}) &= \int_{|\mathbf{x}^0-\mathbf{y}(\mathbf{u})|<2\delta} K(\mathbf{x} - \mathbf{y}(\mathbf{u})) \alpha d\mathbf{u}, \\ F_2(\mathbf{x}) &= \int_{|\mathbf{x}^0-\mathbf{y}(\mathbf{u})|\geq 2\delta} K(\mathbf{x} - \mathbf{y}(\mathbf{u})) \alpha d\mathbf{u} \end{aligned} \quad (9)$$

(интегралы распространены на $\mathbf{u} \in \bar{D}$, для которых выполняется неравенство внизу).

На шаре \bar{V} , заданном неравенством $|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^0| \leq \delta$ функция F_2 непрерывна, потому что интеграл, определяющий F_2 , берется по

*.) Интеграл (6) берется по открытому множеству и во всяком случае определен корректно в смысле Лебега (см. гл. 19).

замкнутому измеримому множеству \mathcal{E} точек u , а подынтегральная функция от $(x, u) \in V \times \mathcal{E}$ непрерывна вместе с функцией $K(x - y(u))$. Ведь

$$|x - y(u)| \geq |x^0 - y(u)| - |x - x^0| \geq 2\delta - \delta = \delta > 0.$$

Далее F_1 удовлетворяет на V неравенству

$$|F_1(x)| < \varepsilon.$$

Ведь если

$$|x - x^0| < \delta, \quad |x^0 - y(u)| < 2\delta,$$

то

$$|x - y(u)| < 3\delta.$$

По тогда F_1 , согласно лемме 1 § 11.7, непрерывна на шаре $|x - x_0| < \delta$.

Интеграл (5) абсолютно сходится вместе с интегралом (6).

Из теоремы 1 и сказанного об объемном потенциале (2) следует, что он есть непрерывная функция от $x \in R_n$.

Теорема 2. Справедливо равенство

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \int_D K(x - y(u)) \mu(u) du = \int_D \frac{\partial}{\partial x_j} K(x - y(u)) \mu(u) du, \quad (10)$$

где $\mu(u)$ и ядро $K(x)$, так же как проинтегрированное ядро

$$K_1(x) = \frac{\partial}{\partial x_j} K(x),$$

удовлетворяют условиям, изложенным выше (в связи с (5)), а $\mu(u)$ — функция, непрерывная на \bar{D} .

При $m=1$ предполагается, что ядро $K(x)$ непрерывно также и при $x=0$.

Доказательство этой теоремы основывается на следующей лемме:

Лемма 1. Пусть $\psi(x)$, $F(x)$, $F_\delta(x)$ ($0 < \delta < \delta_0$) — функции, заданные на интервале (a, b) и $x_0 \in (a, b)$. При этом $F_\delta(x)$ непрерывно дифференцируемы, $\psi(x)$ непрерывна и выполняются свойства

$$F_\delta(x) \rightarrow F(x), \quad \delta \rightarrow 0, \quad x \in (a, b), \quad (11)$$

и для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta_0 > 0$ такое, что

$$|F'_\delta(x) - \psi(x)| < \varepsilon \quad (12)$$

для всех x, δ , удовлетворяющих неравенствам

$$|x - x_0| < \delta_0, \quad \delta < \delta_0. \quad (13)$$

Тогда

$$F'(x_0) = \psi(x_0), \quad (14)$$

иначе говоря,

$$\left(\lim_{\delta \rightarrow 0} F_\delta(x) \right)'_{x=x_0} = \lim_{\delta \rightarrow 0} F'_\delta(x_0). \quad (14')$$

Доказательство леммы 1. Так как $\psi(x)$ непрерывна, то из (12) следует, что для любого $\epsilon > 0$ найдется δ_0 такое, что $|F'_\delta(x) - \psi(x_0)| \leq |F'_\delta(x) - \psi(x)| + |\psi(x) - \psi(x_0)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$ для δ, x , удовлетворяющих (13).

Это показывает, что

$$\lim_{\delta \rightarrow 0, x \rightarrow x_0} F'_\delta(x) = \psi(x_0). \quad (15)$$

Далее, вследствие непрерывной дифференцируемости $F_\delta(x)$, при любых указанных δ

$$F_\delta(x) = F_\delta(x_0) + (x - x_0) F'_\delta(x_0 + \theta(x - x_0)) \quad (0 < \theta < 1),$$

и в силу (15)

$$\frac{F_\delta(x) - F_\delta(x_0)}{x - x_0} = F'_\delta(x_0 + \theta(x - x_0)) \rightarrow \psi(x_0),$$

$$x \rightarrow x_0, \quad \delta \rightarrow 0.$$

Таким образом, для любого $\epsilon > 0$ найдется $\delta_0 > 0$ такое, что для x, δ , удовлетворяющих (13),

$$\left| \frac{F_\delta(x) - F_\delta(x_0)}{x - x_0} - \psi(x_0) \right| < \epsilon.$$

Теперь для указанных x перейдем к пределу при $\delta \rightarrow 0$:

$$\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - \psi(x_0) \right| \leq \epsilon,$$

$$|x - x_0| < \delta.$$

Этим мы доказали (14).

