Теорема 4 утверждает возможность установить правило согласования ориентаций L_{k+1} и L_k. При этом при ее доказательстве дано такое правило. Однако в дальнейшем нам будет удобнее пользоваться другим правилом, ниже формулируемым.

Правило согласования ориентаций L_{k+1} и L_k: если при условии теоремы 2 в окрестности Ω точки $\mathbf{x}^0 \in L_k \subset L'_{k+1}$ кусок ΩL_{k+1} описывается уравнениями

$$x_i = f_i(u_1, \ldots, u_{k+1}), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{18}$$

так, что при $u_1 = 0$ получаются уравнения

$$x_i = f_i(0, u_2, \ldots, u_{k+1}), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{19}$$

куска ΩL_k, и при этом точки $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_{k+1})$ с $u_1 > 0$ при помощи преобразования (18) переходят во вне L_{k+1}, то по определению уравнения (19) определяют ориентацию L_k, согласованную с ориентацией L_{k+1}.

Чтобы убедиться в корректности этого нового правила, достаточно в исходном правиле, о котором шла речь в теореме 4, произвести замену $u'_1 = u_{k+1}$, $u'_2 = u_1, \ldots, u'_k = u_{k-1}$, $u'_{k+1} = (-1)^k u_k$, а затем опустить штрихи.

Это правило, которое мы еще будем называть *формальным*, хорошо тем, что оно естественно согласуется с наглядными правилами согласования ориентаций фигур, которые были даны при элементарном выводе формул Грина, Гаусса — Остроградского и Стокса.

Наряду с L_k введем еще $L_{\bar{k}}$ — то же многообразие, но ориентированное противоположно. Очевидно, $L_{\bar{k}}$ есть край многообразия $L'_{k+1} - \bar{L}_{k+1}$ или, может быть, его часть, и ориентации этих двух многообразий согласованы согласно формальному правилу.

Замечание. Пусть L_{k+1}, L'_{k+1} и L_k имеют прежний смысл и, кроме того, $L_{1,k+1}, \ldots, L_{s,k+1}$ — $(k+1)$-мерные многообразия, замыкания которых принадлежат L_{k+1} и попарно не пересекаются. Пусть эти многообразия имеют согласованно ориентированные с ними связные края $L_{1,k}, \ldots, L_{s,k}$. Тогда многообразие (s-связное)

$$L_{k+1} - \sum_{j=1}^{s} \bar{L}_{j,k+1} \tag{20}$$

имеет, очевидно, согласованно ориентированный с ним край

$$L_k + \sum_{j=1}^{s} L_{\bar{j},k}. \tag{21}$$

Пример 1. В плоскости (x, y) задана выпуклая область G с гладкой границей Γ, изображенная на рис. 17.1. Обозначим через Π полосу $a < x < b$, $-\infty < y < \infty$, которую будем рассматривать как ориентированное

(положительно) двумерное многообразие

$$x = x, \quad y = y, \quad (x, y) \in \Pi. \tag{22}$$

Таким образом, G есть соответственно ориентированное многообразие. Но Π можно задать еще уравнениями

$$x = x, \quad y = -v + \varphi(x), \quad a < x < b, \quad -\infty < v < \infty, \tag{23}$$

устанавливающими (непрерывно дифференцируемое в обе стороны) соответствие $(x, y) \rightleftarrows (v, x)$ с якобианом

$$\frac{D(x, y)}{D(v, x)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \varphi'(x) \end{vmatrix} = 1,$$

или еще уравнениями

$$x = -x', \quad y = v + \psi(-x'), \quad -b < x' < -a, \quad -\infty < v < \infty, \tag{24}$$

устанавливающими соответствие $(x, y) \rightleftarrows (v, x')$ с якобианом

$$\frac{D(x, y)}{D(v, x')} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -\psi'(-x') \end{vmatrix} = 1.$$

Так как к тому же в окрестностях γ_1 и γ_2 точки (v, x), соответственно (v, x') с $v > 0$ переходят вовне G, то согласно правилу согласования ориентаций полученные из (23) и (24) при $v = 0$ уравнения

$$x = x, \qquad y = \varphi(x), \qquad a < x < b,$$
$$x = -x', \quad y = \psi(-x'), \quad -b < x' < -a,$$

кусков γ_1 и γ_2 определяют ориентацию Γ, согласованную с ориентацией G.

Мы видим, что при непрерывном возрастании параметров x, x' соответственно куски $\gamma_1, \gamma_2 \subset \Gamma$ проходятся точкой (x, y) так, что область G остается слева, т. е. что Γ обходится против часовой стрелки.

Так как естественно ориентацию G, определяемую уравнениями (22), называть положительной, то мы получим, что формальное правило согласования, примененное к G и Γ, согласуется с известным геометрическим правилом согласования ориентаций G и Γ.

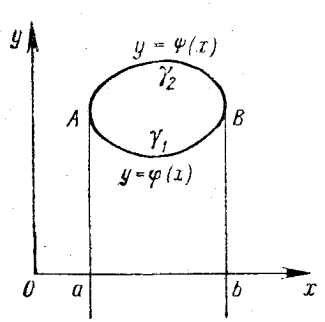

Рис. 17.1.

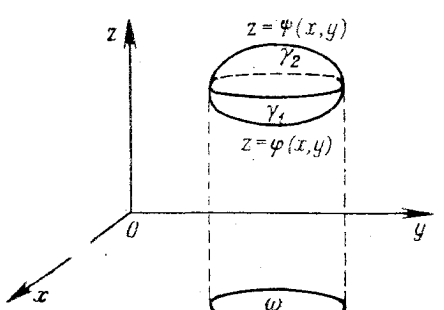

Рис. 17.2.

Впрочем, для полного обоснования данного вывода надо указанные рассмотрения провести еще для некоторых дуг $\lambda_1, \lambda_2 \in \Gamma$, содержащих соответственно внутри себя точки $A, B \in \Gamma$ (см. рис. 17.1).

Пример 2. Пусть теперь в пространстве (x, y, z) задана выпуклая область G с гладкой границей Γ, изображенная на рис. 17.2. Будем считать, что ω есть проекция G на плоскость (x, y). Поместим G внутри цилиндри-

ческого тела $\Pi = \{(x, y, z): (x, y) \in \omega\}$, которое (вместе с G) будем считать ориентируемым многообразием

$$x = x, \quad y = y, \quad z = z, \quad (x, y, z) \in \Pi.$$

Последнее можно записать еще через параметры $(v, x', y) \rightleftarrows (x, y, z)$ при помощи уравнений

$$x = -x', \quad y = y, \; z = -v + \varphi(-x', y),$$
$$(x', y) \in \omega', \quad -\infty < v < \infty,$$

где ω' — соответствующая область, с якобианом

$$\frac{D(x, y, z)}{D(v, x', y)} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -\varphi'_x(-x', y) & \varphi'_y(-x', y) \end{vmatrix} = 1$$

или через параметры $(v, x, y) \rightleftarrows (x, y, z)$ при помощи уравнений

$$x = x, \quad y = y, \quad z = v + \psi(x, y), \quad (x, y) \in \omega, \; -\infty < v < \infty,$$

с якобианом

$$\frac{D(x, y, z)}{D(v, x, y)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & \psi'_x & \psi'_y \end{vmatrix} = 1.$$

Так как к тому же в окрестностях γ_1 и γ_2 точки (v, x', y), соответственно (v, x, y) с $v > 0$ переходят вовне G, то уравнения

$$x = -x', \quad y = y, \quad z = \varphi(-x', y), \quad (x', y) \in \omega',$$
$$x = x, \quad y = y, \quad z = \psi(x, y), \quad (x, y) \in \omega,$$

определяют соответственно куски γ_1 и γ_2 границы Γ вместе с их ориентацией, согласованной с ориентацией G по нашему правилу.

Условимся нормаль $\mathbf{n}$ (вообще не единичную) к поверхности $\mathbf{r}(u, v)$ определять по формуле $\mathbf{n} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$. Тогда для куска γ_1 $n_z = -1$, а для куска γ_2 $n_z = 1$, т. е. в обоих случаях нормаль направлена вовне G. Мы пришли к выводу, что формальное правило согласования ориентаций, примененное к данному конкретному случаю G, Γ, свелось к тому, что надо считать, что положительно ориентированной трехмерной области G соответствует ее поверхность Γ, ориентированная внешней нормалью.

Впрочем, полное обоснование данного вывода требует подобного рассмотрения еще кусков Γ, покрывающих край γ_1 (в данном случае см. рис. 17.2, являющийся также краем γ_2).

Пример 3. Рассмотрим гладкую поверхность S', определяемую уравнением

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \tag{25}$$

где Ω — плоская область, и принадлежащую ей поверхность S,

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in \omega \subset \overline{\omega} \subset \Omega,$$

где ω — область (возможно, многосвязная) с гладкой границей γ. Край S, т. е. $\Gamma = \partial S = \overline{S} - S$, есть очевидно, гладкая кривая. Будем считать, что поверхность S' (следовательно, и S) ориентирована уравнением (25). Тогда проекция на ось z ее нормали $\mathbf{n} = \mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y$ $(\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + f\mathbf{k})$ равна 1, т. е. S ориентирована нормалью, образующей острый угол с положительным направлением оси z. Если применить правило штопора, то в правой системе координат (x, y, z) ориентация S индуцирует ориентацию Γ и ее проекции

Γ_z на $z=0$, выражающую, что точка, движущаяся по Γ_z в направлении обхода Γ_z, оставляет ω слева. К этому же выводу придем, если будем согласовывать ориентации S и Γ, пользуясь формальным правилом.

В самом деле, в окрестности произвольной точки кривая Γ имеет вид $y=\varphi(x)$ или $x=\psi(y)$, $z=f(x, y)$. Пусть для определенности это будет $y=\varphi(x)$. Поверхность с сохранением ориентации может быть записана также через параметры $(v, x) \rightleftarrows (x, y)$, связанные с (x, y) уравнениями

$$x=x, \quad y=-v+\varphi(x), \quad \frac{D(x, y)}{D(v, x)}=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \varphi'(x) \end{vmatrix}=1.$$

Пусть точкам (v, x) с малым $v>0$ соответствуют точки $S'-S$. Тогда уравнения $x=x$, $y=\varphi(x)$ определяют ориентацию Γ_z, и при возрастании параметра x мы будем двигаться по Γ_z в направлении ориентации Γ_z. Ясно, что при этом точки $(x, y) \in \omega$, которые соответствуют $v>0$, будут оставаться слева.

Замечание. Пусть k-мерное многообразие S принадлежит области $\Omega \subset R_n$ точек $\mathbf{x}=(x_1, \ldots, x_n)$, которая переходит на область $\Omega' \subset R_n'$ точек $\xi=(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ при помощи взаимно однозначного и непрерывно дифференцируемого в обе стороны преобразования

$$\xi_i=\psi_i(x_1, \ldots, x_n)=\psi_i(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad i=1, \ldots, n. \tag{26}$$

Тогда если

$$x_i=\varphi_i(u_1, \ldots, u_k)=\varphi_i(\mathbf{u}), \quad \mathbf{u} \in \omega, \quad i=1, \ldots, n, \tag{27}$$

есть описание некоторого куска $\sigma \subset S$ в пространстве R_n, то

$$\xi_i=\psi_i(\varphi_1(\mathbf{u}), \ldots, \varphi_n(\mathbf{u}))=F_i(\mathbf{u}), \quad \mathbf{u} \in \omega, \quad i=1, \ldots, n, \tag{28}$$

— его описание в пространстве R_n'. Ведь уравнения (28) устанавливают взаимно однозначное соответствие $\xi \rightleftarrows \mathbf{u}$, функции $F_i(u)$ непрерывно дифференцируемы вместе с φ_s и ψ_i и ранг матрицы $\left\|\frac{\partial F_i}{\partial u_j}\right\|$ равен k, потому что k ее строк $\left\{\frac{\partial F_1}{\partial u_j}, \ldots, \frac{\partial F_n}{\partial u_j}\right\}$, $j=1, \ldots, k$, можно рассматривать как k n-мерных векторов, полученных при помощи невырожденного линейного преобразования $\left(\text{с определителем } \left|\frac{\partial \psi_i}{\partial x_s}\right| \neq 0\right)$ из k линейно независимых между собой векторов $\left\{\frac{\partial \varphi_1}{\partial u_j}, \ldots, \frac{\partial \varphi_n}{\partial u_j}\right\}$.

Легко видеть, что если S ориентировано в R_n и локальное описание S вида (27) преобразовать в описание вида (28), то последнее задает определенную (соответствующую) ориентацию S в R_n'. Далее, если L_k есть край ориентированного многообразия L_{k+1}, то высказанное выше правило передачи ориентации с L_{k+1} на L_k, применимое как в R_n, так и в R_n', таково, что оно не нарушает это соответствие.

§ 17.3. Дифференциальные формы

Дифференциальной формой (короче *формой*) k-го *порядка* ($k = 1, 2, \ldots$), определенной на открытом множестве $\Omega \subset R_n$, называется конечная сумма

$$\mathfrak{A} = \sum a(\mathbf{x})\, dx_{i_1} \ldots dx_{i_k}, \qquad \mathbf{x} \in \Omega, \tag{1}$$

где $a(\mathbf{x})$ — функции — *коэффициенты формы*, а $dx_{i_1}, \ldots, dx_{i_k}$ — символы, дифференциалы, соответствующие индексам $i_1, \ldots, i_k$ удовлетворяющим неравенствам $1 \leqslant i_s \leqslant n$, если эта сумма подчиняется специальным условиям, излагаемым ниже.

Формой нулевого порядка на Ω называют произвольную функцию $a(\mathbf{x})$, определенную на Ω.

Будем считать коэффициенты $a(\mathbf{x})$ непрерывными или непрерывно дифференцируемыми столько раз, сколько будет нужно. Конечно, в каждом члене $a(\mathbf{x})\, dx_{i_1}, \ldots, dx_{i_k}$ коэффициенты $a(\mathbf{x})$, вообще говоря, различны так же, как, вообще говоря, различны системы индексов $i_1, \ldots, i_k$, но они могут и совпадать.

1. Следующие *операции* над формой $\mathfrak{A}$, называемые *допустимыми*, по определению не изменяют ее:

а) Перемена местами слагаемых в сумме (1).

б) Замена слагаемого

$$a(\mathbf{x})\, dx_{i_1} \ldots dx_{i_k} \tag{2}$$

суммой

$$a_1(\mathbf{x})\, dx_{i_1} \ldots dx_{i_k} + a_2(\mathbf{x})\, dx_{i_1} \ldots dx_{i_k}, \quad a(\mathbf{x}) = a_1(\mathbf{x}) + a_2(\mathbf{x}) \tag{3}$$

или, наоборот, замена (3) на (2).

в) Выбрасывание из (1) слагаемого, содержащего два равных дифференциала ($i_r = i_s$, $r \neq s$) или коэффициент $a(\mathbf{x}) \equiv 0$ (см. ниже д)).

г) Перемена местами двух дифференциалов в каком-либо члене суммы (1), сопровождаемая изменением знака $a(\mathbf{x})$.

д) Если в результате применения операций а)—г) над $\mathfrak{A}$ в конечном числе все члены $\mathfrak{A}$ исчезнут, то форма $\mathfrak{A}$ называется *нулевой* и обозначается через θ. В частности, это будет в случае, если все слагаемые $\mathfrak{A}$ имеют два равные дифференциала, как это имеет место при $k > n$, или в случае, если все коэффициенты формы $a(\mathbf{x}) = 0$ на Ω.

Очевидно, что форму $\mathfrak{A}$ порядка k, применяя к ней допустимые операции, можно свести к *каноническому виду*

$$\mathfrak{A} = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} a_{i_1, \ldots, i_k}(x)\, dx_{i_1} \ldots dx_{i_k}, \tag{1'}$$

где сумма распространена на все сочетания по k из чисел $1, \ldots, n$, расположенных в скалярном порядке.

Для данной формы $\mathfrak{A}$ ее каноническое выражение очевидно единственно, если не считать порядок расположения ее слагаемых.

2. Если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — формы порядка k, то *сумма* $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}$ есть форма, получаемая, если слагаемые $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ объединить и считать слагаемыми $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}$, а *разность* $\mathfrak{A}-\mathfrak{B}$ есть сумма $\mathfrak{A}+(-\mathfrak{B})$, где $-\mathfrak{B}$ есть форма, получаемая из формы $\mathfrak{B}$, если коэффициенты $a(\mathrm{x})$ последней заменить на $-a(\mathrm{x})$. В частности, если каноническое выражение $\mathfrak{A}$ определяется суммой (1′), а каноническое выражение $\mathfrak{B}$ — суммой

$$\mathfrak{B}=\sum_{i_1<\ldots<i_k} b_{i_1,\ldots,i_k}(\mathrm{x})\,dx_{i_1}\ldots dx_{i_k}, \tag{4}$$

то $\mathfrak{A}\pm\mathfrak{B}=\sum\limits_{i_1<\ldots<i_k}\left(a_{i_1,\ldots,i_k}\pm b_{i_1,\ldots,i_k}\right)dx_{i_1}\ldots dx_{i_k}$.

Мы уже не будем останавливаться на формальном доказательстве того факта, что указанные определения суммы и разности не зависят от (допустимых) способов задания $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$.

3. *Произведение* $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ двух форм *)

$$\mathfrak{A}=\sum a\,dx_{i_1}\ldots dx_{i_k}, \tag{5}$$

$$\mathfrak{B}=\sum b\,dx_{j_1}\ldots dx_{j_s}, \tag{6}$$

вообще говоря, разных измерений k и s определяется как результат почленного перемножения буквенных выражений, стоящих справа в (5), (6), однако с сохранением порядка следования дифференциалов. При этом коэффициенты a и b считаются перестановочными с дифференциалами. В частности, в случае канонических записей $\mathfrak{A}$ (см. 1′) и $\mathfrak{B}=\sum\limits_{j_1<\ldots<j_s} b_{j_1,\ldots,j_s}dx_{j_1}\ldots dx_{j_s}$

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}=\sum_{i_1<\ldots<i_k}\ \sum_{j_1<\ldots<j_s} a_{i_1,\ldots,i_k}b_{j_1,\ldots,j_s}dx_{i_1}\ldots dx_{i_k}dx_{j_1}\ldots dx_{j_s}. \tag{6′}$$

В частности, $\mathfrak{A}\mathfrak{B}=0$ при $k+s>n$.

Мы не останавливаемся на формальном доказательстве того факта, что при любых исходных видах форм $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ (получаемых один из другого с помощью конечного числа допустимых операций) их произведение дает сумму, которая допустимыми преобразованиями приводится к виду (6′).

