§ 14.4. Приближение финитными функциями

Носителем функции $\varphi(\mathbf{x})$ называется замыкание множества точек $\mathbf{x}$, где $\varphi(\mathbf{x}) \neq 0$.

Функция $\varphi(\mathbf{x})$ называется *финитной в открытом множестве* $\Omega \subset R_n$, если она определена на R_n и имеет ограниченный носитель F, принадлежащий к $\Omega (F \subset \Omega)$. Ограниченный носитель F часто называют *компактным носителем*, подчеркивая этим названием, что из всякой последовательности точек $\mathbf{x}^k \in F \subset R_n$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке $\mathbf{x}^0 \in F$.

Функцию $\varphi(\mathbf{x})$ мы будем называть *кусочно постоянной*, если существует конечная система не пересекающихся попарно прямоугольников (прямоугольных параллелепипедов с ребрами, параллельными осями координат), на каждом из которых φ постоянна и, кроме того, $\varphi = 0$ вне этих прямоугольников. Эти прямоугольники Δ могут быть замкнутыми, открытыми и полуоткрытыми (одна грань Δ может принадлежать, а другая не принадлежать к Δ).

Очевидно, *кусочно постоянная функция финитна в* R_n.

Справедлива

Теорема 1. *Для всякой функции* $f \in L_p(\Omega)(L_p(\Omega))$ *и всякого* $\varepsilon > 0$ *найдется финитная в* Ω *кусочно постоянная или непрерывная*) функция* φ *такая, что*

$$\int_{\Omega} |f(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x})|^p \, d\mathbf{x} < \varepsilon \quad (1 \leqslant p < \infty). \tag{1}$$

Доказательство теоремы 1 мы поясним сначала на графиках в случае $p = 1$ и когда функция $f(x)$ задана на оси x.

На рис. 14.1, *а* изображена функция f, имеющая особенности в точках $-\infty$, 0, $+\infty$, которую мы будем считать принадлежащей $L'(-\infty, \infty)$. При достаточно малом $\delta > 0$ и большом N для функции $\psi(x)$, изображенной на том же рис. 14.1, *а* жирной линией, справедливо

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - \psi(x)| \, dx \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

На $(-N, -\delta)$, (δ, N) функция $f(x) = \psi(x)$ изображена непрерывной, но она может быть и разрывной, однако интегрируемой, для нее можно указать ступенчатую функцию $\chi(x)$ с конечным числом ступенек такую, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x) - \chi(x)| \, dx < \frac{\varepsilon}{3}.$$

---

*) Непрерывная можно заменить на бесконечно дифференцируемая, см. свойство 4 § 18.2.

Остается приблизить $\chi(x)$ непрерывной финитной функцией $\varphi(x)$. Это сделано на рис. 14.1, *б*.

Формальное доказательство теоремы 1 следует из приводимых ниже теорем 2, 3, 4*).

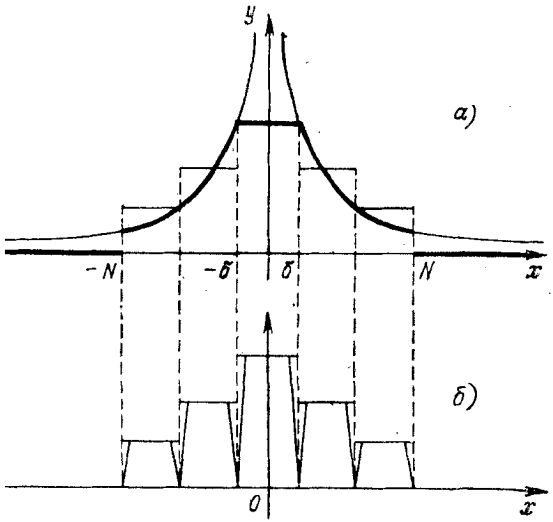

Рис. 14.1.

Теорема 2. *Функцию* $f \in L'_p(\Omega)$, $1 \leqslant p < \infty$ (см. § 14.2, 14.3) *можно приблизить в своей метрике* $L'_p(\Omega)$ *(с любой степенью точности) ограниченной функцией* $\psi \in L'_p(\Omega)$ *с компактным носителем.*

Доказательство. Если Ω — ограниченное множество и f ограничена на нем, то можно взять $\psi = f$.

В противном случае интеграл $\int\limits_{\Omega} f\,d\mathbf{x}$ имеет особые точки. Пусть Ω_η $(\eta > 0)$ есть множество (ограниченное), получаемое из Ω выкидыванием из него конечной системы шаров (замкнутых) радиуса η с центрами в особых точках интеграла $\int\limits_{\Omega} f\,d\mathbf{x}$ и, если Ω неограничено, выкидыванием еще шара $|\mathbf{x}| \geqslant \eta^{-1}$.

Положим

$$\psi(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}) & \text{на } \Omega_\eta, \\ 0 & \text{на } \Omega - \Omega_\eta. \end{cases}$$

*) Теорема 1 в случае L (следовательно, и L') вытекает из § 19.3 (свойство 18), а в случае L_p — из § 18.2 (свойство 4) и доказываемой ниже теоремы 4.

Очевидно, ψ есть ограниченная на Ω функция с компактным носителем, принадлежащая к $L'_p(\Omega)$ и, кроме того, при достаточно малом η

$$\int_{\Omega} |f(\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{x})|^p \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega - \Omega_\eta} |f|^p \, d\mathbf{x} < \varepsilon. \tag{2}$$

Теорема 3. *Интегрируемую по Риману на открытом множестве Ω функцию f можно приблизить с любой степенью точности в метрике $L_p(\Omega)$ кусочно постоянной финитной в Ω функцией φ, удовлетворяющей неравенству*

$$|\varphi(\mathbf{x})| \leqslant K = \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} |f(\mathbf{x})|, \tag{3}$$

если f действительна, и неравенству

$$|\varphi(\mathbf{x})| \leqslant 2K, \tag{4}$$

если f комплексна.

Доказательство. Пусть пока f — действительная функция. Так как она интегрируема на Ω, то для произвольного $\varepsilon > 0$ можно указать прямоугольную h-сетку такую, что нижняя интегральная сумма f, распространенная на кубы Δ_j $(j = 1, \ldots, N)$ сетки, полностью принадлежащие к Ω, отличается от интеграла $\int_{\Omega} f \, d\mathbf{x}$ менее чем на ε:

$$\int_{\Omega} f \, d\mathbf{x} - \sum_{j=1}^{N} m_j |\Delta_j| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad m_j = \inf_{x \in \Delta_j} f(\mathbf{x}).$$

Определим кусочно постоянную функцию (очевидно, удовлетворяющую (3)):

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{cases} m_j & \text{на} \quad \Delta_j, \\ 0 & \text{вне} \quad \sum\limits_{1}^{N} \Delta_j = G \end{cases}$$

(чтобы φ была однозначной, можно определить ее на открытых или полуоткрытых Δ). Ясно, что $\varphi(\mathbf{x})$ имеет носитель, принадлежащий к G, и что выполняется неравенство (3). Учитывая, что $\varphi(x) \leqslant f(x)$ на G, получим

$$\int_{\Omega} |f(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x})| \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (f(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x})) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega - G} |f| \, d\mathbf{x} =$$

$$= \left(\int_{\Omega} f \, d\mathbf{x} - \sum m_j |\Delta_j| \right) + \int_{\Omega - G} (|f| - f) \, d\mathbf{x} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2},$$

если шаг h сетки взять достаточно малым, чтобы выполнялось неравенство

$$\int_{\Omega - G} (|f| - f) \, d\mathbf{x} \leqslant 2 \int_{\Omega - G} |f| \, d\mathbf{x} < \frac{\delta}{2}.$$

Это возможно, потому что f ограничена на Ω, а мера $|\Omega - G|$ может быть сделана как угодно малой при достаточно малом h.

Мы доказали теорему для действительной функции f и метрики $L(\Omega)$, докажем ее теперь в случае приближения действительной функции в $L_p(\Omega)$ $(1 < p < \infty)$. Для этого, пользуясь уже доказанным для заданного

$\varepsilon > 0$, подберем кусочно постоянную функцию φ с носителем в Ω, удовлетворяющую неравенству (3), так, чтобы

$$\left(\int_\Omega |f(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x})|\, d\mathbf{x}\right)^{1/p} < \frac{\varepsilon}{|\Omega|^{(p-1)/p}(2K)^{(p^2-1)/p}}.$$

Но тогда (см. § 14.2 (10))

$$\int_\Omega |f-\varphi|^p\, d\mathbf{x} = \int_\Omega |f-\varphi|^{1/p}|f-\varphi|^{(p^2-1)/p}\, d\mathbf{x} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_\Omega |f-\varphi|\, d\mathbf{x}\right)^{1/p}\left(\int_\Omega |f-\varphi|^{p+1}\, d\mathbf{x}\right)^{(p-1)/p} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{|\Omega|^{(p-1)/p}(2K)^{(p^2-1)/p}}\left(\int_\Omega (2K)^{p+1}\, d\mathbf{x}\right)^{(p-1)/p} = \varepsilon,$$

и теорема доказана и в случае $L'_p(\Omega)$.

Если $f = f_1 + if_2$ — комплексная функция, удовлетворяющая условиям теоремы, то ее действительная и мнимая компоненты f_1 и f_2 тоже удовлетворяют этим условиям. Но для последних уже доказано существование кусочно постоянных действительных функций φ_1, φ_2, соответственно их приближающих (в метрике $L_p(\Omega)$). Но тогда функция $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$, очевидно, кусочно постоянная и финитная в Ω, приближает f, и выполняется неравенство (4).

Теорема 4. *Кусочно постоянную функцию $f(\mathbf{x})$ с носителем Ω можно приблизить (с любой степенью точности) в метрике $L_p(\Omega)$ непрерывной функции $\varphi(\mathbf{x})$, финитной в открытом ядре Ω.*

Заметим, что, согласно определению кусочно постоянной функции, Ω есть сумма конечного числа прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат.

Доказательство. Докажем сначала теорему для простейшей кусочно постоянной функции $f(x)$, равной числу m на прямоугольнике Δ и нулю вне его. Пусть $\Delta' \subset \Delta'' \subset \Delta$ — прямоугольники, имеющие тот же центр, что и Δ. Введем непрерывную функцию

$$\varphi_\Delta(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{на} \quad \Delta', \\ 0 & \text{вне} \quad \Delta'', \end{cases} \tag{5}$$

линейную на $\Delta'' - \Delta'$ вдоль лучей, выходящих из центра Δ.

Ясно, что $\varphi_\Delta(\mathbf{x})$ (а вместе с ней и $\varphi(\mathbf{x}) = m\varphi_\Delta(\mathbf{x})$) есть непрерывная финитная в открытом ядре Δ функция. Ясно также, что для всякого $\varepsilon > 0$ можно указать прямоугольник Δ', а вместе с ним и Δ'', настолько близкий к Δ, что

$$\left(\int_{R_n} |f(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x})|^p\, d\mathbf{x}\right)^{1/p} < \varepsilon.$$

В общем случае кусочно постоянную функцию $f(\mathbf{x})$, равную соответственно числам $m_1, \ldots, m_N$ на некоторых непересекающихся (открытых или полуоткрытых) прямоугольниках $\Delta_1, \ldots, \Delta_N$, можно представить в виде суммы

$$f(\mathbf{x}) = \sum_1^N f_k(\mathbf{x}), \qquad f_k(\mathbf{x}) = m_k \chi_{\Delta_k}(\mathbf{x})$$

функций, где

$$\chi_\Delta(x) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \in \Delta, \\ 0, & \mathbf{x} \notin \Delta. \end{cases}$$

По доказанному для любого $\varepsilon > 0$ можно указать непрерывные финитные в открытых ядрах Δ_k функции $\varphi_k(\mathbf{x})$ такие, что

$$\int\limits_{R_n} |f_k - \varphi_k|^p \, d\mathbf{x} < \frac{\varepsilon}{N}.$$

Но функция

$$\varphi(\mathbf{x}) = \sum_1^N \varphi_k(\mathbf{x})$$

непрерывна и финитна в открытом ядре $\sum\limits_1^N \Delta_k$ и

$$\int\limits_{\Sigma\Delta_k} |f - \varphi|^p \, d\mathbf{x} = \int\limits_{R_n} |f - \varphi|^p \, d\mathbf{x} = \sum_{k=1}^N \int\limits_{R_n} |f_k - \varphi_k|^p \, d\mathbf{x} < N \frac{\varepsilon}{N} = \varepsilon,$$

а это и требовалось доказать.

Это рассуждение одинаково как для действительных, так и для комплексных функций.

Итак, в частности, доказано, что всякую функцию $f \in L'_p(\Omega)$ можно приблизить в соответствующей метрике кусочно постоянной функцией вида

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{cases} m_k & \text{на} \quad \Delta_k \quad (k = 1, \ldots, N), \\ 0 & \text{вне} \quad \sum\limits_1^N \Delta_k, \end{cases} \tag{6}$$

где Δ_k — кубы, попарно не пересекающиеся между собой.

Каждая кусочно постоянная функция есть одна из семейства функций

$$\varphi(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}; \mathbf{x}', \ldots, \mathbf{x}^N, \eta_1, \ldots, \eta_N, m_1, \ldots, m_N),$$

зависящих от N векторных параметров $x^1, \ldots, x^N$ и $2N$ числовых параметров $\eta_1, \ldots, \eta_N$; $m_1, \ldots, m_N$, где $\mathbf{x}^k$ — центры кубов, η_k — длины их сторон, а m_k — числа в равенстве (6). Легко видеть, что если уже имеется приближение

$$\left(\int\limits_\Omega |f(\mathbf{x}) - \varphi_1(\mathbf{x})|^p \, d\mathbf{x} \right)^{1/p} = \varepsilon_1 < \varepsilon$$

функции f при помощи некоторой функции φ_1 из указанного семейства, то всегда можно в последнем взять другую функцию φ, определяемую рациональными параметрами, так мало отличающимися от прежних, что

$$\left(\int\limits_\Omega |\varphi_1(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x})|^p \, d\mathbf{x} \right)^{1/p} < \varepsilon - \varepsilon_1.$$

Но тогда для любой функции $f \in L'_p(\Omega)$ и для любого $\varepsilon > 0$ можно указать кусочно постоянную функцию φ, определяемую рациональными

параметрами и приближающую f в метрике $L'_p(\Omega)$ с точностью до ε:

$$\left(\int_\Omega |f(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x})|^p \, d\mathbf{x}\right)^{1/p} < \varepsilon.$$

Но все такие функции φ (определяемые рациональными параметрами) можно перенумеровать — их счетное множество.