Примечание. Свойство (12) естественно назвать свойством локальной равномерной сходимости $F'_\delta(x)$ к $\psi(x)$ ($\delta \rightarrow 0$) в точке x_0 . Если заменить в условии леммы 1 это свойство более сильным — равномерной сходимостью $F'_\delta(x)$ к $\psi(x)$ на Ω , то получаем уже известную нам теорему 4 § 13.14.

Доказательство теоремы 2. Докажем равенство (10) для точки

$$\mathbf{x} = \mathbf{x} \in \Omega.$$

Положим

$$F_\delta(\mathbf{x}) = \int_{|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}(\mathbf{u})| \geq 2\delta} K(\mathbf{x} - \mathbf{y}(\mathbf{u})) \mu(\mathbf{u}) d\mathbf{u}, \quad (16)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} F_\delta(\mathbf{x}) = \int_{|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}(\mathbf{u})| \geq 2\delta} \frac{\partial}{\partial x_j} K(\mathbf{x} - \mathbf{y}(\mathbf{u})) \mu(\mathbf{u}) d\mathbf{u}. \quad (17)$$

Мы уже знаем, что для

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| < \delta, \quad |\mathbf{x}^0 - \mathbf{y}(\mathbf{u})| \geq 2\delta$$

имеет место неравенство

$$|\mathbf{x}^0 - \mathbf{y}(\mathbf{u})| \geq \delta,$$

показывающее, что подынтегральные функции в (16), (17) непрерывны по x, u . Ведь ядра K и $\frac{\partial K}{\partial x_j} = K_1$ имеют особенность только в нулевой точке пространства R_n . Итак, функции $F_\delta(\mathbf{x})$ и $\frac{\partial}{\partial x_j} F_\delta(\mathbf{x})$ непрерывны для

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| < \delta$$

и дифференцирование под знаком интеграла в (17) законно.

Для любого $\mathbf{x} \in \Omega$ существуют также предельные функции

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} F_\delta(\mathbf{x}) = \int_D K(\mathbf{x} - \mathbf{y}(\mathbf{u})) \mu(\mathbf{u}) d\mathbf{u} = F(\mathbf{x}),$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial x_j} F_\delta(\mathbf{x}) = \int_D \frac{\partial}{\partial x_j} K(\mathbf{x} - \mathbf{y}(\mathbf{u})) \mu(\mathbf{u}) d\mathbf{u} = \psi(\mathbf{x}).$$

Они непрерывны на основании теоремы 1. В силу условий, наложенных на K_1 , для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta_0 > 0$ такое, что

$$\left| \psi(\mathbf{x}) - \frac{\partial}{\partial x_j} F_\delta(\mathbf{x}) \right| = \left| \int_{|\mathbf{x}^0 - \mathbf{y}(\mathbf{u})| < 2\delta} \frac{\partial}{\partial x_j} K(\mathbf{x} - \mathbf{y}(\mathbf{u})) \mu(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \right| < \varepsilon$$

для \mathbf{x}, δ , удовлетворяющих (13).

Мы видим, что функции $F_\delta(\mathbf{x})$, рассматриваемые как функции от x_i при фиксированных

$$x_k = x_k^0 \quad (k = 1, \dots, j-1, j+1, \dots, n),$$

удовлетворяют условиям леммы 1, и потому

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(\mathbf{x}^0) = \psi(\mathbf{x}^0).$$

Мы доказали (10) для любого

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^0 \in \Omega.$$

Интеграл справа в (10) есть функция, непрерывная от \mathbf{x} на $\bar{\Omega}$, таким образом, равномерно непрерывная на Ω . Но тогда доказанное для $\mathbf{x} \in \Omega$ равенство (10) можно распространить и на остальные точки \mathbf{x} , если понимать частные производные в обобщенном смысле (см. § 7.11).

Пример 1. При $\lambda < n - 1$ объемный потенциал (2) законно дифференцировать под знаком интеграла:

$$F'_{x_j}(x) = \int_D \mu(y) \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{r^\lambda} dy = -\lambda \int_D \mu(y) \frac{x_j - y_j}{r^{\lambda+2}} dy. \quad (18)$$

Здесь паряду с установленными выше фактами, из которых вытекало, что $F(x)$ — непрерывная функция, следует учесть, что подынтегральная функция в (18) имеет вид (5) ($K(x-y) = |x-y|^{-\lambda-2}$, $m = n$, $y(u) = u$) со всеми свойствами, которые там отмечались, и интеграл (18) равномерно сходится, потому что

$$\int_{|x-y|<\delta} \left| \mu \frac{\partial}{\partial x_j} r^{-\lambda} \right| dy \leq M \int_{|x-y|<\delta} \frac{dy}{r^{\lambda+1}} < \epsilon$$

для достаточно малого δ .

