

Пусть $v_1, v_2, \dots, v_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ и φ определено равенством

$$\varphi(w) = \det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ w \end{pmatrix}.$$

Так как $\varphi \in \Lambda^1(\mathbb{R}^n)$, то существует единственное $z \in \mathbb{R}^n$, такое, что

$$\langle w, z \rangle = \varphi(w) = \det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ w \end{pmatrix}.$$

Это z обозначается символом $v_1 \times \dots \times v_{n-1}$ и называется *векторным произведением* векторов v_1, \dots, v_{n-1} . Из этого определения непосредственно вытекают следующие свойства векторного произведения:

$$v_{\sigma(1)} \times \dots \times v_{\sigma(n-1)} = \operatorname{sgn} \sigma \cdot v_{\sigma(1)} \times \dots \times v_{\sigma(n-1)},$$

$$v_1 \times \dots \times av_i \times \dots \times v_{n-1} = a(v_1 \times \dots \times v_{n-1}),$$

$$v_1 \times \dots \times (v_i + v'_i) \times \dots \times v_{n-1} = v_1 \times \dots \times v_i \times \dots \times v_{n-1} + v_1 \times \dots \times v'_i \times \dots \times v_{n-1}.$$

В математике редко имеют дело с „произведениями“, зависящими более чем от двух „сомножителей“. В случае двух векторов $v, w \in \mathbb{R}^3$ получаем более привычно выглядящее обычное произведение $v \times w \in \mathbb{R}^3$. По этой причине часто утверждают, что векторное произведение может быть определено только в \mathbb{R}^3 .

Задачи

4.1*. Пусть e_1, \dots, e_n — стандартный базис в \mathbb{R}^n и $\varPhi_1, \dots, \varPhi_n$ — дуальный базис.

а) Показать, что $\varPhi_{l_1} \wedge \dots \wedge \varPhi_{l_k}(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) = 1$. Какой была бы правая часть, если бы в определение \wedge не входил множитель $\frac{(k+l)!}{k!l!}$?

6) Показать, что $\varPhi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varPhi_{i_k}(v_1, \dots, v_k)$ есть минор

матрицы $\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_k \end{pmatrix}$, получающийся при оставлении столбцов с индексами i_1, \dots, i_k .

4.2. Пусть $f: V \rightarrow V$ — линейное отображение и $\dim V = n$. Тогда $f^*: \Lambda^n(V) \rightarrow \Lambda^n(V)$ должно быть умножением на некоторую константу c . Показать, что $c = \det f$.

4.3. Показать, что если $\omega \in \Lambda^n(V)$ — элемент объема, определяемый T и μ , и $w_1, \dots, w_n \in V$, то

$$|\omega(w_1, \dots, w_n)| = \sqrt{\det(g_{ij})},$$

где $g_{ij} = T(w_i, w_j)$. (Указание: показать, что если v_1, \dots, v_n — ортонормальный базис и $w_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j$, то $g_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} a_{kj}$.)

4.4. Пусть ω — элемент объема в V , определяемый T и μ , и $f: \mathbb{R}^n \rightarrow V$ — изоморфизм, для которого $f^*T = \langle \cdot, \cdot \rangle$ и $[f(e_1), \dots, f(e_n)] = \mu$. Показать, что $f^*\omega = \det$.

4.5. Показать, что если $c: [0, 1] \rightarrow (\mathbb{R}^n)^n$ непрерывно и каждое $(c^1(t), \dots, c^n(t))$ есть базис в \mathbb{R}^n , то $[c^1(0), \dots, c^n(0)] = [c^1(1), \dots, c^n(1)]$. (Указание: рассмотреть $\det \circ c$.)

4.6. а) Что означает $v \times$, если $v \in \mathbb{R}^2$?

б) Показать, что если $v_1, \dots, v_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ линейно независимы, то $[v_1, \dots, v_{n-1}, v_1 \times \dots \times v_{n-1}]$ есть стандартная ориентация в \mathbb{R}^n .

4.7. Показать, что всякое ненулевое $\omega \in \Lambda^n(V)$ является элементом объема, определяемым некоторым внутренним произведением T и ориентацией μ .

4.8. Пусть $\omega \in \Lambda^n(V)$ — элемент объема. Выразить векторное произведение $v_1 \times \dots \times v_{n-1}$ через ω .

4.9*. Вывести следующие свойства векторного произведения в \mathbb{R}^3 :

$$\begin{aligned} a) \quad e_1 \times e_1 &= 0, & e_2 \times e_1 &= -e_3, & e_3 \times e_1 &= e_2, \\ e_1 \times e_2 &= e_3, & e_2 \times e_2 &= 0, & e_3 \times e_2 &= -e_1, \\ e_1 \times e_3 &= -e_2, & e_2 \times e_3 &= e_1, & e_3 \times e_3 &= 0. \end{aligned}$$

$$b) \quad v \times w = (v^2 w^3 - v^3 w^2) e_1 + (v^3 w^1 - v^1 w^3) e_2 + (v^1 w^2 - v^2 w^1) e_3.$$

$$b) \quad |v \times w| = |v| |w| \sin \theta, \text{ где } \theta = \angle(v, w), \\ \langle v \times w, v \rangle = \langle v \times w, w \rangle = 0.$$

$$\Gamma) \quad \langle v, w \times z \rangle = \langle w, z \times v \rangle = \langle z, v \times w \rangle,$$

$$v \times (w \times z) = \langle v, z \rangle w - \langle v, w \rangle z,$$

$$(v \times w) \times z = \langle v, z \rangle w - \langle w, z \rangle v.$$

$$\Delta) \quad |v \times w| = \sqrt{\langle v, v \rangle \cdot \langle w, w \rangle - \langle v, w \rangle^2}.$$

4.10. Пусть $w_1, \dots, w_{n-1} \in \mathbb{R}^n$. Показать, что

$$|w_1 \times \dots \times w_{n-1}| = \sqrt{\det(g_{ij})},$$

где $g_{ij} = \langle w_i, w_j \rangle$. (Указание: применить задачу 4.3 к надлежащему выбранному $(n-1)$ -мерному подпространству в \mathbb{R}^n .)

4.11. Пусть T — внутреннее произведение на V . Линейное отображение $f: V \rightarrow V$ называется *самосопряженным* (относительно T), если $T(x, f(y)) = T(f(x), y)$ для всех $x, y \in V$. Показать, что если $A = (a_{ij})$ — матрица T относительно ортонормального базиса v_1, \dots, v_n , то $a_{ij} = a_{ji}$.

4.12. Пусть $f_1, \dots, f_{n-1}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$. Определим $f_1 \times \dots \times f_{n-1}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ формулой $f_1 \times \dots \times f_{n-1}(p) = f_1(p) \times \dots \times f_{n-1}(p)$. Используя задачу 2.14, вывести формулу для $D(f_1 \times \dots \times f_{n-1})$.

ПОЛЯ И ФОРМЫ

Пусть $p \in \mathbb{R}^n$. Множество всех пар (p, v) , где v пробегает \mathbb{R}^n , будет обозначаться \mathbb{R}_p^n и называться *касательным пространством* к \mathbb{R}^n в точке p . Это множество можно очевидным образом превратить в векторное пространство, положив

$$(p, v) + (p, w) = (p, v + w),$$

$$a(p, v) = (p, av).$$

Вектор $v \in \mathbb{R}^n$ часто изображают в виде стрелки с началом 0 и концом v ; вектор $(p, v) \in \mathbb{R}_p^n$ можно изображать (рис. 4.1) в виде стрелки с теми же направлением и длиной, но с начальной точкой p . Эта стрелка идет от p до $p + v$, и мы поэтому будем называть точку $p + v$ концом вектора (p, v) . Вместо (p, v) мы будем обычно писать v_p (читается: вектор v , приложенный в p).

Векторное пространство \mathbb{R}_p^n находится в столь близком родстве с \mathbb{R}^n , что многие структуры в \mathbb{R}^n имеют аналоги в \mathbb{R}_p^n . В частности, стандартное *внутреннее произведение* $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ на \mathbb{R}_p^n определяется равенством $\langle v_p, w_p \rangle_p = \langle v, w \rangle$,

и за *стандартную ориентацию* на \mathbf{R}_p^n принимается $[(e_1)_p, \dots, (e_n)_p]$.

Любая операция, возможная в векторном пространстве, может быть произведена в каждом \mathbf{R}_p^n , и большая часть этого параграфа представляет собой просто разработку

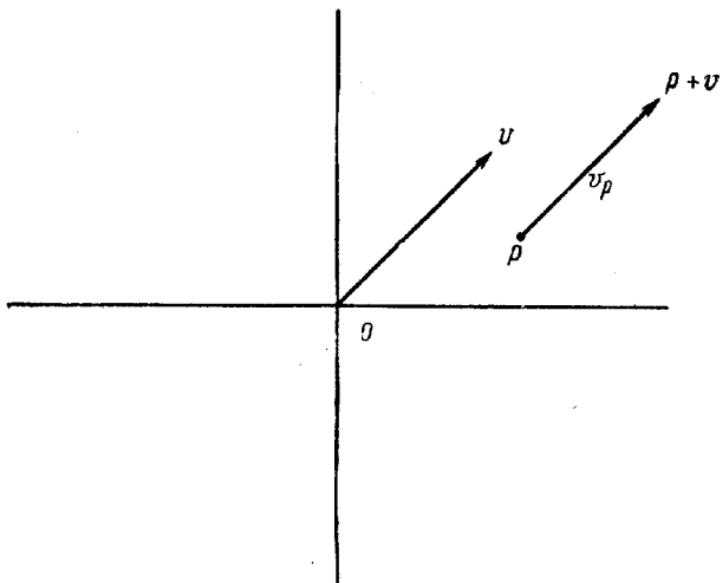


Рис. 4.1.