Мы доказали принципиально важную теорему:

Теорема 5. *В пространстве* $L'_p(\Omega)$ $(L_p(\Omega))$ *существует счетная последовательность (кусочно постоянных) функций* $\varphi_1(\mathbf{x})$, $\varphi_2(\mathbf{x})$, $\varphi_3(\mathbf{x})$, ... *таких, что какова бы ни была функция* $f(\mathbf{x}) \in L'_p(\Omega)$ *и каково бы ни было* $\varepsilon > 0$, *найдется такой элемент* $\varphi_k(\mathbf{x})$ *этой последовательности, что*

$$\left(\int_\Omega |f - \varphi_k|^p \, d\mathbf{x}\right)^{1/p} < \varepsilon. \tag{7}$$

Факт, который описывается в теореме 5, вполне аналогичен следующему факту: *во множестве всех действительных (комплексных) чисел можно указать принадлежащее к нему всюду плотное* (см. § 14.5) *в нем счетное множество рациональных действительных (соответственно комплексных с рациональными компонентами) чисел.*

Теорема 6. *Пусть задана функция* $f \in L'_p(\Omega)$ $(L_p(\Omega))$. *Если* Ω — *часть* $R_n = R$, *то будем считать, что* f *продолжена на* R, *полагая* $f = 0$ *вне* Ω. *Тогда* $(1 \leqslant p < \infty)$

$$\psi(t) = \left(\int_R |f(\mathbf{x} + \mathbf{t}) - f(\mathbf{x})|^p \, d\mathbf{x}\right)^{1/p} \to 0, \quad \mathbf{t} \to 0. \tag{8}$$

Доказательство. Функция f, продолжающая, как указано в теореме, функцию $f \in L'_p(\Omega)$ $(L_p(\Omega))$, принадлежит, очевидно, к $L'_p = L'_p(R)$ $(L_p = L_p(R))$, и потому к ней применима теорема 1. Зададим $\varepsilon > 0$ и подберем непрерывную финитную в R_n функцию φ такую, что

$$\left(\int_R |f(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x})|^p \, d\mathbf{x}\right)^{1/p} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Носитель φ — ограниченное множество $F \subset g' \subset g$, где g' и g — некоторые концентрические шары радиусов $\rho' < \rho$. Функция φ непрерывна на замкнутом ограниченном шаре g и потому равномерно непрерывна на нем. Обозначим через $(x', x'' \in g)$

$$\omega(\delta) = \sup_{|x' - x''| < \delta} |\varphi(\mathbf{x}') - \varphi(\mathbf{x}'')|$$

модуль непрерывности φ на g.

Тогда получим ($|g'|$ — мера g')

$$\left(\int_R |f(\mathbf{x}+\mathbf{t})-f(\mathbf{x})|^p\,d\mathbf{x}\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_R |f(\mathbf{x}+\mathbf{t})-\varphi(\mathbf{x}+\mathbf{t})|^p\,d\mathbf{x}\right)^{1/p} +$$

$$+\left(\int_g |\varphi(\mathbf{x}+\mathbf{t})-\varphi(\mathbf{x})|^p\,d\mathbf{x}\right)^{1/p} + \left(\int_R |\varphi(\mathbf{x}-f(\mathbf{x})|^p\,d\mathbf{x}\right)^{1/p} <$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \omega(\delta)\,|g'|^{1/p} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon \quad (|\mathbf{t}| < \delta < \rho - \rho'),$$

если только δ достаточно мало.

§ 14.5. Сведения из теории линейных множеств и линейных нормированных пространств

Пусть E — линейное множество (комплексное или действительное, см. § 6.1). Всякое множество E_1, принадлежащее E и содержащее вместе с элементом $\mathbf{x}$ элемент $\alpha\mathbf{x}$, где α — произвольное число (соответственно комплексное, действительное), и вместе с элементами $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ их сумму $\mathbf{x}+\mathbf{y}$, очевидно, есть в свою очередь линейное множество.

Конечная система элементов $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in E$ называется *линейно независимой*, если из равенства

$$\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n = \theta$$

следует, что $\alpha_j = 0$ ($j = 1, \ldots, n$). В противном случае эта система называется *линейно зависимой*.

Линейное множество E' называется *конечномерным* и при том *n-мерным*, если в нем имеется система из n линейно независимых элементов $x_1, \ldots, x_n$, а всякая система из $n+1$ элементов линейно зависима. Легко видеть, что в этом случае любой элемент $\mathbf{x} \in E'$ единственным образом выражается в виде суммы

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathbf{x}_k, \tag{1}$$

где α_k ($k = 1, \ldots, n$) — некоторые числа (комплексные, действительные).

Можно показать, что и, наоборот, *если система элементов $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ линейно независима, то линейное множество E' элементов вида* (1) n-мерно. Для этого достаточно установить, что *всякие $n+1$ элементов E' образуют линейно зависимую систему.*

Система функций

$$1,\ x,\ x^2,\ \ldots,\ x^{n-1} \quad (a \leqslant x \leqslant b) \tag{2}$$

линейно независима в пространстве $C(a, b)$, потому что нулевым элементом в $C(a, b)$ является функция, тождественно равная

нулю на $[a, b]$, а из равенства

$$\sum_{0}^{n-1} \alpha_k x^k \equiv 0 \quad (a \leqslant x \leqslant b) \tag{3}$$

следует, что $\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_{n-1} = 0$.

В пространствах $L_p'(a, b)$ система (2) также линейно независима, потому что для того, чтобы сумма $\sum_{0}^{n-1} \alpha_k x^k$ была нулевым элементом, необходимо и достаточно выполнение равенства

$$\int_a^b \left| \sum_{0}^{n-1} \alpha_k x^k \right|^p dx = 0,$$

из которого, вследствие непрерывности (см. теорему 1, § 14.2) подынтегральной функции, следует (3) и потому равенство нулю всех α_j $(j = 0, 1, \ldots, n-1)$.

Поэтому совокупность всех многочленов $P_{n-1}(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ данной степени*) $n-1$ есть линейное n-мерное множество в $C(a, b)$ и $L_p'(a, b)$.

Линейное множество E называется *бесконечномерным*, если в нем можно найти линейно независимую систему $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ элементов, как бы ни было велико n. Последовательность элементов

$$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \ldots \tag{4}$$

называется *линейно независимой*, если любая ее подсистема, состоящая из конечного числа элементов, линейно независима. Такую (бесконечную) последовательность мы будем называть еще *счетной линейно независимой системой элементов*.

В бесконечномерном линейном множестве E существуют счетные линейно независимые системы элементов. В самом деле, любой элемент $x_1 \neq \theta$ образует линейно независимую систему, состоящую из одного элемента. Его будем считать первым элементом последовательности (4), которую мы построим по индукции. Допустим, что в E уже обнаружена линейно независимая система

$$\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n. \tag{5}$$

Вследствие бесконечномерности E существует в E элемент $\mathbf{x}_{n+1}$, образующий вместе с элементами (5) линейно независимую систему, так как в противном случае любой элемент $\mathbf{x} \in E$ мог бы быть представлен в виде $\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathbf{x}_k$, где α_k — числа, и множество элементов вида $\sum_{1}^{n} \alpha_k \mathbf{x}_k$ содержало бы только n линейно независимых элементов.

---

*) Точнее, степени не выше $n-1$.

Продолжая этот процесс неограниченно, получим последовательность (4), очевидно, линейно независимую. Надо учесть, что если выхватить из последовательности (4) любые n элементов $\mathbf{x}_{k_1}, \ldots, \mathbf{x}_{k_n}$ $(k_1 < k_2 < \ldots < k_n)$, то они образуют линейно независимую систему; это следует из независимости более широкой системы $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_{k_n}$.

Последовательность функций $1, x, x^2, \ldots$ может служить примером счетной линейно независимой системы в $C(a, b)$ и $L_p'(a, b)$.

Пусть теперь E есть линейное нормированное пространство. Множество $G \subset E$ называется *плотным* в E, если для любого элемента $\mathbf{x} \in E$ и любого положительного $\varepsilon > 0$ найдется в G элемент $\mathbf{y}$, для которого

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \varepsilon.$$

В силу этого определения на основании теоремы 1 § 14.4 множество непрерывных (даже бесконечно дифференцируемых) финитных в Ω функций плотно в $L_p'(\Omega)$ (и в $L_p(\Omega)$), также как плотно в этих пространствах множество кусочно постоянных функций, имеющих носитель в Ω.

Вот еще пример. Функцию φ, заданную на отрезке $[a, b]$, называется *полигональной*, если она непрерывна на этом отрезке ($\varphi \in C(a, b)$) и существует такое разбиение последнего, что на каждом его частичном отрезке φ — линейная функция. Для любой функции $f \in C(a, b)$ в силу ее равномерной непрерывности для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такую полигональную функцию $\varphi(x)$, что

$$\|f - \varphi\|_{C(a,b)} = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon.$$

Следовательно, полигональные функции, определенные на $[a, b]$, образуют плотное в $C(a, b)$ множество.

Пространство E называется *сепарабельным* или *счетномерным*, если оно бесконечномерно и существует счетное плотное в нем множество. Пространство $C(a, b)$ сепарабельно (см. ниже упражнения).

В силу теоремы 5 § 14.4 (бесконечномерные) *пространства* $L_p'(\Omega)$ $(L_{p'}(\Omega))$ *сепарабельны*, потому что они содержат в себе счетное плотное в них множество кусочно постоянных функций (см. ниже упражнение 5).

Множество $M \subset E$ называется *полным* в E, если совокупность всевозможных линейных комбинаций вида $\sum_1^n \alpha_k \mathbf{x}_k$, где α_k — числа, а $\mathbf{x}_k$ — элементы M, образуют множество, плотное в E.

Теорема 1. *Если в E имеется счетная полная в E линейно независимая система элементов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \ldots$, то E сепарабельно.*

В самом деле, E бесконечномерно, потому что в E имеется линейно независимая система элементов $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$, состоящая из n элементов, каково бы ни было натуральное n.

Далее, множество M' сумм $\sum_1^n r_k \mathbf{x}_k$, где n — произвольное натуральное число, а r_k $(k = 1, \ldots, n)$ — произвольные рациональные числа, счетно (эти суммы можно перенумеровать). С другой стороны, для любого элемента $\mathbf{x} \in E$ и всякого $\varepsilon > 0$ в силу плотности M в E можно указать такую сумму $\sum_1^n \alpha_k x_k$, что

$$\left\| \mathbf{x} - \sum_1^n \alpha_k x_k \right\| < \frac{\varepsilon}{2},$$

а теперь можно взять рациональные числа r_k, настолько близкие к соответствующим α_k, что

$$\left\| \sum_1^n \alpha_k \mathbf{x}_k - \sum_1^n r_k \mathbf{x}_k \right\| \leqslant \sum_1^n |\alpha_k - r_k| \|\mathbf{x}_k\| \leqslant K \sum_1^n |\alpha_k - r_k| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$K = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \|\mathbf{x}_k\|.$$

Поэтому

$$\left\| \mathbf{x} - \sum_1^n r_k \mathbf{x}_k \right\| \leqslant \left\| \mathbf{x} - \sum_1^n \alpha_k \mathbf{x}_k \right\| + \left\| \sum_1^n \alpha_k \mathbf{x}_k - \sum_1^n r_k \mathbf{x}_k \right\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

и нам удалось любой элемент $\mathbf{x} \in E$ приблизить (аппроксимировать) некоторым элементом из счетного множества M' с любой наперед заданной точностью. Это доказывает сепарабельность E.

Верна также обратная

Теорема 2. *Если пространство E сепарабельно, то в нем имеется счетная линейно независимая система элементов, полная в E.*

В самом деле, если E сепарабельно, то имеется счетная последовательность, плотная в нем. Тем более можно считать, что эта последовательность полная в E.

Но из полной счетной системы элементов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots$ всегда можно выделить (вообще говоря, не единственную) линейно независимую последовательность элементов, образующих в свою очередь полную систему.

Например, подпоследовательность

$$\mathbf{x}_{n_1}, \mathbf{x}_{n_2}, \mathbf{x}_{n_3}, \ldots \tag{6}$$

удовлетворяет этому свойству, если индексы $n_1, n_2, \ldots$ определить следующим образом. Пусть n_1 есть наименьший индекс n, для которого $\mathbf{x}_n \neq \theta$. Элемент $\mathbf{x}_{n_1}$ образует линейно независимую

систему, состоящую из одного элемента. Далее, если индексы $n_1, \ldots, n_k$ определены, то n_{k+1} определяется как наименьшее натуральное n, для которого элементы $\mathbf{x}_{n_1}, \ldots, \mathbf{x}_{n_k}, \mathbf{x}_{n_{k+1}}$ образуют линейно независимую систему. Важно, что при каждом k существует такое n_{k+1}, т. е. конструируемая линейно независимая система (6) бесконечна (счетна).

В самом деле, пусть при некотором k не существует n_{k+1}. Положим $\mathbf{z}_1 = \mathbf{x}_{n_1}, \ldots, \mathbf{z}_k = \mathbf{x}_{n_k}$. Тогда система

$$\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_k, \tag{7}$$

где k фиксировано, будет обладать свойствами:

1) система (7) линейно независима;

2) для любого элемента $\mathbf{x} \in E$ и любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, что

$$\left\| \mathbf{x} - \sum_1^k \alpha_j \mathbf{z}_j \right\| < \varepsilon. \tag{8}$$

Справедлива

Лемма 1. *Из свойств* 1) *и* 2) *следует, что каждому элементу* $\mathbf{x} \in E$ *соответствует система чисел* $\beta_1, \ldots, \beta_k$ (*единственная*), *для которой*

$$\mathbf{x} = \sum_1^k \beta_j \mathbf{z}_j.$$

Но тогда E есть n-мерное пространство, и мы пришли в противоречие с предположением, что E счетномерно.

Лемма 1 особенно просто доказывается в случае, если E есть линейное пространство со скалярным произведением (см. теорему 3, § 14.7). В дальнейшем нам понадобится именно этот случай.

Доказательство леммы 1 базируется на следующей самой по себе интересной лемме.

Лемма 2. *Если система элементов* $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$, принадлежащих E, *линейно независима, то существует положительное число* $\lambda > 0$ *такое, что*

$$\lambda \sum_1^n |\alpha_j| \leqslant \left\| \sum \alpha_j \mathbf{y}_j \right\| \tag{9}$$

для любой системы чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ (λ вообще зависит от n).