Пример 2. Логарифмический потенциал (3) есть непрерывная функция от $x = (x_1, x_2)$. При $x \notin C$ это следует из простейшей теоремы о непрерывности интеграла по параметру. Поэтому интересно доказать непрерывность $\Phi(x)$ в точках $x \in C$. Пусть $x^0 \in C$, не нарушая общности, можно считать, что $x^0 = (0, 0)$ — начало координат, и при этом в начале координат касательная к C совпадает с осью x_1 . Интеграл (3) представим в виде суммы интегралов по C_1 и C_2 :

$$F(x) = \int_{C_1} \mu(\xi) \ln \frac{1}{r} ds + \int_{C_2} \mu(\xi) \ln \frac{1}{r} ds,$$

где C_1 — малый кусок C , содержащий в себе нулевую точку, а

$$C_2 = C - C_1.$$

Ясно, что интеграл по C_2 непрерывен в цуевой точке, так как вблизи нее подынтегральная функция не имеет особенностей. Будем считать, что дуга C_1 настолько мала, что ее уравнение можно записать в явном виде:

$$x_2 = f(x_1) \quad (|x| \leq a),$$

Интеграл

$$F_1(x) = \int_{C_1} \mu(x) \ln \frac{1}{r} ds = \int_{-a}^a \ln \frac{1}{\sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - f(\xi_1))^2}} \lambda(\xi_1) d\xi_1, \quad (19)$$

$$\lambda(\xi_1) = \mu(\xi_1, f(\xi_1)) \sqrt{1 + f'^2(\xi_1)},$$

однозначно, вида (5) ($u = x_1$, $m = 1$, $n = 2$). Его равномерная сходимость относительно точек (x_1, x_2) , принадлежащих некоторому шару V с центром в нулевой точке вытекает из следующих оценок ($M \geq |\lambda(\xi_1)|$, $|\xi_1| < a$):

$$\left| \int_{V((x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - f(\xi_1))^2 < \delta)} \lambda \ln \frac{1}{\sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - f(\xi_1))^2}} d\xi_1 \right| \leq$$

$$\leq M \left| \int_{|x_1 - \xi_1| < \delta} \ln \frac{1}{|x_1 - \xi_1|} d\xi_1 \right| = M \left| \int_{|\xi_1| < \delta} \ln \frac{1}{|\xi_1|} d\xi_1 \right| < \epsilon,$$

где δ достаточно мало.

Пример 3. Непрерывность потенциала простого слоя (4) в точке $\mathbf{x}^0 \in S$ может быть установлена следующим образом. Не нарушая общности, считаем, что $\mathbf{x}^0 = (0, 0, 0)$ есть нулевая точка и при этом плоскость $x_3 = 0$ — касательная в ней к S . Больше того, как выше, рассматриваем интеграл

$$\psi(\mathbf{x}) = \int_C \int \frac{\lambda}{r} ds = \int_{\sigma} \int \frac{\mu(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2}{\sqrt{(x - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - f(\xi_1, \xi_2))^2}},$$

$$\mu = \lambda \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial \xi_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \xi_2} \right)^2},$$

где $\xi_3 = f(\xi_1, \xi_2)$, описывающая C_1 — непрерывно дифференцируемая функция на некоторой области σ плоскости (ξ_1, ξ_2) . Это интеграл типа (5). Его равномерная сходимость следует из того, что соответствующий интеграл, распространенный на точки (ξ_1, ξ_2) , для которых выполняется неравенство

$$\sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - f_3)^2} < \delta,$$

не превышает

$$M \int_{\sigma} \int \frac{d\xi_1 d\xi_2}{\sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - f_3)^2}} =$$

$$= M \int_{\sigma} \int \frac{d\xi_1 d\xi_2}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}} < \varepsilon.$$

ЛИНЕЙНЫЕ НОРМИРОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

§ 14.1. Пространство C непрерывных функций

Перед чтением этого параграфа рекомендуем еще раз прощать §§ 6.1, 6.2 и 6.3. К этому мы сделаем добавление о полноте пространства.

Пусть E есть линейное нормированное пространство и последовательность элементов $\mathbf{x}_n \in E$, сходится к элементу $\mathbf{x} \in E$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $N > 0$, что выполняется неравенство

$$\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (n > N).$$

Поэтому, если $n, m > N$, то

$$\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m\| = \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x} + \mathbf{x} - \mathbf{x}_m\| \leq \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\| + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_m\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

И мы доказали: если последовательность элементов $\mathbf{x}_n \in E$ сходится к некоторому элементу $\mathbf{x} \in E$, то она удовлетворяет условию Коши: для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое N , что выполняется неравенство $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m\| < \varepsilon$ ($n, m > N$).