4. *Дифференциалом формы* **) (1) называется форма

$$d\mathfrak{A}=\sum\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial a(x)}{\partial x_j}\,dx_j dx_{i_1}\ldots dx_{i_k} \tag{7}$$

---

*) Произведение форм называют еще *внешним произведением форм*.

**) Дифференциал формы называют еще *внешним дифференциалом формы*.

порядка $k+1$. Можно проверить, что это определение не зависит от способа задания $\mathfrak{A}$.

Ясно, что

$$d\,d\mathfrak{A} = d^2\mathfrak{A} = \sum\sum_{s,j} \frac{\partial^2 a}{\partial x_s \partial x_j} dx_s dx_j dx_{i_1} \ldots dx_{i_k} = 0,$$

потому что эта сумма состоит из пар слагаемых

$$\frac{\partial^2 a}{\partial x_s \partial x_j} dx_s dx_j dx_{i_1} \ldots dx_{i_k} + \frac{\partial^2 a}{\partial x_j \partial x_s} dx_j dx_s dx_{i_1} \ldots dx_{i_k}.$$

Полезно ввести символическую дифференциальную форму первого порядка (операцию)

$$d = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} dx_i.$$

Тогда, очевидно, $d\mathfrak{A}$ есть (символическое) произведение форм d и $\mathfrak{A}$. Естественно считать, что

$$d^2 = dd = \sum_{i,j} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j = 0$$

и тогда $d^2\mathfrak{A} = dd\mathfrak{A} = 0$ можно рассматривать как произведение символической формы d^2 на $\mathfrak{A}$.

5. Преобразование формы $\mathfrak{A}$ (1) к новой переменной $\mathbf{u} = (u, \ldots, u_n)$ при помощи непрерывно дифференцируемых функций

$$x_i = \psi_i(u_1, \ldots, u_n) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

производится согласно следующему правилу (пояснения ниже):

$$\mathfrak{A} = \sum a(\mathbf{x})\, dx_{i_1} \ldots dx_{i_k} = \sum a(\mathbf{u}) \sum_{j_1=1}^{n} \frac{\partial x_{i_1}}{\partial u_{j_1}} du_{j_1} \ldots \sum_{j_k=1}^{n} \frac{\partial x_{i_k}}{\partial u_{j_k}} du_{j_k} =$$

$$= \sum a(\mathbf{u}) \sum_{j_1, \ldots, j_k} \frac{\partial x_{i_1}}{\partial u_{j_1}} \ldots \frac{\partial x_{i_k}}{\partial u_{j_k}} du_{j_1} \ldots du_{j_k} =$$

$$= \sum a(\mathbf{u}) \sum_{s_1 < \ldots < s_k} \frac{D(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})}{D(u_{s_1}, \ldots, u_{s_k})} du_{s_1} \ldots du_{s_k}. \qquad (8)$$

В коэффициентах a произведена замена $x_i = \psi_i(\mathbf{u})$ $(i = 1, \ldots, n)$ и результат обозначен через $a(\mathbf{u})$.

Определение преобразования переменной от $\mathbf{x}$ к $\mathbf{u}$ дано вторым равенством цепи: объявляется, что полученное выражение есть дифференциальная форма порядка k по $\mathbf{u}$. Дальнейшие равенства автоматически следуют из этого определения. В четвертом члене цепи функции $\frac{\partial x_{i_s}}{\partial u_{j_r}}$ (множители коэффициентов формы) вынесены

перед дифференциалами. В четвертом выражении (члене) цепи члены суммы $\sum\limits_{j_1,\ldots,j_k}$, соответствующие системам $j_1, \ldots, j_k$, содержащим равные $j_s = j_r$ $(s \neq r)$, можно выбросить, потому что это выражение есть форма. Далее, задается произвольная система из k индексов $1 \leqslant s_1 < s_2 < \ldots < s_k \leqslant n$, и из суммы $\sum\limits_{j_1,\ldots,j_k}$ выбираются только те слагаемые, которые соответствуют всевозможным перестановкам элементов $(s_1, \ldots, s_k)$. В этих слагаемых упорядочиваются дифференциалы в порядке возрастания индексов $(s_1 < s_2 < \ldots < s_k)$, в результате в силу свойств формы перед этими слагаемыми возникнут соответствующие знаки $\pm$, как раз такие, что после вынесения из всех этих слагаемых за скобки множителя $du_{s_1} \ldots du_{s_k}$ выражение в скобках объединяется в определитель

$$\frac{D(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})}{D(u_{s_1}, \ldots, u_{s_k})}. \tag{9}$$

Этим объясняется последнее равенство цепи.

Заметим, что если

$$a(x)\, dx_{i_1} \ldots dx_{i_k} = a_1(x)\, dx_{i_1} \ldots dx_{i_k} + a_2(x)\, dx_{i_1} \ldots dx_{i_k} \tag{10}$$
$$(a = a_1 + a_2),$$

то преобразование от $\mathbf{x}$ к $\mathbf{u}$ по правилу (8) левой части (10) и преобразование слагаемых правой части (10) находятся в аналогичной связи:

$$a(\mathbf{u}) \sum_{j_1<\ldots<j_k} \frac{D(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})}{D(u_{j_1}, \ldots, u_{j_k})}\, du_{j_1} \ldots du_{j_k} =$$
$$= a_1(\mathbf{u}) \sum_{j_1<\ldots<j_k} \frac{D(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})}{D(u_{j_1}, \ldots, u_{j_k})}\, du_{j_1} \ldots du_{j_k} +$$
$$+ a_2(\mathbf{u}) \sum_{j_1<\ldots<j_k} \frac{D(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})}{D(u_{j_1}, \ldots, u_{j_k})}\, du_{j_1} \ldots du_{j_k}. \tag{11}$$

Далее, если левая часть (10) содержит два равных дифференциала, то все определители, входящие в левую часть (11), равны нулю; если же в левой части (10) поменять местами два дифференциала, то она приобретает знак минус, а ее преобразование тоже приобретает знак минус. Ведь у всех определителей в левой части (11) поменяются местами две разные строки. Это замечание показывает, что правило (8) замены $\mathbf{x}$ на $\mathbf{u}$ приводит к одной и той же дифференциальной форме (по $\mathbf{u}$), независимо от того, в каком (допустимом) виде задана форма $\mathfrak{A}$ (по $\mathbf{x}$).

Заметим, что переход от $\mathbf{x}$ к $\mathbf{u}$, а затем от $\mathbf{u}$ к $\mathbf{u}'=(u_1', \ldots, u_n')$ (по правилу (8)) приводит к тому же результату, что и непосредственный переход от $\mathbf{x}$ к $\mathbf{u}'$. В самом деле, воспользовавшись формой перехода, записанной в четвертом члене (8), будем иметь

$$\mathfrak{A}=\sum a(\mathbf{u}) \sum_{j_1, \ldots, j_k} \frac{\partial x_{i_1}}{\partial u_{j_1}} \ldots \frac{\partial x_{i_k}}{\partial u_{j_k}} du_{j_1} \ldots du_{j_k}=$$

$$=\sum a(\mathbf{u}') \sum_{j_1, \ldots, j_k} \sum_{s_1, \ldots, s_k} \frac{\partial x_{i_1}}{\partial u_{j_1}} \ldots \frac{\partial x_{i_k}}{\partial u_{j_k}} \frac{\partial u_{j_1}}{\partial u_{s_1}'} \ldots \frac{\partial u_{j_k}}{\partial u_{s_k}'} du_{s_1}' \ldots du_{s_k}'=$$

$$=\sum a(\mathbf{u}') \sum_{s_1, \ldots, s_k} \frac{\partial x_{i_1}}{\partial u_{s_1}'} \ldots \frac{\partial x_{i_k}}{\partial u_{s_k}'} du_{s_1}' \ldots du_{s_k}',$$

потому что

$$\frac{\partial x_{i_m}}{\partial u_{s_m}'}=\sum_{j_m=1}^{n} \frac{\partial x_{i_m}}{\partial u_{j_m}} \frac{\partial u_{j_m}}{\partial u_{s_m}'}.$$

Правило (8) инвариантно по отношению к операциям $\mathfrak{A} \pm \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, $d\mathfrak{A}$. Это утверждение, например, в случае $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, надо понимать в том смысле, что произведение преобразований $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ по правилу (8) есть преобразование $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ по этому правилу. Снова, чтобы убедиться в справедливости этого утверждения, применим правило в виде четвертого члена цепи (8), при этом достаточно взять исходные формы в каноническом виде. Имеем (пояснение ниже)

$$\sum_{i_1<\ldots<i_k} a_{i_1, \ldots, i_k}(u) \sum_{\mu_1, \ldots, \mu_k} \frac{\partial x_{i_1}}{\partial u_{\mu_1}} \ldots \frac{\partial x_{i_k}}{\partial u_{\mu_k}} du_{\mu_1} \ldots du_{\mu_k} \times$$

$$\times \sum_{j_1<\ldots<j_s} b_{j_1, \ldots, j_s}(\mathbf{u}) \sum_{\nu_1, \ldots, \nu_s} \frac{\partial x_{j_1}}{\partial u_{\nu_1}} \ldots \frac{\partial x_{j_s}}{\partial u_{\nu_s}} du_{\nu_1} \ldots du_{\nu_s}=$$

$$=\sum_{i_1<\ldots<i_k} \sum_{j_1<\ldots<j_s} a_{i_1, \ldots, i_k}(\mathbf{u}) b_{j_1, \ldots, j_s}(u) \sum_{\mu_1, \ldots, \mu_k} \sum_{\nu_1, \ldots, \nu_s} \frac{\partial x_{i_1}}{\partial u_{\mu_1}} \ldots$$

$$\ldots \frac{\partial x_{i_k}}{\partial u_{\mu_k}} \frac{\partial x_{j_1}}{\partial u_{\nu_1}} \ldots \frac{\partial x_{j_s}}{\partial u_{\nu_s}} du_{\mu_1} \ldots du_{\mu_k} du_{\nu_1} \ldots du_{\nu_s}=$$

$$=\sum_{i_1<\ldots<i_k} \sum_{j_1<\ldots<j_s} a_{i_1, \ldots, i_k}(\mathbf{x}) b_{j_1, \ldots, j_s}(\mathbf{x}) dx_{i_1} \ldots dx_{i_k} dx_{j_1} \ldots dx_{j_s}=\mathfrak{A}\mathfrak{B}.$$

В первом члене цепи написано произведение форм $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ по $\mathbf{u}$, во втором фактически произведено почленное перемножение слагаемых $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ согласно правилу умножения форм (по $\mathbf{u}$). Полученный результат согласно (8) (см. второй член цепи (8)) есть форма

порядка $k+s$ по $\mathbf{u}$, являющаяся преобразованием от $\mathbf{x}$ к $\mathbf{u}$ (по правилу (8)) формы, записанной в предпоследнем члене цепи, т. е. $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$.

Пусть еще

$$\mathfrak{A} = \sum a\, dx_{i_1} \ldots dx_{i_k}, \quad \mathfrak{B} = \sum b\, dx_{j_1} \ldots dx_{j_l}$$

— формы, причем первая порядка k, а порядок второй не имеет значения. Тогда

$$d(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = d\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} + (-1)^k \mathfrak{A}\, d\mathfrak{B}. \tag{12}$$

Действительно,

$$d(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = \sum\sum\sum_j \frac{\partial(ab)}{\partial x_j} dx_j dx_{i_1} \ldots dx_{i_k} dx_{j_1} \ldots dx_{j_l} =$$

$$= \sum\sum\sum_j \frac{\partial a}{\partial x_j} dx_j dx_{i_1} \ldots dx_{i_k} b\, dx_{j_1} \ldots dx_{j_l} +$$

$$+ (-1)^k \sum\sum\sum_j a\, dx_{i_1} \ldots dx_{i_k} \frac{\partial b}{\partial x_j} dx_j dx_{j_1} \ldots dx_{j_l} =$$

$$= d\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} + (-1)^k \mathfrak{A} \cdot d\mathfrak{B}.$$

Теперь уже нетрудно доказать еще один важный факт, заключающийся в том, что введенное выше определение (см. (7)) дифференциала формы $\mathfrak{A}$ инвариантно по отношению к любым переменным $\mathbf{u}(x_i = \psi_i(u_1, \ldots, u_n),\ i = 1, \ldots, n)$. Иначе говоря, преобразование к $\mathbf{u}$ заданной по $\mathbf{x}$ формы $d\mathfrak{A}$ приводит к выражению

$$d\mathfrak{A} = \sum_{j_1} \ldots \sum_{j_k} \sum_{j_l} \frac{\partial}{\partial u_l} \left(a \frac{\partial x_{i_1}}{\partial u_{j_1}} \ldots \frac{\partial x_{i_k}}{\partial u_{j_k}} \right) du_l du_{j_1} \ldots d_{j_k}.$$

При $k = 0$ инвариантность тривиальна:

$$\mathfrak{A} = f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n),$$

$$d\mathfrak{A} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial x_j}{\partial u_s} du_s =$$

$$= \sum_{s=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial u_s} \right) du_s = \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial u_s} du_s.$$

Пусть теперь инвариантность $d\mathfrak{A}$ установлена для $k = 0, 1, \ldots$, докажем ее для $k+1$. Достаточно рассмотреть простейшую форму $(k+1)$-го порядка (пояснения ниже):

$$\mathfrak{A} = a(\mathbf{x})\, dx_{i_1} \ldots dx_{i_{k+1}} = a(\mathbf{x})\, dx_{i_1} \ldots dx_{i_k} \cdot dx_{i_{k+1}}.$$

Согласно формуле (12) ($d^2 = 0$)

$$d\mathfrak{A} = d\left(a(\mathbf{x})\, dx_{i_1} \ldots dx_{i_k}\right) dx_{i_{k+1}} +$$

$$+ (-1)^k a(\mathbf{x})\, dx_{i_1} \ldots dx_{i_k} d\left(dx_{i_{k+1}}\right) = d\left(a(\mathbf{x})\, dx_{i_1} \ldots dx_{i_k}\right) dx_{i_{k+1}},$$

и мы представили $d\mathfrak{A}$ в виде произведения дифференциала формы порядка k на дифференциал формы $(x_{i_{k+1}})$ порядка 0. Оба множителя инвариантны, но произведение любых форм тоже, как мы знаем, инвариантно.

Пусть L_k есть k-мерное ориентированное дифференцируемое многообразие, описываемое функциями $(i=1, \ldots, n)$

$$x_i = f_i(u_1, \ldots, u_k), \qquad (u_1, \ldots, u_k) \in G \rightleftarrows L_k, \tag{13}$$

имеющими равномерно непрерывные частные производные на ограниченном открытом множестве G. Будем предполагать, что $L_k \subset \subset \Omega \subset R_n$, где Ω — область, на которой задана дифференциальная форма $\mathfrak{A}$ порядка k (см. (1), $a(\mathbf{x})$ непрерывны на $\overline{\Omega}$).

Интеграл от формы $\mathfrak{A}$ по L_k определяется как обычный кратный интеграл

$$\int\limits_{L_k} \mathfrak{A} = \sum \int\limits_G a(\mathbf{u}) \frac{D(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})}{D(u_1, \ldots, u_k)} du_1 \ldots du_k, \tag{14}$$

$$a(\mathbf{u}) = a(f_1(\mathbf{u}), \ldots, f_n(\mathbf{u})),$$

который, вообще говоря, придется понимать в лебеговом смысле, а если G измеримо по Жордану, то и в римановом.

Это определение не зависит от выбора допустимых (не меняющих ориентацию L_k) параметров $\mathbf{u}' = (u_1', \ldots, u_k') \in G' \rightleftarrows G$, т. е. связанных с $\mathbf{u}$ непрерывно дифференцируемо в обе стороны и с положительным якобианом $\left(\frac{\partial u_j'}{\partial u_s}\right.$ равномерно непрерывны на $\left.G\right)$, потому что

$$\int\limits_{G'} a(\mathbf{u}') \frac{D(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})}{D(u_1', \ldots, u_k')} du_1' \ldots du_k' =$$

$$= \int\limits_G a(\mathbf{u}) \frac{D(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})}{D(u_1', \ldots, u_k')} \frac{D(u_1', \ldots, u_k')}{D(u_1, \ldots, u_k)} du_1 \ldots du_k =$$

$$= \int\limits_G a(\mathbf{u}) \frac{D(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})}{D(u_1, \ldots, u_k)} du_1 \ldots du_k \tag{15}$$

(см. теорему 1 § 12.16 и в общем случае § 19.3, свойство 22).

Если же якобиан отрицательный, то во втором члене (15), а за ним и в третьем, появится знак минус, поэтому при перемене ориентации L_k интеграл от $\mathfrak{A}$ по L_k меняет знак на противоположный.

Важно еще заметить, что если в $\mathfrak{A}$ произвести замену переменных $\mathbf{x} \rightleftarrows \mathbf{x}'$ при помощи непрерывно дифференцируемого в обе

стороны преобразования, то интеграл $\int\limits_{L_k} \mathfrak{A}$, выраженный в терминах $\mathbf{x}'$, остается инвариантным, т. е. равным правой части (14). В самом деле, в переменных $\mathbf{x}'$ форма $\mathfrak{A}$ имеет вид

$$\mathfrak{A} = \sum a(\mathbf{x}') \sum_{j_1<\ldots<j_k} \frac{D(x_{i_k}, \ldots, x_{i_k})}{D(x'_{j_1}, \ldots, x'_{j_k})} dx'_{j_1} \ldots dx'_{j_k},$$

и интеграл от нее по L_k (в переменных $\mathbf{x}'$) равен

$$\sum \int\limits_G a(\mathbf{u}) \sum_{j_1<\ldots<j_k} \frac{D(x_{i_1}, \ldots, x_{i_1})}{D(x'_{j_1}, \ldots, x'_{j_k})} \frac{D(x'_{j_1}, \ldots, x'_{j_k})}{D(u_1, \ldots, u_k)} du_1 \ldots du_k =$$

$$= \sum \int\limits_G a(\mathbf{u}) \frac{D(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})}{D(u_1, \ldots, u_k)} du_1, \ldots, du_k,$$

т. е. он равен интегралу от $\mathfrak{A}$ в переменных $\mathbf{x}$.