Доказательство. Введем функцию

$$\Phi(\alpha) = \Phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \left\| \sum_1^n \alpha_j \mathbf{y}_j \right\|$$

от n переменных, определенную на всем n-мерном пространстве R_n. Она непрерывна:

$$|\Phi(\alpha) - \Phi(\alpha^0)| = \left| \left\| \sum_1^n \alpha_j \mathbf{y}_j \right\| - \left\| \sum_j^n \alpha_j^0 \mathbf{y}_j \right\| \right| \leqslant \left\| \sum_1^n \alpha_j y_j - \sum_1^n \alpha_j^0 \mathbf{y}_j \right\| =$$

$$= \left\| \sum_1^n (\alpha_j - \alpha_j^0) \mathbf{y}_j \right\| \leqslant \sum_{j=1}^n |\alpha_j - \alpha_j^0| \, \|\mathbf{y}_j\| \leqslant K \sum_{j=1}^n |\alpha_j - \alpha_j^0| \to 0, \quad \alpha \to \alpha^0,$$

где

$$K = K_n = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \|y_j\|.$$

Кроме того, функция Φ в силу линейной независимости системы элементов $y_1, \ldots, y_n$ положительна, каковы бы ни были числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, за исключением того случая, когда $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$. Введем еще в R_n множество Λ точек $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, координаты которых удовлетворяют равенству

$$\|\alpha\|^* = \sum_1^n |\alpha_j| = 1.$$

Λ ограничено, так как координаты его точек удовлетворяют неравенству

$$|\alpha_s| \leqslant \sum_{j=1}^n |\alpha_j| = 1.$$

Кроме того, оно замкнуто (см. пример 5, § 7.9). Поэтому функция $\Phi(\alpha)$ достигает на множестве Λ в некоторой его точке α^0 своего минимума:

$$\lambda = \Phi(\alpha^0) = \min_{\alpha \in \Lambda} \Phi(\alpha).$$

При этом $\lambda > 0$, потому что точки $\alpha \in \Lambda$ заведомо не нулевые. Итак, имеет место неравенство

$$0 < \lambda \leqslant \left\| \sum_1^n \alpha_j y_j \right\|, \tag{10}$$

какова бы ни была точка $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \Lambda$. Мы, таким образом, доказали неравенство (9) в частном случае, когда $\alpha \in \Lambda$.

Докажем теперь, что оно верно для любой точки $\alpha \in R_n$. В самом деле, если $\alpha = \theta(0, \ldots, 0)$, то (9) тривиально. Пусть $\alpha \neq \theta$. Введем новую точку

$$\beta = \frac{\alpha}{\|\alpha\|^*} = \left(\frac{\alpha_1}{\|\alpha\|^*}, \ldots, \frac{\alpha_n}{\|\alpha\|^*} \right).$$

Очевидно, $\beta \in \Lambda$, так как

$$\sum_{j=1}^n |\beta_j| = \sum_{j=1}^n \left| \frac{\alpha_j}{\|\alpha\|^*} \right| = 1,$$

и потому в силу (10)

$$\lambda \leqslant \left\| \sum_1^n \frac{\alpha_j}{\|\alpha\|^*} x_j \right\| = \frac{1}{\|\alpha\|^*} \left\| \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j \right\|,$$

откуда следует (9).

Лемма 1 вытекает из следующих рассуждений. Пусть $x \in E$. Если допустить, что элементы

$$x, z_1, \ldots, z_n \tag{11}$$

образуют линейно независимую систему, то на основании леммы 2

для любых чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$

$$1 \leqslant 1 + \sum_1^n |\alpha_j| \leqslant \frac{1}{\lambda} \left\| \mathbf{x} - \sum_1^n \alpha_j z_j \right\| \quad (\lambda > 0)$$

и

$$0 < \lambda \leqslant \left\| \mathbf{x} - \sum_1^n \alpha_j z_j \right\|.$$

Но это противоречит условию леммы 1, в силу которого при $\varepsilon < \lambda$ можно указать систему чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, для которой выполняется неравенство (8). Поэтому система (11) линейно зависима и существуют числа $c, c_1, \ldots, c_n$, одновременно не равные нулю, для которых

$$c\mathbf{x} + c_1\mathbf{z}_1 + \ldots + c_n\mathbf{z}_n = \theta.$$

В таком случае $c \neq 0$, так как иначе система $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_n$ была бы линейно зависимой; поэтому

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n \beta_j z_j \quad \left(\beta_j = -\frac{c_j}{c}\right),$$

и лемма 1 доказана.

Заметим, что имеет место в известном смысле обратное (9) неравенство

$$\left\| \sum_1^p \alpha_j \mathbf{y}_j \right\| \leqslant K \sum_{j=1}^n |\alpha_j|, \tag{12}$$

$$K = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \|\mathbf{y}_j\|,$$

где, таким образом, K не зависит от $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

Объединяя неравенства (9) и (12), получим (для линейно независимой системы $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$) два неравенства

$$C_1 \sum_1^n |\alpha_j| \leqslant \left\| \sum_1^n \alpha_j \mathbf{y}_j \right\| \leqslant C_2 \sum_{j=1}^n |\alpha_j|, \tag{13}$$

где константы C_1 и C_2 ($C_1 = \lambda$, $C_2 = K$) не зависят от $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Однако надо иметь в виду, что константы C_1 и C_2 зависят от нормы, которая введена в пространстве E.

Упражнения.

Доказать следующие утверждения:

1. Множество всех определенных на $[a, b]$ полигональных функций Π', графики которых имеют угловые точки с рациональными координатами, счетно.

2. Каковы бы ни были непрерывная на $[a, b]$ функция $f(x)$ и $\varepsilon > 0$, найдется функция $\varphi \in \Pi'$ такая, что

$$|f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon.$$

Это свойство говорит, что Π' плотно в $C(a, b)$. Если еще учесть, что в

$C(a, b)$ имеется счетная линейно независимая система функций $1, x, x^2, \ldots$, то $C(a, b)$ сепарабельно.

3. П' плотно в $L'_p(a, b)$ $(L_p(a, b))$.

Воспользоваться тем, что непрерывные финитные в (a, b) функции образуют множество, плотное в этих пространствах, а также результатом предыдущего примера 2.

4. Пространства $C(\overline{\Omega})$, $L'_p(\Omega)$ $(L_p(\Omega))$ (Ω — открытое множество) бесконечномерны. Рассмотреть последовательность принадлежащих к Ω попарно непересекающихся кубов $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4, \ldots$ и их характеристических функций (в случае $C(\overline{\Omega})$ — функций вида § 14.4, (5), при этом Ω ограничено)

$$\varphi_{\Delta_k}(x) = \begin{cases} 1 & \text{на } \Delta_k, \\ 0 & \text{на } \Delta_k \end{cases} \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

§ 14.6. Ортогональная система в пространстве со скалярным произведением

Пусть H есть линейное (комплексное или действительное) множество элементов $\varphi, \psi, f, \ldots$, где введено скалярное произведение (φ, ψ) $(\varphi, \psi \in H)$, подчиняющееся, таким образом, свойствам 1)—3) скалярного произведения (см. § 6.2).

Сначала наши рассуждения будут относиться к произвольному не обязательно полному пространству со скалярным произведением, каким является, как мы знаем, пространство $L'_2(\Omega)$.

Элемент $\varphi \in H$ называется *нормальным*, если $\|\varphi\| = (\varphi, \varphi)^{1/2} = 1$.

Два элемента $\varphi, \psi \in H$ называются *ортогональными* (друг к другу), если $(\varphi, \psi) = 0$.

Система элементов

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots \tag{1}$$

(конечная или бесконечная) называется *ортогональной*, если ее элементы — не нулевые (имеют положительную норму) и попарно ортогональны.

Наконец, система (1) называется *ортогональной* и *нормальной* или *ортонормированной*, если

$$(\varphi_k, \varphi_l) = \delta_{kl} = \begin{cases} 0, & k \neq l, \\ 1, & k = l, \end{cases}$$

т. е. она ортогональна и каждый ее элемент имеет единичную норму.

Всякая конечная ортогональная система $\varphi_1, \ldots, \varphi_N$ линейно независима в H, т. е. из того, что

$$\sum_1^n \alpha_k \varphi_k = \theta,$$

где α_k — числа, следует, что все $\alpha_k = 0$. В самом деле, если помножить обе части этого равенства скалярно на φ_l $(l = 1, \ldots, N)$,

то на основании линейных свойств скалярного произведения получим

$$\left(\sum_1^N \alpha_k \varphi_k, \varphi_l\right) = \alpha_l (\varphi_l, \varphi_l) = 0,$$

и так как $(\varphi_l, \varphi_l) > 0$, то $\alpha_l = 0$ $(l = 1, \ldots, n)$.

Если $f \in H$ — произвольный элемент, то число

$$\frac{1}{\|\varphi_k\|^2}(f, \varphi_k) \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

называется *коэффициентом Фурье* f относительно элемента φ_k ортогональной системы (1).

Ряд

$$f \sim \sum_1^\infty \frac{1}{\|\varphi_k\|^2}(f, \varphi_k)\varphi_k \tag{2}$$

(порождаемый элементом $f \in H$) называется *рядом Фурье элемента f по ортогональной системе* (1) (в честь французского математика Ж. Б. Фурье (1768—1830), которому принадлежат первые фундаментальные исследования, относящиеся к представлению функций тригонометрическими рядами).

Если система (1) ортонормирована, то $\|\varphi_k\| = 1$ $(k = 1, 2, \ldots)$ и ряд Фурье $f \in H$ записывается еще проще:

$$f \sim \sum_1^\infty (f, \varphi_k)\varphi_k. \tag{3}$$

Коэффициентами Фурье в этом случае являются числа (f, φ_k). В дальнейшем мы будем рассматривать только ортонормированные системы (1). Переход от них к произвольным ортогональным системам носит технический характер.

Отметим уже сейчас, что тригонометрические функции

$$\frac{1}{2}, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots$$

образуют ортогональную систему в пространстве $L_2'(0, 2\pi)$ (или $L_2(0, 2\pi)$) функций с интегрируемым квадратом модуля на $[0, 2\pi]$. Ряды Фурье по этой конкретной системе будут специально изучаться нами в гл. 15. Пространство $L_2'(0, 2\pi)$ $(L_2(0, 2\pi))$ есть частный случай линейного пространства H со скалярным произведением, и все результаты, которые мы получим в этой главе для H, соответственно переносятся на $L_2'(0, \pi)$ $(L_2(0, 2\pi))$.

Итак, пусть задана ортонормированная система элементов (1) в H. Зададим еще элемент $f \in H$ и поставим задачу: требуется среди всевозможных чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$ (комплексных или действительных соответственно в комплексном или действительном

пространстве H) найти такие, для которых норма

$$\left\| f - \sum_1^N \alpha_k \varphi_k \right\| \tag{4}$$

обращается в минимум.

Имеем

$$\left\| f - \sum_1^N \alpha_k \varphi_k \right\|^2 = \left(f - \sum_{k=1}^N \alpha_k \varphi_k,\ f - \sum_{l=1}^N \alpha_l \varphi_l \right) =$$

$$= (f, f) - \sum_1^N \left[\overline{\alpha}_l (f, \varphi_l) + \alpha_l \overline{(f, \varphi_l)} \right] + \sum_1^N |\alpha_l|^2 =$$

$$= (f, f) + \sum_1^N |\alpha_l - (f, \varphi_l)|^2 - \sum_1^N |f, \varphi_l|^2 \geqslant (f, f) - \sum_1^N |(f, \varphi_l|)^2. \tag{5}$$

При этом оценка справа достигается, очевидно, для чисел

$$\alpha_l = (f, \varphi_l) \qquad (l = 1, 2, \ldots, N)$$

и только для них. Эти числа (f, φ_l) мы назвали коэффициентами Фурье элемента f относительно элементов φ_l ортонормированной системы.

Полученный результат можно записать в виде цепи равенств:

$$E_N(f)_H = \min_{\alpha_k} \left\| f - \sum_1^N \alpha_k \varphi_k \right\| = \left\| f - \sum_1^N (f, \varphi_k) \varphi_k \right\| =$$

$$= \left((f, f) - \sum_{k=1}^N |(f, \varphi_k)|^2 \right)^{1/2} \tag{6}$$

Первый член этой цепи $E_N(f)_H$ есть обозначение минимума по α_k, записанного во втором члене. Его называют *наилучшим приближением элемента $f \in H$ (в метрике H) при помощи линейных комбинаций вида $\sum_1^N \alpha_k \varphi_k$, где α_k — произвольные числа* (комплексные, соответственно действительные). Третий член цепи выражает, что наилучшее приближение достигается, когда числа α_k являются коэффициентами Фурье f относительно φ_k, т. е. при $\alpha_k = (f, \varphi_k)$. Наконец, последний, четвертый член дает явное выражение для наилучшего приближения f через (f, f) и коэффициенты Фурье (f, φ_k) $(k = 1, \ldots, N)$.

Ясно, что $E_N(f)_H \geqslant 0$, так как это число есть минимум неотрицательной нормы. Ясно также, что $E_N(f)_H$ не возрастает при возрастании N. Это видно из последнего члена формулы (6), но это видно и из второго члена:

$$E_N(f)_H = \min_{\alpha_k} \left\| f - \sum_1^N \alpha_k \varphi_k \right\| \geqslant \min_{\alpha_k} \left\| f - \sum_1^{N+1} \alpha_k \varphi_k \right\| = E_{N+1}(f)_H,$$

потому что сумма $\sum_1^N$ есть частный случай суммы $\sum_1^{N+1}$ при $\alpha_{N+1}=0$.

Из сказанного следует, что для любого элемента $f \in H$ существует предел

$$\lambda = \lim_{N\to\infty} E_N(f)_H =$$

$$= \sqrt{(f, f) - \sum_1^\infty |(f, \varphi_k)|^2} = \lim_{N\to\infty} \left\| f - \sum_{k=1}^N (f, \varphi_k)\varphi_k \right\| \geqslant 0. \quad (7)$$

В частности, отсюда следует, что *ряд, состоящий из квадратов модулей коэффициентов элемента $f \in H$, сходится и выполняется неравенство*

$$\sum_1^\infty |(f, \varphi_k)|^2 \leqslant (f, f), \quad (8)$$

называемое неравенством Парсеваля для элемента f.

Термин неравенство здесь употребляется в том смысле, что утверждается, что левая часть (8) не превышает правую. На самом деле может оказаться, что для тех или иных элементов f, а может быть и для всех соотношение (8) есть точное равенство. Тогда оно называется *равенством Парсеваля* *).

Условимся говорить, что ряд

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots$$

элементов $u_k \in H$ *сходится* в метрике H к элементу $f \in H$, если для его n-й суммы $s_n (\in H)$

$$s_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

имеет место соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \| f - s_n \| = 0.$$

При этом пишут

$$f = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots = \sum_0^\infty u_k \quad (9)$$

и говорят, что f есть *сумма ряда, сходящегося к f в метрике H.*

Допустим, что в равенствах (7) для данного элемента f случилось, что $\lambda = 0$. Разберемся, что тогда выражает равенство нулю остальных трех членов (7).

1) Равенство нулю второго члена (7) может быть эквивалентно выражено на следующем языке: для любого $\varepsilon > 0$ можно

---

*) М. Парсеваль — французский математик, получивший это неравенство в 1805 г. для тригонометрических систем.

указать такое N_0 и числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_{N_0}$, что

$$\left\| f - \sum_1^{N_0} \alpha_k \varphi_k \right\| < \varepsilon. \tag{10}$$

В самом деле, если указанные числа N_0, $\alpha_1, \ldots, \alpha_{N_0}$ найдены, то зафиксируем N_0 и возьмем минимум левой части по α_k. Тогда получим

$$\varepsilon > E_{N_0}(f)_H \geqslant E_N(f)_H \quad (N > N_0),$$

т. е. $E_N(f) \to 0$ $(N \to \infty)$. Наоборот, из этого последнего свойства следует, что для любого $\varepsilon > 0$ можно указать N такое, что

$$\varepsilon > E_N(f)_H = \left\| f - \sum_1^N \alpha_k \varphi_k \right\| \quad (\alpha_k = (f, \varphi_k)).$$

2) Равенство нулю третьего члена (7) выражает, что для рассматриваемого элемента f имеет место точное равенство Парсеваля.