Обратное утверждение, вообще говоря, неверно. Имеются примеры таких линейных нормированных пространств, что в них можно указать последовательности элементов $\{\mathbf{x}_n\}$, удовлетворяющие условию Коши, но не сходящиеся к какому-либо элементу E . С такими пространствами в будущем мы познакомимся (см. § 19.7), а сейчас сделаем следующее определение.

По определению линейное нормированное пространство E называется *полным*, если любая принадлежащая E последовательность $\{\mathbf{x}_n\}$, удовлетворяющая условию Коши, сходится к некоторому элементу $\mathbf{x} \in E$.

Полное линейное нормированное пространство называют еще *банаховым пространством**).

Один частный пример банахова пространства нам хорошо известен. Это есть пространство R_1 действительных чисел.

Пространство C . Пусть Ω есть замкнутое ограниченное множество пространства R_n . Совокупность всех непрерывных на Ω

*). С. Банах (1892—1945) — польский математик, внесший большой вклад в изучение нормированных пространств.

действительных (комплексных *)) функций $f = f(x)$ ($x \in \Omega$) обозначают символом $C = C(\Omega)$. При этом каждой функции $f \in C$ приводят в соответствие число

$$\|f\|_C = \max_{x \in \Omega} |f(x)| \quad (1)$$

— норму f в метрике (пространства) C .

Пространство C непрерывных (на Ω) функций есть линейное нормированное действительное (комплексное) пространство с нулевым элементом $\theta = \theta(x) = 0$.

В самом деле, C есть линейное действительное (комплексное) множество (см. § 6.1). Кроме того (см. § 6.3),

- 1) $\|f\|_C \geq 0$ и из равенства $\|f\|_C = 0$ следует, что $f = \theta$;
- 2) $\|\alpha f\|_C = \max_{\Omega} |\alpha f(x)| = |\alpha| \max_{\Omega} |f(x)| = |\alpha| \|f\|_C$;
- 3) $\|f + \varphi\|_C = \max_{\Omega} |f(x) + \varphi(x)| \leq \max_{\Omega} |f(x)| + \max_{\Omega} |\varphi(x)| = \|f\|_C + \|\varphi\|_C$.

По определению (1) для функций f, f_1, f_2, \dots , из C имеют место равенства

$$\|f - f_k\|_C = \max_{x \in \Omega} |f(x) - f_k(x)| \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (2)$$

Если правая часть (2) стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$, то это значит (см. § 11.7), что последовательность функций $\{f_k\}$ равномерно сходится к f на Ω . Таким образом, сходимость последовательности функций в пространстве (метрике) C эквивалентна равномерной ее сходимости на Ω .

Пусть теперь последовательность функций $f_k \in C$ удовлетворяет (в метрике C) условию Коши, т. е. для любого $\epsilon > 0$ находится такое N , что

$$\epsilon > \|f_k - f_l\|_C = \max_{\Omega} |f_k(x) - f_l(x)|$$

для всех $k, l > N$. Тогда, как было доказано в § 11.7, последовательность $\{f_k\}$ равномерно, а следовательно, и по норме в C сходится к некоторой функции $f \in C$:

$$\|f_k - f\|_C = \max_{\Omega} |f_k(x) - f(x)| \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Таким образом, из того, что последовательность функций $f_k \in C$ удовлетворяет условию Коши, следует, что существует функция $f \in C$, к которой эта последовательность сходится в метрике C , т. е.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = f \quad (\text{в метрике } C).$$

*) Комплексная непрерывная функция определяется равенством $f(x) = \varphi(x) + i\psi(x)$, где φ и ψ действительные непрерывные функции. Следовательно, $\max_{x \in \Omega} |f(x)| = \max_{x \in \Omega} (\varphi^2(x) + \psi^2(x))^{1/2}$.

Мы доказали, что C есть линейное нормированное полное пространство, т. е. банахово пространство.

§ 14.2. Пространства L' , L'_p , L и l_p

Пусть $\Omega \subset R_n$ — открытое множество. Через $L' = L'(\Omega)$ мы обозначим совокупность (пространство) функций f (действительных или комплексных), абсолютно интегрируемых на Ω в римановом, вообще говоря, не собственном смысле *). Норма $f \in L'$ определяется как интеграл

$$\|f\|_L = \int_{\Omega} |f(x)| dx. \quad (1)$$

Если $f = \varphi + i\psi$ — комплексная функция, то

$$\int_{\Omega} |f| dx = \int_{\Omega} \sqrt{\varphi^2 + \psi^2} dx.$$

Тем самым автоматически предполагается, что Ω — измеримое (по Жордану) множество, если оно ограничено, а если не ограничено, то Ω — локально измеримое множество, т. е. такое, что измеримы множества $\omega\Omega$, где $\omega \subset R_n$ — произвольный шар.