Можно еще рассматривать кусок $\sigma \subset L_k$, описываемый функциями (13), когда параметр $\mathbf{u}$ пробегает измеримое множество $e \subset G$, и интеграл от формы $\mathfrak{A}$ порядка k по σ определить по формуле, аналогичной (14):

$$\int\limits_\sigma \mathfrak{A} = \sum \int\limits_e a(\mathbf{u}) \frac{D(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})}{D(u_1, \ldots, u_k)} du_1, \ldots, du_k. \tag{16}$$

Это определение очевидно тоже инвариантно относительно замены переменных $\mathbf{x} \rightleftarrows \mathbf{x}'$ при помощи непрерывно дифференцируемого в обе стороны преобразования и не зависит от допустимых параметров (см. § 19.3, свойство 22). Естественно назвать σ *ориентированным (согласовано с L_k) измеримым куском L_k*.

Пусть теперь ориентированное многообразие L_k может быть покрыто конечным числом (согласовано с L_k) ориентированных многообразий σ_s:

$$L_k = \sum_{s=1}^{N} \sigma_s,$$

каждое из которых описывается функциями

$$x_i = f_i^s(\mathbf{u}^s), \quad \mathbf{u}^s \in G^s; \qquad i = 1, \ldots, n, \; s = 1, \ldots, N,$$

имеющими равномерно непрерывные частные производные на ограниченной области G^s. Тогда интеграл от формы $\mathfrak{A}$ (порядка k) по L_k можно определить следующим образом: вводим попарно непересекающиеся ориентированные согласованно (с σ_s или, что все равно, с L_k) измеримые куски $\lambda_s \subset \sigma_s$, сумма которых равна $L_k =$

$= \sum_{s=1}^{N} \lambda_s$, и полагаем

$$\int_{L_k} \mathfrak{A} = \sum_{s=1}^{N} \int_{\lambda_s} \mathfrak{A}.$$

Куски λ_s можно определить равенствами

$$\lambda_1 = \sigma_1,\ \lambda_2 = \sigma_2 - \sigma_2\sigma_1,\ \ldots,\ \lambda_N = \sigma_N - \sigma_N\sigma_1 - \ldots - \sigma_N\sigma_{N-1}.$$

Например, ясно, что $\lambda_2 \in \sigma_2$ и $\sigma_1\sigma_2$ есть многообразие, описываемое параметром $\mathbf{u}^2 \subset \omega$, где $\omega \subset G^2$ — открытое множество (см. лемму 4 § 17.1). Но тогда λ_2 описывается параметром $\mathbf{u}^2 \in G^2 - \omega$, где $G^2 - \omega$ — принадлежащее G^2 измеримое множество и λ_2 есть кусок L_k (измеримый и ориентированный согласованно с L_k).

При любом другом указанном представлении

$$L_k = \sum_{j=1}^{M} \lambda_j',\quad \lambda_j'\lambda_i' = 0,\quad j \neq i,$$

$$\sum_{s=1}^{N} \int_{\lambda_s} \mathfrak{A} = \sum_{s=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} \int_{\lambda_s\lambda_j'} \mathfrak{A} = \sum_{j=1}^{M} \int_{\lambda_j'} \mathfrak{A}.$$

Надо учесть, что если куски λ_s и λ_j' пересекаются, то они соответственно принадлежат пересекающимся многообразиям σ_s, σ_j', описываемым параметрами $\mathbf{u}^s \in G^s$, $\mathbf{u}^{j'} \in G^{j'}$. При этом сами куски λ_s, λ_j' описываются через $\mathbf{u}^s \in e^s \subset G^s$, $\mathbf{u}^{j'} \in e^{j'} \subset G^{j'}$, где e^s, $e^{j'}$ измеримы. В силу упомянутой леммы многообразие $\sigma_s\sigma_j'$ описывается параметром $\mathbf{u}^s \in \omega^s$, либо параметром $\mathbf{u}^{j'} \in \omega^{j'}$. Оба параметра находятся во взаимно однозначном непрерывно дифференцируемом (равномерно) в обе стороны соответствии с положительным якобианом (σ^s и $\sigma^{j'}$ ориентированы согласованно!).

Пересечение $e^s\omega^s$ есть измеримое множество точек $\mathbf{u}^s$, переходящее при помощи этого соответствия на измеримое же (см. § 19.3, свойство 22) множество $(e^s\omega^s)'$ точек $\mathbf{u}^{j'}$. Пересечение последнего с $e^{j'}$ есть в свою очередь измеримое множество точек $\mathbf{u}^{j'}$, которому, очевидно, соответствует множество $\lambda_s\lambda^{j'} \subset L_k$. Но тогда $\lambda_s\lambda^{j'}$ есть кусок L_k.

В заключение отметим очевидное равенство

$$\int_{L_k} (\alpha\mathfrak{A} + \beta\mathfrak{B}) = \alpha \int_{L_k} \mathfrak{A} + \beta \int_{L_k} \mathfrak{B},$$

где α, β — числа и $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ — формы порядка k.

Замечание. Отметим, что определенный выше интеграл $\int\limits_{L_k} \mathfrak{A}$ от k-мерной формы $\mathfrak{A}$ по ориентируемому k-мерному многообразию инвариантен по отношению к преобразованию координат $x \rightleftarrows x'$, непрерывно дифференцируемому в обе стороны. Это следует из инвариантности составляющих этот интеграл слагаемых $\int\limits_{\lambda_s} \mathfrak{A}$.

Подчеркнем, что указанное инвариантное свойство интеграла $\int\limits_{L_k} \mathfrak{A}$ есть одно из фундаментальнейших свойств дифференциальных форм.

Пример 1. Интеграл от одномерной формы

$$\mathfrak{A} = P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz$$

в трехмерном пространстве по ориентированному одномерному дифференцируемому многообразию L_1:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t) \quad (0 < t < l),$$

где φ', ψ', χ' непрерывны на $[0, l]$, равен

$$\int\limits_{L_1} \mathfrak{A} = \int\limits_0^l (P(\varphi, \psi, \chi)\,\varphi' + Q(\varphi, \psi, \varkappa)\,\psi' + R(\varphi, \psi, \chi)\,\chi')\,dt =$$

$$= \int\limits_{L_1} (P\,dx + Q\,dy + R\,dz),$$

т. е. есть криволинейный интеграл от вектора $\mathbf{a} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ вдоль ориентированной кривой L_1.

Пример 2. Интеграл от двумерной формы

$$\mathfrak{B} = P(x, y, z)\,dy\,dz + Q(x, y, z)\,dz\,dx + R(x, y, z)\,dx\,dy$$

в трехмерном пространстве по ориентированному двумерному многообразию L_2:

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v), \quad (u, v) \in \omega,$$

где φ, ψ, χ имеют непрерывные на ω частные производные, равен

$$\int\limits_{L_2} \mathfrak{B} = \iint\limits_{\omega} \left[P(\varphi, \psi, \chi)\frac{D(u, z)}{D(u, v)} + Q(\varphi, \psi, \chi)\frac{D(z, x)}{D(u, v)} + \right.$$

$$\left. + R(\varphi, \psi, \chi)\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right] du\,dv = \iint\limits_{L_2} (P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy),$$

т. е. интеграл по поверхности, ориентированной нормалью $\mathbf{n} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$.

Пример 3. Кратный интеграл

$$\int\limits_G f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_{L_3} \mathfrak{B}$$

по трехмерной области G можно трактовать как интеграл от трехмерной формы

$$\mathfrak{B} = f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$$

по трехмерному многообразию $L_3 = G$, ориентированному положительно ($x = x$, $y = y$, $z = z$).

§ 17.4. Формула Стокса

Теорема Стокса. *Пусть L'_{k+1} — $(k+1)$-мерное связное ориентированное многообразие, $L_{k+1} \subset \bar{L}_{k+1} \subset L'_{k+1}$ — его часть, тоже $(k+1)$-мерное многообразие, ограниченное, имеющее край, $\partial L_{k+1} = L_k$ — k-мерное связное многообразие, ориентированное согласованно с L_{k+1} (см. правило согласования § 17.2, (18), (19))*).*

Тогда для произвольной определенной в области $\Omega \subset R_n$ ($\bar{L}_{k+1} \subset \Omega$) k-мерной дифференциальной формы $\mathfrak{A}$ имеет место формула Стокса:

$$\int\limits_{L_{k+1}} d\mathfrak{A} = \int\limits_{\partial L_{k+1}} \mathfrak{A}. \tag{1}$$

Доказательство.

1. Рассмотрим сначала простейший случай, когда ориентированный кусок $\bar{L}_{k+1}$ представляет собой $(k+1)$-мерный куб, определяемый функциями от переменных $x_1, \ldots, x_{k+1}$, записанных в указанном ниже порядке:

$$x_j = x_j,\ 0 \leqslant x_j \leqslant \delta,\ j = 1, \ldots, k+1;\ x_j = 0,\ j = k+2, \ldots, n. \tag{2}$$

Для прямоугольника доказательство аналогично.

Край ∂L_{k+1} состоит из $2(k+1)$ ориентированных кусков:

$$L_k = \sum_{s=1}^{k+1} (L_0^s + L_\delta^s),$$

которые с точностью до ориентации совпадают с кусками, определяемыми функциями

$$\begin{aligned} L_0^{*s} &= \{x_j = x_j,\ 0 \leqslant x_j \leqslant \delta,\ j = 1, \ldots, s-1, s+1, \ldots \\ &\qquad \ldots, k+1;\ x_j = 0,\ j = s, k+2, \ldots, n\}, \\ L_\delta^{*s} &= \{x_j = x_j,\ 0 \leqslant x_j \leqslant \delta,\ j = 1, \ldots, s-1, s+1, \ldots, k+1, \\ &\qquad x_s = \delta,\ x_j = 0,\ j = k+2, \ldots, n\}. \end{aligned} \tag{3}$$

Чтобы выяснить, как связаны между собой ориентации этих кусков, перенумеруем переменные $x_s, x_1, \ldots, x_{s-1}, x_{s+1}, \ldots, x_n$, обозначив их соответственно через $x'_1, \ldots, x'_n$. Якобиан этого преобразования равен $(-1)^{s-1}$. С другой стороны, уравнения (2), где x_j с $j = 1, \ldots, k+1$ произвольны, при $x_s < \delta$ определяют

*) L_{k+1} может быть многосвязным, § 17.2, (20), (21).

точки L_{k+1}, а при $x_s > \delta$ — точки внешности L_{k+1}, поэтому куски L_δ^s и L_δ^{*s} ориентированы одинаково или противоположно в зависимости от того, будет ли $s-1$ четным или нечетным. Рассуждая аналогично, получим, что куски L_0^s и L_0^{*s} ориентированы одинаково при нечетном $s-1$ и противоположно при четном $s-1$.

Достаточно провести рассуждения для простейшей формы

$$\mathfrak{A} = a(\mathbf{x})\, dx_{i_1}, \ldots, dx_{i_k} \quad (1 \leqslant i_s \leqslant n).$$

В силу сказанного, равенство (1), которое нам надо доказать, сводится к следующему равенству между обыкновенными кратными интегралами *):

$$\int\limits_{\Delta} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial a}{\partial x_j}\right)_0 \frac{D(x_j, x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})}{D(x_1, \ldots, x_{k+1})} dx_1, \ldots, dx_{k+1} =$$

$$= \sum_{s=1}^{k+1} (-1)^{s+1} \left(\int\limits_{L_\delta^{*s}} a_0 \frac{D(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})}{D(x_1, \ldots, x_{s-1}, x_{s+1}, \ldots, x_{k+1})} dx_1 \ldots \right.$$

$$\ldots dx_{s-1} dx_{s+1} \ldots dx_{k+1} -$$

$$- \int\limits_{L_0^{*s}} a_0(\mathbf{x}) \frac{D(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})}{D(x_1, \ldots, x_{s-1}, x_{s+1}, \ldots, x_{k+1})} dx_1 \ldots dx_{s-1} \times$$

$$\left. \times dx_{s+1} \ldots dx_{k+1} \right), \qquad (4)$$

где

$$a_0 = a(x_1, \ldots, x_{k+1}, 0, \ldots, 0), \quad \left(\frac{\partial a}{\partial x_j}\right)_0 = \frac{\partial a}{\partial x_j}(x_1, \ldots, x_{k+1}, 0, \ldots, 0)$$

и $\Delta = \{0 \leqslant x_j \leqslant \delta;\ j = 1, \ldots, k+1\}$ — куб в пространстве $(x_1, \ldots, x_{k+1})$. Совершенно очевидно, что формула (4) верна в следующих случаях:

1) если для некоторой пары (m, l), $m \neq l$ имеет место $i_m = i_l$, потому что тогда все якобианы, входящие в (4), равны нулю,

2) если $i_m > k+1$ хотя бы для одного m, потому что тогда $x_{i_m} \equiv 0$ или $x_{i_m} = \delta$ (см. (2) и (3)).

---

*) Интегралы $\int\limits_{L_\delta^{*s}}$, $\int\limits_{L_0^{*s}}$ сводятся (см. § 17.3, (14)) к кратным интегралам по проекции L_0^{*s} на плоскость $x_1, \ldots, x_{s-1}, x_{s+1}, \ldots, x_{k+1}$, полагая, таким образом, в a_0 $x_s = \delta$, соответственно $x_s = 0$.

Поэтому надо доказать (4) при разных индексах i_m, удовлетворяющих неравенствам $1 \leqslant i_m \leqslant k+1$. Далее, равенство (4) не изменится, если в нем эти индексы переставить местами, расположив в скалярном порядке, ведь тогда все три якобиана в (4) либо не изменят свою величину одновременно, либо одновременно переменят знак. Поэтому достаточно (4) доказать, например, для такого расположения индексов i_s: $1, 2, \ldots, l-1, l+1, \ldots, k+1$. В этом случае все слагаемые суммы слева в (4), соответствующие индексам $j \neq l$, равны нулю, потому что для них якобиан слева равен нулю, и потому левая часть (4) еще более упрощается:

$$\int\limits_{L_{k+1}} d\mathfrak{A} = (-1)^{l-1} \int\limits_{\Delta} \left(\frac{\partial a}{\partial x_l}\right)_0 dx_1 \ldots dx_{k+1} =$$

$$= (-1)^{l-1} \int\limits_0^\delta \ldots \int\limits_0^\delta \left(\frac{\partial a}{\partial x_l}\right)_0 dx_1 \ldots dx_{k+1} =$$

$$= (-1)^{l-1} \int\limits_0^\delta \ldots \int\limits_0^\delta [a(x_1, \ldots, x_{l-1}, \delta, x_{l+1}, \ldots, x_{k+1}, 0, \ldots, 0) -$$

$$- a(x_1, \ldots, x_{l-1}, 0, x_{l+1}, \ldots, x_{k+1}, 0, \ldots, 0)]\, dx_1 \ldots$$

$$\ldots dx_{l-1} dx_{l+1} \ldots dx_{k+1} = \int\limits_{L_\delta^l} \mathfrak{A} + \int\limits_{L_0^l} \mathfrak{A} = \int\limits_{L_k} \mathfrak{A}, \qquad (5)$$

где последнее равенство верно, потому что при $j \neq l$

$$\int\limits_{L_0^j} \mathfrak{A} = \int\limits_{L_0^j} a\, dx_1 \ldots dx_{l-1} dx_{l+1} \ldots dx_{k+1} =$$

$$= \int\limits_0^\delta \ldots \int\limits_0^\delta a \frac{D(x_1, \ldots, x_{l-1}, x_{l+1}, \ldots, x_{k+1})}{D(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_{k+1})} dx_1 \ldots dx_{j-1} dx_{j+1} \ldots dx_{k+1} = 0$$

и аналогично $\int\limits_{L_\delta^j} \mathfrak{A} = 0$. Ведь в якобиан правой части входит столбец $\frac{\partial x_j}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial x_j}{\partial x_{j-1}}, \frac{\partial x_j}{\partial x_{j+1}}, \ldots, \frac{\partial x_j}{\partial x_{k+1}}$, элементы которого равны нулю.

2. Будем непрерывно дифференцируемые функции и непрерывно дифференцируемые в обе стороны отображения называть просто функциями, соответственно — отображениями.

а) Пусть точка $\mathbf{x}^0 \in L_{k+1}$. Тогда после соответствующей перенумерации координат можно определить прямоугольник

$$\Lambda = \{|x_j - x_j^0| < \delta,\ j = 1, \ldots, k+1;\ |x_j - x_j^0| < \sigma,\ j = k+2, \ldots, n\}$$

и функции $x_j = f_j(x^{k+1})$, $j = k+2, \ldots, n$, $\mathbf{x}^{k+1} = (x_1, \ldots, x_{k+1}) \in \Delta^{(k+1)} = \{|x_j - x_j^0| < \delta,\ j = 1, \ldots, k+1\}$, описывающие кусок $L_{k+1}\Delta$. Таким образом, $|x_j - f_j(x^{k+1})| < \sigma$, а если δ уменьшить, то заведомо

$$|x_j^0 - f_j(\mathbf{x}^{k+1})| < \sigma,\ \mathbf{x}^{k+1} \in \overline{\Delta^{(k+1)}},\quad j = k+2, \ldots, n.$$

Левые части последних неравенств в силу замкнутости и ограниченности $\overline{\Delta^{(k+1)}}$ на самом деле не превышают некоторого положительного числа $\sigma_1 < \sigma$ и потому, если $\lambda = \sigma - \sigma_1$, то точки $\mathbf{x}$ вида

$$x_j = x_j,\ j = 1, \ldots, k+1;\ x_j = z_j + f_j(\mathbf{x}^{k+1}), \tag{6}$$

$$\mathbf{x}^{k+1} \in \Delta^{(k+1)},\ |z_j| < \lambda,\ j = k+2, \ldots, n, \tag{6'}$$

образуют множество $\Lambda \subset \Delta$. При помощи (6) открытый прямоугольник (6′), обозначаемый нами через Λ', отображается на Λ, а $\overline{\Lambda'}$ — на $\overline{\Lambda}$. При этом, принадлежащий Λ' $(k+1)$-мерный прямоугольник $\Delta^{(k+1)}$ $(z_j = 0)$ отображается на $L_{k+1}\Delta = L_{k+1}\Lambda$, а $\overline{\Delta^{(k+1)}}$ — на $\overline{L_{k+1}\Lambda}$. Замена переменных $x_j - x_j^0 = \delta u_j$, $j = 1, \ldots, k+1$; $z_j = \lambda u_j$, $j = k+1, \ldots, n$ отображает Λ' на единичный куб точек $\mathbf{u}$. Отметим еще, что перенумерация координат сводится к отображению $x_j' = x_{s_j}$ $(j = 1, \ldots, n;\ 1 \leqslant s_j \leqslant n)$.