этой темы. Пожалуй, простейшей операцией в векторном пространстве является выбор в нем вектора. Если такой выбор произведен в каждом \mathbf{R}_p^n , то получаем *векторное поле* (рис. 4.2). Говоря более точно, векторное поле — это функция F , относящая каждому $p \in \mathbf{R}^n$ вектор $F(p) \in \mathbf{R}_p^n$. Для каждого p существуют тогда такие числа $F^1(p), \dots, \dots, F^n(p)$, что

$$F(p) = F^1(p) \cdot (e_1)_p + \dots + F^n(p) \cdot (e_n)_p.$$

Таким образом мы получаем n координатных функций $F^i: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$. Векторное поле F называется непрерывным, дифференцируемым и т. д., если таковы функции F^i . Аналогичные определения могут быть даны для векторных

полей, определенных на открытых подмножествах из \mathbb{R}^n . Операции над векторами порождают соответствующие операции над векторными полями, производимые

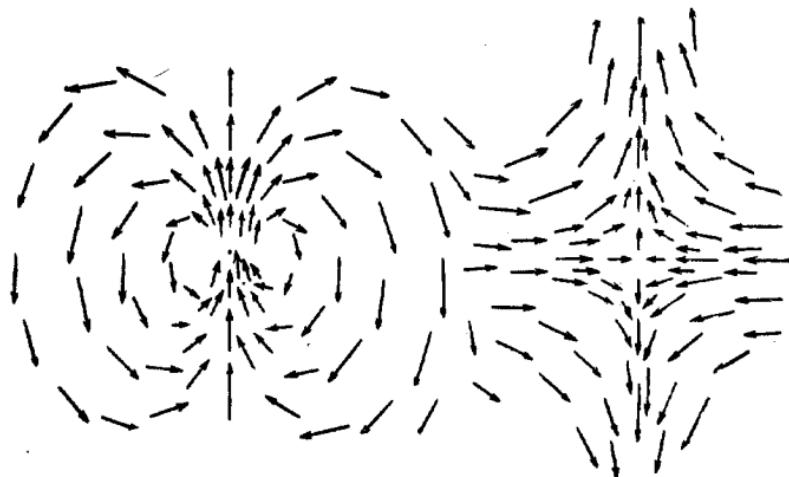


Рис. 4.2.

поточечно. Например, если F и G — векторные поля и f — функция, то полагаем по определению

$$(F + G)(p) = F(p) + G(p),$$

$$\langle F, G \rangle(p) = \langle F(p), G(p) \rangle,$$

$$(f \cdot F)(p) = f(p) F(p).$$

Если F_1, \dots, F_{n-1} — векторные поля на \mathbb{R}^n , то можно аналогичным образом положить по определению

$$(F_1 \times \dots \times F_{n-1})(p) = F_1(p) \times \dots \times F_{n-1}(p).$$

Приведем еще несколько полезных стандартных определений. *Дивергенцией* $\operatorname{div} F$ поля F называют $\sum_{i=1}^n D_i F^i$. Введя формальный символ

$$\nabla = \sum_{i=1}^n D_i e_i,$$

можно написать символически $\operatorname{div} F = \langle \nabla, F \rangle$. При $n = 3$ пишем в соответствии с этой символикой

$$\begin{aligned} (\nabla \times F)(p) = & (D_2 F^3 - D_3 F^2)(e_1)_p + \\ & + (D_3 F^1 - D_1 F^3)(e_2)_p + \\ & + (D_1 F^2 - D_2 F^1)(e_3)_p. \end{aligned}$$

Векторное поле $\nabla \times F$ называется *вихрем* (или *ротором*) поля F и обозначается $\operatorname{curl} F$. Названия „дивергенция“ и „вихрь“ получены из физических соображений, которые будут указаны в конце книги.

Многие аналогичные рассмотрения могут быть применены к функции ω , относящей каждой точке $p \in \mathbb{R}^n$ тензор $\omega(p) \in \Lambda^k(\mathbb{R}_p^n)$; такая функция называется *формой k -й степени* на \mathbb{R}^n или просто *дифференциальной формой*. Обозначая через $\varphi_1(p), \dots, \varphi_n(p)$ базис, дуальный к $(e_1)_p, \dots, (e_n)_p$, имеем

$$\omega(p) = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1, \dots, i_k}(p) [\varphi_{i_1}(p) \wedge \dots \wedge \varphi_{i_k}(p)],$$

где ω_{i_1, \dots, i_k} — некоторые функции. Форма ω называется *непрерывной*, дифференцируемой и т. д., если таковы все функции ω_{i_1, \dots, i_k} . Формы и векторные поля обычно будут неявно предполагаться дифференцируемыми, а под дифференцируемостью с этого момента будет подразумеваться принадлежность классу C^∞ ; это упрощающее предположение избавит нас от необходимости подсчитывать, сколько раз в процессе доказательства проинтегрирована та или иная функция. Определения суммы $\omega + \eta$, произведения $f\omega$ и внешнего произведения $\omega \wedge \eta$ очевидны. Скалярная функция f рассматривается как форма нулевой степени, и $f\omega$ записывается также в виде $f \wedge \omega$.

Если $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируема, то $Df(p) \in \Lambda^1(\mathbb{R}^n)$. Небольшая модификация приводит тогда к форме первой степени df , определяемой равенством

$$df(p)(v_p) = Df(p)(v).$$

Рассмотрим, в частности, формы первой степени $d\pi^l$. Вошло в обычай пользоваться для функции π^l обозначением x^l (в случае \mathbb{R}^3 вместо x^1, x^2 и x^3 часто пишут x, y и z). Эта стандартная запись имеет очевидные недостатки,

но она позволяет выражать многие классические результаты формулами столь же классического вида. Так как $d\pi^i(p)(v_p) = d\pi^i(p)(v_p) = D\pi^i(p)(v) = \pi^i(v) = v^i$, то мы видим, что $dx^1(p), \dots, dx^n(p)$ есть не что иное, как базис, дуальный к $(e_1)_p, \dots, (e_n)_p$. Таким образом, всякую форму k -й степени ω можно записать в виде

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1, \dots, i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

Особый интерес представляет выражение для df .

4.7. Теорема. Если $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ дифференцируема, то

$$df = D_1 f \cdot dx^1 + \dots + D_n f \cdot dx^n.$$

В классической записи:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^n} dx^n.$$

Доказательство. $df(p)(v_p) = Df(p)(v) =$
 $= \sum_{i=1}^n D_i f(p) v^i = \sum_{i=1}^n D_i f(p) dx^i(p)(v_p)$. ■

Пусть теперь задано дифференцируемое отображение $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$. Для всякого $p \in \mathbf{R}^n$ оно порождает линейное отображение $Df(p): \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$. Вновь несколько модифицируя его, получаем линейное отображение $f_*: \mathbf{R}_p^n \rightarrow \mathbf{R}_{f(p)}^m$, определяемое равенством

$$f_*(v_p) = (Df(p)(v))_{f(p)}.$$

Это линейное отображение индуцирует линейное отображение $f^*: \Lambda^k(\mathbf{R}_{f(p)}^m) \rightarrow \Lambda^k(\mathbf{R}_p^n)$. Поэтому каждой форме k -й степени ω на \mathbf{R}^m можно отнести форму k -й степени $f^*\omega$ на \mathbf{R}^n , полагая $(f^*\omega)(p) = f^*(\omega(p))$, т. е.

$$f^*\omega(p)(v_1, \dots, v_k) = \omega(f(p))(f_*(v_1), \dots, f_*(v_k))$$

для всякого набора $v_1, \dots, v_k \in \mathbf{R}_p^{n-1}$.

¹⁾ Если ω — форма нулевой степени, то под $f^*(\omega)$, естественно, понимается $\omega \circ f$. — Прим. ред.

В качестве противоядия к абстрактности этих определений приведем теорему, резюмирующую важные свойства отображения f^* и позволяющую в явном виде вычислять $f^*(\omega)$.

4.8. Теорема. *Если $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ дифференцируемо, то*

$$(1) \quad f^*(dx^i) = \sum_{j=1}^n D_j f^i \cdot dx^j = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f^i}{\partial x^j} dx^j,$$

$$(2) \quad f^*(\omega_1 + \omega_2) = f^*(\omega_1) + f^*(\omega_2),$$

$$(3) \quad f^*(g \cdot \omega) = (g \circ f) \cdot f^*(\omega),$$

$$(4) \quad f^*(\omega \wedge \eta) = f^*(\omega) \wedge f^*(\eta)^1).$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} (1) \quad & f^*(dx^i)(p)(v_p) = dx^i(f(p))(f_*(v_p)) = \\ & = dx^i(f(p))(Df(p)(v))_{f(p)} = \\ & = dx^i(f(p)) \left(\sum_{j=1}^n D_j f^i(p) v^j, \dots, \sum_{j=1}^n D_j f^m(p) v^j \right)_{f(p)} = \\ & = \sum_{j=1}^n D_j f^i(p) v^j = \sum_{j=1}^n D_j f^i(p) dx^j(p)(v_p). \end{aligned}$$

(2), (3) и (4) предоставляем доказать читателю. ■

Повторно применяя теорему 4.8, получаем, например,

$$\begin{aligned} f^*(P dx^1 \wedge dx^2 + Q dx^2 \wedge dx^3) &= \\ &= (P \circ f)[f^*(dx^1) \wedge f^*(dx^2)] + (Q \circ f)[f^*(dx^2) \wedge f^*(dx^3)]. \end{aligned}$$

Выражение, получающееся при раскрытии каждого $f^*(dx^i)$, довольно сложно. (Полезно, однако, помнить, что $dx^i \wedge dx^i = (-1) dx^i \wedge dx^i = 0$.) Рассмотрим специальный случай, где стббит провести такое явное вычисление.

4.9. Теорема. *Если $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ дифференцируемо, то*

$$f^*(h dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n) = (h \circ f)(\det f') dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n.$$

Доказательство. Так как

$$f^*(h dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n) = (h \circ f) f^*(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n),$$

¹⁾ Одним и тем же символом f^* обозначены здесь три, вообще говоря, разных отображения. — Прим. ред.