3) Равенство же нулю четвертого члена (7) выражает, что ряд Фурье f по системе (6) сходится к f в смысле метрики, определенной в H.

Так как свойства 1), 2), 3) *могут иметь место только одновременно, то выполнение одного из них для какого-нибудь элемента влечет за собой выполнение двух остальных.*

Напомним, что свойство 1), если оно выполняется для всех элементов $f \in H$, выражает (см. § 14.5), что система элементов φ_1, φ_2, φ_3, ... полна в H.

Из сказанного как следствие вытекает следующая важная

Теорема 1. *Для того чтобы ортонормированная система элементов* φ_1, φ_2, φ_3, ... *была полной в* H, *необходимо и достаточно выполнение одного из следующих условий:*

а) *Ряд Фурье произвольного элемента* $f \in H$

$$f \sim \sum_1^\infty (f, \varphi_k) \varphi_k$$

сходится к f *в метрике* H (и в этом соотношении можно заменить $\sim$ на $=$, см. (9)).

б) *Для каждого элемента* $f \in H$ *имеет место равенство Парсеваля:*

$$(f, f) = \sum_1^\infty |(f, \varphi_k)|^2.$$

Отметим лемму:

Лемма 1. *Пусть имеет место равенство*

$$f = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots,$$

где f, $u_k \in H$ *и ряд сходится в метрике* H(*к* f). *Тогда для любого элемента* $v \in H$

$$(f, v) = (u_0, v) + (u_1, v) + (u_2, v) + \ldots,$$

где, таким образом, числовой ряд справа сходится к (f, v).

В самом деле,

$$\left|(f, v) - \sum_0^N (u_k, v)\right| = \left|\left(f - \sum_0^N u_k, v\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left\|f - \sum_0^N u_k\right\| \|v\| \to 0 \qquad (N \to \infty).$$

Следствие. *Если ряд*

$$f = \sum_1^\infty \alpha_k \varphi_k, \tag{11}$$

где α_k — *числа, а* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ — *ортонормированная система, сходится в метрике* H *к некоторому элементу* $f \in H$, *то числа* α_s — *необходимо коэффициенты Фурье* f:

$$\alpha_s = (f, \varphi_s) \qquad (s = 1, 2, \ldots), \tag{12}$$

т. е. разложение f *в указанный ряд единственно.*

Действительно, если умножить скалярно члены обеих частей равенства (11) на φ_s, то на основании леммы 1 получим (12).

Теорема 2. *Если ортогональная и нормальная система* (1) *полна в* H, *то для любых двух элементов* f, $\varphi \in H$ *имеет место числовое равенство*

$$(f, \varphi) = \sum_{k=1}^\infty (f, \varphi_k)\,\overline{(\varphi, \varphi_k)} \tag{13}$$

где, таким образом, ряд справа сходится к числу (f, φ).

В самом деле, из полноты системы (1) на основании теоремы 1 следует, что ряд

$$f = \sum_1^\infty (f, \varphi_k)\,\varphi_k \tag{14}$$

сходится к f в метрике H. Теперь (13) получается из (14), если скалярно умножить все члены левой и правой частей (14) на φ:

$$(f, \varphi) = \sum_1^\infty (f, \varphi_k)(\varphi_k, \varphi) = \sum_1^\infty (f, \varphi_k)\,\overline{(\varphi, \varphi_k)},$$

что законно в силу леммы 1.

Равенство (13) содержит в себе, в частности, при $f = \varphi \in H$ равенство Парсеваля.

Введем еще определение. Ортонормированная система (1) *замкнута*, если из того, что для элемента $\psi \in H$ выполняются равенства

$$(\psi, \varphi_k) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots), \tag{15}$$

следует, что ψ есть нулевой элемент $H (\psi = \theta)$.

Из равенства Парсеваля для полной системы вытекает

Теорема 3. *Из полноты ортонормированной системы следует ее замкнутость.*

Все утверждения, доказанные в этом параграфе выше, верны как для полного, так и не полного*) пространства H. В частности, они верны для пространства $L_2'(\Omega)$, которое, как мы знаем, не полно.

Ниже мы приводим ряд утверждений, где от H требуется полнота.

Итак, пусть H есть полное линейное бесконечномерное пространство со скалярным произведением — *гильбертово пространство* (таким является пространство $L_2(\Omega)$).

Теорема 4. *Ряд по ортонормированой системе*

$$\sum_1^\infty \alpha_k \varphi_k,$$

где

$$\sum_1^\infty |\alpha_k|^2 < \infty, \tag{16}$$

сходится в метрике H к некоторому элементу $\varphi \in H$.

Доказательство. Пусть

$$s_n = \sum_1^n \alpha_k \varphi_k \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

В силу сходимости ряда (16) для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что для $n > N$ и всякого p

$$\varepsilon^2 > \sum_{n+1}^{n+p} |\alpha_k|^2 = \left\| \sum_{n+1}^{n+p} \alpha_k \varphi_k \right\|^2 = \| s_{n+p} - s_n \|^2.$$

Это показывает, что последовательность элементов $s_n \in H$ удовлетворяет условию Коши и вследствие полноты H существует элемент $\varphi \in H$, к которому эта последовательность сходится (в метрике H), что и доказывает теорему.

Теорема 5. *Ряд Фурье*

$$\sum_1^\infty (f, \varphi_k) \varphi_k \tag{17}$$

произвольного элемента $f \in H$ сходится (в метрике H) к некото-

*) Полная система в H и полное пространство H — разные вещи. Например, система φ_k может быть полной в неполном пространстве H.

рому элементу $\varphi \in H$ *и при этом элемент* $f-\varphi$ *ортогонален ко всем* φ_k:

$$(f-\varphi, \varphi_k) = 0 \quad (k=1, 2, \ldots).$$

Доказательство. Согласно неравенству Парсеваля ряд

$$\sum_1^\infty |(f, \varphi_k)|^2 \leqslant (f, f)$$

сходится. Поэтому в силу предыдущей теоремы ряд (17) сходится к некоторому элементу $\varphi \in H$:

$$\varphi = \sum_1^\infty (f, \varphi_k)\varphi_k.$$

Итак,

$$f-\varphi = f - \sum_1^\infty (f, \varphi_k)\varphi_k,$$

где справа стоит ряд, сходящийся в метрике H. Помножим скалярно все члены последнего равенства на элемент φ_s. Тогда получим

$$(f-\varphi, \varphi_s) = (f, \varphi_s) - (f, \varphi_s) = 0 \quad (s=1, 2, \ldots).$$

Утверждение доказано.

Докажем обратную теорему к теореме 3 (при условии полноты H).

Теорема 6. *Если H полно, то из замкнутости ортонормированной системы* (1) *следует её полнота.*

Доказательство. Пусть система (1) замкнута, но не полна. Тогда на основании теоремы 1 должен найтись элемент $f \in H$ такой, что его ряд Фурье не сходится к нему. Но он сходится, как было доказано выше, к некоторому элементу $\varphi \in H$, и элемент $f-\varphi$ ортогонален ко всем φ_k $(k=1, 2, \ldots)$. Но вследствие замкнутости системы в таком случае $f-\varphi=\theta$, т. е. $f=\varphi$, и мы пришли к противоречию.

Пример 1. l_2 обозначает множество последовательностей

$$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$$

(комплексных или действительных) чисел, для которых конечна норма

$$\|\boldsymbol{\alpha}\| = \left(\sum_1^\infty |\alpha_k|^2\right)^{1/2}. \tag{18}$$

Если $\boldsymbol{\alpha} \in l_2$ и $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \ldots) \in l_2$, то при любом натуральном n (см. § 6.2, (9))

$$\sum_1^n |\alpha_j \bar{\beta}_j| \leqslant \left(\sum_{j=1}^n |\alpha_j|^2\right)^{1/2} \left(\sum_1^n |\beta_j|^2\right)^{1/2} \leqslant \|\boldsymbol{\alpha}\| \|\boldsymbol{\beta}\|;$$

поэтому ряд $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \sum_1^\infty \alpha_j \bar{\beta}_j$ абсолютно сходится.

Легко проверяется, что (α, β) подчиняется условиям 1), 2), 3) скалярного произведения, порождающего норму (18) (см. § 6.2) с нулевым элементом $\theta = (0, 0, 0, \ldots)$. Следовательно, l_2 — *линейное пространство со скалярным произведением. Оно к тому же полно и бесконечномерно, таким образом, гильбертово.* В самом деле, пусть дана последовательность элементов $\alpha^k = (\alpha_1^k, \alpha_2^k, \ldots) \in l_2$ $(k = 1, 2, \ldots)$, удовлетворяющая условию Коши, т. е. для всякого $\varepsilon > 0$ найдется N такое, что

$$\varepsilon > \|\alpha^k - \alpha^{k'}\| \geqslant |\alpha_j^k - \alpha_j^{k'}| \qquad (k, k' > N).$$

Следовательно, при любом j $\alpha_j^k \to \alpha_j$ $(k \to \infty)$, и мы получили числовую последовательность $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$. Она принадлежит к l_2, потому что

$$\varepsilon \geqslant \left(\sum_{j=1}^{n} |\alpha_j^k - \alpha_j|^2\right)^{1/2} \qquad (k > N),$$

каково бы ни было натуральное n. Поэтому

$$\varepsilon \geqslant \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j^k - \alpha_j|^2\right)^{1/2} = \|\alpha^k - \alpha\| \qquad (k > N). \tag{19}$$

Таким образом, $\alpha^k - \alpha \in l_2$; но $\alpha^k \in l_2$, поэтому и $\alpha \in l_2$. Наконец, неравенство (19) говорит, что наша последовательность элементов $\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, \ldots$ сходится к $\alpha \in l_2$ в метрике l_2. Этим полнота l_2 доказана.

Определим в l_2 элементы (множество их счетно)

$$e^k = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, 0, \ldots) \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

где 1 стоит на k-м месте, а на остальных местах стоят нули. Они образуют ортогональную и нормальную (следовательно, линейно независимую) систему:

$$(e^k, e^l) = \delta_{kl} \qquad (k, l = 1, 2, \ldots).$$

Если $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots)$ — произвольный элемент из l_2, то, очевидно,

$$\alpha_k = (\alpha, e^k) \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

и

$$\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha, e^k)\, e^k,$$

где ряд справа сходится к α в метрике l_2, так как

$$\left\|\alpha - \sum_{k=1}^{N} (\alpha, e^k)\, e^k\right\| = \|(0, 0, \ldots, 0, \alpha_{N+1}, \alpha_{N+2}, \ldots)\| =$$

$$= \left(\sum_{N+1}^{\infty} |\alpha_k|^2\right)^{1/2} \to 0 \qquad (N \to \infty).$$

Мы видим, что произвольный элемент $\alpha \in l_2$ разлагается в сходящийся к нему в метрике l_2 ряд Фурье по элементам ортогональной и нормальной системы $\{e^k\}$. Таким образом, *система* $\{e^k\}$ *полна в* l_2.

Теорема 7. *Пусть в линейном пространстве H со скалярным произведением имеется полная ортонормированная система элементов (бесконечная)*

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots \tag{20}$$

и каждый элемент $f \in H$ разложен в ряд Фурье по этой системе:

$$f = \sum_1^\infty \alpha_k \varphi_k, \tag{21}$$

$$\alpha_k = (f, \varphi_k) \quad (k = 1, 2, \ldots), \tag{22}$$

сходящийся к f в метрике H (см. теорему 1). Тогда, если H полно, то равенство (21) осуществляет взаимно однозначное соответствие $f \sim \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ между элементами H и l_2, изоморфное относительно операций сложения, умножения на число и скалярного произведения, т. е. если $f \sim \alpha$, $\varphi \sim \beta$, то $f + \varphi \sim \sim \alpha + \beta$, $cf \sim c\alpha$,

$$(f, \varphi)_H = \sum_1^\infty \alpha_j \bar{\beta}_j = (\alpha, \beta)_{l_2}. \tag{23}$$

Если же H не полно, то (21) осуществляет соответствие (линейное и изоморфное) между H и l_2', где l_2' — некоторое линейное не полное подпространство l_2, однако такое, что замыкание l_2' есть l_2 ($\overline{l_2'} = l_2$).

Доказательство. Операцию (21), приводящую в соответствие каждому элементу $f \in H$ числовую последовательность $\alpha = = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$, обозначим через A, при этом в силу полноты системы (20) имеет место равенство Парсеваля ($Af = \alpha \in l_2$)

$$\|f\|_H = \|Af\|_{l_2}. \tag{24}$$

Очевидно, A — линейная операция:

$$A(cf) = cAf, \quad A(f + \varphi) = Af + A\varphi$$

(c — числа, $f, \varphi \in H$). Больше того, на основании теоремы 2 имеет место равенство (23), более общее, чем (24).

Двум разным элементам $f', f'' \in H$ при помощи операции A соответствуют разные элементы $\alpha', \alpha'' \in l_2$, так как из равенства $Af' = Af'' = \alpha$ следует, что $A(f' - f'') = \theta$, и тогда ряд Фурье $f' - f''$ по системе (20) имеет вид

$$f' - f'' = 0 \cdot \varphi_1 + 0 \cdot \varphi_2 + \ldots$$

Он в силу полноты системы (20) должен сходиться в метрике H к $f' - f''$, но тогда $f' - f'' = \theta$, т. е. $f' = f''$.

Пусть теперь H — полное пространство. Зададим произвольный элемент $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots) \in l_2$ и составим формально ряд

$$\sum_1^\infty \alpha_k \varphi_k. \tag{25}$$

В силу сходимости ряда $\sum_1^\infty |\alpha_k^2| < \infty$ и полноты H (теорема 4)

существует элемент $\varphi \in H$ (единственный), к которому ряд (25) сходится:

$$\varphi = \sum_1^\infty \alpha_k \varphi_k, \tag{26}$$

Ряд (26) есть ряд Фурье φ (см. следствие к лемме 1).

Мы доказали, что каков бы ни был элемент $\boldsymbol{\alpha} \in l_2$, существует единственный элемент $\varphi \in H$ такой, что $A\varphi = \boldsymbol{\alpha}$. Это свойство вместе с уже установленными выше свойствами A можно резюмировать так: если H полно, то операция A устанавливает взаимно однозначное соответствие $H \rightleftarrows l_2$, изоморфное относительно операций сложения, умножения на число и скалярного произведения. Этим доказана первая часть утверждения теоремы 7.

Пусть теперь H не полно. Обозначим через l_2' образ H при помощи операции $A\,(l_2' = AH)$. На основании доказанного выше A устанавливает взаимно однозначное соответствие $H \rightleftarrows l_2'$, изоморфное относительно сложения, умножения на число и скалярного произведения.