б) Пусть теперь $\mathbf{x}^0 \in L_k$. Тогда выполняется теорема 1 § 17.2, где надо считать $\Gamma = L_k$, $S = L_{k+1}$. Рассуждая, как выше, если число δ_2 в § 17.2, (1) уменьшить и соответственно подобрать δ_1 (меньшее чем было), то получим прямоугольник, обозначаемый снова через Δ, со следующим свойством. Существуют числа λ, $\mu > 0$ такие, что множество Λ точек $\mathbf{x}$ вида

$$x_j = x_j,\ j = 1, \ldots, k;\ \mathbf{x}^k \in \Delta^{(k)},$$

$$x_{k+1} = v + \varphi(\mathbf{x}^k),\ |v| < \lambda, \tag{7}$$

$$x_j = z_j + f_j(x_1, \ldots, x_k, v + \varphi(\mathbf{x}^k)),\ |z_j| < \mu,\ j = k+2, \ldots, n,$$

принадлежит Δ.

При помощи уравнений (7) прямоугольник $\Lambda'(\mathbf{x}^k \in \Delta^{(k)},\ |v| < \lambda,\ |z_j| < \mu)$ пространства $(x_1, \ldots, x_k, v, z_{k+1}, \ldots, z_n)$ отображается на область Λ, а $\overline{\Lambda'}$ — на $\overline{\Lambda}$ непрерывно дифференцируемо в обе стороны. При этом один из прямоугольников $(\mathbf{x}^k \in \Delta^{(k)},\ 0 < v < \lambda)$, $(\mathbf{x}^k \in \Delta^{(k)},\ -\lambda < v < 0)$ переходит на $L_{k+1}\Delta = L_{k+1}\Lambda$ (см. § 17.2, (11), (12)). Его можно простым преобразованием отобразить на куб.

Из а) и б) следует, что произвольную точку $\mathbf{x}^0 \in \overline{L_{k+1}}$ можно покрыть областью $G_{x^0} = \Lambda$, которая отображается на некоторую область Λ' другого n-мерного пространства R_n', а ее замыкание

$\overline{\Lambda}$ — на $\overline{\Lambda'}$, и так, что $\overline{L_{k+1}\Lambda}$ отображается на некоторый $(k+1)$-мерный куб $\overline{\omega} \in R'_n$. Но тогда (см. замечание в конце § 17.3) для куска $L_{k+1}\Lambda$ верна теорема Стокса

$$\int\limits_{L_{k+1}\Lambda} d\mathfrak{A} = \int\limits_{\partial(L_{k+1}\Lambda)} \mathfrak{A},$$

потому что она верна для куба.

Заметим, что в рассматриваемых случаях край L_k многообразия L_{k+1} представляет собой не многообразие, а замыкание суммы конечного числа не пересекающихся попарно соответственно ориентированных многообразий, и интеграл $\int\limits_{L_k} \mathfrak{A}$ естественным образом определяется как сумма интегралов от $\mathfrak{A}$ по этим многообразиям. Это замечание надо иметь в виду и в дальнейшем.

Так как $\overline{L}_{k+1}$ — ограниченное замкнутое множество, то существует его конечное покрытие $G_1, \ldots, G_N$ указанными множествами G_{x^0}. В силу леммы о разбиении единицы (см. далее § 18.4) существует система бесконечно дифференцируемых финитных функций $\varphi_1(\mathbf{x}), \ldots, \varphi_N(\mathbf{x})$, обладающих следующими свойствами:

1) $0 \leqslant \varphi_j(\mathbf{x}) \leqslant 1$,

2) носитель φ_j есть (замкнутое) множество, принадлежащее (открытому) G_j,

3) $\sum\limits_1^N \varphi_j(x) = 1$ на $\overline{L}_{k+1}$.

Но тогда (пояснения ниже)

$$\int\limits_{L_{k+1}} d\mathfrak{A} = \int\limits_{L_{k+1}} d\left(\sum_1^N \varphi_j\mathfrak{A}\right) = \sum_1^N \int\limits_{L_{k+1}} d(\varphi_j\mathfrak{A}) = \sum_1^N \int\limits_{L_{k+1}G_j} d(\varphi_j\mathfrak{A}) =$$

$$= \sum_1^N \int\limits_{\partial(L_{k+1}G_j)} \varphi_j\mathfrak{A} = \sum_1^N \int\limits_{L_kG_j} \varphi_j\mathfrak{A} = \sum_1^N \int\limits_{L_k} \varphi_j\mathfrak{A} = \int\limits_{L_k} \sum_1^N \varphi_j\mathfrak{A} = \int\limits_{L_k} \mathfrak{A}.$$

В первом равенстве этой цепи мы воспользовались свойством 3), второе равенство очевидно, третье верно, потому что форма $\varphi_j\mathfrak{A}$, а вместе с ней и $d(\varphi_j\mathfrak{A})$ равна нулю вне G_j, четвертое верно в силу уже доказанной для элементарных кусков $L_{k+1}G_j$ теоремы Стокса, пятое верно, потому что там, где множество $\partial(L_{k+1}G_j)$ не пересекается с L_k, форма $\varphi_j\mathfrak{A}$ равна нулю, предпредпоследнее верно, потому что форма $\varphi_j\mathfrak{A}$ равна нулю вне G_i, предпоследнее очевидно, а последнее верно в силу 3).

Примеры. Из общей теоремы Стокса (1) как частные случаи вытекают следующие формулы (пояснения ниже):

$$\iint\limits_{L_2}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=\int\limits_{\partial L_2}(P\,dx+Q\,dy), \tag{8}$$

$$\iiint\limits_{L_3}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz=\iint\limits_{\partial L_3}(P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy), \tag{9}$$

$$\iint\limits_{L_2}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy\,dz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dz\,dx+$$
$$+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy\Bigg]=\int\limits_{\partial L_2}(P\,dx+Q\,dy+R\,dz). \tag{10}$$

Здесь L_2 — двумерное ограниченное многообразие в (8) плоское, а в (10) в пространстве x, y, z, L_3 — трехмерное ограниченное многообразие в трехмерном пространстве x, y, z, L_2 и ∂L_2, а также L_3 и ∂L_3 подчиняются условиям теоремы 2 § 17.2 или более общим условиям (см. § 17.2, (20), (21)), разрешающим L_2 и L_3 быть многосвязными. Справедливость равенств (8), (9), (10) следует из общей теоремы Стокса и того факта, что подынтегральная форма в левой части одного из этих равенств есть дифференциал от подынтегральной формы соответствующей правой части, например,

$$d(P\,dx+Q\,dy)=$$
$$=\left(\frac{\partial P}{\partial x}dx+\frac{\partial P}{\partial y}dy\right)dx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}dx+\frac{\partial Q}{\partial y}dy\right)dy=$$
$$=\frac{\partial P}{\partial y}dy\,dx+\frac{\partial Q}{\partial x}dx\,dy=\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy.$$

С другой стороны, слева в (8) стоит обычный интеграл по ориентированной области L_2, а справа — обычный криволинейный интеграл по контуру ∂L_2, согласованно ориентированному с L_2 (см. § 17.3, примеры), и мы получили известную формулу Грина. Подобные рассуждения показывают, что (9) есть формула Гаусса — Остроградского для области L_3 с гладкой согласованно ориентированной границей, а (10) — обычная формула Стокса для гладкого ориентированного куска поверхности L_2 в трехмерном пространстве.

Заметим, что при элементарном выводе в §§ 13.5, 13.10, 13.11 формул Грина, Гаусса — Остроградского и Стокса предполагалось, что соответствующие области или поверхность могут быть разрезаны на куски специального вида. В данном выводе этого не требуется, так что в этом смысле полученные здесь результаты являются более общими, чем те, которые были получены там.

Теорему Стокса можно распространить на многообразие $L_{k+1}\subset\overline{L}_{k+1}\subset\subset L'_{k+1}$, замыкание которого может быть разрезано гладкими поверхностями на конечное число кусков, каждый из которых можно рассматривать как деформированный посредством непрерывно дифференцируемого в обе стороны преобразования куб. Ориентации их должны быть согласованы, как объяснено в § 13.7 для частного случая кусочно гладкой поверхности.

Мы считали P, Q, R непрерывно дифференцируемыми функциями на соответствующей области, содержащей L_2 или L_3.

Глава 18

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

§ 18.1. Обобщенное неравенство Минковского

Если E — линейное нормированное пространство и $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots$ — его элементы, то имеет место неравенство

$$\left\| \sum_{k=1}^{N} \mathbf{x}^k \right\| \leqslant \sum_{k=1}^{N} \| \mathbf{x}^k \|, \tag{1}$$

получаемое по индукции при любом натуральном N из основного неравенства $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leqslant \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$, $(\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E)$. Далее, если $\mathbf{x}$ есть сумма ряда

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^1 + \mathbf{x}^2 + \ldots = \sum_{1}^{\infty} \mathbf{x}^k,$$

т. е. если $\left\| \mathbf{x} - \sum_{1}^{N} \mathbf{x}^k \right\| \to 0 \quad (N \to \infty)$, то (см. § 6.3)

$$\| \mathbf{x} \| = \lim_{N \to \infty} \left\| \sum_{1}^{N} \mathbf{x}^k \right\| \leqslant \lim_{N \to \infty} \sum_{1}^{N} \| \mathbf{x}^k \| = \sum_{1}^{\infty} \| \mathbf{x}^k \|,$$

$$\| \mathbf{x} \| \leqslant \| \mathbf{x}' \| + \| \mathbf{x}^2 \| + \ldots, \tag{2}$$

где ряд справа может и расходиться.

Применяя (1), (2) к элементам пространств l_p и L'_p (или L_p), получим неравенства (Минковского):

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \left| \sum_{l=1}^{m} a_{kl} \right|^p \right)^{1/p} \leqslant \sum_{l=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{\infty} | a_{kl} |^p \right)^{1/p}, \tag{3}$$

$$\left(\int_{\Omega} \left| \sum_{l=1}^{m} f_l(\mathbf{x}) \right|^p d\mathbf{x} \right)^{1/p} \leqslant \sum_{l=1}^{m} \left(\int_{\Omega} | f_l(\mathbf{x}) |^p dx \right)^{1/p} \tag{4}$$

$$(1 \leqslant p \leqslant \infty),$$

где можно считать $m = \infty$, и тогда под суммами $\sum_{l=1}^{\infty} a_{kl} = a_k$ надо понимать такие числа a_k, что $\sum_{1}^{\infty} \left| a_k - \sum_{l=1}^{m} a_{kl} \right|^p \to 0 \quad (m \to \infty)$, так же как под суммой $\sum_{l=1}^{\infty} f_l(\mathbf{x})$ надо понимать функцию $F(\mathbf{x}) \in L'_p(L_p)$,

к которой стремится при $m \to \infty$ конечная сумма $\sum_{l=1}^{m} f_l(\mathbf{x})$ в метрике L_p: $\int_\Omega \left| F(\mathbf{x}) - \sum_{l=1}^{m} f_l(\mathbf{x}) \right|^p dx \to 0 \quad (m \to \infty)$.

В неравенстве (4) суммирование $f_l(\mathbf{x})$ происходит по дискретному индексу $l = 1, 2, 3, \ldots$ Аналогом его является обобщенное неравенство Минковского

$$\left(\int_G \left(\int_\Omega |F(\mathbf{x}, \mathbf{y})|\, d\mathbf{y}\right)^p d\mathbf{x}\right)^{1/p} \leqslant \int_\Omega \left(\int_G |F(\mathbf{x}, \mathbf{y})|^p d\mathbf{x}\right)^{1/p} d\mathbf{y} \tag{5}$$

$$(\Omega \subset R_n,\ G \subset R_m)$$

или, что все равно (если считать, что $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ вне $\Omega \times G$), неравенство

$$\left(\int_{R_m} \left(\int_{R_n} |F(\mathbf{x}, \mathbf{y})|\, d\mathbf{y}\right)^p d\mathbf{x}\right)^{1/p} \leqslant \int_{R_n} \left(\int_{R_m} |F(\mathbf{x}, \mathbf{y})|^p d\mathbf{x}\right)^{1/p} d\mathbf{y}. \tag{6}$$

В обобщенном неравенстве Минковского роль индекса l (в (4)) играет непрерывный параметр $\mathbf{y}$, по которому и происходит суммирование (интегрирование).

В самом общем виде неравенство (6) имеет место, когда интегралы понимаются в лебеговом смысле, и тогда, если имеет смысл правая часть (6), то и левая имеет смысл, и выполняется само неравенство.

Ограничимся для простоты случаем функции $F(x, y)$ от двух (скалярных) переменных x, y. Не нарушая общности, можно считать, что $F(x, y) \geqslant 0$. Будем пока считать, что $F(x, y)$ есть ограниченная, определенная на квадрате $\Delta_N = \{|x|, |y| \leqslant N\}$ функция, интегрируемая по Лебегу или Риману на Δ_N.

Тогда $\left(\text{пояснения ниже, } \int_{-N}^{N} = \int\right)$

$$\begin{aligned}
\int \left(\int F(x, y)\, dy\right)^p dx &= \int \left(\int F(x, y)\, dy\right)^{p-1} \int F(x, y)\, dy\, dx = \\
&= \int \int \left(\int F(x, y)\, dy\right)^{p-1} F(x, y)\, dy\, dx = \\
&= \int \left[\int \left(\int F(x, y)\, dy\right)^{p-1} F(x, y)\, dx\right] dy \leqslant \\
&\leqslant \int \left(\int \left(\int F(x, y)\, dy\right)^p dx\right)^{(p-1)/p} \left(\int F(x, y)^p dx\right)^{1/p} dy = \\
&= \left(\int \left(\int F(x, y)\, dy\right)^p dx\right)^{(p-1)/p} \int \left(\int F(x, y)^p dx\right)^{1/p} dy,
\end{aligned} \tag{7}$$

откуда получим требуемое неравенство

$$\left(\int \left(\int F(x, y)\, dy\right)^p dx\right)^{1/p} \leqslant \int \left(\int F(x, y)^p dx\right)^{1/p} dy. \tag{8}$$

Во втором равенстве (7) интеграл $\left(\int F\,dy\right)^{p-1}$, не зависящий от y, внесен под знак интеграла $\int F(x, y)\,dy$. В третьем произведена замена порядка интегрирования. При интегрировании по Лебегу неотрицательных (измеримых) функций это законно (см. § 19.3, свойство 19, теорема Фубини). Если F интегрируема на Δ_N по Риману, то это тоже законно, потому что тогда интеграл *) $\int F(x, y)\,dy$ есть интегрируемая функция по x на $[-N, N]$, а вместе с ней интегрируема на $[-N, N]$, следовательно, на Δ_N, $(p-1)$-я степень ее модуля, которая умножается на $F(x, y)$ — интегрируемую на Δ_N функцию. Таким образом, в третьем члене (7) под знаком $\int\int$ стоит интегрируемая по Риману функция, и можно менять порядок интегрирования. В четвертом соотношении (неравенстве) в (7) применяется неравенство Гёльдера по x.

В дальнейшем будем рассуждать в терминах интеграла Лебега. Пусть задана произвольная измеримая неотрицательная функция $F(x, y)$, вообще говоря, неограниченная, для которой имеет смысл конечный интеграл справа в (8). Положим

$$F_N(x, y) = \begin{cases} F(x, y), & \text{если } (x, y) \in \Delta_N \text{ и } F \leqslant N, \\ 0 & \text{для остальных } (x, y). \end{cases}$$

Функция F_N — неотрицательная, ограниченная, измеримая, не равная нулю разве что на Δ_N. Для нее при любом N уже доказана справедливость неравенства

$$\left(\int\left(\int F_N(x, y)\,dy\right)^p dx\right)^{1/p} \leqslant \int\left(\int [F_N(x, y)]^p\,dx\right)^{1/p} dy,$$

из которого в силу монотонности стремления (см. § 19.3, свойство 14)

$$F_N(x, y) \to F(x, y) \quad (N \to \infty,\ F_N \leqslant F)$$

следует, как это доказывается в лебеговой теории, справедливость (8).

§ 18.2. Усреднение функции по Соболеву **)

Обозначим через

$$\sigma_\varepsilon = \{|x| \leqslant \varepsilon\}, \quad \sigma_1 = \sigma$$

шар в $R_n = R$ с центром в нулевой точке.

Пусть $\psi(t)$ есть бесконечно дифференцируемая четная неотрицательная функция от одной переменной t $(-\infty < t < \infty)$, равная

---

*) Либо, например, нижний интеграл (см. теорему 1 § 12.12).

**) С. Л. Соболев (род. в 1908 г.) — выдающийся советский математик, академик.

нулю для $|t| \geqslant 1$, такая, что n-кратный интеграл

$$\int \psi(|\mathbf{x}|)\,d\mathbf{x} = \int\limits_{|x|\leqslant 1} \psi(|\mathbf{x}|)\,d\mathbf{x} = 1, \tag{1}$$

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n),\ |\mathbf{x}|^2 = \sum_1^n x_j^2, \quad \int = \int\limits_R$$

В качестве ψ можно взять функцию

$$\psi(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda_n} e^{1/(t^2-1)}, & 0 \leqslant |t| < 1, \\ 0, & |t| \geqslant 1 \end{cases}$$

(см. § 16.6, упражнение 2), где константа λ_n подобрана так, чтобы выполнялось условие (1).

Функция (бесконечно дифференцируемая на R)

$$\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\varphi\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right), \quad \varphi(\mathbf{x}) = \psi(|\mathbf{x}|), \quad \varepsilon > 0, \tag{2}$$

имеет носитель на σ_ε и удовлетворяет условию

$$\int \varphi_\varepsilon(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \frac{1}{\varepsilon^n}\int \varphi\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right)d\mathbf{x} = \int \varphi(\mathbf{u})\,d\mathbf{u} = \int \psi(|\mathbf{u}|)\,d\mathbf{u} = 1. \tag{3}$$

Пусть $\Omega \subset R$ — открытое множество и $f \in L_p(\Omega)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$*). Положим $f = 0$ на $R - \Omega$. Функция

$$f_\varepsilon(\mathbf{x}) = f_{\Omega,\varepsilon} = \int \varphi_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{u}) f(\mathbf{u})\,d\mathbf{u} = \int \varphi_\varepsilon(\mathbf{u}) f(\mathbf{x} - \mathbf{u})\,d\mathbf{u} \tag{4}$$

называется *ε-усреднением f по Соболеву*. В силу финитности φ вычисление интегралов (3) и (4) сводится к интегрированию по n-мерным шарам. Например, первый интеграл в (4) достаточно распространить на шар $|\mathbf{x} - \mathbf{u}| \leqslant \varepsilon$, а второй — на шар $|\mathbf{u}| \leqslant \varepsilon$.