Но можно еще рассматривать пространство $L = L(\Omega)$ измеримых в лебеговом смысле на Ω функций f , имеющих конечную норму (1), где интеграл понимается в смысле Лебега (см. гл. 19)**).

Многие факты, которые мы будем получать для функций $f \in L'$, верны или верны с небольшими видоизменениями и для функций $f \in L$. В ряде случаев по этому поводу мы будем делать краткие замечания без доказательств со ссылкой на гл. 19.

Раз уж мы назвали интеграл (1) нормой, то пулевым элементом в *** $L'(L)$ придется считать любую функцию $\theta = \theta(x)$, для которой

$$\int_{\Omega} |\theta(x)| dx = 0. \quad (2)$$

Функция $\theta(x) = 0$ есть пример такой функции, но не единственный (см. ниже теорему 1). В пространстве $L'(\Omega)$ ($L(\Omega)$), не различаются функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$, отличающиеся на $\theta(x)$. Как функции они тождественно не равны на Ω , но они определяют один и тот же элемент пространства $L'(\Omega)$ ($f_1 = f_2$).

*) Если $f \in L'$, то интеграл $\int_{\Omega} f dx$ имеет конечное число особенностей (см. § 13.13), а $\int_{\Omega} |f| dx < \infty$.

**) В этом случае Ω вообще измеримо или локально измеримо по Лебегу.

***) $f \in L'(L)$ обозначает, что $f \in L'$ или $f \in L$.

Покажем, что $L'(\Omega)$ ($L(\Omega)$) есть линейное множество и интеграл (1) удовлетворяет всем свойствам нормы. В самом деле,

- 1) $\|f\|_L \geq 0$, а из равенства $\|f\|_L = 0$ следует, что $f = \theta$;

2) если $f \in L'(\Omega)$ и α — число, то и $\alpha f \in L'(\Omega)$ и выполняется равенство

$$\|\alpha f\|_L = \int_{\Omega} |\alpha f(x)| dx = |\alpha| \int_{\Omega} |f(x)| dx = |\alpha| \|f\|_L;$$

3) если $f, \varphi \in L'(\Omega)$, то и $f + \varphi \in L'(\Omega)$ и

$$\begin{aligned} \|f + \varphi\|_L &= \int_{\Omega} |f(x) + \varphi(x)| dx \leq \int_{\Omega} |f(x)| dx + \int_{\Omega} |\varphi(x)| dx = \\ &= \|f\|_L + \|\varphi\|_L. \end{aligned}$$

Если $f, f_1, f_2, \dots \in L'(\Omega)$, то

$$\|f - f_k\|_L = \int_{\Omega} |f(x) - f_k(x)| dx \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (3)$$

Сходимость $f_k \rightarrow f$ в метрике L , таким образом, эквивалентна стремлению к нулю интеграла в правой части (3). В этом случае еще говорят, что f_k стремится к f в среднем на Ω (см. § 6.3).

Однако пространство L' не полно. Полным является пространство $L = L(\Omega)$ функций, интегрируемых (суммируемых) по Лебегу на Ω (см. § 19.3, свойство 20 и § 19.7).

Теорема 1. Пусть $\theta = \theta(x) \in L'(\Omega)$. Для того чтобы выполнялось равенство

$$\int_{\Omega} |\theta(x)| dx = 0, \quad (4)$$

необходимо и достаточно, чтобы $\theta(x) = 0$ во всех точках множества $\Omega' \subset \Omega$, где $\theta(x)$ непрерывна.

Доказательство. Допустим, что выполняется равенство (4) и существует точка $x^0 \in \Omega'$ непрерывности θ такая, что $|\theta(x^0)| > 0$. Существует тогда шар $\omega \subset \Omega$ с центром в x^0 , на котором $|\theta(x)| > \eta > 0$, и тогда получилось бы противоречие с (4):

$$\int_{\Omega} |\theta(x)| dx \geq \int_{\omega} |\theta(x)| dx \geq \eta |\omega| > 0.$$

Пусть теперь $\theta \in L'(\Omega)$ и $\theta(x) = 0$ для всех $x \in \Omega'$.

Определим множество Ω_ε , полученное выкидыванием из Ω конечного числа шаров радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в исключенных точках интеграла $\int_{\Omega} \theta(x) dx$

и выкидыванием внешности шара радиуса $1/\varepsilon$ с центром в исключевой точке.