В H имеется последовательность элементов $f^1, f^2, f^3, \ldots$, удовлетворяющая условию Коши, но не сходящаяся в H к какому бы то ни было элементу из H. Имеем, что для любого $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство

$$\varepsilon > \|f^k - f^l\|_H = \|\boldsymbol{\alpha}^k - \boldsymbol{\alpha}^l\|_{l_2} \qquad (\boldsymbol{\alpha}^k = Af^k)$$

для всех $k, l > N$ при достаточно большом N, показывающее, что образы $\boldsymbol{\alpha}^k = Af^k$ удовлетворяют условию Коши в метрике числовых последовательностей l_2. Но пространство l_2 полно, поэтому существует элемент $\boldsymbol{\alpha} \in l_2$ такой, что $\|\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}^k\|_{l_2} \to 0$ $(k \to \infty)$. При этом среди элементов, принадлежащих к H, не может существовать элемента f, для которого бы $Af = \alpha$, ведь если бы он существовал, то было бы

$$\|\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}^k\|_{l_2} = \|f - f^k\|_H \to 0 \qquad (k \to \infty),$$

и мы пришли бы к противоречию с предположением.

Это показывает, что l_2' есть не полное пространство. Но замыкание l_2' есть $l_2\,(\overline{l_2'} = l_2)$, потому что, каков бы ни был элемент $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots) \in l_2$, элементы $\boldsymbol{\alpha}^N = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N, 0, 0, \ldots)$ при любом N принадлежат к l_2' и в то же время $\|\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}^N\|_{l_2} \to$ $\to 0$ $(N \to \infty)$ $(\boldsymbol{\alpha}^N \in l_2'$ потому, что суммы $\sum_1^N \alpha_k \varphi_k \in H$, ведь $\varphi_k \in$ $\in H$, а H — линейное множество).

Этим доказано и второе утверждение теоремы.

Пример 2. Пусть $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots$ — кубы, принадлежащие к Ω и пересекающиеся попарно разве что по своим границам, и пусть

$$\varphi_k(\mathbf{x}) = \frac{1}{|\Delta_k|^{1/2}}\, \varphi_{\Delta_k}(\mathbf{x}) \qquad (k = 1, 2, \ldots), \tag{27}$$

где

$$\varphi_{\Delta_k}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \in \Delta_k, \\ 0, & \mathbf{x} \notin \Delta_k. \end{cases}$$

Система (27), очевидно, ортогональная и нормальная, но не полная в $L_2'(\Omega)$ (и $L_2(\Omega)$!), потому что, например, ряд Фурье функции

$$f(\mathbf{x}) = \begin{cases} \psi(\mathbf{x}) & \text{на} \quad \Delta_1, \\ 0 & \text{вне} \quad \Delta_1, \end{cases}$$

где $\psi(\mathbf{x})$ — функция непрерывная, тождественно не равная никакой постоянной, имеет вид

$$f(\mathbf{x}) \sim \frac{1}{|\Delta_1|^{1/2}} \int\limits_{\Delta_1} \psi(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \varphi_{\Delta_1}(\mathbf{x}) + 0 + 0 + \ldots \tag{28}$$

и правая часть (28) вовсе не сходится в смысле среднего квадратического к левой.

§ 14.7. Ортогонализация системы

Теорема 1. *Пусть в действительном линейном пространстве H со скалярным произведением задана линейно независимая система элементов*

$$\psi_1, \ \psi_2, \ \psi_3, \ \ldots \tag{1}$$

Существует и притом единственная, с точностью до знаков ортогональная и нормальная система элементов

$$\varphi_1, \ \varphi_2, \ \varphi_3, \ \ldots, \tag{2}$$

принадлежащих H, обладающая следующим свойством:

При любом натуральном k

$$\psi_k = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j^{(k)} \varphi_j \qquad \left(\alpha_k^{(k)} \neq 0\right), \tag{3}$$

и, наоборот,

$$\varphi_k = \sum_{j=1}^{k} \beta_j^{(k)} \psi_j \qquad \left(\beta_k^{(k)} \neq 0\right), \tag{4}$$

где $\alpha_j^{(k)}$, $\beta_j^{(k)}$ — числа (действительные).

Если система (1) конечна и состоит из n элементов, то и ортогональная система (2) обладает этим свойством.

Выражение «единственная система $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ с точностью до знаков» надо понимать в том смысле, что если система (2), удовлетворяющая условиям теоремы, найдена и если все φ_k помножить на $\delta_k = \pm 1$, где знаки $\pm$ могут зависеть от k, то полученные системы снова удовлетворяют условиям теоремы, но никаких других удовлетворяющих условиям теоремы систем нет.

Доказательство. Элемент ψ_1 образует по условию линейно независимую систему, состоящую из одного элемента, и потому

$$\|\psi_1\| = (\psi_1, \psi_1)^{1/2} > 0;$$

так как должно быть $\varphi_1 = \beta_1^{(1)}\psi_1$, $\|\varphi_1\| = 1$, то $\beta_1^{(1)} = \pm\frac{1}{\|\psi_1\|}(\neq 0)$. Тогда и $\psi_1 = \alpha_1^{(1)}\varphi_1$, где $\alpha_1^{(1)} = \pm\|\psi_1\|(\neq 0)$. Этим утверждение доказано при $k = 1$.

Пусть теперь известно, что можно построить ортогональную и нормальную систему элементов $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ и притом единственным образом с точностью до знака, так что выполняются равенства (3) и (4). Покажем, что эту систему можно пополнить элементом φ_{k+1} и притом единственным образом с точностью до знака так, что полученная система $\varphi_1, \ldots, \varphi_{k+1}$ будет ортогональной и нормальной и будет удовлетворять условиям (3) и (4), где надо заменить k на $k+1$.

Искомый элемент φ_{k+1} должен иметь вид

$$\varphi_{k+1} = \sum_{j=1}^{k+1} \beta_j^{(k+1)}\psi_j = \beta_{k+1}^{(k+1)}\psi_{k+1} + \sum_{j=1}^{k} \gamma_j\varphi_j. \tag{5}$$

Во втором равенстве мы заменили $\psi_1, \ldots, \psi_k$ на равные им линейные комбинации из φ_j с индексами $j \leqslant k$, затем привели подобные при одинаковых φ_j. Это возможно потому, что утверждение верно при k. По условию элемент φ_{k+1} должен быть ортогональным ко всем φ_s $(s = 1, \ldots, k)$; поэтому должно быть

$$(\varphi_{k+1}, \varphi_s) = \beta_{k+1}^{(k+1)}(\psi_{k+1}, \varphi_s) + \gamma_s = 0 \qquad (s = 1, \ldots, k).$$

Но тогда, подставляя γ_s в (5), получим

$$\varphi_{k+1} = \beta_{k+1}^{(k+1)}\left[\psi_{k+1} - \sum_{j=1}^{k}(\psi_{k+1}, \varphi_j)\varphi_j\right].$$

Элемент

$$\psi_{k+1}^* = \psi_{k+1} - \sum_{j=1}^{k}(\psi_{k+1}, \varphi_j)\varphi_j$$

не может быть нулевым, потому что иначе элемент ψ_{k+1} был бы линейной комбинацией из элементов φ_j $(j = 1, \ldots, k)$; но тогда на основании уже доказанного при k элемент ψ_{k+1} был бы также линейной комбинацией из элементов ψ_j $(j = 1, \ldots, k)$, что противоречило бы линейной независимости системы $\psi_1, \ldots, \psi_{k+1}$.

Итак,

$$\|\psi_{k+1}^*\| > 0.$$

Это позволяет удовлетворить требованию $\|\varphi_{k+1}\| = 1$, в силу кото-

рого число $\beta_{k+1}^{(k+1)}$ определяется с точностью до знака:

$$\beta_{k+1}^{(k+1)} = \pm \frac{1}{\|\psi_{k+1}^*\|}.$$

Теорема доказана.

Процесс, при помощи которого строилась ортогональная и нормальная система (2), в указанном выше смысле эквивалентная линейно независимой системе (1), называется *процессом ортогонализации* (*системы* (1)).

Теорема 2. *Системы элементов из H*

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots \tag{6}$$

и

$$\psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots \tag{7}$$

связанные при любом $k = 1, 2, \ldots$ *соотношениями* (3) *и* (4), *одновременно полны или же не полны в H.*

Здесь H можно считать произвольным нормированным пространством, в котором может и не быть определено скалярное произведение.

В самом деле, пусть система (6) полна в H и f — произвольный элемент H. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется сумма вида

$$\sum_1^N \alpha_k \varphi_k, \tag{8}$$

где α_k — числа, такая, что

$$\varepsilon > \left\| f - \sum_1^N \alpha_k \varphi_k \right\|.$$

Но в силу равенств (4) сумма (8) есть некая сумма вида

$$\sum_1^N \beta_k \psi_k,$$

где β_k — числа, поэтому система (7) полна в H.

Аналогично доказывается с помощью равенств (3), что полнота системы (7) влечет полноту системы (6).

Теорема 3. *Пусть H есть пространство со скалярным произведением, обладающее следующим свойством: существует в H линейно независимая система элементов*

$$\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n \tag{9}$$

такая, что, каковы бы ни были элементы $f \in H$ *и положительное число* $\varepsilon > 0$, *найдутся (зависящие от* ε*) числа* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *такие, что*

$$\left\| f - \sum_1^n \alpha_k \psi_k \right\| < \varepsilon. \tag{10}$$

Тогда найдутся также числа $\beta_1, \ldots, \beta_n$ *такие, что*

$$f = \sum_1^n \beta_k \psi_k, \tag{11}$$

т. е. H есть n-мерное пространство.

Доказательство. Ортогонализуем систему (9) и в результате получим ортогональную и нормальную систему

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n. \tag{12}$$

Очевидно, что для всяких элемента $f \in H$ и числа $\varepsilon > 0$ найдутся числа $a_1, \ldots, a_n$ такие, что

$$\varepsilon > \left\| f - \sum_1^n a_k \varphi_k \right\| \geqslant \left\| f - \sum_1^n (f, \varphi_k) \varphi_k \right\|, \tag{13}$$

где второе неравенство написано в силу минимального свойства ортогональной и нормальной системы (см. § 14.6, (6)). Но третий член в цепи (13) не зависит от ε, которое произвольно. Поэтому он равен нулю, т. е.

$$f = \sum_1^n (f, \varphi_k) \varphi_k. \tag{14}$$

Чтобы получить (11), остается только φ_k в (14) заменить на соответствующие линейные комбинации из ψ_k.

Таким образом, мы доказали лемму 1 § 14.5 в предположении, что E — пространство со скалярным произведением.

§ 14.8. Свойства пространств $L_2'(\Omega)$ и $L_2(\Omega)$

Пространство $L_2'(\Omega)$ было определено как пространство функций $f(x)$ таких, что их интегралы $\int_\Omega f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$, если имеют, то конечное число особых точек, и так, что норма

$$\| f \|_{L_2} = \left(\int_\Omega | f(\mathbf{x}) |^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2} < \infty \tag{1}$$

конечна. Так как в этом определении интеграл мы понимаем в римановском (вообще несобственном) смысле, то пространство $L_2'(\Omega)$ не полно (§ 19.7). Однако пространство $L_2'(\Omega)$ обладает многими свойствами, которым обладает гильбертово (полное) пространство $L_2(\Omega)$, определение которого базируется на понятии интеграла Лебега. Перечислим основные из этих свойств, хотя почти обо всех них мы уже говорили.

1) Для любых двух функций $f, \varphi \in L_2'(\Omega)$ имеет смысл скалярное произведение

$$(f, \varphi) = \int_\Omega f \bar{\varphi}\, d\mathbf{x},$$

порождающее норму (1).

2) В $L_2'(\Omega)$ имеется счетная система функций

$$\lambda_1(\mathbf{x}),\ \lambda_2(\mathbf{x}),\ \lambda_3(\mathbf{x}),\ \ldots \tag{2}$$

(кусочно постоянных с рациональными параметрами), плотная в $L_2'(\Omega)$ ($L_2(\Omega)$) (теорема 5, § 14.4).

3) $L_2'(\Omega)$ — бесконечномерное пространство; в нем имеется бесконечная линейно независимая система функций (например, характеристических функций кубов $\Delta \subset \Omega$, см. пример 2, § 14.6).

4) Благодаря свойствам 2), 3) пространство $L_2'(\Omega)$ называется сепарабельным (счетномерным). Из сепарабельности пространства $L_2'(\Omega)$ следует, что из системы (2) (плотной в $L_2'(\Omega)$) можно выбросить некоторые элементы так, что оставшаяся система

$$\psi_1(\mathbf{x}),\ \psi_2(\mathbf{x}),\ \psi_3(\mathbf{x}),\ \ldots \tag{3}$$

будет линейно независимой и полной в $L_2'(\Omega)$ (см. доказательство теоремы 2, § 14.5).

5) Полную линейно независимую систему (3) можно ортогонализировать и получить снова полную в $L_2'(\Omega)$, но уже ортогональную и нормальную счетную систему функций

$$\varphi_1(\mathbf{x}),\ \varphi_2(\mathbf{x}),\ \varphi_3(\mathbf{x}),\ \ldots \tag{4}$$

(теоремы 1 и 2, § 14.7). Это показывает существование в $L_2'(\Omega)$ полной ортогональной и нормальной системы функций. На самом деле таких систем имеется бесконечное множество, подобно тому как в трехмерном евклидовом пространстве имеется бесконечное число троек попарно перпендикулярных единичных векторов. С некоторыми такими важными системами мы еще будем иметь дело.

6) Всякую функцию $f \in L_2'(\Omega)$ можно разложить в ряд Фурье по ортогональной и нормальной системе (4)

$$f(\mathbf{x}) = \sum_1^\infty \alpha_k \varphi_k(\mathbf{x}),$$

сходящийся вследствие ее полноты к $f(\mathbf{x})$ в смысле среднего квадратического. При этом числа (коэффициенты Фурье f)

$$\alpha_k = (f,\ \varphi_k) \tag{5}$$

подчиняются равенству Парсеваля

$$(f, f) = \sum_1^\infty |\alpha_k|^2 < \infty \tag{6}$$

(теорема 1, § 14.6).

Равенства (5) устанавливают взаимно однозначное соответствие

$$L_2'(\Omega) \rightleftarrows l_2' \tag{7}$$

между функциями $f \in L_2'(\Omega)$ и числовыми последовательностями $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots) \in l_2' \subset l_2$, где l_2' есть некоторое не полное линейное подпространство l_2. При этом соответствие (7) есть изоморфизм относительно операций сложения, умножения на число и скалярного произведения (теорема 7, § 14.6).

В силу изоморфизма (7) неполному пространству $L_2'(\Omega)$ соответствует тоже не полное подпространство $l_2' \subset l_2$. Однако замыкание l_2' есть $l_2 (\bar{l}_2' = l_2)$.

Сделаем теперь соответствующие замечания относительно пространства $L_2(\Omega)$ функций, квадраты модулей которых интегрируемы на Ω в лебеговом смысле.