то достаточно показать, что

$$f^*(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n) = (\det f') dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n.$$

Пусть $p \in \mathbb{R}^n$ и $A = (a_{ij})$ — матрица $f'(p)$. Будем здесь и дальше, где это удобно и не может привести к путанице, опускать p в $dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n(p)$ и подобных выражениях. Тогда

$$\begin{aligned} f^*(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n)(e_1, \dots, e_n) &= \\ &= dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n(f_*e_1, \dots, f_*e_n) = \\ &= dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \left(\sum_{i=1}^n a_{1i}e_i, \dots, \sum_{i=1}^n a_{ni}e_i \right) = \\ &= \det(a_{ij}) \cdot dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n(e_1, \dots, e_n), \end{aligned}$$

согласно теореме 4.6. ■

Важной конструкцией, связанной с формами, является обобщение оператора d , переводящего формы нулевой степени в формы первой степени. Пусть

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1, \dots, i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

Определим форму $(k+1)$ -й степени $d\omega$, дифференциал ω , равенством

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} d\omega_{i_1, \dots, i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} = \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} \sum_{a=1}^n D_a(\omega_{i_1, \dots, i_k}) \cdot dx^a \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}. \end{aligned}$$

4.10. Теорема.

$$(1) \quad d(\omega + \eta) = d\omega + d\eta.$$

(2) Если ω — форма k -й степени, то

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta.$$

$$(3) \quad d(d\omega) = 0. \text{ Кратко, } d^2 = 0.$$

(4) Если ω — форма k -й степени на \mathbb{R}^m и $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ дифференцируемо, то $f^*(d\omega) = d(f^*\omega)$.

Доказательство.

(1) Предоставляем читателю.

(2) Формула верна для $\omega = dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ и $\eta = dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_l}$, поскольку все члены обращаются в 0. Справедливость формулы легко проверяется, когда ω — форма нулевой степени. Формула для общего случая получается из (1) и этих двух утверждений.

(3) Так как

$$d\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \sum_{\alpha=1}^n D_\alpha(\omega_{i_1, \dots, i_k}) dx^\alpha \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k},$$

то

$$d(d\omega) = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n D_{\alpha, \beta}(\omega_{i_1, \dots, i_k}) dx^\beta \wedge dx^\alpha \wedge$$

$$\wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

Но в этой сумме члены каждой пары

$$D_{\alpha, \beta}(\omega_{i_1, \dots, i_k}) dx^\beta \wedge dx^\alpha \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

и

$$D_{\beta, \alpha}(\omega_{i_1, \dots, i_k}) dx^\alpha \wedge dx^\beta \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

взаимно уничтожаются.

(4) Это очевидно, если ω — форма нулевой степени¹⁾. Предположим по индукции, что (4) верно, когда ω — форма k -й степени. Достаточно доказать (4) для формы $(k+1)$ -й степени вида $\omega \wedge dx^i$. Имеем

$$\begin{aligned} f^*(d(\omega \wedge dx^i)) &= f^*(d\omega \wedge dx^i + (-1)^k \omega \wedge d(dx^i)) = \\ &= f^*(d\omega \wedge dx^i) = f^*(d\omega) \wedge f^*(dx^i) = \\ &= d(f^*\omega \wedge f^*(dx^i)) = d(f^*(\omega \wedge dx^i)). \blacksquare \end{aligned}$$

¹⁾ Приведем все же доказательство. Применяя теоремы 4.7, 4.8 и 2.9, получаем

$$\begin{aligned} f^*(d\omega) &= f^* \left(\sum_{\alpha=1}^m D_\alpha \omega \cdot dx^\alpha \right) = \sum_{\alpha=1}^m (D_\alpha \omega \circ f) f^*(dx^\alpha) = \\ &= \sum_{\alpha=1}^m \sum_{\beta=1}^n (D_\alpha \omega \circ f) D_\beta f^\alpha \cdot dx^\beta = \\ &= \sum_{\beta=1}^n D_\beta (\omega \circ f) dx^\beta = d(\omega \circ f) = d(f^*\omega). \end{aligned}$$

— Прим. ред.

Форма называется *замкнутой*, если $d\omega = 0$, и *точной*, если $\omega = d\eta$ для некоторого η . Теорема 4.10 показывает, что всякая точная форма замкнута, и естественно спросить, не будет ли, и обратно, всякая замкнутая форма точна. Если ω — форма первой степени $Pdx + Qdy$ на \mathbf{R}^2 , то

$$\begin{aligned} d\omega &= (D_1Pdx + D_2Pdy) \wedge dx + (D_1Qdx + D_2Qdy) \wedge dy = \\ &= (D_1Q - D_2P)dx \wedge dy. \end{aligned}$$

Таким образом, если $d\omega = 0$, то $D_1Q = D_2P$. Задачи 2.21 и 3.34 показывают, что на \mathbf{R}^2 существует такая форма нулевой степени f , что $\omega = df = D_1f dx + D_2f dy$. Однако если ω определено только на подмножестве \mathbf{R}^2 , то такой функции может не существовать. Классическим примером является форма

$$\omega = \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy,$$

определенная на $\mathbf{R}^2 \setminus 0$. Эта форма обычно обозначается $d\theta$ (где θ определено в задаче 3.41), так как (задача 4.21) она равна $d\theta$ на области $\{(x, y): x < 0 \text{ или } x \geq 0 \text{ и } y \neq 0\}$ определения θ . Заметим, однако, что θ нельзя определить непрерывным образом на всем множестве $\mathbf{R}^2 \setminus 0$. Если $\omega = df$ для некоторой функции $f: \mathbf{R}^2 \setminus 0 \rightarrow \mathbf{R}$, то $D_1f = D_1\theta$ и $D_2f = D_2\theta$, так что $f = \theta + \text{const}$, а это показывает, что такого f существовать не может.

Предположим, что $\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i dx^i$ — форма первой степени на \mathbf{R}^n , оказавшаяся равной $df = \sum_{i=1}^n D_i f dx^i$. Очевидно, можно считать, что $f(0) = 0$. Как в задаче 2.35, имеем

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx) dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^n D_i f(tx) \cdot x^i dt = \\ &= \int_0^1 \sum_{i=1}^n \omega_i(tx) \cdot x^i dt. \end{aligned}$$

Это наводит на мысль, что для отыскания f по заданному ω следует рассмотреть функцию $I\omega$, определяемую равенством

$$I\omega(x) = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \omega_i(tx) \cdot x^i dt.$$

Заметим, что для того, чтобы определение $I\omega$ имело смысл, нужно лишь, чтобы ω было определено на открытом

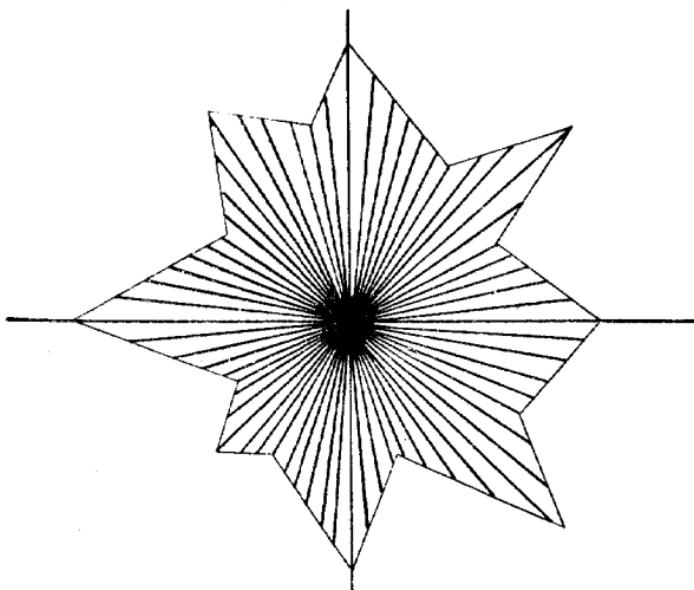


Рис. 4.3.

множестве $A \subset \mathbb{R}^n$, обладающем тем свойством, что вместе со всяким $x \in A$ весь прямолинейный отрезок, соединяющий 0 и x , содержится в A . Такое открытое множество называется *звездным* относительно 0 (рис. 4.3). Довольно сложное вычисление показывает, что (на звездном открытом множестве) равенство $\omega = d(I\omega)$ действительно имеет место, лишь бы ω удовлетворяло необходимому условию $d\omega = 0$. Это вычисление, равно как и определение $I\omega$, можно значительно обобщить.

4.11. Теорема (лемма Пуанкаре). *Всякая замкнутая форма на открытом множестве $A \subset \mathbb{R}^n$, звездном относительно 0 , точна.*

Доказательство. Мы определим функцию I , относящую всякой форме l -й степени некоторую форму $(l-1)$ -й степени (для каждого l) так, что $I(0) = 0$ и $\omega = I(d\omega) + d(I\omega)$ для всякой формы ω . При $d\omega = 0$ будем иметь тогда $\omega = d(I\omega)$. Пусть

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_l} \omega_{i_1, \dots, i_l} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_l}.$$

Так как A звездно, то можно положить

$$I\omega(x) = \sum_{i_1 < \dots < i_l} \sum_{a=1}^l (-1)^{a-1} \left(\int_0^1 t^{l-1} \omega_{i_1, \dots, i_l}(tx) dt \right) x^{i_a} \times \\ \times dx^{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx^{i_a}} \wedge \dots \wedge dx^{i_l},$$

где символ \wedge над dx^{i_a} означает, что dx^{i_a} нужно опустить. Тождество $\omega = I(d\omega) + d(I\omega)$ доказывается прямым вычислением. Используя задачу 3.32, имеем

$$d(I\omega) = l \cdot \sum_{i_1 < \dots < i_l} \left(\int_0^1 t^{l-1} \omega_{i_1, \dots, i_l}(tx) dt \right) dx^{i_1} \wedge \dots \\ \dots \wedge dx^{i_l} + \\ + \sum_{i_1 < \dots < i_l} \sum_{a=1}^l \sum_{j=1}^n (-1)^{a-1} \left(\int_0^1 t^l D_j(\omega_{i_1, \dots, i_l})(tx) dt \right) \times \\ \times x^{i_a} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx^{i_a}} \wedge \dots \wedge dx^{i_l}.$$

(Почему вместо t^{l-1} появилось t^l ?) С другой стороны,

$$d\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_l} \sum_{j=1}^n D_j(\omega_{i_1, \dots, i_l}) dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_l}$$

и, применяя I к форме $(l+1)$ -й степени $d\omega$, получаем

$$\begin{aligned} I(d\omega) &= \sum_{i_1 < \dots < i_l} \sum_{j=1}^n \left(\int_0^1 t^l D_j(\omega_{i_1}, \dots, i_l)(tx) dt \right) x^j dx^{i_1} \wedge \dots \\ &\quad \dots \wedge dx^{i_l} = \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_l} \sum_{j=1}^n \sum_{\alpha=1}^l (-1)^{\alpha-1} \left(\int_0^1 t^\alpha D_j(\omega_{i_1}, \dots, i_l)(tx) dt \right) \times \\ &\quad \times x^{i_\alpha} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx^{i_\alpha}} \wedge \dots \wedge dx^{i_l}. \end{aligned}$$

При сложении полученных выражений тройные суммы взаимно уничтожаются и мы будем иметь

$$\begin{aligned} d(I\omega) + I(d\omega) &= \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_l} l \cdot \left(\int_0^1 t^{l-1} \omega_{i_1}, \dots, i_l(tx) dt \right) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_l} + \\ &+ \sum_{i_1 < \dots < i_l} \sum_{j=1}^n \left(\int_0^1 t^l x^j D_j(\omega_{i_1}, \dots, i_l)(tx) dt \right) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_l} = \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_l} \left(\int_0^1 \frac{d}{dt} [t^l \omega_{i_1}, \dots, i_l(tx)] dt \right) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_l} = \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_l} \omega_{i_1}, \dots, i_l dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_l} = \omega. \blacksquare \end{aligned}$$

Задачи

4.13. а) Пусть $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ и $g: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^p$. Показать, что $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ и $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

б) Показать, что если $f, g: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$, то $d(fg) = f dg + g df$.