По теореме Лебега $\Omega \setminus \Omega'$ имеет лебегову меру пуль, поэтому Ω' плотно в Ω , и нижний интеграл, а следовательно, и сам интеграл по Ω_ε от $|\theta(x)|$, равен нулю. Поэтому

$$\int_{\Omega} |\theta(x)| dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon} |\theta(x)| dx = 0.$$

В лебеговом случае теореме 1 соответствует следующее утверждение (см. § 19.3 свойства 1 и 16):

Пусть $\theta = \theta(x) \in L(\Omega)$. Для того чтобы имело место равенство (4), где интеграл понимается в смысле Лебега, необходимо и достаточно что-бы функция $\theta(x)$ была равна нулю почти всюду на Ω .

Пространства l_p и L_p . Пусть число p удовлетворяет неравенствам $1 \leq p < \infty$. По определению последовательность $a = \{a_k\}$ чисел (действительных или комплексных) принадлежит пространству l_p , если конечна норма

$$\|a\|_{l_p} = \left(\sum_1^{\infty} |a_k|^p \right)^{1/p} < \infty. \quad (5)$$

По определению также функция $f(x)$ (действительная или комплексная), определенная на области $\Omega \subset R_n$, принадлежит пространству $L'_p(\Omega)$ ($L'_1(\Omega) = L'(\Omega)$), если интеграл от f на Ω имеет конечное число особенностей и норма

$$\|f\|_{L_p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty \quad (6)$$

конечна. Рассматривают также пространство $L_p(\Omega)$ измеримых по Лебегу на Ω функций с конечным лебеговым интегралом (6) (см. гл. 19).

Пусть $\varphi(u)$, $\psi(v)$ ($u, v \geq 0$) — непрерывные функции, равные нулю соответственно при $u = 0$, $v = 0$, строго возрастающие и взаимно обратны.

Рассматривая графики этих функций в плоскости (u, v) , легко убедиться в справедливости неравенства

$$ab \leq \Phi(a) + \Psi(b) \quad (a, b \geq 0),$$

$$\Phi(x) = \int_0^x \varphi(t) dt, \quad \Psi(x) = \int_0^x \psi(t) dt,$$

которое обращается в равенство, лишь если $\varphi(a) = b$.

В случае, когда $\varphi(u) = u^\alpha$, $\psi(v) = v^{1/\alpha}$ ($\alpha > 0$, $1 + \alpha = p$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$), получим

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad (a, b \geq 0),$$

откуда следует, что если

$$a = \{a_k\} \in l_p, \quad b = \{b_k\} \in l_q,$$

то

$$\sum_1^{\infty} |a_k b_k| \leq \frac{1}{p} \sum_1^{\infty} |a_k|^p + \frac{1}{q} \sum_1^{\infty} |b_k|^q, \quad (7)$$

а также если $f(x) \in L'_p(\Omega)$ ($L_p(\Omega)$), $\varphi(x) \in L'_q(\Omega)$, ($L_q(\Omega)$), то

$$\int_{\Omega} |f(x) \varphi(x)| dx \leq \frac{1}{p} \int_{\Omega} |f(x)|^p dx + \frac{1}{q} \int_{\Omega} |\varphi(x)|^q dx. \quad (8)$$

Если применить (7) к последовательностям $(\| \mathbf{a} \|_{l_p}, \| \mathbf{b} \|_{l_p} > 0)$

$$\frac{\mathbf{a}}{\| \mathbf{a} \|_{l_p}} = \left\{ \frac{a_k}{\| \mathbf{a} \|_{l_p}} \right\}, \quad \frac{\mathbf{b}}{\| \mathbf{b} \|_{l_q}} = \left\{ \frac{b_k}{\| \mathbf{b} \|_{l_q}} \right\},$$

то получим

$$\frac{1}{\| \mathbf{a} \|_{l_p} \| \mathbf{b} \|_{l_p}} \sum_{k=1}^{\infty} |a_k b_k| \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

или

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^q \right)^{1/q}, \quad (9)$$

где можно, очевидно, теперь считать также, что один или оба из множителей справа равны нулю.

Аналогично применение (8) к функциям

$$\frac{f(x)}{\| f \|_{L_p(\Omega)}}, \quad \frac{\varphi(x)}{\| \varphi \|_{L_q(\Omega)}}$$

$(\| f \|_{L_p(\Omega)}, \| \varphi \|_{L_q(\Omega)} > 0)$ приводит к неравенству

$$\frac{1}{\| f \|_{L_p(\Omega)} \| \varphi \|_{L_q(\Omega)}} \int_{\Omega} |f \varphi| dx \leq 1$$

или неравенству

$$\int_{\Omega} |f \varphi| dx \leq \left(\int_{\Omega} |f|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_{\Omega} |\varphi|^q dx \right)^{1/q}, \quad (10)$$

верному и если один из множителей справа или оба равны нулю.

Неравенства (9), (10) называются *неравенствами Гёльдера**). В случае $p = 2$ первое из них называется *неравенством Коши*, а второе — *неравенством Буняковского***). (см. § 6.2, (7), (9)).