Как уже отмечалось выше, $L_2(\Omega)$ есть линейное полное пространство со скалярным произведением. Кусочно постоянные функции с рациональными параметрами (см. § 14.4) образуют в $L_2(\Omega)$ плотное множество, так же как они образуют плотное множество в $L_2'(\Omega)$. Но тогда ортогональная и нормальная система (4) является полной не только в $L_2'(\Omega)$, но и в $L_2(\Omega)$.

Теперь на основании теоремы 7 § 14.6 можно сказать, что равенства (5) устанавливают взаимно однозначное и изоморфное (относительно операций сложения, умножения на число и скалярного произведения) соответствие

$$L_2(\Omega) \rightleftarrows l_2 \tag{8}$$

между элементами $L_2(\Omega)$ и всеми элементами l_2. Далее, замыкание $L_2'(\Omega)$ в метрике $L_2(\Omega)$ есть $L_2(\Omega)$, потому что если f есть произвольная функция из $L_2(\Omega)$, то ей в силу изоморфизма (8) соответствует элемент $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots) \in l_2$ и

$$\int_\Omega \left| f(\mathbf{x}) - \sum_1^N \alpha_k \varphi_k(\mathbf{x}) \right|^2 d\mathbf{x} = \sum_{N+1}^\infty |\alpha_k|^2 \to 0 \qquad (N \to \infty), \tag{9}$$

где суммы $\sum_1^N \alpha_k \varphi_k \in L_2'(\Omega)$, а интеграл (9) понимается в лебеговом смысле.

§ 14.9. Полнота системы функций в C, L_2' и L' (L_2, L)

Теорема. *Пусть Ω — открытое измеримое (ограниченное) множество.*

1) *Если система функций*

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$$

полна в $C(\overline{\Omega})$, *то она полна и в* $L_2'(\Omega)$. 2) *Если же она полна в* $L_2'(\Omega)$, *то полна и в* $L'(\Omega)$.

Доказательство. Имеют место очевидные неравенства

$$\left(\int_\Omega \left|f(\mathbf{x}) - \sum_1^N \alpha_k\varphi_k(\mathbf{x})\right|^2 d\mathbf{x}\right)^{1/2} \leqslant \sqrt{|\Omega|}\max_x \left|f(\mathbf{x}) - \sum_1^N \alpha_k\varphi_k(\mathbf{x})\right|, \quad (1)$$

$$\int_\Omega \left|f - \sum_1^N \alpha_k\varphi_k\right| d\mathbf{x} \leqslant \sqrt{|\Omega|}\left(\int_\Omega \left|f - \sum_1^N \alpha_k\varphi_k\right|^2 d\mathbf{x}\right)^{1/2} \quad (2)$$

(см. § 14.2 (13)). Первое из них верно в предположении, что φ_k, $f \in C(\Omega)$, а второе — что φ_k, $f \in L_2'(\Omega)$ (L_2).

Если система φ_k полна в $C(\Omega)$ $(L_2'(\Omega)$ или $L_2(\Omega))$, то найдется конечная сумма $\sum_1^N \alpha_k\varphi_k$, для которой правая часть в (1) (соответственно в (2)) меньше ε. Но тогда и левая меньше ε.

Упражнение.

1. Доказать более общее утверждение: если система (1) полна в $C(\Omega)$, то и в $L_p'(\Omega)$ $(1 \leqslant p < \infty)$, если же она полна в $L_{p'}'(\Omega)$ и $1 \leqslant p < p' < \infty$, то полна также в $L_p'(\Omega)$, где Ω — измеримое (ограниченное) множество.

Глава 15

РЯДЫ ФУРЬЕ. ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМАМИ

§ 15.1. Предварительные сведения

Система тригонометрических функций

$$\frac{1}{2}, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 3x, \ldots \tag{1}$$

ортогональна на отрезке $[0, 2\pi]$, т. е. интеграл на $[0, 2\pi]$ от произведения двух разных функций этой системы равен нулю. Это вытекает из равенств

$$\int_0^{2\pi} \cos kx \cos lx\, dx = 0 \quad (k \neq l,\ k, l = 0, 1, \ldots),$$

$$\int_0^{2\pi} \sin kx \sin lx\, dx = 0 \quad (k \neq l,\ k, l = 1, 2, \ldots),$$

$$\int_0^{2\pi} \cos kx \sin lx\, dx = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots;\ l = 1, 2, \ldots),$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 kx\, dx = \int_0^{2\pi} \sin^2 kx\, dx = \pi \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2}\right)^2 dx = \frac{\pi}{2}.$$

Эта глава посвящена теории тригонометрических рядов и вопросам приближения функций тригонометрическими полиномами.

Функция $f(x)$ называется *периодической периода* $2\omega > 0$, если она определена на всей действительной оси и для всякого x удовлетворяет условию

$$f(x + 2\omega) = f(x).$$

Если для такой функции существует интеграл (собственный или несобственный)

$$\int_0^{2\omega} f(x)\, dx,$$

то, каково бы ни было действительное число a,

$$\int_a^{a+2\omega} f(x)\,dx = \int_0^{2\omega} f(x)\,dx. \tag{2}$$

Это видно из рис. 15.1: одинаково затушеванные площади равны.

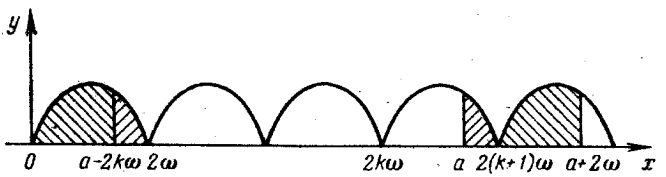

Рис. 15.1.

Но это можно доказать формально. Существует единственное натуральное число k такое, что $2k\omega \leqslant a < 2(k+1)\omega$ и, очевидно,

$$\int_a^{2(k+1)\omega} f(x)\,dx = \int_a^{2(k+1)\omega} f(x-2k\omega)\,dx = \int_{a-2k\omega}^{2\omega} f(z)\,dz,$$

$$\int_{2(k+1)\omega}^{a+2\omega} f(x)\,dx = \int_{2(k+1)\omega}^{a+2\omega} f(x-2(k+1)\omega)\,dx = \int_0^{a-2k\omega} f(z)\,dz.$$

Складывая эти равенства, получим (2).

Очень часто в случае функций периода 2ω приходится употреблять равенство

$$\int_0^{2\omega} f(t-x)\,dt = \int_0^{2\omega} f(t)\,dt, \tag{2'}$$

где x может быть любым значением. Действительно, воспользовавшись (2), имеем

$$\int_0^{2\omega} f(t-x)\,dt = \int_{-x}^{2\omega-x} f(z)\,dz = \int_0^{2\omega} f(t)\,dt.$$

Это равенство будет часто употребляться без пояснений.

Функции системы (1) являются периодическими периода 2π. При этом функции 1, $\cos x$, $\cos 2x$, ... — четные и функции $\sin x$, $\sin 2x$, ... — нечетные.

Для четных функций $f(x)$

$$\int_{-b}^{b} f(x)\,dx = 2\int_0^{b} f(x)\,dx$$

и для нечетных

$$\int_{-b}^{b} f(x)\,dx = 0.$$

Сумма вида

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

где a_k, b_k — постоянные числа, называется *тригонометрическим полиномом порядка (или степени) n.*

Тригонометрические полиномы мы будем считать простейшими периодическими функциями периода 2π. Ими мы будем приближать другие более или менее произвольные функции периода 2π.

Функцию $f(x)$ периода 2ω можно заменить функцией $F(u) = f(u\omega/\pi)$ периода 2π с помощью подстановки $x = u\omega/\pi$, приблизить эту вторую функцию некоторым тригонометрическим полиномом $F(u) \sim T_n(u)$ и затем вернуться к переменной x:

$$f(x) \sim T_n\left(\frac{\pi}{\omega}x\right).$$

Условимся о некоторых обозначениях и терминологии. $C(a, b)$ есть (§ 14.1) пространство (класс) непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций f с нормой

$$\|f\|_{C(a,b)} = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x)|.$$

C^* есть пространство (класс) функций f, непрерывных на действительной оси и имеющих период 2π, с нормой

$$\|f\|_{C^*} = \max_{0 \leqslant x \leqslant 2\pi} |f(x)| = \max_{a \leqslant x \leqslant a+2\pi} |.$$

(a — произвольное действительное число).

Функцию $f \in C^*$ можно считать принадлежащей $C(0, 2\pi)$ ($C^* \subset C(0, 2\pi)$), рассматривая ее только на отрезке $[0, 2\pi]$. Однако при этом получается не всякая функция пространства $C(0, 2\pi)$, а такая, что ее значения на концах периода равны между собой:

$$f(0) = f(2\pi). \tag{3}$$

Наоборот, функция $f \in C(0, 2\pi)$, удовлетворяющая условию (3), после периодического продолжения с периодом 2π превращается в функцию класса C^*.

L'^* есть пространство (класс) функций периода 2π, которые, если их рассматривать на отрезке $[0, 2\pi]$, принадлежат к $L'(0, 2\pi)$ с нормой (см. § 14.2)

$$\|f\|_{L^*} = \|f\|_{L(0,2\pi)} = \int_0^{2\pi} |f(x)|\,dx,$$

Про функцию $f(x) \in L'^*$ еще говорят, что она периодическая (периода 2π), абсолютно интегрируемая (на периоде) функция. Напомним, что функция $f \in L'(0, 2\pi)$, если ее интеграл

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx \tag{4}$$

существует по Риману или имеет конечное число особых точек и сходится в несобственном смысле абсолютно (см. § 9.16). $L_2'^*$ есть пространство (класс) функций f периода 2π, которые если их рассматривать на отрезке $[0, 2\pi]$, принадлежат к $L_2'(0, 2\pi)$ с нормой (см. § 14.3)

$$\|f\|_{L_2^*} = \left(\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\,dx\right)^{1/2}.$$

Про функцию $f(x) \in L_2'^*$ говорят еще, что она периодическая (периода 2π) функция с интегрируемым квадратом модуля (на периоде) или еще, в действительном случае, с интегрируемым квадратом. Напомним, что функция $f \in L_2'(0, 2\pi)$ интегрируема по Риману на $[0, 2\pi]$ или, если ее интеграл (4) имеет конечное число особых точек, то квадрат ее модуля интегрируем в несобственном смысле. Подчеркнем еще, что $L_2'^* \subset L'^*$ (см. § 14.2, (13)).

В теории рядов Фурье еще более естественно рассматривать классы (пространства) L^* и L_2^* функций периода 2π, принадлежащих лебеговым пространствам $L(0, 2\pi)$ и соответственно $L_2(0, 2\pi)$.

Читатель уже заметил, что в наших обозначениях звездочка указывает на периодичность (с периодом 2π) функций, составляющих класс.

Функции f указанных классов могут быть действительными и комплексными функциями $f(x) = \varphi(x) + i\psi(x)$ от одной переменной x, поэтому, например, мы говорим «квадрат модуля» функции, а не просто «квадрат функции», что только в действительном случае одно и то же.

Система тригонометрических функций (1) ортогональна и, как мы узнаем в дальнейшем, полна в $L_2'^*(L_2^*)$ (и даже в C^*). Каждой функции $f \in L_2'^*(L_2^*)$ можно привести в соответствие ее ряд Фурье (см. § 14.6, (2)) по системе (1)

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \tag{5}$$

где

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos kt\,dt \quad (k = 0, 1, \ldots); \tag{6}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin kt\,dt \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{7}$$

Отдельные функции $\frac{a_0}{2}$, $(a_1\cos x + b_1\sin x)$, $(a_2\cos 2x + b_2\sin 2x)$, ..., входящие в правую часть (5) при условиях (6), (7), называются *членами ряда Фурье функции* f (*гармониками* f).

Заметим, что коэффициенты Фурье a_k и b_k (см. (6) и (7)) имеют на самом деле смысл не только для функций $f \in L_2'^*$, но и для функций $f \in L'^*$ (вообще $f \in L^*$). Ведь функции $\cos kx$, $\sin kx$ ограничены, а функции $f \in L'^*$ абсолютно интегрируемы, но тогда и интегралы, определяющие коэффициенты Фурье $f \in L'(0, 2\pi)$, абсолютно сходятся:

$$\int_0^{2\pi} |f(x)\cos kx|\,dx \leqslant \int_0^{2\pi} |f(x)|\,dx,$$

$$\int_0^{2\pi} |f(x)\sin kx|\,dx \leqslant \int_0^{2\pi} |f(x)|\,dx.$$

Поэтому, имея в виду бо́льшую общность, мы будем по возможности рассматривать разложения в ряды Фурье функций, принадлежащих $L'^*(L^*)$.

Итак, каждой функции $f \in L'^*$ (вообще $f \in L^*$) соответствует ее ряд Фурье, независимо от того, сходится он в каких-либо точках x или нет. Существенно заметить, что если функцию $f \in L'^*$ видоизменить, прибавив к ней нулевую в $L'^*(L^*)$ функцию $\theta(x)$, т. е. такую, что

$$\int_0^{2\pi} |\theta(x)|\,dz = 0,$$

например, видоизменить в конечном числе точек, то это не изменяет коэффициенты Фурье f, а следовательно, и сам ряд Фурье функции f. Совокупность коэффициентов Фурье функции называется ее *спектром*. Многие колебательные процессы (колебания) в физике и технике описываются периодическими функциями, вообще периода ω, и тогда u есть время, а $y = F(u)$ есть ордината колеблющейся точки, силы, скорости, силы тока, ... Если F есть тригонометрический полином, то

$$y = F(u) = \\ = \frac{a_0}{2} + \sum_1^n \left(a_k\cos\frac{k\pi}{\omega}u + b_k\sin\frac{k\pi}{\omega}u\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^n A_k\cos\left(\frac{k\pi}{\omega}u - \varphi_k\right),$$

где $A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$, а φ_k определяются из уравнений $a_k = \cos\varphi_k$, $b_k = \sin\varphi_k$, $0 \leqslant \varphi_k < 2\pi$.

В физике говорят, что *колебательный процесс* $y = F(u)$ *распадается на простейшие колебательные процессы — гармонические колебания (гармоники)*

$$A_k \cos\left(\frac{k\pi}{\omega} u - \varphi_k\right). \tag{8}$$

Гармоника (8) имеет частоту k, амплитуду A_k и начальную фазу φ_k. На рис. 15.2 изображены три периодические периода 2π функции: $S_2(x) = \sin x - \frac{\sin 2x}{2}$ (сплошной линией), $S_3(x) = \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3}$ (пунктиром) и $S_4(x) = \sin x - \ldots - \frac{\sin 4x}{4}$ (точками).

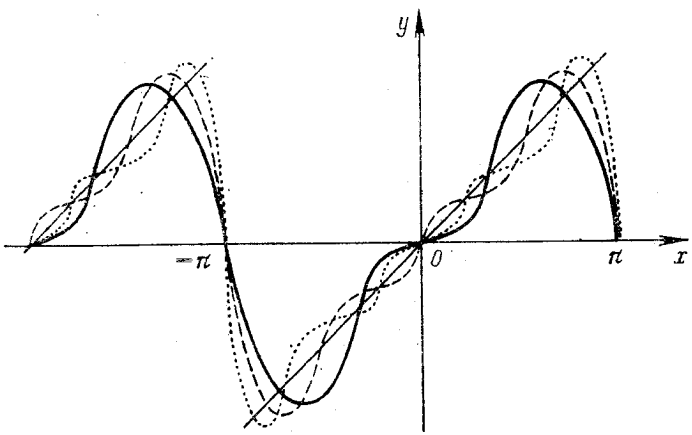

Рис. 15.2.