4.14. Пусть c — дифференцируемая кривая в \mathbf{R}^n , т. е. дифференцируемая функция $c: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^n$. Определим *касательный вектор* v к кривой c в точке t формулой $c_*((e_1)_t) = ((c^1)'(t), \dots, (c^n)'(t))_{c(t)}$. Показать, что если $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$, то касательным вектором к кривой $f \circ c$ в точке t служит $f_*(v)$.

4.15. Пусть $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ и кривая $c: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$ определена формулой $c(t) = (t, f(t))$. Показать, что конец касательного вектора,

проведенного к кривой c в точке t , лежит на касательной к графику f , проведенной в точке $(t, f(t))$.

4.16. Пусть кривая $c: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^n$ такова, что $|c(t)| = 1$ для всех t . Показать, что $c(t)_{c(t)}$ и касательный вектор к c в точке t перпендикулярны.

4.17. Пусть $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$. Определим векторное поле \mathbf{f} формулой $\mathbf{f}(p) = f(p)_p \in \mathbf{R}_p^n$.

а) Показать, что любое векторное поле F на \mathbf{R}^n есть поле вида \mathbf{f} для некоторого f .

б) Показать, что $\operatorname{div} \mathbf{f} = \operatorname{tr} f'$ ¹⁾.

4.18. Пусть $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$. Определим векторное поле $\operatorname{grad} f$ формулой

$$(\operatorname{grad} f)(p) = D_1 f(p) \cdot (e_1)_p + \dots + D_n f(p) \cdot (e_n)_p.$$

Очевидно, можно писать также $\operatorname{grad} f = \nabla f$. Полагая $\nabla f(p) = w_p$ доказать, что $D_v f(p) = \langle v, w \rangle$, и вывести отсюда, что $\nabla f(p)$ является направлением наиболее быстрого изменения функции f вблизи точки p .

4.19. Пусть F — векторное поле на \mathbf{R}^3 . Определим формы

$$\omega_F^1 = F^1 dx + F^2 dy + F^3 dz,$$

$$\omega_F^2 = F^1 dy \wedge dz + F^2 dz \wedge dx + F^3 dx \wedge dy,$$

$$\omega_F^3 = (F^1 + F^2 + F^3) dx \wedge dy \wedge dz.$$

а) Доказать, что

$$df = \omega_{\operatorname{grad} f}^1,$$

$$d(\omega_F^1) = \omega_{\operatorname{curl} F}^2,$$

$$d(\omega_F^2) = \omega_{\operatorname{div} F}^3.$$

б) Используя (а), доказать, что

$$\operatorname{curl}(\operatorname{grad} f) = 0,$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{curl} F) = 0.$$

в) Показать, что если F — векторное поле на звездном открытом множестве A и $\operatorname{curl} F = 0$, то $F = \operatorname{grad} f$ для некоторой функции $f: A \rightarrow \mathbf{R}$. Аналогично, в случае $\operatorname{div} F = 0$ показать, что $F = \operatorname{curl} G$ для некоторого векторного поля G на A .

4.20. Пусть $f: U \rightarrow \mathbf{R}^n$ — дифференцируемая функция, имеющая дифференцируемую обратную $f^{-1}: f(U) \rightarrow \mathbf{R}^n$. Предположим, что всякая замкнутая форма на $f(U)$ точна. Показать, что то же верно для U . (Указание: при $d\omega = 0$ и $f^*\omega = d\eta$ рассмотреть $(f^{-1})^*\eta$.)

1) $\operatorname{tr} f'$ — след матрицы f' — определяется как сумма всех элементов, стоящих на главной диагонали. — Прим. перев.

4.21*. Доказать, что

$$d\theta = \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

на всей области определения θ (задача 3.41).

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ГЕОМЕТРИИ

Сингулярным n -мерным кубом в A называется непрерывная функция $c: [0, 1]^n \rightarrow A$ (где $[0, 1]^n$ означает n -кратное произведение $[0, 1] \times \dots \times [0, 1]$ и A — открытое множество в \mathbf{R}^m с $m \geq n$). Обычно \mathbf{R}^0 и $[0, 1]^0$ обозначаются символом $\{0\}$. Тогда сингулярный нульмерный куб в A есть функция $f: \{0\} \rightarrow A$, или, что то же самое, — точка в A . Сингулярный одномерный куб часто называют *кривой*. Особенно простым, но и особенно важным примером сингулярного n -мерного куба является *стандартный n -мерный куб* $I^n: [0, 1]^n \rightarrow \mathbf{R}^n$, определяемый равенством $I^n(x) = x$ для всех $x \in [0, 1]^n$.

Нам нужно будет рассматривать формальные суммы сингулярных n -мерных кубов в A , умноженных на целые коэффициенты, т. е. выражения вида

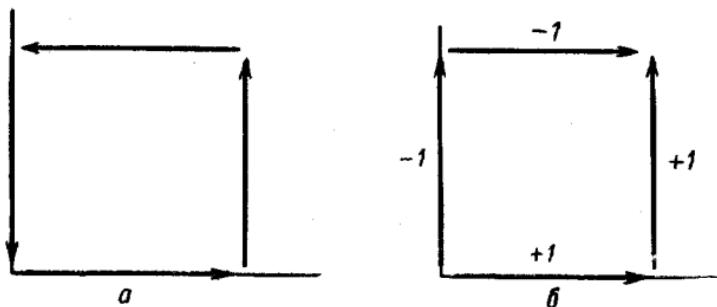
$$2c_1 + 3c_2 - 4c_3,$$

где c_1 , c_2 и c_3 — сингулярные n -мерные кубы в A . Такая конечная сумма сингулярных n -мерных кубов с целыми коэффициентами называется *сингулярной n -мерной цепью* в A . В частности, сингулярный n -мерный куб c рассматривается также как сингулярная n -мерная цепь $1 \cdot c$. Сингулярные n -мерные цепи можно естественным образом складывать и умножать на целые числа. Например,

$$2(c_1 + 3c_4) + (-2)(c_1 + c_3 + c_2) = -2c_2 - 2c_3 + 6c_4.$$

Для каждой сингулярной n -мерной цепи c в A мы определим сингулярную $(n-1)$ -мерную цепь в A , называемую *границей* цепи c и обозначаемую ∂c . Границу для I^2 , например, можно было бы определить как сумму четырех сингулярных одномерных кубов, проходящих против часовой стрелки вдоль границы $[0, 1]^2$, как указано на рис. 4.4, а. Но на самом деле значительно удобнее определять ∂I^2 как сумму с указанными коэффициентами четырех сингулярных

одномерных кубов, изображенных на рис. 4.4, б. Точное определение ∂I^n требует некоторых предварительных понятий. Для каждого индекса i от 1 до n определим два



Р и с. 4.4.

сингулярных $(n - 1)$ -мерных куба $I_{(i, 0)}^n$ и $I_{(i, 1)}^n$ следующим образом. Для каждого $x \in [0, 1]^{n-1}$ положим

$$\begin{aligned} I_{(i, 0)}^n(x) &= I^n(x^1, \dots, x^{i-1}, 0, x^i, \dots, x^{n-1}) = \\ &= (x^1, \dots, x^{i-1}, 0, x^i, \dots, x^{n-1}), \\ I_{(i, 1)}^n(x) &= I^n(x^1, \dots, x^{i-1}, 1, x^i, \dots, x^{n-1}) = \\ &= (x^1, \dots, x^{i-1}, 1, x^i, \dots, x^{n-1}). \end{aligned}$$

Назовем $I_{(i, 0)}^n$ ($i, 0$)-гранью I^n , а $I_{(i, 1)}^n$ ($i, 1$)-гранью (рис. 4.5) и положим

$$\partial I^n = \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=0, 1} (-1)^{i+\alpha} I_{(i, \alpha)}^n.$$

Для произвольного сингулярного n -мерного куба $c: [0, 1]^n \rightarrow A$ мы сначала определим (i, α) -грань

$$c_{(i, \alpha)} = c \circ (I_{(i, \alpha)}^n)$$

и затем положим

$$\partial c = \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=0, 1} (-1)^{i+\alpha} c_{(i, \alpha)}.$$

Наконец, определим границу сингулярной n -мерной цепи $\sum a_i c_i$ формулой

$$\partial (\sum a_i c_i) = \sum a_i \partial (c_i).$$

Хотя этих нескольких определений достаточно для всех приложений в этой книге, мы приведем еще одно типичное свойство символа ∂ .

4.12. Теорема. $\partial(\partial c) = 0$ для всякой сингулярной n -мерной цепи c в A . Коротко, $\partial^2 = 0$.