Остановимся на свойствах f_ε. Условимся в обозначении

$$\|\cdot\|_p = \|\cdot\|_{L_p(R)}, \qquad 1 \leqslant p \leqslant \infty.$$

1) *Если $f \in L_p(R)$, $1 \leqslant p < \infty$, то*

$$\|f_\varepsilon - f\|_p \to 0, \quad \varepsilon \to 0. \tag{5}$$

Доказательство.

$$f_\varepsilon(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\varepsilon^n}\int \varphi\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{u}}{\varepsilon}\right)[f(\mathbf{u}) - f(\mathbf{x})]\,d\mathbf{u} =$$

$$= \int \varphi(\mathbf{v})\,[f(\mathbf{x} - \varepsilon\mathbf{v}) - f(\mathbf{x})]\,d\mathbf{v},$$

---

*) $L_\infty(\Omega)$ есть множество измеримых на Ω функций с нормой $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in\Omega} |f(x)|$ или $\|f\|_\infty = \operatorname{sup\,vrai}\limits_{x\in\Omega} |f(x)|$ (см. сноску на стр. 328 § 18.3).

откуда, применив обобщенное неравенство Минковского и учитывая, что $\varphi \geqslant 0$ и имеет место (3), получим

$$\|f_\varepsilon - f\|_p \leqslant \int \varphi(v) \|f(\mathbf{x} - \varepsilon v) - f(\mathbf{x})\|_p \, d\mathbf{v} \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{|v| \leqslant \varepsilon} \|f(\mathbf{x} - \mathbf{v}) - f(\mathbf{x})\|_p \to 0, \quad \varepsilon \to 0. \qquad (6)$$

В случае $p = \infty$ свойство 1) не выполняется. Однако, если считать, что $\Omega = R$ и $f(\mathbf{x})$ равномерно непрерывна на R, то (6) запишется в виде

$$\|f_\varepsilon - f\|_\infty \leqslant \sup_{|v| < \varepsilon} |f(\mathbf{x} - \mathbf{v}) - f(\mathbf{x})| \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

2) *Если* $f \in L_p(R)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, *то*

$$\|f_\varepsilon\|_p \leqslant \int \varphi_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{u}) \|f\|_p \, d\mathbf{u} = \|f\|_p. \qquad (7)$$

3) *Если* f — *локально интегрируемая на* R *функция, т. е.* $f \in L(V)$ *для любого шара* $V \subset R$, *то* f_ε — *бесконечно дифференцируемая функция на* R *и для любого целочисленного неотрицательного вектора* $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_n)$

$$f_\varepsilon^{(s)}(\mathbf{x}) = \int \varphi_\varepsilon^{(s)}(\mathbf{x} - \mathbf{u}) f(\mathbf{u}) \, d\mathbf{u}.$$

Доказательство. Если f — непрерывная финитная (в R) функция, то это утверждение непосредственно следует из классических теорем о непрерывности интеграла по параметру и дифференцируемости под знаком интеграла. Надо учесть, что $\varphi_\varepsilon(x - u)$ — бесконечно дифференцируемая финитная по u функция.

Пусть теперь f локально интегрируема и $V \subset \overline{V} \subset V_1$ — два произвольных концентрических открытых шара. Будем считать, что радиус V_1 больше радиуса V на $\delta > 0$. Тогда при $\varepsilon < \delta$

$$f_\varepsilon(\mathbf{x}) = \int_{V_1} \varphi_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{u}) f(\mathbf{u}) \, d\mathbf{u}.$$

Положим

$$\psi_\varepsilon(x) = \int_{V_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \varphi_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{u}) f(\mathbf{u}) \, d\mathbf{u}.$$

Так как $f \in L(V_1)$, то существует (см. свойство 18 § 19.3, где $\psi \in L'$; для L' — теорему 1, § 14.4) последовательность непрерывных финитных в V_1 функций f_k такая, что

$$\|f_k - f\|_{L(V_1)} \to 0, \quad k \to \infty.$$

Имеем

$$f_{k\varepsilon}(\mathbf{x}) = \int\limits_{V_1} \varphi_\varepsilon(\mathbf{x}-\mathbf{u}) f_k(\mathbf{u})\, d\mathbf{u}, \quad \frac{\partial}{\partial x_1} f_{k\varepsilon}(\mathbf{x}) = \int\limits_{V_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \varphi_\varepsilon(x-\mathbf{u}) f_k(\mathbf{u}) d\mathbf{u}.$$

Далее, только для $\mathbf{x} \in V$

$$|f_\varepsilon(\mathbf{x}) - f_{k\varepsilon}(\mathbf{x})| = \left| \int\limits_{V_1} \varphi_\varepsilon(\mathbf{x}-\mathbf{u}) [f(\mathbf{u}) - f_k(\mathbf{u})]\, d\mathbf{u} \right| \leqslant$$

$$\leqslant M_\varepsilon \|f - f_k\|_{L(V_1)} \to 0, \quad k \to \infty, \qquad (8)$$

$$\left| \psi_\varepsilon(\mathbf{x}) - \frac{\partial}{\partial x_1} f_{k\varepsilon}(\mathbf{x}) \right| \leqslant M'_k \|f - f_k\|_{L(V_1)} \to 0, \quad k \to \infty,$$

$$M_\varepsilon = \max_{\mathbf{u}} \varphi_\varepsilon(\mathbf{x}-\mathbf{u}) = \max_{\mathbf{u}} \varphi_\varepsilon(\mathbf{u}), \quad M'_\varepsilon = \max_{\mathbf{x}} \left| \frac{\partial}{\partial x_1} \varphi_\varepsilon(\mathbf{x}) \right|.$$

Из (8) следует, что функции $f_{k\varepsilon}(\mathbf{x})$ и $\frac{\partial}{\partial x_1} f_{k\varepsilon}(\mathbf{x})$ при $k \to \infty$ равномерно на V стремятся соответственно к f_ε и ψ_ε. Но тогда на основании классической теории f_ε и ψ_ε непрерывны и $\psi_\varepsilon = \frac{\partial}{\partial x_1} f_\varepsilon$ на V, следовательно, в силу произвольности V, и на R (см. теорему 3, § 11.8 сформулированную на языке последовательностей). Этим свойство 3) доказано для $\mathbf{s} = (1, 0, \ldots, 0)$. Общий случай доказывается по индукции.

4) *Если $f \in L_p(\Omega)$ $(1 \leqslant p < \infty)$, то существует последовательность бесконечно дифференцируемых финитных в Ω функций ψ_k, для которых*

$$\|f - \psi_k\|_p \to 0, \quad k \to \infty,$$

$$|\psi_k(\mathbf{x})| \leqslant \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} |f(\mathbf{x})|.$$

Доказательство. Зададим $\eta > 0$ и подберем открытое ограниченное множество $g \subset \bar{g} \subset \Omega$ такое, чтобы

$$\|f\|_{L_p(\Omega - g)} < \frac{\eta}{2}.$$

Обозначим через d расстояние от g до границы Ω ($d > 0$; если $\Omega = R_n$, то $d = \infty$). Введем еще функцию

$$f_g(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in g, \\ 0, & \mathbf{x} \notin g, \end{cases}$$

ее ε-усреднение $f_{g,\varepsilon} = \psi$ при $\varepsilon < d$ есть бесконечно дифференцируемая финитная в Ω функция, для которой

$$\|f - f_{g,\varepsilon}\|_{L_p(\Omega)} \leqslant \|f - f_g\|_{L_p(\Omega)} + \|f_g - f_{g,\varepsilon}\|_{L_p(\Omega)} =$$

$$= \|f\|_{L_p(\Omega - g)} + \|f_g - f_{g,\varepsilon}\|_{L_p(\Omega)} < \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{2} = \eta,$$

если только ε достаточно мало.

Далее (см. (7))

$$|f_{g,\varepsilon}(\mathbf{x})| \leqslant \sup_{\mathbf{x}\in R} |f_g(\mathbf{x})| \leqslant \sup_{\mathbf{x}\in R} |f(\mathbf{x})|.$$

Поэтому, если $\eta = \eta_k \to 0$, то, считая $\varepsilon = \varepsilon_k$, $g = g_k$, мы получим, что функции $\psi_k = f_{g_k,\varepsilon_k}$ удовлетворяют требования теоремы.

Свойство 4) усиливает теоремы 3, 4 из § 14.4. Первое его утверждение выражает, что множество *бесконечно дифференцируемых финитных в Ω функций плотно в $L_p(\Omega)$* $(1 \leqslant p < \infty)$.

5) *Неубывающую на $[a, b]$ функцию $f(x)$ можно приблизить с любой степенью точности в метрике $L_p(a, b)$ неубывающей же бесконечно дифференцируемой функцией (вообще говоря, не финитной).*

В самом деле, продолжим $f(x)$ на всю действительную ось, положив

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a - \varepsilon, b + \varepsilon < x, \\ f(a), & a - \varepsilon \leqslant x < a, \\ f(b), & b < x \leqslant b + \varepsilon. \end{cases}$$

Тогда ε-усреднение $f_\varepsilon(x)$ для $x \in [a, b]$ есть функция неубывающая. Ведь для $a \leqslant x < x_1 \leqslant b$, если учесть четность и неотрицательность $\varphi_\varepsilon(u)$, имеет место

$$f_\varepsilon(x) = \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \varphi_\varepsilon(u - x) f(u)\, du = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \varphi_\varepsilon(t) f(x + t)\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \varphi_\varepsilon(t) f(x_1 + t)\, dt = f_\varepsilon(x_1),$$

потому что при $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ выполняется неравенство $f(x + t) \leqslant \leqslant f(x_1 + t)$. Бесконечная дифференцируемость $f_\varepsilon(x)$ доказана в 3). Далее, учитывая (1), при $n = 1$

$$\|f(x) - f_\varepsilon(x)\|_{L_p(a,b)} \leqslant \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \varphi_\varepsilon(t) \|f(x) - f(x + t)\|_{L_p(a,b)}\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{|t|\leqslant\varepsilon} \|f(x) - f(x + t)\|_{L_p(-\infty,\infty)} \to 0, \quad \varepsilon \to \infty$$

и мы доказали, что f_ε есть приближающая f функция, удовлетворяющая свойству 5).

§ 18.3. Свертка

Эти рассуждения будут проведены в терминах лебеговой теории. Мы будем оперировать с функциями, принадлежащими пространству $L_p = L_p(R_n)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$. При конечном p функция $f \in L_p$, если она измерима в лебеговом смысле и для нее конечна

норма

$$\|f\|_{L_p} = \left(\int\limits_{R_n} |f(\mathbf{x})|^p \, d\mathbf{x}\right)^{1/p} \quad \left(\int = \int\limits_{R_n}\right).$$

Далее по определению измеримые и ограниченные на R_n функции f с нормой *)

$$\|f\|_{L_\infty} = \sup_{x \in R} |f(\mathbf{x})|$$

составляют пространство L_∞.

Если функция $K(\mathbf{x}) = K(x_1, \ldots, x_n) \in L = L_1$, то для нее имеет смысл свертка, определяемая при помощи интеграла Лебега (см. § 16.8, (16))

$$K * f = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int K(\mathbf{u}) f(\mathbf{x} - \mathbf{u}) \, d\mathbf{u} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int K(\mathbf{x} - \mathbf{u}) f(\mathbf{u}) \, d\mathbf{u}. \quad (1)$$

Интеграл (1), существующий почти для всех $\mathbf{x} \in R_n$, есть функция от $\mathbf{x}$, принадлежащая L_p, и для нее выполняется обобщенное неравенство Минковского (см. § 18.1, (6))

$$\|K * f\|_{L_p} \leqslant \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int |K(\mathbf{u})| \, \|f(\mathbf{x} - \mathbf{u})\|_{L_p} \, d\mathbf{u} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \|K\|_L \, \|f\|_{L_p}, \quad (2)$$

где норма $\|f(\mathbf{x} - \mathbf{u})\|_{L_p} = \|f(x)\|_{L_p}$ берется по $\mathbf{x}$. Неравенство (2) при $p = \infty$ очевидно.

К функции $K * f \in L_p$ можно в свою очередь применить операцию свертки ее с какой-либо функцией $K_1 \in L$, и при этом имеет место коммутативность:

$$K_1 * K * f = K * K_1 * f \quad (K, K_1 \in L, \ f \in L_p) \quad (3)$$

(вытекающая из теоремы Фубини, относящейся к лебеговой теории).

Мы определили понятие свертки двух обычных измеримых функций $K \in L$ и $f \in L_p$, и притом в *терминах обычных функций*: свертка $K * f$ есть снова обычная функция, принадлежащая L_p, вычисляемая при помощи интеграла Лебега (1).

Но K, f и $K * f$ суть также обобщенные функции (принадлежащие S'). Таким образом, имеют смысл обобщенные функции $\widehat{K * f}$, $\widehat{K * f} \in S'$, которые не обязательно являются обычными функциями. Но это обстоятельство дает основание по определе-

*) Впрочем, чаще под L_∞ понимают совокупность так называемых существенно ограниченных измеримых на R_n функций с (конечной) нормой

$$\|f\|_\infty = \operatorname{vrai} \sup_{\mathbf{x} \in R} |f(\mathbf{x})|,$$

где справа стоит наименьшее число M, для которого множество $\{x : M < |f(\mathbf{x})|\}$ имеет лебегову меру нуль.

нию положить

$$\widetilde{K}\widetilde{f} = \widetilde{K * f} \quad \widehat{K}\widehat{f} = \widehat{K * f}. \tag{4}$$

Отметим, что $\widetilde{K}$ и $\widehat{K}$ — непрерывные функции (ведь $K \in L$).

При помощи первого равенства (4) определяется произведение $\widetilde{K}$ на обобщенную функцию $\widetilde{f}$, если $f \in L_p$.

Из определений (4) автоматически следуют равенства

$$K * f = \widehat{\widetilde{K}}\widetilde{f} = \widetilde{\widehat{K}}\widehat{f} \quad (K \in L,\ f \in L_p)$$

(обобщающие § 16.8, (16), где предполагалось, что $f \in L'$, $\varphi \in S$).

Заметим, что, если $\widehat{\mu} = K \in L$ и в то же время μ — бесконечно дифференцируемая функция полиномиального роста, то в нашем распоряжении имеется два определения произведения $\mu\widetilde{f}$ $(f \in L_p)$. С одной стороны, это функционал

$$(\widehat{\mu}f,\ \varphi) = (\widetilde{f},\ \mu\varphi) \quad (\varphi \in S),$$

а с другой — функционал $\mu\widetilde{f} = \widetilde{\widehat{\mu} * f}$, как он определен в (4). Покажем, что эти функционалы равны. Если $f \in S$, то равенство

$$(\widetilde{f},\ \mu\varphi) = (\widetilde{\widehat{\mu} * f},\ \varphi) \quad (\varphi \in S) \tag{5}$$

есть равенство между интегралами от обычных функций, доказываемое как в § 16.8, (16). Если же $f \in L_p$ — произвольная функция, то найдется сходящаяся к ней в смысле L_p, тем более в смысле (S'), последовательность финитных функций $f_l \in S$ (см. § 18.2, свойство 4). Для каждого $l = 1, 2, \ldots$ имеет место $(\widetilde{f}_l,\ \mu\varphi) = (\widetilde{\widehat{\mu} * f_l},\ \varphi)$ $(\varphi \in S)$. Перейдя к пределу при $l \to \infty$, получим (5). Ведь $f_l \to f(L_p)$ влечет $\widehat{\mu} * f_l \to \widehat{\mu} * f(L_p)$, тем более в смысле (S'), но тогда и $\widetilde{\widehat{\mu} * f_l} \to \widetilde{\widehat{\mu} * f}(S')$.

Часто приходится иметь дело со сверткой обобщенной функции $\mathrm{P}.\frac{1}{x} \in S'$ и $f \in L_p$ $(1 < p < \infty$, см. пример 2, § 16.7). Она определяется как предел

$$F(x) = \mathrm{P}.\ \frac{1}{t} * f = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\varepsilon < |t| < \frac{1}{\varepsilon}} \frac{f(x-t)}{t}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x-t)}{t}\,dt$$

в смысле $L_p = L_p(-\infty, \infty)$. Таким образом,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left\| F(x) - \left(\mathrm{P}_\varepsilon \cdot \frac{1}{t} * f\right) \right\|_{L_p} = \lim \left\| (\mathrm{P}. - \mathrm{P}_\varepsilon) \frac{1}{t} * f \right\|_{L_p} = 0,$$

где

$$\mathrm{P}_{\varepsilon\cdot}\frac{1}{t}=\begin{cases}\frac{1}{t} & \left(\varepsilon<|t|<\frac{1}{\varepsilon}\right),\\ 0 & (\text{для остальных } t).\end{cases}$$

Можно доказать, что этот предел для любой функции $f\in L_p$ существует, откуда следует, что $F\in L_p$. Больше того, существует константа C_p, зависящая от $p(1<p<\infty)$, но не от f, такая, что выполняется неравенство

$$\|F\|_{L_p}\leqslant C_p\|f\|_{L_p}.$$

Важно отметить, что имеет место коммутативность

$$K*\mathrm{P}.\frac{1}{t}*f=\mathrm{P}.\frac{1}{t}*K*f\quad(K\in L,\ f\in L_p,\ 1<p<\infty).\tag{6}$$

Это следует из равенства

$$K*\mathrm{P}_{\varepsilon\cdot}\frac{1}{t}*f=P_{\varepsilon\cdot}\frac{1}{t}*K*f\quad(\varepsilon>0)$$

$\left(\mathrm{P}_{\varepsilon\cdot}\frac{1}{t}\in L\right)$ путем перехода к пределу в смысле L_p. Ведь

$$\left\|\left(K*\mathrm{P}.\frac{1}{t}*f\right)-\left(K\mathrm{P}*_{\varepsilon\cdot}\frac{1}{t}*f\right)\right\|_{L_p}=$$

$$=\left\|K*(\mathrm{P}.-\mathrm{P}_{\varepsilon\cdot})\frac{1}{t}*f\right\|_{L_p}\leqslant C_p\left\|(\mathrm{P}.-\mathrm{P}_{\varepsilon\cdot})\frac{1}{t}*f\right\|_{L_p}\to 0,$$

$$\left\|\left(\mathrm{P}.\frac{1}{t}*K*f\right)-\left(\mathrm{P}_{\varepsilon\cdot}\frac{1}{t}*K*f\right)\right\|_{L_p}=$$

$$=\left\|(\mathrm{P}.-\mathrm{P}_{\varepsilon\cdot})\frac{1}{t}*(K*f)\right\|_{L_p}\to 0\quad(\varepsilon\to 0).$$

§ 18.4. Разбиение единицы

Лемма 1. *Для любых двух ограниченных открытых множеств g и g' таких, что $g\subset\bar{g}\subset g'$, существует бесконечно дифференцируемая финитная в g' функция $\mu(x)$, равная 1 на g и удовлетворяющая неравенствам $0\leqslant\varphi(\mathbf{x})\leqslant 1$.*

Доказательство. Обозначим через g^δ множество всех точек $\mathbf{x}$, расстояние которых до $\bar{g}$ не превышает $\delta(r(\mathbf{x},\bar{g})\leqslant\delta)$. Это очевидно замкнутое множество и при этом $g\subset g^\delta\subset g^{2\delta}\subset g'$, если δ достаточно мало. Положим

$$\psi(\mathbf{x})=\begin{cases}1, & \mathbf{x}\in g^\delta,\\ 0, & \mathbf{x}\notin g^\delta,\end{cases}\tag{1}$$

$$\mu(\mathbf{x})=\psi_\delta(\mathbf{x})=\int\varphi_\delta(\mathbf{y}-\mathbf{x})\,\psi(\mathbf{y})\,d\mathbf{y},\tag{2}$$

где, таким образом, $\mu=\psi_\delta$ есть δ-усреднение функции ψ.