Для больших n график суммы

$$S_n(x) = \sum_1^n (-1)^{k-1} \frac{\sin kx}{k} \tag{9}$$

схематически (не точно) изображен на рис. 15.3, что наводит на мысль, и это будет в дальнейшем обосновано, что предельная функция

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) \tag{10}$$

есть периодическая (периода 2π) функция, определяемая равенствами

$$S(x) = x \quad (-\pi < x < \pi), \quad S(\pi) = 0. \tag{11}$$

Функция $S(x)$ разрывна в точках $x_k = (2k+1)\pi$, и потому последовательность непрерывных функций $\{S_n(x)\}$ не может равномерно сходиться к $S(x)$, но она все же равномерно сходится на любом отрезке $[a, b]$, принадлежащем интервалу $(-\pi, \pi)$, вообще любому отрезку оси x, принадлежащему интервалу, на котором $S(x)$ имеет непрерывную производную (см. § 15.5).

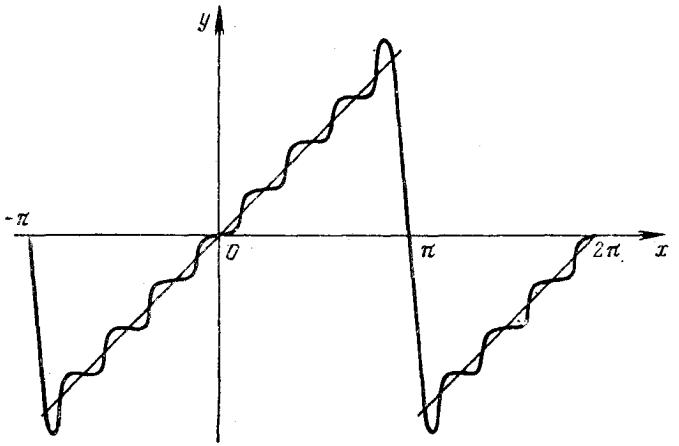

Рис. 15.3.

На рис. 15.3 еще показано, что график $S_n(x)$ возле точек x_k разрыва предельной функции $S(x)$ делает всплески. Это характерное явление для точек разрыва первого рода предельной кусочно гладкой функции, называемое *явлением Гиббса*, будет изучаться в § 15.9.

§ 15.2. Сумма Дирихле

Пусть задана функция $f \in L'^*$ (вообще L^*) и пусть

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{1}$$

есть ее ряд Фурье, где, таким образом,

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos kt\,dt \quad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin kt\,dt \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Частичная n-я сумма этого ряда может быть преобразована так:

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt + \sum_1^n \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)(\cos kt \cos kx + \sin kt \sin kx)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\frac{1}{2} + \sum_1^n \cos k(t-x)\right\} f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} D_n(t-x) f(t)\,dt, \quad (2)$$

где (см. § 8.2, (16))

$$D_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_1^n \cos kx = \frac{1}{2}\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}}. \quad (3)$$

Мы получили компактное выражение для *n-й суммы Фурье функции $f(x)$*:

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} D_n(t-x) f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} D_n(u) f(x+u)\,du. \quad (4)$$

В последнем равенстве мы воспользовались периодичностью подинтегральной функции.

Интеграл (4) называется *интегралом Дирихле порядка n*, а полином $D_n(x)$ — *ядром Дирихле порядка n*. Заметим, что при любом x и $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} D_n(t-x)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\frac{1}{2} + \sum_1^n \cos k(t-x)\right\} dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\,dt = 1, \quad (5)$$

потому что

$$\int_0^{2\pi} \cos k(t-x)\,dt = \int_0^{2\pi} \cos kt\,dt = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

В последнем равенстве использована периодичность (период 2π) функции $\cos kt$ и тот факт, что она ортогональна на отрезке $[0, 2\pi]$ к функции, тождественно равной единице.

В лебеговой теории две функции из L^*, равные почти всюду, имеют один и тот же ряд Фурье, т. е. одни и те же соответствующие коэффициенты Фурье.

Всякий ряд вида

$$\frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx), \quad (6)$$

где α_k, β_k — постоянные числа (коэффициенты ряда), называется *тригонометрическим рядом.*

Тригонометрический ряд становится рядом Фурье только тогда, когда существует функция $f \in L^*$, коэффициентами Фурье которой являются соответственно числа a_k, b_k ($a_k = \alpha_k$, $b_k = \beta_k$). Например, если установлено, что ряд (6) сходится в смысле среднего квадратического на $[0, 2\pi]$ к некоторой функции $f \in L_2'^*$ (или L_2^*), то он есть ряд Фурье этой функции (см. следствие леммы 1, § 14.6).

Произведение двух четных или двух нечетных функций есть функция четная, в то время как произведение четной на нечетную функцию есть функция нечетная. Поэтому, если функция $f \in L'^*$ (или L^*) — четная, то ее ряд Фурье имеет вид

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty a_k \cos kx \quad \left(a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos kt\,dt\right),$$

потому что ее коэффициенты $b_k = 0$, а если она нечетная, то ее ряд Фурье имеет вид

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^\infty b_k \sin x \quad \left(b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin kt\,dt\right),$$

потому что тогда ее коэффициенты $a_k = 0$.

Если коэффициенты a_k, b_k суммы Фурье n-го порядка функции $f(x)$ периода 2π вычислить приближенно по формуле прямоугольников (см. § 10.6), разделяя период на $2n+1$ равных частей точками

$$x_k = \frac{2\pi k}{2n+1} \quad (k = 0, 1, \ldots, 2n), \tag{7}$$

то получим сумму

$$S_n(f, x) = \frac{a_0^{(n)}}{2} + \sum_1^n \left(a_k^{(n)} \cos kx + b_k^{(n)} \sin kx\right),$$

$$a_k^{(n)} = \frac{2}{2n+1}\sum_{j=0}^{2n} f(x_j)\cos kx_j \quad (k = 0, 1, \ldots, n),$$

$$b_k^{(n)} = \frac{2}{2n+1}\sum_{j=0}^{2n} f(x_j)\sin kx_j \quad (k = 0, 1, \ldots, n),$$

замечательную тем, что она есть тригонометрический полином порядка n, интерполирующий f в узлах (7). Таким образом,

$$f(x_j) = S_n(f, x_j) \quad (j = 0, 1, \ldots, 2n).$$

Легко проверить это утверждение, если учесть, что

$$\frac{2}{2n+1}\sum_{j=0}^{2n}\cos kx_j\cos lx_j=\delta_{kl},$$

$$\frac{2}{2n+1}\sum_{j=0}^{2n}\sin kx_j\sin lx_j=\delta_{kl},$$

$$\frac{2}{2n+1}\sum_{j=0}^{2n}\sin kx_j\cos lx_j=0\qquad(k,l=0,\ 1,\ \ldots,n).$$

§ 15.3. Формулы для остатка ряда Фурье

Для функции $f\in L'^*$ (вообще L^*) из формул (4) и (5) предыдущего параграфа следует, что

$$S_n(x)-f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}D_n(u)\,[f(x+u)-f(x)]\,du=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}D_n(u)\,\Delta_u f(x)\,du,\qquad(1)$$

где

$$\Delta_u f(x)=f(x+u)-f(x)\qquad(2)$$

(разность f в точке x с шагом u).

В этих преобразованиях мы воспользовались периодичностью подынтегральной функции.

Равенство (1) дает выражение для остаточного члена ряда Фурье. Выяснение вопроса, сходится или нет ряд Фурье функции f в данной точке x к ее значению $f(x)$, и связанные с этим вопросом оценки сходимости сводятся к исследованию поведения интеграла (1) при $n\to\infty$.

Зададим положительное число η, удовлетворяющее неравенствам $0<\eta\leqslant\pi$, и введем для удобства две функции

$$\mu(u)=\begin{cases}\dfrac{1}{u}, & |u|<\eta,\\ 0, & \eta\leqslant|u|\leqslant\pi,\end{cases}\qquad(3)$$

$$\nu(u)=\begin{cases}0, & |u|<\eta,\\ \dfrac{1}{u}, & \eta\leqslant|u|\leqslant\pi.\end{cases}\qquad(4)$$

Очевидно, $\frac{1}{u} = \mu(u) + \nu(u)$, $-\pi < u < \pi$, поэтому

$$D_n(u) = \frac{\sin nu}{2\operatorname{tg}\frac{u}{2}} + \frac{1}{2}\cos nu = \frac{\sin nu}{u} + \left(\frac{1}{2\operatorname{tg}\frac{u}{2}} - \frac{1}{u}\right)\sin nu +$$

$$+ \frac{1}{2}\cos nu = \mu(u)\sin nu + g(u)\sin nu + \frac{1}{2}\cos nu, \qquad (5)$$

где $g(u) = \nu(u) + \frac{1}{2\operatorname{tg}\frac{u}{2}} - \frac{1}{u}$.

Отметим неравенства

$$|g(u)| \leqslant \frac{1}{\eta} + \left|\frac{u - 2\operatorname{tg}\frac{u}{2}}{2u\operatorname{tg}\frac{u}{2}}\right| \leqslant \frac{1}{\eta} + \frac{O(u^2)}{2\left|\operatorname{tg}\frac{u}{2}\right|} \leqslant C$$

$$(-\pi < u < \pi),$$

показывающие, что функция $g(u)$ ограничена на $(-\pi, \pi)$. Кроме того, она принадлежит, очевидно, к $L'(-\pi, \pi)$. Мы будем считать ее продолженной с периодом 2π на всю действительную ось. Таким образом, $g(u) \in L'_*$ и ограниченная функция.

Из (1) и (2) следует равенство

$$S_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\eta}^{\eta} \frac{\sin nu}{u}\Delta_u f(x)\,du + \rho_n(x), \qquad (6)$$

где

$$\rho_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(u)\sin nu\Delta_u f(x)\,du + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nu\Delta_u f(x)\,du. \qquad (7)$$

В § 15.4 (замечание 3) будет показано, что *если функция* $f \in L'_*$, *то*

$$\rho_n(x) = o(1), \quad n \to \infty \qquad (8)$$

для любого x, *где* $f(x)$ *конечна и даже равномерно на любом отрезке* $[a, b]$, *где функция* $f(x)$ *ограничена.*

Но тогда справедлива следующая важная лемма.

Лемма. *Если функция* $f \in L'_*$ *и* η — *произвольное число, удовлетворяющее неравенствам* $0 < \eta \leqslant \pi$, то

$$S_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\eta}^{\eta} \frac{\sin nu}{u}\Delta_u f(x)\,du + o(1) \qquad (n \to \infty) \qquad (9)$$

(см. (2)) *для любого x, где $f(x)$ конечна, и притом равномерно на любом отрезке $[a, b]$, где функция $f(x)$ ограничена.*

Для фиксированной точки x формула (9) всегда верна, лишь бы функция f была определена в этой точке. Для того чтобы узнать, стремится ли при $n \to \infty$ к нулю разность $S_n(x) - f(x)$ в этой точке, мы должны исследовать первый (главный) член в правой части (9). Второй член уже стремится к нулю.

Если известно, что на некотором отрезке $[a, b]$ наша функция f ограничена, то вопрос о том, будет ли $S_n(x)$ стремиться к $f(x)$ при $n \to \infty$ на этом отрезке или его части равномерно, зависит от решения этого вопроса для главного члена части (9), потому что второй член уже стремится к нулю и притом равномерно на $[a, b]$.

Конечно, если функция f неограничена на отрезке $[a, b]$, то она разрывна где-то на нем и ряд Фурье f, если и сходится на $[a, b]$ к f, то заведомо неравномерно. Ведь его члены — равномерно непрерывные на $(-\infty, \infty)$ функции.

Остановимся еще на важном свойстве рядов Фурье, называемом *принципом локализации. Если мы хотим узнать, сходится или нет ряд Фурье данной функции $f \in L'^*(L^*)$ на отрезке $[a', b']$, достаточно знать ее свойства на каком-нибудь отрезке $[a, b]$, строго внутри себя содержащем $[a', b']$.* В самом деле, положим $\eta = \min\{a' - a, b - b'\}$. Тогда для точек $x \in [a', b']$, для которых мы хотим исследовать сходимость ряда Фурье, подынтегральное выражение в правой части (9) зависит от значений f только на $[a, b]$ (ведь если $x \in [a', b']$ и $0 < |u| < \eta$, то x, $x + u$, $x - u \in [a, b]$).

§ 15.4. Леммы об осцилляции

Пусть функция $f \in L'(-\infty, \infty)$ (вообще $L(-\infty, \infty)$), тогда при любом действительном λ

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\lambda x\,dx\right| \leqslant \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left|f\left(x+\frac{\pi}{\lambda}\right)-f(x)\right|dx,$$
$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\lambda x\,dx\right| \leqslant \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left|f\left(x+\frac{\pi}{\lambda}\right)-f(x)\right|dx. \tag{1}$$

В самом деле,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\lambda x\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(u+\frac{\pi}{\lambda}\right)\sin\lambda\left(u+\frac{\pi}{\lambda}\right)du =$$
$$= -\int_{-\infty}^{\infty} f\left(u+\frac{\pi}{\lambda}\right)\sin\lambda u\,du = -\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x+\frac{\pi}{\lambda}\right)\sin\lambda x\,dx.$$

Поэтому

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\lambda x\,dx\right| = \frac{1}{2}\left|\int_{-\infty}^{\infty}\left[f(x) - f\left(x+\frac{\pi}{\lambda}\right)\right]\sin\lambda x\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left|f\left(x+\frac{\pi}{\lambda}\right) - f(x)\right|dx.$$

Для косинуса рассуждение аналогично.

Лемма 1. *Пусть $f \in L'(-\infty, \infty)$ (или $L(-\infty, \infty)$), g — ограниченная измеримая (на любом отрезке) функция ($|g(x)| < k$). Тогда*

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cos\lambda u\, g(u) f(x+u)\,du = 0,$$
$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\sin\lambda u\, g(u) f(x+u)\,du = 0 \tag{2}$$

равномерно относительно x, принадлежащих к любому отрезку $[a, b]$.

В частности,

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cos\lambda u f(x+u)\,du = 0,$$
$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\sin\lambda u f(x+u)\,du = 0. \tag{3}$$

Доказательство. Отметим, что равенства (3) непосредственно следуют из неравенств (1) и теоремы 6 § 14.4.