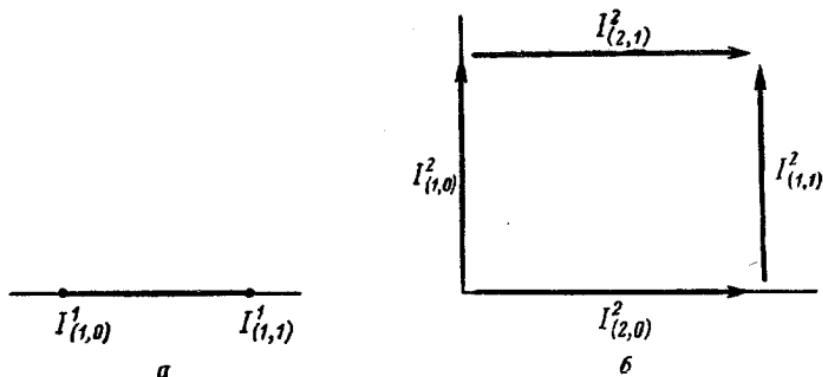


Рис. 4.5.

Доказательство. Пусть $i \leq j$. Рассмотрим $(I_{(i, \alpha)}^n)_{(j, \beta)}$. Если $x \in [0, 1]^{n-2}$, то, вспоминая определение (j, β) -границы сингулярного n -мерного куба, имеем

$$\begin{aligned} (I_{(i, \alpha)}^n)_{(j, \beta)}(x) &= I_{(i, \alpha)}^n(I_{(j, \beta)}^{n-1}(x)) = \\ &= I_{(i, \alpha)}^n(x^1, \dots, x^{j-1}, \beta, x^j, \dots, x^{n-2}) = \\ &= I^n(x^1, \dots, x^{i-1}, \alpha, x^i, \dots, x^{j-1}, \beta, x^j, \dots, x^{n-2}). \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} (I_{(j+1, \beta)}^n)_{(i, \alpha)} &= I_{(j+1, \beta)}^n(I_{(i, \alpha)}^{n-1}(x)) = \\ &= I_{(j+1, \beta)}^n(x^1, \dots, x^{i-1}, \alpha, x^i, \dots, x^{n-2}) = \\ &= I^n(x^1, \dots, x^{i-1}, \alpha, x^i, \dots, x^{j-1}, \beta, x^j, \dots, x^{n-2}). \end{aligned}$$

Таким образом, $(I_{(i, \alpha)}^n)_{(j, \beta)} = (I_{(j+1, \beta)}^n)_{(i, \alpha)}$ при $i \leq j$. (Полезно проверить это на рис. 4.5.) Отсюда легко следует, что $(c_{(i, \alpha)})_{(j, \beta)} = (c_{(j+1, \beta)})_{(i, \alpha)}$ при $i \leq j$ для любого син-

тулярного n -мерного куба c . Но

$$\begin{aligned}\partial(\partial c) &= \partial\left(\sum_{i=1}^n \sum_{a=0,1} (-1)^{i+a} c_{(i,a)}\right) = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{a=0,1} \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{\beta=0,1} (-1)^{i+a+j+\beta} (c_{(i,a)})_{(j,\beta)}.\end{aligned}$$

В эту сумму $(c_{(i,a)})_{(j,\beta)}$ и $(c_{(j+1,\beta)})_{(i,a)}$, где $1 \leq i \leq j \leq n-1$, входят с противоположными знаками. Поэтому ¹⁾ все члены попарно взаимно уничтожаются и $\partial(\partial c) = 0$. Поскольку теорема верна для всякого сингулярного n -мерного куба, она верна также для любой сингулярной n -мерной цепи. ■

Естественно задаться вопросом, верно ли обращение теоремы 4.12, т. е. всегда ли при $dc = 0$ имеется сингулярная n -мерная цепь c' в A , такая, что $c = dc'$. Ответ зависит от A и, вообще говоря, отрицателен. Например, пусть $c: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus 0$ определено равенством $c(t) = (\sin 2\pi nt, \cos 2\pi nt)$, где n — ненулевое целое. Тогда $c(1) = c(0)$, так что $dc = 0$. Но (задача 4.26) не существует никакой сингулярной двумерной цепи c' в $\mathbb{R}^2 \setminus 0$, для которой бы $dc' = c$.

Задачи

4.22. Пусть \mathcal{S} — множество всех сингулярных n -мерных кубов и \mathbf{Z} — множество всех целых чисел. Сингулярная n -мерная цепь ²⁾ есть такая функция $f: \mathcal{S} \rightarrow \mathbf{Z}$, что $f(c) = 0$ для всех, кроме конечного множества сингулярных n -мерных кубов c . Определим $f+g$ и nf формулами $(f+g)(c) = f(c) + g(c)$ и $(nf)(c) = nf(c)$. Показать, что $f+g$ и nf принадлежат \mathcal{S} . Для всякого $c \in \mathcal{S}$ мы будем обозначать через c также такую функцию f , что $f(c) = 1$ и $f(c') = 0$ для всех $c' \neq c$. Показать, что всякая сингулярная n -мерная цепь f может быть записана в виде $a_1c_1 + \dots + a_kc_k$ с некоторыми целыми коэффициентами a_1, \dots, a_k и сингулярными n -мерными кубами c_1, \dots, c_k .

4.23. Определим для заданных $R > 0$ и $n \neq 0$ сингулярный одномерный куб $c_{R,n}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus 0$ формулой $c_{R,n}(t) = (R \cos 2\pi nt, R \sin 2\pi nt)$. Показать, что существует сингулярный

¹⁾ Легко проверить, что $\{(k, l): 1 \leq k \leq n, 1 \leq l \leq n-1\}$ распадается на пары $(i, j), (j+1, i)$ ($1 \leq i \leq j \leq n-1$). — Прим. ред.

²⁾ По общепринятой терминологии это не цепь, а коцепь. — Прим. ред.

двумерный куб $c: [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus 0$, для которого $c_{R_1, n} - c_{R_2, n} = dc$.

4.24. Показать, что если c — сингулярный одномерный куб в $\mathbb{R}^2 \setminus 0$, у которого $c(0) = c(1)$, то существует такое целое n , что $c - c_{1, n} = dc^2$ для некоторого двумерного куба c^2 . (Указание: сначала разбить $[0, 1]$ так, чтобы каждое $c([t_{i-1}, t_i])$ лежало по одну сторону от некоторой прямой, проходящей через 0.)

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА

Тот факт, что $d^2 = 0$ и $\delta^2 = 0$, не говоря уже о типографской схожести символов δ и d , наводит на мысль, что между формами и цепями существует какая-то связь. Эта связь устанавливается интегрированием форм по цепям. В дальнейшем будут рассматриваться только дифференцируемые сингулярные n -мерные кубы.

Пусть ω — форма k -й степени на $[0, 1]^k$. Тогда $\omega = f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k$ с однозначно определенной функцией f . Мы положим

$$\int_{[0, 1]^k} \omega = \int_{[0, 1]^k} f.$$

Это равенство можно было бы записать также в виде

$$\int_{[0, 1]^k} f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k = \int_{[0, 1]^k} f(x^1, \dots, x^k) dx^1 \dots dx^k$$

— это одно из оснований для введения функций x^i . Если теперь ω — форма k -й степени на A , а c — сингулярный k -мерный куб в A , то мы положим

$$\int_c \omega = \int_{[0, 1]^k} c^* \omega.$$

Заметим, что, в частности,

$$\begin{aligned} \int_k f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k &= \int_{[0, 1]^k} (I^k)^*(f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k) = \\ &= \int_{[0, 1]^k} f(x^1, \dots, x^k) dx^1 \dots dx^k. \end{aligned}$$

Особое определение требуется для случая $k = 0$. Форма ω нулевой степени есть функция. Для каждого сингулярного нульмерного куба $c: \{0\} \rightarrow A$ в A положим

$$\int_c \omega = \omega(c(0)).$$

Наконец, интеграл от ω по сингулярной k -мерной цепи $c = \sum a_i c_i$ определим формулой

$$\int_c \omega = \sum a_i \int_{c_i} \omega.$$

Интеграл от формы первой степени по сингулярной одномерной цепи часто называют *криволинейным интегралом*. Если $P dx + Q dy$ — форма первой степени на \mathbb{R}^2 и $c: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ — сингулярный одномерный куб (кривая), то можно доказать (но мы не будем этого делать), что

$$\int_c P dx + Q dy = \lim \sum_{i=1}^n [c^1(t_i) - c^1(t_{i-1})] P(t^i) + [c^2(t_i) - c^2(t_{i-1})] Q(t^i),$$

где t_0, \dots, t_n — разбиение отрезка $[0, 1]$, t^i произвольно выбрано в $[t_{i-1}, t_i]$ и предел берется по всем разбиениям при стремлении к 0 наибольшего из $|t_i - t_{i-1}|$. Правую часть часто принимают за определение $\int_c P dx + Q dy$.

Такое определение естественно, поскольку входящие в него суммы очень похожи на суммы, входящие в определение обычного интеграла. Однако с подобным выражением почти невозможно работать, и его быстро преобразуют в интеграл, эквивалентный $\int_{[0, 1]} c^*(P dx + Q dy)$. Анало-

гичные определения для *интегралов по поверхности*, т. е. интегралов от форм второй степени по сингулярным двумерным кубам, еще более сложны и трудноприменимы. Это одна из причин того, что мы уклонились от такого подхода. Другая причина заключается в том, что данное здесь определение сохраняет смысл и в более общей ситуации, рассматриваемой в гл. 5.

Связь между формами, цепями, d и ∂ наиболее четко выражается теоремой Стокса, которую часто называют основной теоремой многомерного анализа (при $k = 1$ и $c = I^1$ это действительно основная теорема дифференциального и интегрального исчисления).

4.13. Теорема Стокса. *Пусть ω — форма $(k-1)$ -й степени на A и c — сингулярная k -мерная цепь в A . Тогда*

$$\int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega.$$

Доказательство. Предположим сначала, что $c = I^k$ и ω — форма $(k-1)$ -й степени на $[0, 1]^k$. Тогда ω есть сумма форм $(k-1)$ -й степени вида

$$f dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^l} \wedge \dots \wedge dx^k$$

и достаточно доказать теорему для каждой из них. А это достигается непосредственным вычислением.