Если $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in l_p$, то

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |a_k + b_k|^p &\leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k + b_k|^{p-1} |a_k| + \sum_{k=1}^{\infty} |a_k + b_k|^{p-1} |b_k| \leq \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k + b_k|^p \right)^{(p-1)/p} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k + b_k|^p \right)^{(p-1)/p} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^p \right)^{1/p}, \end{aligned}$$

где мы применили неравенство Гёльдера к каждому слагаемому второго члена цепи. Отсюда

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k + b_k|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^p \right)^{1/p} \quad (11)$$

* О. Л. Гельдер (1859—1937) — немецкий математик.

**) В. Я. Буняковский (1804—1889) — русский математик, академик.

Аналогично

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |f + \varphi|^p dx &\leq \int_{\Omega} |f + \varphi|^{p-1} |f| dx + \int_{\Omega} |f + \varphi|^{p-1} |\varphi| dx \leq \\ &\leq \left(\int_{\Omega} |f + \varphi|^p dx \right)^{(p-1)/p} \left[\left(\int_{\Omega} |f|^p dx \right)^{1/p} + \left(\int_{\Omega} |\varphi|^p dx \right)^{1/p} \right] \end{aligned}$$

или

$$\left(\int_{\Omega} |f + \varphi|^p dx \right)^{1/p} \leq \left(\int_{\Omega} |f|^p dx \right)^{1/p} + \left(\int_{\Omega} |\varphi|^p dx \right)^{1/p} \quad (12)$$

Неравенства (11), (12) называются *неравенствами Минковского**).

Соотношения (7)–(12) выражают также утверждение: вместе с правыми частями неравенств конечны и левые. Из них следует, что l_p , $L'_p(L_p)$ — линейные комплексные или действительные нормированные пространства.

Выражения (5), (6) суть бацаховы нормы (см. § 6.3), потому что они паряду с (11), (12) обладают свойствами

$$\|\lambda a\|_{l_p} = |\lambda| \|a\|_{l_p}, \quad \|\lambda f\|_{L'_p} = |\lambda| \|f\|_{L_p},$$

где λ — произвольное число, и из равенств $\|a\|_{l_p} = \|f\|_{L_p} = 0$ следует, что $a = 0$ ($a_k = 0$), а $f(x) = 0$ в точках непрерывности (в лебеговой же теории почти всюду).

Таким образом, l_p и $L'_p(L_p)$ — нормированные пространства. Нулевой элемент в l_p есть последовательность пуль ($a_k = 0$, $k = 1, 2, \dots$), нулевой элемент в L'_p есть функция $\theta(x) \in L'_p$, равная пулью в ее точках непрерывности, нулевой же элемент в L_p есть функция, почти всюду в смысле лебеговой меры равная пулью.

Отметим, что если $f \in L'_p(\Omega)$ ($L_p(\Omega)$), где Ω — ограниченное (измеримое) множество, то $f \in L'(\Omega)$ ($L(\Omega)$) и имеет место неравенство (см. (10) при $\varphi \equiv 1$)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |f(x)| dx &= \int_{\Omega} |f(x) \cdot 1| dx \leq |\Omega|^{1/q} \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \\ &\left(1 < p < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Пространства l_p , $L'_p(L_p)$ при $p = 2$ обладают особыми свойствами — в них можно ввести скалярное произведение. С этой точки зрения они специально изучаются в § 14.3 и еще в § 14.6 (пример 1), где, в частности, доказывается, что l_2 — полное пространство. Совершенно аналогично можно доказать, что l_p при любом p есть тоже полное пространство.

§ 14.3. Пространство $L'_2(L_2)$

Пусть G есть измеримое (ограниченное) множество и $L_{2,r}(G)$ — совокупность всевозможных интегрируемых по Риману на G функций (комплексных или действительных). Очевидно, $L_{2,r}(G)$

* Г. Минковский (1864—1909) — немецкий математик и физик.

есть линейное (комплексное или действительное) множество. Любым прилежащим к $L_{2,r}(G)$ функциям φ, ψ можно привести в соответствие число

$$(\varphi, \psi) = (\varphi, \psi)_G = \int_G \varphi(x) \bar{\psi}(x) dx, \quad (1)$$

представляющее собой обычный риманов (собственный) интеграл. Оно удовлетворяет трем свойствам скалярного произведения (см. § 6.2). В самом деле, для $\varphi, \psi, \chi \in L_{2,r}(G)$

$$1) \overline{(\varphi, \psi)}_G = \int_G \bar{\varphi} \psi dx = (\psi, \varphi)_G,$$

$$2) (\alpha\varphi + \beta\psi, \chi) = \alpha(\varphi, \chi)_G + \beta(\psi, \chi)_G,$$