Функция $\mu(\mathbf{x})$, как мы знаем, бесконечно дифференцируема. Кроме того, в силу (1) и того факта, что интеграл (2) фактически берется по шару радиуса δ с центром в $\mathbf{x}$,

$$\mu(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{на } g, \\ 0 & \text{вне } g^{2\delta}. \end{cases}$$

Заметим, что интеграл (2) имеет всегда смысл по Лебегу, по Риману же не всегда, ведь множество g^{δ} и его пересечение с шаром может оказаться неизмеримым по Жордану.

Учитывая неравенство $0 \leqslant \psi(\mathbf{x}) \leqslant 1$ и неотрицательность φ_δ, получим, наконец,

$$0 \leqslant \mu(\mathbf{x}) \leqslant \int \varphi_\delta(\mathbf{y} - \mathbf{x})\, d\mathbf{y} = 1.$$

Чтобы доказать лемму в терминах интеграла Римана, можно взять сетку, рассекающую R_n на равные кубики диаметра δ, и через Λ обозначить множество кубиков, каждый из которых содержит хотя бы одну точку $\mathbf{x} \in g$. При достаточно малом δ будет $g \subset \Lambda \subset g'$. Дальше можно рассуждать, как выше, заменяя всюду g на Λ. Множество Λ^{δ} очевидно измеримо по Жордану.

Лемма 2 (о разбиении единицы). *Пусть замкнутое ограниченное множество $F \subset R_n$ покрыто открытыми множествами $g_1, \ldots, g_N$.*

Тогда существует система бесконечно дифференцируемых функций $\varphi_1(\mathbf{x}), \ldots, \varphi_N(\mathbf{x})$ со свойствами:

1) $0 \leqslant \varphi_j(x) \leqslant 1$,
2) φ_j *финитна в* g_j,
3) $\sum_1^N \varphi_j(x) = 1$ *на* F.

Доказательство. Строим открытые множества $g_1', \ldots, g_N'$ такие, что

$$g_j' \subset \overline{g_j'} \subset g_j, \quad \sum_1^N g_j' = G' \supset F;$$

пользуясь предыдущей леммой, определяем бесконечно дифференцируемые неотрицательные функции $\lambda_j(\mathbf{x})$, финитные в g_i, равные 1 на g_j', и полагаем

$$\psi_j(\mathbf{x}) = \frac{\lambda_j(\mathbf{x})}{\lambda_1(\mathbf{x}) + \ldots + \lambda_N(\mathbf{x})}.$$

Очевидно, что функции ψ_j бесконечно дифференцируемы на G' и удовлетворяют условиям $0 \leqslant \psi_j(\mathbf{x}) \leqslant 1$ и $\sum_1^N \psi_j(\mathbf{x}) = 1$ на G'. Однако они не определены в точках $\mathbf{x}$, в которых обращаются в нуль все λ_j. Пользуясь тем, что F — замкнутое ограниченное множе-

ство, а $G' \supset F$ — открыто, вводим еще второе открытое множество G'' такое, что $G' \supset \overline{G}'' \supset G'' \supset F$, и бесконечно дифференцируемую функцию $\varkappa(\mathbf{x})$, финитную в G', равную 1 на G'' и удовлетворяющую неравенствам $0 \leqslant \varkappa(\mathbf{x}) \leqslant 1$. Теперь нетрудно проверить, что функции

$$\varphi_j(\mathbf{x}) = \varkappa(\mathbf{x})\psi_j(\mathbf{x}) \qquad (j = 1, \ldots, N)$$

удовлетворяют условиям леммы, если считать, что $\varphi_j(x) = 0$ там, где $\varkappa(\mathbf{x}) = 0$, даже если $\psi_j(x)$ не определена. Свойства 1), 2), 3) легко проверяются. Если $x \in \overline{G}'$, то $x \in \overline{g}'_{j_0}$ при некотором j_0 и $\lambda_{j_0}(\mathbf{x}) = 1$, но тогда в некоторой окрестности x функция ψ_j, а вместе с ней и φ_j, бесконечно дифференцируема. Если же $x \notin \overline{G}'$, то существует окрестность x, где $\varkappa$ тождественно равна нулю, следовательно, φ_j бесконечно дифференцируемы в этой окрестности.

Глава 19

ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА

§ 19.1. Мера Лебега

Нашей целью будет ввести понятие (n-мерной) меры Лебега для ограниченных множеств некоторого класса (измеримых по Лебегу множеств). Оно обобщает понятие меры Жордана, потому что всякое измеримое в жордановом смысле множество измеримо по Лебегу и соответствующие меры равны между собой.

В §§ 12.2 и 12.5 были определены понятия $mE = |E|$, m_iE, m_eE — меры, внутренней меры и внешней меры по Жордану. В частности, доказано существование и инвариантность (относительно любых прямоугольных систем координат) внутренней и внешней меры Жордана произвольного ограниченного множества *). Для лебеговой меры внутренней и внешней меры условимся употреблять обозначения $\mu E = |E|$, μ_iE, μ_eE.

Мы будем позволять себе в ходе рассуждений употреблять знак $|E|$ для таких множеств E, для которых уже выяснено, что их лебегова и жорданова меры, если они обе существуют, равны.

Мы будем рассматривать ограниченные множества, принадлежащие n-мерному пространству R_n; поэтому будем говорить о множествах, подразумевая, что они принадлежат R_n и ограничены, и делая соответствующие оговорки, если это не так или если a priori может быть не так.

Так же, как в случае жордановой меры, каждому (ограниченному) множеству E (из R_n) приписывается два числа μ_iE и μ_eE — внутренняя и внешняя лебеговы меры E. В случае равенства их число $\mu E = \mu_iE = \mu_eE$ называется *лебеговой мерой* E, а множество E называется *измеримым в лебеговом смысле*. Однако мы начнем с того, что определим понятие лебеговой меры для открытых и замкнутых множеств, минуя пока определение их внешней и внутренней лебеговой меры.

Символами G, G_1, G', G_2, ..., будем обозначать только открытые, а символами F, F_1, F', F_2, ... — только замкнутые множества. Это соглашение дает нам право не всегда оговаривать, что множества, обозначаемые этими символами, открыты или замкнуты. Подобным образом мы будем обозначать через Δ и σ кубы

*) Только эти свойства жордановой меры нам будут нужны в этом параграфе.

и соответственно фигуры с ребрами, параллельными осям данной прямоугольной системы координат (см. § 12.2).

Лебегова мера открытого (ограниченного) множества G по определению равна

$$\mu G = m_i G = \sup_{\sigma \subset G} |\sigma|,$$

т. е. верхней грани объемов фигур σ, принадлежащих G.

Открытое множество G можно представить как счетную сумму замкнутых кубов, пересекающихся попарно разве что по своим границам (см. § 12.5, теорема 2),

$$G = \sum_1^\infty \Delta_k = \sum \Delta_k, \tag{1}$$

и тогда

$$\mu G = m_i G = \sum |\Delta_k|, \tag{2}$$

где $|\Delta_k|$ — объем Δ_k. Из доказываемой ниже леммы 2 следует, что это число не зависит от способа представления G в виде (1), где Δ_k пересекаются попарно разве что по своим границам.

Лебегова мера замкнутого ограниченного множества F по определению равна

$$\mu F = m_e F = \inf_{\sigma \supset F} |\sigma| \tag{2'}$$

— нижней грани объемов фигур σ, содержащих F.

Оба числа μG и μF инвариантны относительно любой системы прямоугольных координат, потому что числа $m_i G$ и $m_e F$ обладают этим свойством (см. § 12.2 после (6)), откуда, как будет видно ниже, следует инвариантность $\mu_i E$, $\mu_e E$ для произвольного ограниченного множества E, а тогда и μE, если E измеримо в лебеговом смысле.

Докажем несколько простых лемм, устанавливающих некоторые свойства мер замкнутых и открытых множеств.

Лемма 1. *Пусть* $\sigma_k (k = 1, 2, \ldots)$ — *замкнутые фигуры, пересекающиеся попарно разве что по своим границам, а* $\sigma'_k (k = 1, 2, \ldots)$ — *замкнутые фигуры такие, что*

$$\sum \sigma_k \subset \sum \sigma'_k. \tag{3}$$

Тогда

$$\sum |\sigma_k| \leqslant \sum |\sigma'_k|, \tag{4}$$

и неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда $\sum \sigma_k = \sum \sigma'_k$ *и фигуры* σ'_k *пересекаются разве что по своим границам.*

Доказательство. Будем считать, что правая часть неравенства (4) конечна, иначе оно тривиально. Зададим $\varepsilon > 0$ и вве-

дем открытые фигуры $\sigma_k'' \supset \sigma_k'$ такие, что

$$\sum |\sigma_k''| < \sum |\sigma_k'| + \varepsilon.$$

Для любого N замкнутое ограниченное множество $\sum_1^N \sigma_k$ покрывается открытыми фигурами σ_k'' и потому среди них можно отобрать конечное их число, $\sigma_{k_1}'', \ldots, \sigma_{k_s}''$, все же покрывающих это множество, и следовательно,

$$\sum_{k=1}^N |\sigma_k| = \left|\sum_1^N \sigma_k\right| \leqslant \sum_{j=1}^s |\sigma_{k_j}''| < \sum |\sigma_k'| + \varepsilon, \tag{5}$$

где в первом соотношении (равенстве) учтен тот факт, что фигуры σ_k пересекаются попарно разве что по своим границам. Так как правая часть (5) не зависит от N, то

$$\sum_1^\infty |\sigma_k| \leqslant \sum_1^\infty |\sigma_k'| +$$

откуда в силу произвольности $\varepsilon > 0$ получим (4).

Если фигуры σ_k' пересекаются попарно разве что по своим границам и $\sum \sigma_k = \sum \sigma_k'$, то в этом рассуждении можно переменить местами σ_k и σ_k', и тогда очевидно, что (4) есть на самом деле точное равенство. Если же какие-либо фигуры σ_k' и σ_l' пересекаются по невырожденному прямоугольнику, то в этом рассуждении можно заменить σ_l' $(k < l)$ на фигуру $\overline{\sigma_l' - \sigma_k'\sigma_l'}$ и все равно получить (4), откуда видно, что соотношение (4) тогда есть на самом деле строгое неравенство.

Мы будем говорить, что задано открытое (ограниченное) множество

$$G = \sum_k \sigma_k, \quad \mu G = \sum_k |\sigma_k|,$$

где σ_k — замкнутые фигуры (чаще всего $\sigma_k = \Delta_k$ — кубы), и в силу леммы 1 это будет значить, что фигуры σ_k, если пересекаются, то по своим границам. Возможность указанного представления G доказана в § 12.5 (теорема 2). Любые другие представления $G = \sum \sigma_k'$, где σ_k' — фигуры, попарно пересекающиеся разве что по своим границам, приводят в силу леммы 1 к равенству $\mu G = \sum_k |\sigma_k'|$.

Лемма 2. *Пусть G^j, $j = 1, 2, \ldots$, — конечная или счетная система открытых множеств, принадлежащих некоторому кубу Δ. Тогда сумма $G = \sum_j G^j$ есть открытое множество, для которого выполняется неравенство*

$$\mu G \leqslant \sum_i \mu G^j, \tag{6}$$

обращающееся в равенство тогда и только тогда, когда G^j попарно не пересекаются.

Доказательство. Тот факт, что G открыто, очевиден. Имеют место представления

$$G = \sum_k \Delta_k, \quad \mu G = \sum_k |\Delta_k|, \quad G^j = \sum_k \Delta_k^j, \quad \mu G^j = \sum_k |\Delta_k^j|,$$

где Δ_k и Δ_k^j — замкнутые кубы. Но тогда $\sum \Delta_k = \sum_j \sum_k \Delta_k^j$, и вследствие леммы 1

$$\mu G = \sum |\Delta_k| \leqslant \sum_j \sum_k |\Delta_k^j| = \sum_j \mu G^j. \tag{7}$$

Если G^j попарно не пересекаются, то и все Δ_k^j могут пересекаться разве что по своим границам, и вследствие леммы 1 имеет место равенство

$$\sum |\Delta_k| = \sum_j \sum_k |\Delta_k^j|,$$

и тогда (6) есть на самом деле равенство. Если же при некоторых s, $j (s \neq j)$ пересечение $G^s G^j$ непусто, то найдутся кубы Δ_μ^s, Δ_ν^j, существенно пересекающиеся, и по лемме 1 соотношение «$\leqslant$» в (7) на самом деле есть строгое неравенство («$<$»), но тогда оно строгое и в (6).

Лемма 3. *Для непересекающихся замкнутых множеств F_1, F_2*

$$\mu(F_1 + F_2) = \mu F_1 + \mu F_2. \tag{8}$$

Доказательство. В силу замкнутости и ограниченности множеств F_1 и F_2 и того факта, что они не пересекаются (см. § 7.10, упражнение 5), расстояние между ними положительно:

$$\rho = \rho(F_1, F_2) > 0.$$

Покроем каждую точку $\mathbf{x} \in F_1$ кубом Δ_x с центром в $\mathbf{x}$, замкнутым или открытым, с диаметром меньшим, чем $\rho/2$, и выберем из этих кубов конечное их число все же покрывающих F_1. Сумма этих кубов есть фигура σ_1', покрывающая F_1. Подобным образом построим фигуру σ_2', покрывающую F_2. Фигуры σ_1' и σ_2' очевидно не пересекаются. Теперь зададим $\varepsilon > 0$ и подберем такие две фигуры σ_1'', σ_2'', что

$$F_1 \subset \sigma_1'', \quad F_2 \subset \sigma_2'', \quad |\sigma_1''| \leqslant |\mu F_1| + \varepsilon, \quad |\sigma_2''| \leqslant |\mu F_2| + \varepsilon.$$

Для фигур $\sigma_1 = \sigma_1'\sigma_1''$ и $\sigma_2 = \sigma_2'\sigma_2''$ очевидно выполняются те же соотношения

$$F_1 \subset \sigma_1, \quad F_2 \subset \sigma_2, \quad |\sigma_1| \leqslant \mu F_1 + \varepsilon, \quad |\sigma_2| \leqslant \mu F_2 + \varepsilon$$

и, кроме того, они не пересекаются.

Так как $\sigma_1 + \sigma_2$ — фигура, содержащая замкнутое множество $F_1 + F_2$, то

$$\mu(F_1 + F_2) \leqslant |\sigma_1 + \sigma_2| = |\sigma_1| + |\sigma_2| \leqslant \mu F_1 + \mu F_2 + 2\varepsilon. \qquad (9)$$

Теперь подберем фигуру $\sigma \supset F_1 + F_2$ такую, что $\mu(F_1 + F_2) + \varepsilon > |\sigma|$, откуда

$$\mu(F_1 + F_2) + \varepsilon > |\sigma| \geqslant |\sigma(\sigma_1 + \sigma_2)| = |\sigma\sigma_1| + |\sigma\sigma_2| \geqslant \mu F_1 + \mu F_2, \qquad (10)$$

где использован тот факт, что фигуры $\sigma\sigma_1$ и $\sigma\sigma_2$ не пересекаются и содержат в себе соответственно F_1 и F_2. Учитывая, что $\varepsilon > 0$ произвольно, из (9) и (10) получаем (8).

Лемма 4. *Если F и G, $F \subset G$,— непустые множества, F — замкнутое ограничение, а G открытое не обязательно ограниченное, то существует фигура σ (замкнутая или открытая) такая, что*

$$F \subset \sigma \subset G, \quad \mu F < |\sigma| < \mu G. \qquad (11)$$

Доказательство. Каждую точку $\mathbf{x} \in F$ покроем кубами $\Delta_{\mathbf{x}}^{(1)} \subset \Delta_{\mathbf{x}}^{(2)} \subset \Delta_{\mathbf{x}}^{(3)} \subset G$ с параллельными гранями и с центром в $\mathbf{x}$, длины ребер которых находятся в отношении $\delta_{\mathbf{x}}^{(1)} < \delta_{\mathbf{x}}^{(2)} < \delta_{\mathbf{x}}^{(3)}$. При этом $\Delta_{\mathbf{x}}^{(1)}$ — открытые кубы, а $\Delta_{\mathbf{x}}^{(2)}$ — замкнутые. По лемме Бореля существует конечное число кубов $\Delta_{\mathbf{x}}^{(1)}$, покрывающих F. Пусть это будут кубы $\Delta_{\mathbf{x},1}^{(1)}, \ldots, \Delta_{\mathbf{x},N}^{(1)}$. Тогда (замкнутая) фигура

$$\sigma = \sum_{k=1}^{N} \Delta_{\mathbf{x},k}^{(2)} \qquad (12)$$

очевидно удовлетворяет требованиям (11), так же как открытая фигура, получаемая из σ выбрасыванием из нее ее границы. Надо учесть, что σ строго внутри себя содержит $\sum_1^N \Delta_{\mathbf{x},k}^{(1)} \supset F$ и содержится строго внутри $\sum_1^N \Delta_{\mathbf{x},k}^{(3)} \subset G$.