Заметим, что

$$\begin{aligned} & \int_{[0, 1]^{k-1}} I_{(j, a)}^k (f dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^l} \wedge \dots \wedge dx^k) = \\ &= \begin{cases} 0 & \text{при } j \neq l, \\ \int_{[0, 1]^k} f(x^1, \dots, a, \dots, x^k) dx^1 \dots dx^k & \text{при } j = l. \end{cases} \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} & \int_{\partial I^k} f dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^l} \wedge \dots \wedge dx^k = \\ &= \sum_{j=1}^k \sum_{a=0, 1} (-1)^{l+a} \int_{[0, 1]^{k-1}} I_{(j, a)}^k (f dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^l} \wedge \dots \wedge dx^k) = \\ &= (-1)^{l+1} \int_{[0, 1]^k} f(x^1, \dots, 1, \dots, x^k) dx^1 \dots dx^k + \\ &+ (-1)^l \int_{[0, 1]^k} f(x^1, \dots, 0, \dots, x^k) dx^1 \dots dx^k. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \int_{I^k} d(f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^i \wedge \dots \wedge \widehat{dx^k}) &= \\ = \int_{[0,1]^k} D_i f dx^i \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^k &= \\ &= (-1)^{i-1} \int_{[0,1]^k} D_i f. \end{aligned}$$

Применяя теорему Фубини и теорему Ньютона — Лейбница, получаем

$$\begin{aligned} \int_{I^k} d(f dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^k) &= \\ = (-1)^{i-1} \int_0^1 \dots \left(\int_0^1 D_i f(x^1, \dots, x^k) dx^i \right) \times & \\ \times dx^1 \dots \widehat{dx^i} \dots dx^k &= \\ = (-1)^{i-1} \int_0^1 \dots \int_0^1 [f(x^1, \dots, 1, \dots, x^k) - & \\ - f(x^1, \dots, 0, \dots, x^k)] dx^1 \dots \widehat{dx^i} \dots dx^k &= \\ = (-1)^{i-1} \int_{[0,1]^k} f(x^1, \dots, 1, \dots, x^k) dx^1 \dots dx^k + & \\ + (-1)^i \int_{[0,1]^k} f(x^1, \dots, 0, \dots, x^k) dx^1 \dots dx^k. & \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\int_{I^k} d\omega = \int_{\partial I^k} \omega.$$

Если теперь c — произвольный сингулярный k -мерный куб, то из определений следует, что

$$\int_{\partial c} \omega = \int_{\partial I^k} c^* \omega.$$

Поэтому

$$\int_c d\omega = \int_{I^k} c^*(d\omega) = \int_{I^k} d(c^*\omega) = \int_{\partial I^k} c^*\omega = \int_{\partial c} \omega.$$

Наконец, для произвольной сингулярной k -мерной цепи $\sum a_i c_i$ имеем

$$\int_c d\omega = \sum a_i \int_{c_i} d\omega = \sum a_i \int_{\partial c_i} \omega = \int_{\partial c} \omega. \blacksquare$$

Теорема Стокса обладает тремя важными характерными признаками многих больших теорем.

1. Она тривиальна.
2. Тривиальна она потому, что все входящие в нее выражения определены надлежащим образом.
3. Она имеет важные следствия.

Так как вся эта глава по сути дела состоит из определений, которые сделали возможными формулировку и доказательство теоремы Стокса, то читатель охотно признает за теоремой Стокса первые два из этих признаков. Остающаяся часть книги посвящена подтверждению третьего.

Задачи

4.25. (Независимость от способа параметризации.) Пусть c — сингулярный k -мерный куб и $p: [0, 1]^k \rightarrow [0, 1]^k$ — такое взаимно однозначное отображение, что $p([0, 1]^k) = [0, 1]^k$ и $\det p'(x) \geq 0$ для всех $x \in [0, 1]^k$. Показать, что

$$\int_c \omega = \int_{c \circ p} \omega$$

для любой формы k -й степени ω .

4.26. Показать, что $\int_c d\theta = 2\pi n$, и, используя теорему Стокса, вывести отсюда, что $c_{R,n} \neq dc$ для всякой сингулярной двумерной цепи c в $R^2 \setminus 0$ (напомним, что $c_{R,n}$ было определено в задаче 4.23).

4.27. Показать, что целое n в задаче 4.24 единственno. Это число называется *порядком* кривой c относительно 0.

4.28. Напомним, что C обозначает множество всех комплексных чисел. Пусть $f: C \rightarrow C$ задано равенством $f(z) = z^n + a_1z^{n-1} + \dots + a_n$, где $a_1, \dots, a_n \in C$. Определим сингулярный одномерный куб $c_{R,f}: [0, 1] \rightarrow C \setminus 0$ формулой $c_{R,f} = f \circ c_{R,1}$ и сингулярный двумерный куб c с равенством $c(s, t) = tc_{R,n}(s) + (1-t)c_{R,f}(s)$.

а) Показать, что $dc = c_{R,f} - c_{R,n}$ и что $c([0, 1] \times [0, 1]) \subset C \setminus 0$, если R достаточно велико.

б) Используя задачу 4.26, доказать основную теорему алгебры: всякий полином $z^n + a_1z^{n-1} + \dots + a_n$ с коэффициентами $a_i \in C$ имеет корень в C .

4.29. Пусть ω — форма первой степени fdx на $[0, 1]$ и $f(0) = f(1)$. Показать, что существует единственное число λ , такое, что $\omega - \lambda dx = dg$ для некоторой функции g , у которой $g(0) = g(1)$. (Указание: для нахождения λ проинтегрировать $\omega - \lambda dx = dg$ на $[0, 1]$.)

4.30. Пусть ω — замкнутая форма первой степени на $R^2 \setminus 0$. Доказать, что

$$\omega = \lambda d\theta + dg$$

для некоторых $\lambda \in R$ и $g: R^2 \setminus 0 \rightarrow R$. (Указание: показать, что все числа λ_R в $c_{R^*}(\omega) = \lambda_R dx + d(g_R)$ имеют одно и то же значение λ .)

4.31. Показать, что если $\omega \neq 0$, то существует цепь c , для которой $\int\limits_c \omega \neq 0$. Используя этот факт, теорему Стокса и равенство $d^2 = 0$, доказать, что $d^2 = 0$.

4.32. а) Пусть c_1, c_2 — такие сингулярные одномерные кубы, что $c_1(0) = c_2(0)$ и $c_1(1) = c_2(1)$. Показать, что существует сингулярный двумерный куб c , у которого $dc = c_1 - c_2 + c_3 + c_4$, где c_3 и c_4 — вырожденные кубы, т. е. $c_3[0, 1]$ и $c_4[0, 1]$ — точки. Вывести отсюда, что если форма ω точна, то $\int\limits_{c_1} \omega =$

$= \int\limits_{c_2} \omega$. Дать контрпример на $R^2 \setminus 0$ для случая, когда ω лишь замкнута.

б) Показать, что если ω — такая форма на подмножестве R^2 , что $\int\limits_{c_1} \omega = \int\limits_{c_2} \omega$ для всех c_1 и c_2 , у которых $c_1(0) = c_2(0)$ и $c_1(1) = c_2(1)$, то ω точна. (Указание: рассмотреть задачи 2.21 и 3.34.)

4.33. (Элементы теории функций комплексного переменного.) Функцию $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ называют дифференцируемой в точке $z_0 \in \mathbb{C}$, если существует предел

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

(Под знаком предела — отношение двух комплексных чисел, так что это определение совершенно отлично от данного в гл. 2.) Если f дифференцируема в каждой точке z открытого множества A и f' непрерывна на A , то функцию f называют аналитической на A .

а) Показать, что функция $f(z) = z$ аналитична, а $f(z) = \bar{z}$ (где $x + iy = x - iy$) нет. Показать, что сумма, произведение и частное аналитических функций — аналитические функции.

б) Показать, что если $f = u + iv$ аналитична на A , то u и v удовлетворяют условиям Коши — Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

(Указание: воспользоваться тем фактом, что

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

должен быть одним и тем же для $z = z_0 + (x + i0)$ и $z = z_0 + (0 + iy)$ с $x, y \rightarrow 0$ (если u и v непрерывно дифференцируемы, то верно также обратное утверждение, но его труднее доказать).)

в) Пусть $T: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ — линейное отображение (где \mathbb{C} рассматривается как векторное пространство над \mathbb{R}). Показать, что если матрица T относительно базиса $(1, i)$ равна $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, то T есть оператор умножения на некоторое комплексное число тогда и только тогда, когда $a = d$ и $b = -c$. Пункт б) показывает, что аналитическая функция $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, рассматриваемая как функция $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, имеет производную $Df(z_0)$, являющуюся оператором умножения на комплексное число. Что это за комплексное число?

г) Положим

$$d(\omega + i\eta) = d\omega + i d\eta,$$

$$\int_c \omega + i\eta = \int_c \omega + i \int_c \eta,$$

$$(\omega + i\eta) \wedge (\theta + i\lambda) = \omega \wedge \theta - \eta \wedge \lambda + i(\eta \wedge \theta + \omega \wedge \lambda)$$

и

$$dz = dx + i dy.$$

Показать, что $d(f dz) = 0$ тогда и только тогда, когда f удовлетворяет условиям Коши — Римана.

д) Доказать интегральную теорему Коши: если f аналитична на A , то $\int_c f dz = 0$ для всякой замкнутой кривой c (син-

гулярного одномерного куба c , у которого $c(0) = c(1)$, такой, что $c = dc'$ для некоторого сингулярного двумерного куба c' в A .

е) Показать, что если $g(z) = 1/z$, то $\int dz$ (или $(1/z) dz$ в классической записи) равно $i d\theta + dh$ для некоторой функции $h: C \setminus 0 \rightarrow \mathbb{R}$. Вывести отсюда, что $\int_{c_{R,n}} (1/z) dz = 2\pi i n$.

ж) Пусть f аналитична на $\{z: |z| < 1\}$. Используя тот факт, что $g(z) = f(z)/z$ аналитична на $\{z: 0 < |z| < 1\}$, показать, что

$$\begin{aligned} \int_{c_{R_1,n}} \frac{f(z)}{z} dz &= \\ &= \int_{c_{R_2,n}} \frac{f(z)}{z} dz, \end{aligned}$$

если $0 < R_1, R_2 < 1$.