3) $(\varphi, \varphi)_G \geq 0$ и из равенства $(\varphi, \varphi)_G = 0$ следует, что $\varphi(x) = \theta(x)$ (см. § 14.2 (2)), где θ — интегрируемая по Риману функция, интеграл от квадрата модуля которой равен нулю. Но тогда, как было показано в § 6.2 для любых двух функций $\varphi, \psi \in L_{2,r}(G)$ имеет место неравенство

$$\int_G |\varphi(x) \bar{\psi}(x)| dx \leq \left(\int_G |\varphi(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_G |\psi(x)|^2 dx \right)^{1/2}. \quad (2)$$

Пусть теперь Ω есть открытое множество, может быть неограниченное, но такое, что пересечение его с любым шаром есть измеримое множество. Обозначим через $L'_2 = L'_2(\Omega)$ совокупность определенных на Ω комплексных или действительных функций f , интегралы от которых $\int_G f dx$, если имеют, то конечное число особенностей, причем $|f(x)|^2 \in L'(\Omega) = L'$ (см. § 14.2).

Зададим две произвольные функции $\varphi, \psi \in L'_2(\Omega)$. Введем множество Ω_ε ($\varepsilon > 0$), которое получается из Ω выкидыванием из него конечной системы шаров радиуса ε с центрами в точках, где интегралы от φ и ψ по Ω имеют особенности, и, если Ω неограничено, выкидыванием также шара $|x| \geq \varepsilon^{-1}$. Если интегралы от φ и ψ вовсе не имеют особых точек, то считаем $\Omega_\varepsilon = \Omega$.

Таким образом, $\varphi, \psi \in L_{2,r}(\Omega_\varepsilon)$ при любом $\varepsilon > 0$ и

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\varepsilon} |\varphi(x) \bar{\psi}(x)| dx &\leq \left(\int_{\Omega_\varepsilon} |\varphi(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega_\varepsilon} |\psi(x)|^2 dx \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \left(\int_{\Omega} |\varphi(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |\psi(x)|^2 dx \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

и так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то существует интеграл *)

$$\int_{\Omega} |\varphi(x) \bar{\psi}(x)| dx \leq \left(\int_{\Omega} |\varphi|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |\psi|^2 dx \right)^{1/2} \quad (3)$$

*) Это неравенство следует также из § 14.2 (10) при $p = 2$, но здесь оно доказано совершенно другим путем.

Мы доказали, что если $\varphi, \psi \in L_2'(\Omega)$, то $\varphi\bar{\psi} \in L'(\Omega)$ и выполняется, неравенство (3). Таким образом, для любых $\varphi, \psi \in L_2'(\Omega)$ имеет смысл интеграл (абсолютно сходящийся)

$$(\varphi, \psi) = \int_{\Omega} \varphi(x) \bar{\psi}(x) dx, \quad (4)$$

понимаемый в римановом, вообще несобственном, смысле. Легко проверяется, что он удовлетворяет трем свойствам скалярного произведения, если считать, что нулевой элемент есть функция $\theta = \theta(x) \in L_2$, для которой

$$\int_{\Omega} |\theta(x)|^2 dx = 0$$

(см. предыдущий параграф).

Теперь можно, как это пояснено в §§ 6.2, 6.3, ввести для функций $f \in L_2'$ норму

$$\|f\|_{L_2} = \left(\int_{\Omega} |f|^2 dx \right)^{1/2}$$

с которой L_2' становится нормированным пространством. Если последовательность функций $f_k \in L_2'$ сходится по норме к функции $f \in L_2'$, то это значит, что

$$\|f - f_k\|_{L_2} = \left(\int_{\Omega} |f(x) - f_k(x)|^2 dx \right)^{1/2} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Говорят в этом случае, что последовательность $\{f_k\}$ сходится к f на Ω в смысле среднего квадратического.

Пространство L_2 (так же как L') не полно. Полным является пространство $L_2 = L_2(\Omega)$ измеримых по Лебегу на Ω функций с интегрируемым по Лебегу квадратом их модуля. Пространство L_2 называют гильбертовым пространством в честь Гильберта (1862—1943), одного из крупнейших немецких математиков.

Конечно, пространство L_2 более совершенно, чем L_2' , по оперирование с L_2 требует знания интеграла Лебега. С другой стороны, L_2' охватывает достаточно широкий класс функций, часто только и нужных.

Заметим, что если функция $f \in L_2'(\Omega)$ и Ω ограничено, то $f \in L'(\Omega)$ (см. § 14.2, (13)). Например, функция $x^{-\alpha} \in L_2'(0, 1) \subset L'(0, 1)$, если $\alpha < 1/2$. При выполнении неравенств $1/2 \leq \alpha < 1$ функция $x^{-\alpha}$ не принадлежит к $L_2(0, 1)$, но принадлежит к $L'(0, 1)$. Далее, $x^{-\alpha} \in L_2'(1, \infty)$, если $\alpha > 1/2$, но $x^{-\alpha} \in L'(1, \infty)$, только если $\alpha > 1$.