Лемма 5. *Для замкнутого множества F, принадлежащего открытому ограниченному множеству G,*

$$\mu(G - F) = \mu G - \mu F. \qquad (13)$$

Доказательство. Открытые множества G и $G' = G - F$ представим в виде сумм

$$G = \sum_k \Delta_k, \; G' = \sum \Delta_k', \; \mu G = \sum |\Delta_k|, \; \mu G' = \sum |\Delta_k'|$$

замкнутых кубов. Пусть $\sigma \subset G$ — произвольная фигура, покрывающая F. Тогда $G = \sum \Delta_k \subset \sigma + \sum \Delta_k'$ и в силу леммы 1

$$\mu G = \sum |\Delta_k| \leqslant |\sigma| + \sum |\Delta_k'| = |\sigma| + \mu G'.$$

Отсюда, беря нижнюю грань правой части по всем $\sigma \supset F$, получим

$$\mu G \leqslant \mu F + \mu G'.$$

С другой стороны, множества F и $\sum_1^N \Delta_k'$ замкнуты и не пересекаются, и потому в силу лемм 1 и 4

$$\mu F + \sum_1^N |\Delta_k'| = \mu F + \mu \sum_1^N \Delta_k' = \mu \left(F + \sum_1^N \Delta_k' \right) \leqslant \mu G,$$

откуда

$$\mu F + \mu G' = \mu F + \sum_1^\infty |\Delta_k'| \leqslant \mu G,$$

и мы доказали (13).

Пусть теперь E есть произвольное (ограниченное) множество.

По определению *внутренняя лебегова мера* E есть верхняя грань $\mu_i E = \sup\limits_{F \in E} \mu F$ лебеговых мер принадлежащих E замкнутых множеств. Существование этой верхней грани вытекает из того, что E можно поместить в замкнутый куб Δ, и тогда $F \subset E \subset \Delta$,

$$\mu F = m_e F \leqslant |\Delta|.$$

По определению *внешняя лебегова мера* E есть нижняя грань $\mu_e E = \inf\limits_{G \subset E} \mu G$ лебеговых мер открытых множеств, содержащих E. Существование $\mu_e E \geqslant 0$ очевидно, потому что $\mu G \geqslant 0$.

По определению множество E называется *измеримым по Лебегу*, если его внутренняя и внешняя меры равны между собой, и в этом случае число $\mu E = \mu_i E = \mu_e E$ называется *лебеговой мерой* E или *мерой* E *в смысле Лебега*.

Имеют место неравенства

$$m_i E \leqslant \mu_i E \leqslant \mu_e E \leqslant m_e E. \tag{14}$$

Чтобы обосновать их, заметим, что жорданова внешняя мера $m_e E$ может быть рассматриваема как нижняя грань объемов открытых фигур $\sigma \supset E$. Результат будет тот же, будем ли мы при вычислении внешней меры Жордана $m_e E$ варьировать открытыми или замкнутыми $\sigma \supset E$. Но открытые $\sigma \supset E$ суть частные случаи открытых множеств $G \supset E$, поэтому $\mu_e E \leqslant m_e E$. Внутреннюю меру Жордана $m_i E$ мы уже будем рассматривать как верхнюю грань объемов замкнутых $\sigma \subset E$, и так как такие σ суть частные случаи замкнутых множеств $F \subset E$, то $m_i E \leqslant \mu_i E$.

Из (14) следует, что *если E измеримо по Жордану, то E измеримо и по Лебегу и $mE = \mu E$.*

Теперь нетрудно видеть, что множества F и G измеримы в лебеговом смысле *). Это следует из (14) и равенств **)

$$m_i G = \mu G = \mu_e G, \quad \mu_i F = \mu F = m_e F.$$

В § 12.3 были рассмотрены важные примеры множеств жордановой, следовательно, и лебеговой, меры нуль.

Теорема 1. *Множество E измеримо тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существуют множества F, G такие, что*

$$F \subset E \subset G, \quad \mu G - \mu F < \varepsilon. \tag{15}$$

Доказательство. Из существования указанных множеств F, G следует, что

$$\mu F \leqslant \mu_i E \leqslant \mu_e E \leqslant \mu G,$$

откуда $\varepsilon > \mu_e E - m_i E$, и так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то $\mu_i E = \mu_e E$. Наоборот, если E измеримо, то для любого $\varepsilon > 0$ найдутся множества F и G такие, что

$$F \subset E \subset G, \quad \mu E - \frac{\varepsilon}{2} < \mu F \leqslant \mu E \leqslant \mu G < \mu E + \frac{\varepsilon}{2},$$

откуда выполняется (15).

Теорема 2. *Вместе с E_1 и E_2 измеримы по Лебегу также их сумма, разность и пересечение.*

Доказательство. Зададим $\varepsilon > 0$ и подберем множества F_1, F_2, G_1, G_2 так, чтобы выполнялись соотношения (см. теорему 1 и лемму 5)

$$F_1 \subset E_1 \subset G_1, \ \mu G_1 - \mu F_1 = \mu(G_1 - F_1) < \varepsilon,$$
$$F_2 \subset E_2 \subset G_2, \ \mu G_2 - \mu F_2 = \mu(G_2 - F_2) < \varepsilon.$$

Отсюда

$$F_1 + F_2 \subset E_1 + E_2 \subset G_1 + G_2, \tag{16}$$
$$F_1 - G_2 \subset E_1 - E_2 \subset G_1 - F_2, \ F_1 F_2 \subset E_1 E_2 \subset G_1 G_2.$$

Теперь утверждения теоремы вытекают из следующих выкладок (пояснения ниже):

$$\mu(G_1 + G_2) - \mu(F_1 + F_2) = \mu((G_1 + G_2) - (F_1 + F_2)) \leqslant$$
$$\leqslant \mu((G_1 - F_1) + (G_2 - F_2)) \leqslant \mu(G_1 - F_1) + \mu(G_2 - F_2) < 2\varepsilon,$$
$$\mu(G_1 - F_2) - \mu(F_1 - G_2) = \mu((G_1 - F_2) - (F_1 - G_2)) \leqslant$$
$$\leqslant \mu((G_1 - F_1) + (G_2 - F_2)) \leqslant \mu(G_1 - F_1) + \mu(G_2 - F_2) < 2\varepsilon,$$
$$\mu G_1 G_2 - \mu F_1 F_2 = \mu(G_1 G_2 - F_1 F_2) \leqslant \mu(G_1(G_2 - F_2)) +$$
$$+ \mu(F_2(G_1 - F_1)) \leqslant \mu(G_2 - F_2) + \mu(G_1 - E_1) < 2\varepsilon.$$

---

*) Хотя множества F и G не обязательно измеримы по Жордану (см. § 19.7).

**) Ведь, например, $\mu G_0 = m_i G_0$, $\mu_e G_0 = \inf\limits_{G \supseteq G_0} \mu G$.

Первые соотношения (равенства) в этих цепях справедливы на основании леммы 5, если учесть, что правые части (16) суть открытые множества, а левые — замкнутые. Вторые соотношения (неравенства) в этих цепях следуют соответственно из леммы 2 и следующих множественных вложений *):

$$\left.\begin{array}{l} \text{а) } G_1+G_2-(F_1+F_2) \\ \text{б) } (G_1-F_2)-(F_1-G_2) \\ \text{в) } G_1G_2-F_1F_2 \end{array}\right\} \subset (G_1-F_1)+(G_2-F_2).$$

Заметим впрочем, что измеримость E_1E_2 вытекает из измеримости E_1+E_2 и E_1-E_2. Ведь если Δ — куб, содержащий E_1+E_2, то

$$E_1E_2=\Delta-[(\Delta-E_1)+(\Delta-E_2)].$$

Теорема 3. *Если множества E_1 и E_2 измеримы по Лебегу и пересечение их пусто* **) $(E_1E_2=0)$, *то*

$$\mu(E_1+E_2)=\mu E_1+\mu E_2. \tag{17}$$

Доказательство. Зададим $\varepsilon>0$ и подберем множества F_1, F_2, G_1, G_2 так, что

$$F_1\subset E_1\subset G_1,\quad F_2\subset E_2\subset G_2,$$
$$\mu E_1-\varepsilon<\mu F_1,\quad \mu G_1<\mu E_1+\varepsilon,$$
$$\mu E_2-\varepsilon<\mu F_2,\quad \mu G_2<\mu E_2+\varepsilon.$$

Так как $F_1+F_2\subset E_1+E_2\subset G_1+G_2$, то (см. лемму 2)

$$\mu(E_1+E_2)\leqslant\mu(G_1+G_2)\leqslant\mu G_1+\mu G_2\leqslant\mu E_1+\mu E_2+2\varepsilon. \tag{18}$$

Далее,

$$\mu E_1+\mu E_2\leqslant\mu F_1+\mu F_2+2\varepsilon=\mu(F_1+F_2)+2\varepsilon\leqslant\mu(E_1+E_2)+2\varepsilon \tag{19}$$

(ведь F_1 и F_2 замкнуты и $F_1F_2=0$; см. лемму 3).

Из (18), (19) в силу произвольности $\varepsilon>0$ вытекает (17).

---

*) Чтобы доказать эти вложения обозначим через A, B соответственно их левую, правую части.

а) Пусть $x\in A$, тогда $x\in G_1+G_2$ и одновременно $x\notin F_1$, $x\notin F_2$. Поэтому, если $x\in G_1$, то $x\in G_1-F_1\subset B$, а если $x\in G_2$, то $x\in G_2-F_2\subset B$.

б) Пусть $x\in A$, тогда $x\in G_1$, $x\notin F_2$, $x\notin F_1-G_2$. Поэтому при $x\in G_2$ имеем $x\in G_2-F_2\subset B$, а при $x\notin G_2$ в силу условия $x\notin F_1-G_2$ придется заключить, что $x\notin F_1$ и тогда $x\in G_1-F_1\subset B$.

в) Пусть $x\in A$, тогда $x\in G_1G_2$, $x\notin F_1F_2$, т. е. во всяком случае верно одно из соотношений $x\notin F_1$, $x\notin F_2$. Если верно первое, то $x\in G_1-F_1\subset\subset B$, если же второе, то $x\in G_2-F_2\subset B$.

**) Равенство (17) верно и в случае, когда E_1E_2 хотя и не пусто, но $\mu(E_1E_2)=0$. Ведь тогда $\mu(E_1+E_2)=\mu(E_1+(E_2-E_1E_2))=\mu E_1+\mu(E_2-E_1E_2)=\mu E_1+\mu E_2-\mu(E_1E_2)=\mu E_1+\mu E_2$ (см. теорему 3 и далее теорему 4).

По индукции с помощью теорем 2 и 3 легко доказывается, что если $e_1, \ldots, e_N$ — измеримые в лебеговом смысле попарно не пересекающиеся множества, то их сумма тоже измерима по Лебегу и

$$\mu(e_1 + \ldots + e_N) = \mu e_1 + \ldots + \mu e_N.$$

Теорема 4. *Если E_1 и E_2 измеримы по Лебегу и $E_1 \supset E_2$, то*

$$\mu(E_1 - E_2) = \mu E_1 - \mu E_2. \tag{20}$$

Доказательство. Измеримость $E_1 - E_2$ уже установлена в теореме 2. Само же по себе равенство (20) следует из теоремы 3.

Теорема 5. *Ограниченное множество*

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} e_k = e_1 + e_2 + e_3 + \ldots, \tag{21}$$

где e_k измеримы по Лебегу и попарно не пересекаются, измеримо в лебеговом смысле и

$$\mu E = \sum_{k=1}^{\infty} \mu e_k. \tag{22}$$

Доказательство. Так как множество E ограничено, то для него имеют смысл его внутренняя и внешняя меры $\mu_i E$, $\mu_e E$. Поэтому при любом натуральном N

$$\sum_1^N \mu e_k = \mu\left(\sum_1^N e_k\right) = \mu_i\left(\sum_1^N e_k\right) \leqslant \mu_i E$$

$\left(\text{ведь } \sum_1^N e_k \subset E\right)$. Отсюда следуют сходимость ряда (22) и неравенство

$$\sum_1^{\infty} \mu e_k \leqslant \mu_i E. \tag{23}$$

С другой стороны, так как E ограничено, то можно считать, что оно принадлежит некоторому открытому кубу Δ, и для всякого $\varepsilon > 0$ и любого натурального k найдется множество $G_k \subset \Delta$ такое, что

$$e_k \subset G_k, \quad \mu G_k < \mu e_k + \varepsilon \cdot 2^{-k} \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Отсюда в силу того, что $\sum_1^{\infty} G_k \subset \Delta$ есть открытое множество, получим (см. лемму 2)

$$\mu_e E \leqslant \mu\left(\sum_1^{\infty} G_k\right) \leqslant \sum_1^{\infty} \mu G_k \leqslant \sum_1^{\infty} \mu e_k + \varepsilon \sum_1^{\infty} 2^{-k} = \sum_1^{\infty} \mu e_k + \varepsilon.$$

И так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то (см. 23))

$$\mu_e E \leqslant \sum_1^\infty \mu e_e \leqslant \mu_i E.$$

Но тогда, учитывая, что $\mu_i E \leqslant \mu_e E$, мы доказали измеримость E и равенство (22).

Теореме 5 можно придать другую эквивалентную формулировку.

Теорема 6. *Пусть задана (неубывающая) последовательность измеримых множеств*,

$$E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \ldots, \quad E = \bigcup_{k=1}^\infty E_k,$$

сумма которых E ограничена. Тогда E — измеримое множество и

$$\lim_{k\to\infty} \mu E_k = \mu E.$$

Доказательство. Положим $e_1 = E_1$, $e_N = E_N - E_{N-1}$ ($N = 2, 3, \ldots$), тогда e_k измеримы, попарно не пересекаются и

$$\bigcup_{k=1}^\infty e_k = E.$$

Но тогда по теореме 5 множество E измеримо и

$$\mu E_N = \mu(e_1 + \ldots + e_N) = \sum_{k=1}^N \mu e_k \to \mu E, \quad N \to \infty.$$

Отметим еще одну теорему, сводящуюся к теоремам 6 и 4.

Теорема 7. *Пусть задана (невозрастающая) последовательность измеримых множеств:*

$$E_1 \supset E_2 \supset \ldots, \quad E = \bigcap_{k=1}^\infty E_k.$$

Тогда E измеримо и $\mu E = \lim\limits_{n\to\infty} \mu E_n$.

Доказательство. В самом деле,

$$E = \bigcap_{k=1}^\infty E_k = E_1 - \bigcup_{k=1}^\infty (E_1 - E_k),$$

и тогда (пояснения ниже)

$$\mu E = \mu E_1 - \mu \bigcup_{k=1}^\infty (E_1 - E_k) = \mu E_1 - \lim_{k\to\infty} \mu (E_1 - E_k) = \lim_{k\to\infty} \mu E_k.$$

Ведь множества $E_1 - E_k \subset E_1$ измеримы и не убывают, и сумма их по теореме 6 измерима, а ее лебегова мера есть

$$\lim_{k\to\infty} \mu(E_1 - E_k) = \mu E_1 - \lim_{k\to\infty} \mu E_k.$$

При этом из существования предела слева следует существование предела справа.

Теорема 8. *Конечная или счетная ограниченная сумма измеримых множеств $E_1, E_2, \ldots$ измерима и*

$$\mu\left(\bigcup_k E_k\right) \leqslant \sum_k \mu E_k. \tag{24}$$

Доказательство. Измеримость суммы (24) следует из равенства

$$\bigcup_k E_k = E_1 + (E_2 - E_1) + (E_3 - E_1 - E_2) + \ldots, \tag{25}$$

где справа слагаемые — измеримые попарно не пересекающиеся множества. Далее, мы знаем, что мера множества слева в (25) в точности равна сумме мер множеств, входящих в ряд справа, но мера k-го такого множества, очевидно, не превышает μE_k, откуда следует (24).

Теорема 9. *Пересечение конечного или счетного числа измеримых множеств $E_1, E_2, \ldots$ измеримо.*

Доказательство. Это следует из теорем 2 и 8, если учесть, что

$$\bigcap_k E_k = E_1 - \bigcup_k (E_1 - E_k).$$

Отметим, что множество, состоящее из одной точки (пространства R_n), измеримо в жордановом и лебеговом смысле и имеет меру нуль. Счетное ограниченное множество (точек R_n) на основании теоремы 5 есть измеримое множество по Лебегу (меры нуль), но, вообще говоря, не по Жордану. Например, множество Δ' рациональных точек, принадлежащих кубу Δ, имеет Лебегову меру нуль, но оно не измеримо в жордановом смысле. Множество точек $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \Delta$, не все координаты которых рациональны, имеет, очевидно, лебегову меру, равную $|\Delta|$.

Отметим еще, что если множество E измеримо по Жордану, то присоединение к нему его границы сохраняет меру ($mE = m\bar{E}$), но это уже не так в случае лебеговой меры, например, для рассмотренных выше множеств Δ' и Δ имеет место $\mu\Delta' = 0$, $\Delta = \overline{\Delta'}$, $|\Delta| > 0$.

§ 19.2. Измеримые функции

Мы будем называть измеримые по Лебегу множества E ($E \subset R_n$) просто измеримыми. Они всегда ограничены.

По определению функция $f = f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ называется *измеримой на множестве* E ($E \subset R_n$), если E измеримо,

f конечна *) на E и для любого (действительного) числа A множество

$$\{\mathbf{x}:\ \mathbf{x} \in E,\ f(\mathbf{x}) < A\} = \{f < A\} \tag{1}$$

(точек $\mathbf{x} \in E$, где $f(\mathbf{x}) < A$) измеримо.

Запись справа в (1) не выражает явно, что речь идет о точках $\mathbf{x} \in E$,— это подразумевается. В этом духе надо понимать и другие подобные приводимые ниже записи.

Пусть $A < B$ — произвольные числа. Имеют место очевидные множественные равенства:

$$\{f \leqslant A\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left\{f < A + \frac{1}{k}\right\}, \tag{2}$$

$$\{f = A\} = \{f \leqslant A\} - \{f < A\}, \tag{3}$$

$$\{A \leqslant f\} = E - \{f < A\}, \tag{4}$$

$$\{A < f\} = \{A \leqslant f\} - \{A = f\}, \tag{5}$$

$$\{A < f < B\} = \{f < B\} - \{f \leqslant A\}, \tag{6}$$

$$\{A \leqslant f < B\} = \{f < B\} - \{f < A\}, \tag{7}$$

$$\{A \leqslant f \leqslant B\} = \{A \leqslant f < B\} + \{f = B\}, \tag{8}$$

$$\{A < f \leqslant B\} = \{A < f < B\} + \{f = B\}. \tag{9}$$

Измеримость f на E влечет измеримость любого из множеств, фигурирующих в левых частях этих неравенств. В самом деле, из измеримости каждого из множеств

$$\left\{f < A + \frac{1}{k}\right\} = \left\{\mathbf{x} : \mathbf{x} \in E,\ f(\mathbf{x}) < A + \frac{1}{k}\right\} \ (k = 1, 2, \ldots)$$

следует в силу (2) измеримость их пересечения, равного $\{f \leqslant A\}$. Теперь уже измеримы уменьшаемое и вычитаемое в (3), поэтому измерима разность. Так постепенно доказываются (4), ..., (9).