Используя е), вычислить

$$\lim_{R \rightarrow 0} \int_{c_{R,n}} \frac{f(z)}{z} dz$$

и вывести отсюда интегральную формулу Коши: Если f аналитична на $\{z: |z| \leq 1\}$ и c — замкнутая кривая в $\{z: 0 < |z| < 1\}$, имеющая порядок n относительно 0, то

$$nf(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)}{z} dz.$$

4.34. Пусть $F: [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Для каждого $s \in [0, 1]$ определим $F_s: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ формулой $F_s(t) = F(s, t)$. Если каждое F_s есть замкнутая кривая, то F называют *гомотопией* между замкнутой кривой F_0 и замкнутой кривой F_1 . Пусть F и G — гомотопии между замкнутыми кривыми. Если для каждого s замкнутые кривые F_s и G_s не пересекаются, то пара (F, G) называется *гомотопией* между парами непересекающихся замкнутых кривых F_0 ,

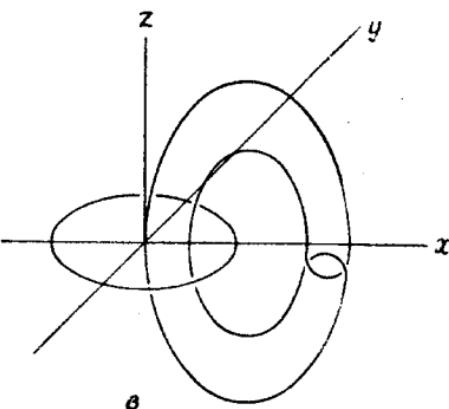
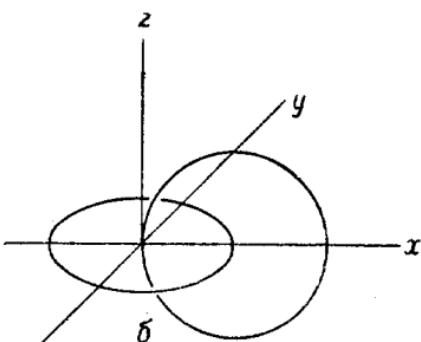
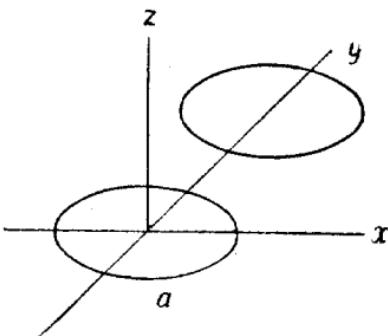


Рис. 4.6.

G_0 и F_1 , G_1 . Интуитивно ясно, что такой гомотопии не существует, если F_0 , G_0 — пара кривых, изображенная на рис. 4.6, а, а F_1 , G_1 — пара из б или в. Предлагаемая задача и задача 5.33 доказывают это для случая б, но доказательство для случая в требует другой техники.

а) Пусть f , $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ — непересекающиеся замкнутые кривые. Определим $c_{f, g}: [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus 0$ формулой

$$c_{f, g}(u, v) = f(u) - g(v).$$

Если (F, G) — гомотопия между непересекающимися замкнутыми кривыми, определим $C_{F, G}: [0, 1]^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus 0$ формулой

$$C_{F, G}(s, u, v) = c_{F_s, G_s}(u, v) = F(s, u) - G(s, v).$$

Показать, что $\partial C_{F, G} = c_{F_0, G_0} - c_{F_1, G_1}$.

б) Пусть ω — замкнутая форма второй степени на $\mathbb{R}^3 \setminus 0$. Показать, что

$$\int\limits_{c_{F_0, G_0}} \omega = \int\limits_{c_{F_1, G_1}} \omega.$$

5

Интегрирование на многообразиях

МНОГООБРАЗИЯ

Пусть U и V — открытые множества в \mathbf{R}^n . Дифференцируемую функцию $h: U \rightarrow V$, имеющую дифференцируемую обратную $h^{-1}: V \rightarrow U$, будем называть *диффеоморфизмом*.

Подмножество M в \mathbf{R}^n называется *k-мерным многообразием* (в \mathbf{R}^n), если для всякой точки $x \in M$ выполнено следующее условие:

(M) Существуют открытое множество U , содержащее x , открытое множество $V \subset \mathbf{R}^n$ и диффеоморфизм $h: U \rightarrow V$, такие, что

$$h(U \cap M) = V \cap (\mathbf{R}^k \times \{0\}) = \\ = \{x \in V: x^{k+1} = \dots = x^n = 0\}.$$

Другими словами, $U \cap M$ „с точностью до диффеоморфизма“ есть просто часть пространства $\mathbf{R}^k \times \{0\}$ (см. рис. 5.1). Отметим два крайних случая нашего определения: точка в \mathbf{R}^n есть нульмерное многообразие, а открытое подмножество в \mathbf{R}^n есть n -мерное многообразие.

Общеизвестным примером n -мерного многообразия является *n-мерная сфера* S^n , определяемая как множество $\{x \in \mathbf{R}^{n+1}: |x| = 1\}$. Доказательство выполнения условия (M) оставляем в качестве упражнения читателю. Если же читатель не расположен утруждать себя деталями, то он может воспользоваться следующей теоремой, доставляющей много примеров многообразий (заметим, что $S^n = g^{-1}(0)$, где $g: \mathbf{R}^{n+1} \rightarrow \mathbf{R}$ определено равенством $g(x) = |x|^2 - 1$).

5.1. Теорема. Пусть $A \subset \mathbf{R}^n$ — открытое множество и $g: A \rightarrow \mathbf{R}^p$ — такая дифференцируемая функция, что $g'(x)$ имеет ранг p для всех точек x , в которых $g(x) = 0$. Тогда $g^{-1}(0)$ есть $(n-p)$ -мерное многообразие в \mathbf{R}^n .

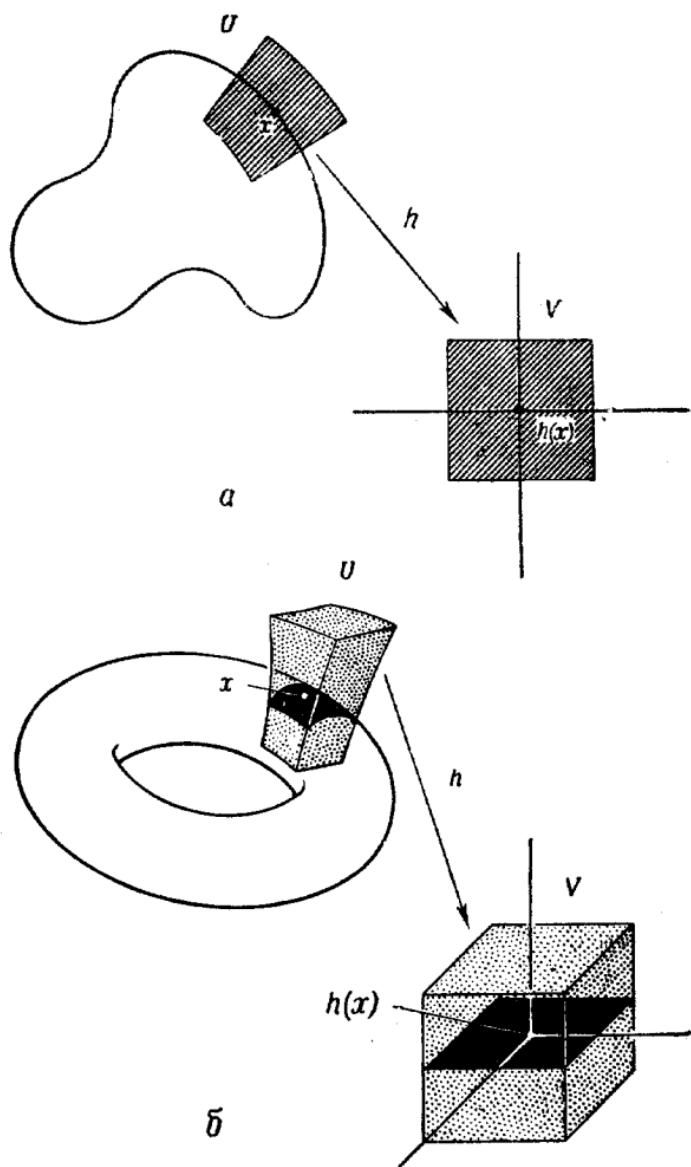


Рис. 5.1 Одномерное многообразие в \mathbb{R}^2 и двумерное многообразие в \mathbb{R}^3 .

Доказательство. Справедливость утверждения непосредственно следует из теоремы 2.13¹⁾. ■

5.2. Теорема. Для всякой точки x k -мерного многообразия $M \subset \mathbb{R}^n$ выполнено следующее „координатное условие“.

(С) Существуют открытое множество U , содержащее x , открытое множество $W \subset \mathbb{R}^k$ и взаимно однозначная дифференцируемая функция $f: W \rightarrow \mathbb{R}^n$, такие, что

$$1) f(W) = M \cap U,$$

$$2) f'(y) \text{ имеет ранг } k \text{ для всякого } y \in W.$$

[Такая функция f называется *системой координат* в окрестности точки x (см. рис. 5.2).]

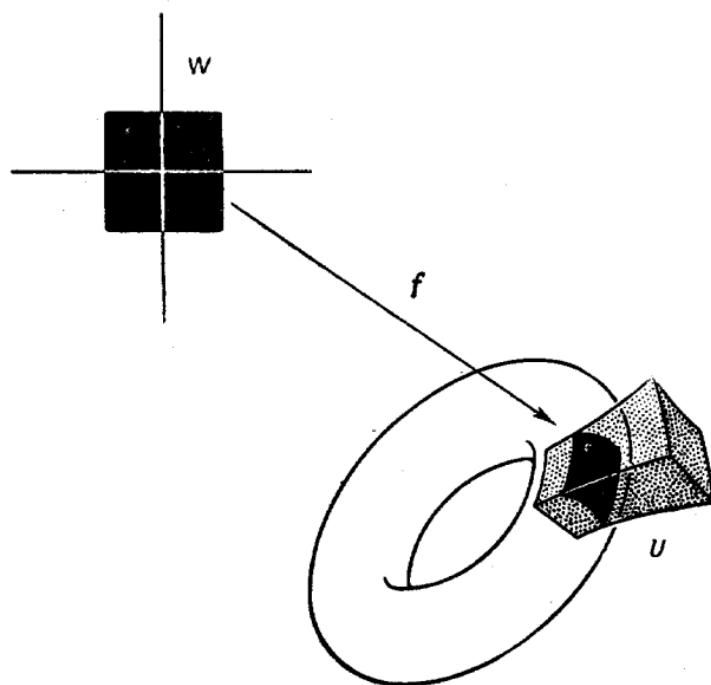


Рис. 5.2.