Чтобы доказать (2), зададим $\varepsilon > 0$ и подберем непрерывную финитную функцию $\varphi(u) \in L'(-\infty, \infty)$ такую, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(u) - \varphi(u)|\,du < \frac{\varepsilon}{2K} \tag{4}$$

(см. теорему 1, § 14.4 и рис. 14.1, *а*) и представим интеграл (2) в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cos\lambda u\, g(u) f(x+u)\,du = I_1 + I_2, \tag{5}$$

где

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty}\cos\lambda u\, g(u)\,[f(x+u) - \varphi(x+u)]\,du,$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty}\cos\lambda u\, g(u)\,\varphi(x+u)\,du.$$

Но если считать, что $|g(u)| < K$, $|\varphi(u)| < K_1$, то для всех x

$$|I_1| \leqslant K \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+u) - \varphi(x+u)|\, du = K \int_{-\infty}^{\infty} |f(t) - \varphi(t)|\, dt < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{6}$$

и (в силу (1)) при $\lambda > \lambda_0$, где λ_0 достаточно велико,

$$|I_2| \leqslant \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left| g\left(u + \frac{\pi}{\lambda}\right) \varphi\left(x + u + \frac{\pi}{\lambda}\right) - g(u)\, \varphi(x+u) \right| du \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left| g\left(u + \frac{\pi}{\lambda}\right) - g(u) \right| \left| \varphi\left(x + u + \frac{\pi}{\lambda}\right) \right| du +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |g(u)| \left| \varphi\left(x + u + \frac{\pi}{\lambda}\right) - \varphi(x+u) \right| du \leqslant$$

$$\leqslant \frac{K_1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left| g\left(u + \frac{\pi}{\lambda}\right) - g(u) \right| du + \frac{K}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \varphi\left(t + \frac{\pi}{\lambda}\right) - \varphi(t) \right| dt < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{7}$$

Из (5), (6), (7) следует первое равенство (2) и притом равномерно относительно $x \in [a, b]$.

Аналогично доказывается второе равенство (2).

Лемма 2. *Равенства* (2) *остаются верными в предположении, что* $f \in L'(L)$, *а* $g(u) = g(\alpha, u)$ — *ограниченная функция* ($|g(\alpha, u)| < K$, $\alpha_1 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_2$), *непрерывно зависящая от* (α, u), *где* α — *параметр. При этом они выполняются равномерно относительно* $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2)$ *и* $x \in [a, b]$, *где* $[a, b]$ — *произвольный отрезок.*

Лемма эта доказывается так же, как лемма 1. Надо учесть, что в правой части (7) для $x \in [a, b]$ в силу финитности φ можно вместо интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} \left| g\left(u + \frac{\pi}{\lambda}\right) - g(u) \right| du$ написать $\int_{-N}^{N} \left| g\left(u + \frac{\pi}{\lambda}\right) - g(u) \right| du$ при достаточно большом N, и тогда

$$\int_{-N}^{N} \left| g\left(\alpha, u + \frac{\pi}{\lambda}\right) - g(\alpha, u) \right| du \to 0 \qquad (\lambda \to \infty)$$

равномерно относительно $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$, так как функция $g(\alpha, u)$ равномерно непрерывна на $[\alpha_1, \alpha_2] \times [-N, N]$.

Замечание 1. Все утверждения, доказанные выше в этом параграфе, остаются верными, если считать, что функции f и g — периодические периода 2π, принадлежащие L'_*, (или L_*), а интегралы взяты по периоду. Теперь уже, впрочем, надо считать, что переменная λ пробегает натуральные числа ($\lambda = 1, 2, 3, \ldots$), чтобы функции $\cos\lambda x$, $\sin\lambda x$ были периодическими. Конечно, функцию φ в (4) можно взять периодической периода 2π (не обязательно финитной на периоде).

Ниже формулируются эти утверждения для периодических функций. В верности их читатель убедится, заменив всюду в приведенных выше рассуждениях $\int\limits_{-\infty}^{\infty}$ на $\int\limits_{-\pi}^{\pi}$.

Для функции $f \in L'_*$ выполняются неравенства

$$\left|\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \begin{matrix}\cos\lambda x\\ \sin\lambda x\end{matrix} dx\right| \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|f\left(x+\frac{\pi}{\lambda}\right)-f(x)\right| dx. \qquad (1')$$

Лемма 1'. *Пусть $f, g \in L'_*$ (или L_*) и, кроме того, g ограничена и измерима на $[-\pi, \pi]$. Тогда*

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \begin{matrix}\cos\lambda u\\ \sin\lambda u\end{matrix} g(u) f(x+u)\, du = 0 \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots) \qquad (2')$$

равномерно относительно всех $x \in (-\infty, \infty)$.

В частности, коэффициенты Фурье a_k, b_k функции f стремятся к нулю при $k \to \infty$:

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\, dt = 0,$$

$$\lim_{k\to\infty} b_k = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\, dt = 0.$$

Замечание 2. Верен также аналог леммы 2, где надо считать, что функция $g(\alpha, u)$ принадлежит по u к L'_* (L) и непрерывна по (α, u), где $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$.

Замечание 3. Равенство (8) § 15.3 теперь вытекает из следующих соображений.

Представим первое слагаемое правой части (7) § 15.3 подробнее:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} g(u)\sin nu\Delta_u f(x)\, du = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} g(u)\sin nu f(x+u)\, du -$$

$$- \frac{f(x)}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} g(u)\sin nu\, du. \qquad (8)$$

Первый интеграл правой части (8) стремится к нулю при $n \to \infty$ равномерно относительно $x \in (-\infty, \infty)$ на основании (2′). Второй интеграл на том же основании стремится к нулю для таких x, для которых $f(x)$ — конечное число; при этом это стремление к нулю равномерно на любом отрезке изменения x, на котором функция f ограничена. Аналогичные утверждения имеют место и для второго слагаемого правой части (7) § 15.3.

Этим доказано, *что* $\rho_n(x) \to 0$ *при* $n \to \infty$ *для любого* x, *для которого* $f(x)$ *конечна и притом равномерно на любом отрезке, на котором* f *ограничена.*

Заметим еще, что если функция $f \in L_2'^*$ (или L_2^*), то тот факт, что ее коэффициенты Фурье a_k, b_k стремятся к нулю, следует из неравенства Парсеваля

$$\sum_1^\infty (|a_k|^2 + |b_k|^2) < \infty.$$

Стремление к нулю интеграла (3), соответствующего, например синусу, можно объяснить следующим образом. Несмотря на то, что функция $f \in L'^*(L^*)$ может иметь много, даже (в случае L) бесконечное число разрывов, она все же обладает многими свойствами непрерывных функций. Это проявляется в доказанных выше леммах об осцилляции. Множитель $\sin \lambda x$ изгибает график $f(x)$ в график, состоящий из волн. Каждая из них состоит из двух полуволн, которые в среднем хорошо компенсируют друг друга при интегрировании. Результат компенсации налицо: интеграл (3) стремится к нулю при $\lambda \to \infty$.

§ 15.5. Критерии сходимости рядов Фурье. Полнота тригонометрической системы функций

По определению функция $f(x)$ удовлетворяет на отрезке $[a, b]$ (интервале (a, b)), *условию Липшица степени* α $(0 < \alpha \leqslant 1)$, если для любых $x, x' \in [a, b]$ $((a, b))$ выполняется неравенство

$$|f(x') - f(x)| \leqslant M|x' - x|^\alpha,$$

где M не зависит от x, x'. При $\alpha = 1$ в этом случае просто говорят, что f *удовлетворяет условию Липшица.*

Если, например, f — непрерывная и кусочно гладкая на $[a, b]$, то она удовлетворяет условию Липшица на $[a, b]$, потому что

$$|f(x') - f(x)| = \left|\int_x^{x'} f'(t)\,dt\right| \leqslant M|x' - x| \quad (|f'(t)| \leqslant M).$$

Если функция f имеет на интервале (a, b) ограниченную производную $(|f'| \leqslant M)$ и непрерывна на $[a, b]$, то и в этом случае

мы, применяя теорему Лагранжа, получим

$$|f(x')-f(x)| = |f'(\xi)(x'-x)| \leqslant M|x'-x|, \quad \xi \in (x, x')$$

и убедимся, что f удовлетворяет на $[a, b]$ условию Липшица.

Функция $|x|^\alpha$ $(0<\alpha\leqslant 1)$ удовлетворяет условию Липшица степени α на всей действительной оси (тем более на любом отрезке), потому что, если считать, что $0<|x|<|x'|$ и $|x'/x|=t$, $1<t<\infty$, то получим

$$\frac{\big||x'|^\alpha-|x|^\alpha\big|}{|x'-x|^\alpha} \leqslant \frac{\big||x'|^\alpha-|x|^\alpha\big|}{\big||x'|-|x|\big|^\alpha} = \frac{t^\alpha-1}{(t-1)^\alpha} \leqslant 1 \qquad (M=1).$$

При $\alpha=1$ это неравенство очевидно. При $\alpha<1$ это видно из того, что функция от t в его левой части имеет предел, равный нулю при $t\to 1$ и равный 1 при $t\to\infty$, и она имеет положительную производную на $(1, \infty)$ и, таким образом, она возрастает на $(1, \infty)$*).

Теорема 1. *Пусть функция $f\in L'^*$ (или L^*) и, кроме того, она удовлетворяет условию Липшица степени α на отрезке $[a, b]$ (в частности, если f — непрерывная кусочно гладкая на $[a, b]$). Тогда, каковы бы ни были a', b', удовлетворяющие неравенствам $a<a'<b'<b$, ряд Фурье f сходится на $[a', b']$ к f и притом равномерно.*

Доказательство. Пусть $\delta=\min\{a'-a, b-b'\}$ и $0<\eta<\delta$, π. Тогда для $x\in[a', b']$ и $0\leqslant|u|\leqslant\eta$ точки x, $x+u$ принадлежат $[a, b]$ и потому

$$|f(x+u)-f(x)| \leqslant M|u|^\alpha. \tag{1}$$

При найденном η воспользуемся формулой § 15.3, (9):

$$S_n(x)-f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\eta}^{\eta} \sin nu\,\frac{f(x+u)-f(x)}{u}\,du + o(1), \qquad n\to\infty$$

имеющей место равномерно относительно $x\in[a, b]$. Тогда для любого $\varepsilon>0$ равномерно для всех $x\in[a', b']$ получим в силу (1) оценку

$$|S_n(x)-f(x)| \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\eta}^{\eta}\frac{M|u|^\alpha}{|u|}\,du + |o(1)| \leqslant \frac{2M}{\pi\alpha}\eta^\alpha + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

$$(n>N). \tag{2}$$

где η выбрано так, чтобы выполнялось неравенство $2M\eta^\alpha/\pi\alpha < \varepsilon/2$ и затем N взято настолько большим, чтобы $|o(1)|<\frac{\varepsilon}{2}$ при $n>N$. Теорема доказана.

---

*) В случае $|x|=|x'|$ имеем $|x'|^\alpha-|x|^\alpha=0\leqslant|x'-x|^\alpha$.

Теорема 2. *Если функция $f \in C^*$ — непрерывная и кусочно гладкая на действительной оси, то ее ряд Фурье сходится к ней на всей действительной оси и притом равномерно.*

В самом деле, на отрезке $[-\varepsilon, 2\pi+\varepsilon]$, где $\varepsilon > 0$, f — непрерывная и кусочно гладкая и потому ряд ее Фурье по предыдущей теореме равномерно сходится к ней на $[0, 2\pi]$, следовательно, вследствие периодичности f и членов ряда, и на всей действительной оси.

Теорема 3 (Вейерштрасса). *Системы функций*

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \tag{3}$$

$$1, \cos x, \cos 2x, \ldots, \tag{4}$$

$$\sin x, \sin 2x, \ldots, \tag{5}$$

полны соответственно

1) *в пространстве C^*,*

2) *в подпространстве C^* четных функций, а также в $C(0, \pi)$,*

3) *в подпространстве C^* нечетных функций, а также в классе функций, принадлежащих $C(0, \pi)$ и удовлетворяющих условию $f(0) = f(\pi) = 0$.*

Доказательство. В самом деле, пусть f — произвольная функция класса C^*. Она равномерно непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$ и имеет период 2π. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ можно указать полигональную функцию $\Pi(x)$ периода 2π такую, что

$$|f(x) - \Pi(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{6}$$

для всех x. При этом, если f — четная или нечетная функция, то можно сделать так, что и $\Pi(x)$ будет соответственно четная или нечетная. Например, если точки графика f с абсциссами $x_j = jh$, $j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, $h = \pi/N$, где N — достаточно большое натуральное число, соединить отрезками, то получим ломаную, описываемую нужной функцией $\Pi(x)$. Функция $\Pi(x)$ удовлетворяет условиям предыдущей теоремы потому n-я ее сумма Фурье при достаточно большом n удовлетворяет неравенству

$$|\Pi(x) - S_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ для всех } x. \tag{7}$$

При этом, если $\Pi(x)$ — четная или нечетная функция, то и $S_n(x)$ соответственно обладает одним из этих свойств.

Из (6) и (7) следует, что $|f(x) - S_n(x)| < \varepsilon$ для всех x. Это доказывает теорему, потому что $S_n(x)$ — тригонометрический полином — конечная линейная комбинация из функций соответственно систем (3), (4), (5). Отметим, что S_n есть сумма Фурье не f, а Π.

Это утверждение не противоречит тому факту, что существуют функции $f \in C^*$, ряды Фурье которых в отдельных точках расходятся (см. по этому поводу замечание в конце этого параграфа).

Надо еще иметь в виду, что если непрерывную на $[0, \pi]$ (принадлежащую $C(0, \pi)$) функцию продолжить четным образом, а затем периодически с периодом 2π продолжить на действительную ось, то получим четную функцию класса C^*. Если же функцию, непрерывную на $[0, \pi]$, удовлетворяющую условию $f(0) = f(\pi) = 0$, продолжить нечетным образом, а затем периодически, то получим нечетную функцию класса C^*.

Заметим, что из теоремы 3 следует, что *для любой непрерывной периода 2π функции f ($f \in C^*$) существует равномерно сходящаяся к ней (на действительной оси) последовательность тригонометрических полиномов $T_n(x)$ ($n = 1, 2, \ldots$)*, откуда следует, что *функция f представима в виде равномерно сходящегося к ней ряда тригонометрических полиномов*

$$f(x) = \sum_0^\infty Q_k(x), \quad Q_0 = T_0, \quad Q_k = T_k - T_{k-1} \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Теорема 4. *Ряд Фурье функции $f \in L_2'^*$ (вообще L_2^*) сходится к ней в смысле среднего квадратичного на периоде.*

Доказательство. В самом деле, по предыдущей теореме система (3) тригонометрических функций полна в C^*. Тем более она полна в $L_2'^*$ (см. теорему § 14.9). Но тогда теорема верна на основании теоремы 1 § 14.6 из общей теории ортогональных рядов.

В силу той же теоремы для полной ортогональной и нормальмальной системы тригонометрических функций § 15.1, (1) выполняется равенство Парсеваля

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2\, dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} f\, dx\right|^2 + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\, dt\right|^2 + \left|\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\, dt\right|^2\right),$$

или

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2\, dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(|a_k|^2 + |b_k|^2), \tag{8}$$

какова бы ни была функция $f \in L_2'^*$ (или, более общо, L_2^*).