Важно отметить, что измеримость любого из множеств (при произвольных A и B), фигурирующих в левых частях соотношений (2)—(9), кроме (3), влечет измеримость f на E (если E измеримо). Например, пусть известно, что E измеримо, и для любого числа A множество $\{f \leqslant A\}$ измеримо. Тогда очевидно, что измеримо множество

$$\{f < A\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{f \leqslant A - \frac{1}{k}\right\}.$$

---

*) Мы считаем, что $f(\mathbf{x})$ для любого $\mathbf{x} \in E$ есть число (конечное число). Случай, когда функции f разрешается принимать значения $\pm\infty$ (или ∞), интересен, когда f есть предел или верхний или нижний предел последовательности конечных на E функций. Этот случай разбирается ниже в теореме 2. Если в каком-либо вопросе удобно приписывать $f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in E$, не только конечные значения, но и бесконечные $+\infty$, $-\infty$ (или ∞), то тогда естественно считать функцию f измеримой на E, если в отдельности измеримы множества $\{f = +\infty\}$, $\{f = -\infty\}$ {или $f = \infty$}, а на оставшейся части E конечная функция f измерима в указанном выше смысле.

Или, например, пусть E измеримо и измеримы все множества $\{A < f < B\}$, каковы бы ни были A, B, $A < B$. Тогда множество

$$\{f < A\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{A - k < f < A\}$$

измеримо как сумма счетного числа измеримых множеств.

Функция f, непрерывная на замкнутом ограниченном множестве F или открытом ограниченном множестве G, измерима на нем.

В самом деле, F и G измеримы. Кроме того, для любого A множество $\{\mathbf{x}: \mathbf{x} \in F,\ f(\mathbf{x}) \leqslant A\}$ замкнуто и ограничено, следовательно, измеримо, а множество $\{\mathbf{x}: \mathbf{x} \in G,\ f(\mathbf{x}) < A\}$ открыто и ограничено, следовательно, измеримо.

Справедливы следующие утверждения:

Если $e \subset E$ измеримо и f измерима на E, то f измерима и на e.

Ведь множество $\{\mathbf{x}: \mathbf{x} \in e,\ f(\mathbf{x}) < A\}$ есть пересечение двух измеримых множеств e и $\{\mathbf{x}: \mathbf{x} \in E,\ f(\mathbf{x}) < A\}$.

Если f измерима на каждом из множеств e_k $(k = 1, 2, \ldots)$ и сумма $E = \sum_k e_k$ ограничена, то f также измерима на E.

Ведь E измеримо как ограниченная сумма измеримых e_k. Кроме того, множество $\{\mathbf{x}: \mathbf{x} \in E,\ f(\mathbf{x}) < A\}$ ограничено и есть сумма измеримых множеств $\{\mathbf{x}: \mathbf{x} \in e_k,\ f(\mathbf{x}) < A\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

Теорема 1. *Вместе с f и φ измеримы на E функции*

$$1)\ f + \varphi, \quad 2)\ -\varphi, \quad 3)\ f\varphi, \quad 4)\ 1/\varphi,$$

в предположении в случае 4), что $\varphi(x) \neq 0$ для всех $\mathbf{x} \in E$.

Доказательство. 1) Зададим число A. Имеет место равенство

$$\{f + \varphi < A\} = \bigcup_{r+\rho<A} \{f < r\}\{\varphi < \rho\}, \tag{10}$$

где сумма распространена на все пары рациональных чисел r, ρ, сумма которых меньше A. В самом деле, если $\mathbf{x} \in E$, $f(\mathbf{x}) < r$, $\varphi(\mathbf{x}) < \rho$, $r + \rho < A$, то $f(\mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{x}) < A$ и правая часть (10) принадлежит к левой. Если же $\mathbf{x} \in E$, $f(\mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{x}) < A$ и $\delta = A - f(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x})$, то существуют рациональные числа r и ρ, большие соответственно, чем $f(\mathbf{x})$ и $\varphi(\mathbf{x})$, на величину меньшую, чем $\delta/2$, и тогда $f(\mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{x}) < r + \rho < A$, т. е. левая часть (10) содержится в правой. Так как пары (r, ρ) рациональных чисел, для которых $r + \rho < A$, образуют счетное множество, то из измеримости f и φ на E следует, что правая часть (10) есть измеримое множество, таким образом, и левая есть измеримое множество.

2) Следует из равенства $\{-\varphi < A\} = \{\varphi > -A\}$.

3) Пусть $f(\mathbf{x})$, $\varphi(\mathbf{x}) \geqslant 0$ для всех $\mathbf{x} \in E$. Если $A \leqslant 0$, то множество $\{f\varphi < A\}$ пусто, следовательно, измеримо. Пусть теперь

$A > 0$. Если $f(\mathbf{x}) < r$, $\varphi(\mathbf{x}) < \rho$, $r\rho < A$, то $f(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x}) < A$. Наоборот, если $f(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x}) < A$, то можно подобрать рациональные r, $\rho > 0$ такие, что $r\rho < A$ и $f(\mathbf{x}) < r$, $\varphi(\mathbf{x}) < \rho$. Поэтому

$$\{f\varphi < A\} = \bigcup_{\substack{r\rho < A \\ r, \rho > 0}} \{f < r\}\{\varphi < \rho\}, \tag{11}$$

и правая часть (11), а с ней и левая, измеримы.

Отсюда легко следует измеримость $\{f\varphi < A\}$, если каждая из функций f, φ сохраняет знак на E.

Общий случай сводится к указанным четырем путем представления

$$\{f\varphi < A\} = \{f\varphi < A;\ f,\ \varphi \geqslant 0\} + \{f\varphi < A;\ f \geqslant 0,\ \varphi \leqslant 0\} + \\ + \{f\varphi < A;\ f \leqslant 0,\ \varphi \geqslant 0\} + \{f\varphi < A;\ f,\ \varphi \leqslant 0\}.$$

4) Если $\varphi(\mathbf{x}) > 0$ для всех $\mathbf{x} \in E$, то при $A \leqslant 0$ множество $\{1/\varphi < A\}$ пусто, таким образом, измеримо, а при $A > 0$ это следует из равенства $\{1/\varphi < A\} = \{1/A < \varphi\}$. Подобным образом рассматривается случай, когда $\varphi(\mathbf{x}) < 0$ на E. Общий случай сводится к этим двум путем представления

$$\left\{\frac{1}{\varphi} < A\right\} = \left\{\frac{1}{\varphi} < A;\ \varphi > 0\right\} + \left\{\frac{1}{\varphi} < A;\ \varphi < 0\right\}.$$

Теорема 2. *Верхний предел последовательности $f_n(x)$ измеримых на E конечных функций*

$$\psi(\mathbf{x}) = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, f_n(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in E, \tag{12}$$

есть функция, измеримая на E в смысле приведенного в ссылке в начале этого параграфа определения.

Доказательство. Множество E распадается на три попарно не пересекающиеся множества

$$E = E_0 + E_+ + E_-, \tag{13}$$

где

$$\psi(\mathbf{x}) = \begin{cases} \text{конечна на } E_0, \\ +\infty \text{ на } E_+, \\ -\infty \text{ на } E_-. \end{cases} \tag{14}$$

Пусть $\psi(\mathbf{x})$ конечна на E (т. е. $E_+ = E_- = 0$). Тогда для любого действительного числа A и натурального k имеют место вложения

$$\left\{\psi < A - \frac{1}{k}\right\} \subset \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} \left\{f_n < A - \frac{1}{k}\right\} \subset \left\{\psi \leqslant A - \frac{1}{k}\right\}. \tag{15}$$

Ведь если $\mathbf{x} \in \left\{\psi < A - \frac{1}{k}\right\}$, то, в силу (12), для некоторого N

выполняется неравенство

$$f_n(x) < A - \frac{1}{k}, \quad n \geqslant N, \tag{16}$$

и потому

$$\mathbf{x} \in \bigcap_{n=N}^{\infty} \left\{ f_n < A - \frac{1}{k} \right\}. \tag{17}$$

Тем более $\mathbf{x}$ принадлежит множеству, стоящему в середине цепи (15). Далее, если $\mathbf{x}$ принадлежит этому последнему множеству, то для некоторого N для него выполняется (17), т. е. (16), и так как имеет место (12), то $\psi(\mathbf{x}) \leqslant A - \frac{1}{k}$, и мы доказали, что $\mathbf{x}$ принадлежит множеству, стоящему в правой части (15).

Легко видеть, что (см. (15))

$$\{\psi < A\} = \bigcup_k \left\{ \psi < A - \frac{1}{k} \right\} = \bigcup_k \left\{ \psi \leqslant A - \frac{1}{k} \right\} =$$

$$= \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} \left\{ f_n < A - \frac{1}{k} \right\}. \tag{18}$$

По вследствие измеримости функций f_n на E правая часть (18) — измеримое множество, значит, и левая — измеримое множество.

Перейдем к общему случаю, когда E_+, E_-, вообще говоря, непусты. Для $x \in E_-$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} f_n(\mathbf{x}) = \lim_{n\to\infty} f_n(\mathbf{x}) = -\infty, \tag{19}$$

откуда следует равенство

$$E_- = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} \{f_n < -k\}, \tag{20}$$

показывающее, что E_- измеримо. В самом деле, если $\mathbf{x} \in E_-$, то для любого натурального k найдется натуральное N такое, что

$$f_n(\mathbf{x}) < -k, \quad n \geqslant N \tag{21}$$

т. е.

$$\mathbf{x} \in \bigcap_{n=N}^{\infty} \{f_n < -k\}, \tag{22}$$

тем более

$$\mathbf{x} \in \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} \{f_n < -k\}, \tag{23}$$

и так как этот факт имеет место при любом k, то $\mathbf{x}$ принадлежит правой части (20). Наоборот, из принадлежности $\mathbf{x}$ правой части (20) следует, что при любом k имеет место (23), а при некотором N — и (22), т. е. (21), таким образом, (19), и правая часть (20) принадлежит левой.

Наконец, имеет место равенство

$$E_+ = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcap_{s=1}^{\infty} \bigcup_{n=s}^{\infty} \{f_n > k\}, \tag{24}$$

показывающее, что E_+ измеримо. Действительно, если $\mathbf{x} \in E_+$, то для любого k найдется N такое, что

$$f_n(\mathbf{x}) > k \tag{25}$$

для бесконечного числа значений $n > N$, тогда

$$\mathbf{x} \in \bigcap_{s=1}^{\infty} \bigcup_{n=s}^{\infty} \{f_n > k\} \tag{26}$$

для любого k, т. е. $\mathbf{x}$ принадлежит правой части (24). Наоборот, если имеет место это последнее свойство, то справедливо и (26) при любом k, поэтому при любом k выполняется неравенство (25) для бесконечного числа значений n, т. е. $\mathbf{x} \in E_+$.

Итак, E_+ и E_- измеримы, но тогда $E_0 = E - E_+ - E_-$ измеримо, и так как функция ψ на E_0 конечна, то ψ измерима в смысле введенного выше определения, и теорема доказана.

Замечание. В теореме 2 можно верхний предел заменить на нижний предел, потому что

$$\varphi(\mathbf{x}) = \varliminf_{n\to\infty} f_n(\mathbf{x}) = -\varlimsup_{n\to\infty} (-f_n(\mathbf{x})),$$

а функции $h(\mathbf{x})$ и $-h(\mathbf{x})$ измеримы одновременно.

Пусть E_0 имеет прежний смысл, а E_0' — множество, где φ конечна. Функция $\psi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x})$ измерима на множестве E_0E_0', из которого можно выделить важное измеримое подмножество

$$E_* = \{\psi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x}) = 0\}$$

точек $\mathbf{x} \in E$, для которых существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} f_n(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x}).$$

Определение. Последовательность конечных измеримых на E функций f_k *сходится* к измеримой на E функции f *по мере*, если для любого $\delta > 0$ мера множества

$$e_k = \{\mathbf{x} \in E : |f(\mathbf{x}) - f_k(\mathbf{x})| > \delta\} \tag{27}$$

стремится к нулю ($\mu e_k \to 0$, $k \to \infty$).

Теорема 3. *Если последовательность конечных измеримых на E функций f_k сходится на E к конечной функции f, то она сходится также к f по мере.*

Доказательство. В самом деле, если бы это было не так, то для некоторого $\delta > 0$ нашлись бы число $\lambda > 0$ и последо-

вательность индексов $k_1, k_2, \ldots$ такие, что $\mu e_{k_j} \geqslant \lambda$. Положим

$$e = \bigcap_{s=1}^{\infty} (e_{k_s} + e_{k_{s+1}} + \ldots),$$

тогда

$$\mu e = \lim_{s\to\infty} \mu(e_{k_s} + e_{k_{s+1}} + \ldots) \geqslant \varliminf_{s\to\infty} \mu e_{k_s} \geqslant \lambda,$$

и, таким образом, e — непустое множество. Но точка $\mathbf{x} \in e$ принадлежит, очевидно, бесконечной последовательности множеств $e_{\nu_1}, e_{\nu_2}, e_{\nu_3}, \ldots$ $(\nu_1 < \nu_2 < \ldots)$, и потому

$$|f_{\nu_s}(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})| > \delta.$$

Но это противоречит тому, что

$$\lim_{k\to\infty} f_k(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}).$$

Теорема 4. *Функция f, интегрируемая по Риману на множестве E, измерима по Лебегу на E.*

Доказательство. Условие теоремы автоматически влечет измеримость E по Жордану, поэтому и измеримость по Лебегу. Пусть E'' — множество точек непрерывности f. По теореме Лебега (см. §§ 12.8 и 12.10) $\mu E'' = \mu E$. Зададим $\varepsilon > 0$ и определим для любого натурального k замкнутые множества $F_k \subset E''$ так, что $\mu F_k > \mu E - \varepsilon \cdot 2^{-k}$ $(F_k \subset F_{k+1})$. Функция f непрерывна на множестве F_k, следовательно, измерима на нем. Определим функции

$$f_k = \begin{cases} f, & \mathbf{x} \in F_k, \\ 0, & \mathbf{x} \in E - F_k, \end{cases}$$

которые очевидно измеримы на E. Имеем

$$\lim_{k\to\infty} f_k(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \text{ на } E' = \bigcup_k F_k, \mu E' = \mu E''.$$

Следовательно, f измерима на E', и так как $E' \subset E'' \subset E$, $\mu(E - E') = 0$, то f измерима и на E.

Теорема 5. *Если функция f измерима и положительна на множестве E положительной меры, то найдутся положительное число λ и множество $e \subset E$ положительной меры, на котором $f(\mathbf{x}) \geqslant \lambda$.*

Доказательство. В самом деле, зададим множества

$$e_0 = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \in E, 1 \leqslant f\}, \; e_k = \left\{\mathbf{x} : \mathbf{x} \in E, \frac{1}{k+1} \leqslant f < \frac{1}{k}\right\}, k = 1, 2, \ldots,$$

очевидно попарно не пересекающиеся и такие, что

$$E = \sum_0^{\infty} e_k, \; \mu E = \sum_0^{\infty} \mu e_k.$$

Так как $\mu E > 0$, то найдется k, для которого $\mu e_k > 0$. Для этого k можно положить $e = e_k$, $\lambda = 1/(k+1)$, чтобы удовлетворить теореме.

§ 19.3. Интеграл Лебега

Последовательность действительных чисел с двумя входами

$$\ldots < p_{-2} < p_{-1} < p_0 < p_1 < p_2 < \ldots, \quad p_k \to \infty, \quad p_{-k} \to -\infty, \quad k \to +\infty, \tag{1}$$

удовлетворяющую условию

$$\sup_k (p_{k+1} - p_k) = \delta_R < \infty, \tag{2}$$

будем называть *разбиением* R (действительной оси).

Пусть на (измеримом) множестве E (пространства R_n) задана измеримая конечная функция f. Введем множества (измеримые)

$$e_k = \{\mathbf{x}\colon\ \mathbf{x} \in E,\ p_k \leqslant f(\mathbf{x}) < p_{k+1}\} = \{p_k \leqslant f(\mathbf{x}) < p_{k+1}\},$$
$$k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$$

и два ряда (с двумя входами)

$$\underline{S}_R(f) = \sum_{-\infty}^{\infty} p_k \mu e_k = \sum_k p_k \mu e_k, \quad \overline{S}_R(f) = \sum_{-\infty}^{\infty} p_{k+1} \mu e_k = \sum_k p_{k+1} \mu e_k, \tag{3}$$

называемые соответственно *нижней и верхней* (*лебеговыми*) *интегральными суммами* f (соответствующими разбиению R).

Условимся считать, что $\underline{S}_R(f)$ и $\overline{S}_R(f)$ суть обозначения указанных рядов, а если эти ряды сходятся*), то пусть $\underline{S}_R(f)$ и $\overline{S}_R(f)$ обозначают также суммы этих рядов (числа).

Если f — ограниченная функция на E, то для достаточно больших N все множества e_k с $|k| > N$ — пустые и ряды (3) представляют собой конечные суммы. Другое дело, если f не ограничена на E, тогда ряды (3) могут сходиться и расходиться.

Лебег доказал, что *если для какого-либо разбиения R один из двух рядов* (3) *сходится, то сходится и другой; мало того, эти ряды тогда уже автоматически сходятся для любого другого разбиения R и существуют конечные пределы*

$$\lim_{\delta_R \to 0} \underline{S}_R(f) = \lim_{\delta_R \to 0} \overline{S}_R(f) = \int_E f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}, \tag{4}$$

---

*) Ряд $\sum_{-\infty}^{\infty} u_k$ по определению сходится (абсолютно сходится), если сходятся (абсолютно сходятся) отдельно ряды $\sum_{-\infty}^{-1} u_k$ и $\sum_{0}^{\infty} u_k$. Сумма их сумм называется суммой ряда $\sum_{-\infty}^{\infty} u_k$. В силу свойства (1) и того обстоятельства, что $\mu e_k \geqslant 0$, ряды (3), если сходятся, то абсолютно.