¹⁾ Нужно только при проверке выполнения условия (M) для $M = g^{-1}(0)$ и $k = n - p$ взять h обратным фигурирующему в теореме 2.13. — Прим. перев.

Доказательство. Рассмотрим $h: U \rightarrow V$, удовлетворяющее условию (M). Пусть $W = \{a \in \mathbb{R}^k: (a, 0) \in h(M)\}$. Определим $f: W \rightarrow \mathbb{R}^n$ равенством $f(a) = h^{-1}(a, 0)$. Очевидно, $f(W) = M \cap U$. Если $H: U \rightarrow \mathbb{R}^k$ определить равенством $H(z) = (h^1(z), \dots, h^k(z))$, то $H(f(y)) = y$ для всех $y \in W$; поэтому $H'(f(y)) \cdot f'(y) = I$, и матрица $f'(y)$ должна иметь ранг k . ■

Отметим одно следствие доказательства теоремы 5.2: для всяких двух систем координат $f_1: W_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ и $f_2: W_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ отображение

$$f_2^{-1} \circ f_1: f_1^{-1}(f_2(W_2)) \rightarrow \mathbb{R}^k$$

дифференцируемо и имеет невырожденный якобиан. В самом деле, $f_2^{-1}(x)$ состоит из первых k компонент отображения $h(x)$.

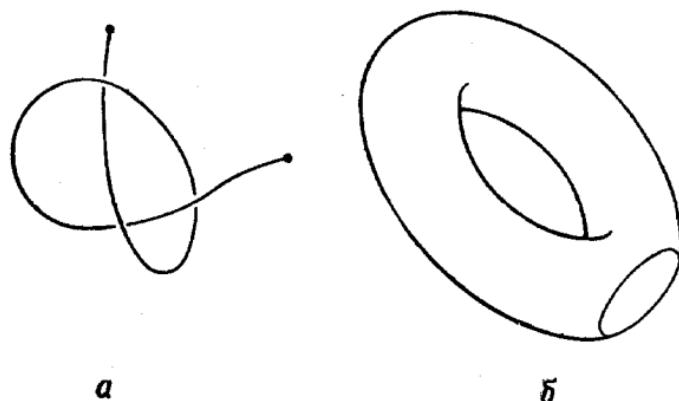


Рис. 5.3. Одномерное и двумерное многообразия с краем в \mathbb{R}^3 .

Полупространством $H^k \subset \mathbb{R}^k$ будет называться множество $\{x \in \mathbb{R}^k: x^k \geq 0\}$. Подмножество $M \subset \mathbb{R}^n$ называется k -мерным многообразием с краем (рис. 5.3), если для всякой точки $x \in M$ выполняется либо условие (M), либо следующее условие.

(M') Существуют открытое множество U , содержащее x , открытое множество $V \subset \mathbb{R}^n$ и диффеоморфизм $h: U \rightarrow V$, такие, что

$$h(U \cap M) = V \cap (\mathbf{H}^k \times \{0\}) = \\ = \{x \in V: x^k > 0 \text{ и } x^{k+1} = \dots = x^n = 0\}.$$

Важно заметить, что условия (M) и (M') не могут одновременно выполняться для одной и той же точки x . Действительно, если бы $h_1: U_1 \rightarrow V_1$ и $h_2: U_2 \rightarrow V_2$ удовлетворяли соответственно условиям (M) и (M') , то $h_2 \circ h_1^{-1}$ было бы дифференцируемым отображением, переводящим открытое множество из \mathbb{R}^k , содержащее $h(x)$, в подмножество \mathbf{H}^k , не являющееся открытым в \mathbb{R}^k . Но поскольку $\det(h_2 \circ h_1^{-1})' \neq 0$, это противоречило бы результату из задачи 2.36. Множество всех точек $x \in M$, удовлетворяющих условию (M') , называется *краем* многообразия M' и обозначается ∂M . Его не следует путать с границей множества, определявшейся в гл. 1 (см. задачи 5.3 и 5.8).

Задачи

5.1. Пусть M есть k -мерное многообразие с краем. Доказать, что ∂M есть $(k-1)$ -мерное, а $M \setminus \partial M$ есть k -мерное многообразия.

5.2. Найти аналог условия (C) для многообразий с краем.

5.3. а) Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, граница которого является $(n-1)$ -мерным многообразием. Показать, что объединение N множества A с его границей есть n -мерное многообразие с краем. (Полезно иметь в виду следующий пример: если $A = \{x \in \mathbb{R}^n: |x| < 1 \text{ или } 1 < |x| < 2\}$, то N есть многообразие с краем, но ∂N не совпадает с границей A .)

б) Доказать аналогичное утверждение для открытого подмножества n -мерного многообразия.

5.4. Доказать частичное обращение теоремы 5.1: для всякой точки x k -мерного многообразия $M \subset \mathbb{R}^n$ существуют такое открытое множество $A \subset \mathbb{R}^n$ и такая функция $g: A \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$, что $A \cap M = g^{-1}(0)$ и $g'(x)$ имеет ранг $n-k$ всюду, где $g(x) = 0$.

5.5. Доказать, что k -мерное (векторное) подпространство в \mathbb{R}^n есть k -мерное многообразие.

5.6. Пусть $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Графиком f называется множество $\{(x, y): y = f(x)\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Показать, что график f является n -мерным многообразием тогда и только тогда, когда f дифференцируемо.

5.7. Пусть $K^n = \{x \in \mathbb{R}^n: x^1 = 0 \text{ и } x^2, \dots, x^{n-1} > 0\}$. Показать, что если $M \subset K^n$ есть k -мерное многообразие и N получается вращением M вокруг оси $x^1 = \dots = x^k = 0$, то N есть $(k+1)$ -мерное многообразие. Пример — тор (рис. 5.4).

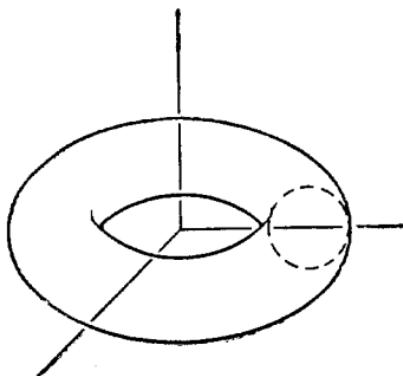


Рис. 5.4.

5.8. а) Показать, что если M есть k -мерное многообразие в \mathbb{R}^n и $k < n$, то M имеет меру 0.

б) Пусть M — замкнутое n -мерное многообразие с краем в \mathbb{R}^n . Показать, что граница M совпадает с ∂M . Дать контрпример для случая незамкнутого M .

в) Показать, что всякое компактное n -мерное многообразие с краем в \mathbb{R}^n измеримо по Жордану.

ПОЛЯ И ФОРМЫ НА МНОГООБРАЗИЯХ

Пусть M есть k -мерное многообразие в \mathbb{R}^n и $f: W \rightarrow \mathbb{R}^n$ — система координат в окрестности точки $x = f(a)$. Так как ранг матрицы $f'(a)$ равен k , то линейное отображение $f_*: \mathbb{R}_a^k \rightarrow \mathbb{R}_x^n$ взаимно однозначно и $f_*(\mathbb{R}_a^k)$ есть k -мерное подпространство в \mathbb{R}_x^n . Если $g: V \rightarrow \mathbb{R}^n$ — еще одна система координат с $x = g(b)$, то

$$g_*(\mathbb{R}_b^k) = f_*(f^{-1} \circ g)_*(\mathbb{R}_b^k) = f_*(\mathbb{R}_a^k).$$

Таким образом, k -мерное подпространство $f_*(\mathbb{R}_a^k)$ не зависит от выбора системы координат f . Это подпространство называется *касательным пространством* M в точке x (см. рис. 5.5) и обозначается M_x . В следующих параграфах мы будем пользоваться тем фактом, что на M_x имеется естественное внутреннее произведение T_x , индуцируемое

внутренним произведением из \mathbf{R}_x^n и определяемое для всякой пары $v, w \in M_x$ равенством $T_x(v, w) = \langle v, w \rangle_x$.

Предположим, что A — открытое множество, содержащее M , и F — такое дифференцируемое поле на A , что $F(x) \in M_x$ для каждого $x \in M$. Для системы координат $f: W \rightarrow \mathbf{R}^n$ существует единственное (дифференцируемое)

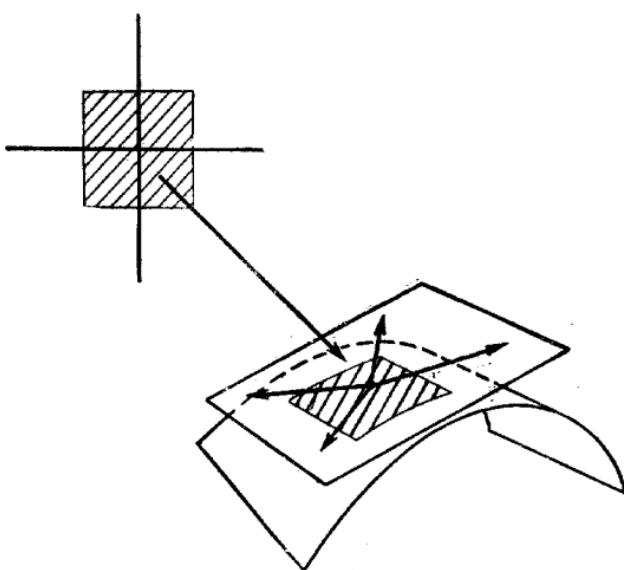


Рис. 5.5.

векторное поле G на W , такое, что $f_*(G(a)) = F(f(a))$ для каждого $a \in W$. Можно также рассматривать функцию F , которая относит каждому $x \in M$ некоторый вектор $F(x) \in M_x$; такая функция называется *векторным полем на M* . По-прежнему существует единственное векторное поле G на W , такое, что $f_*(G(a)) = F(f(a))$ для каждого $a \in W$. Мы по определению будем считать F дифференцируемым, если дифференцируемо G . Заметим, что наше определение не зависит от выбора системы координат: если $g: V \rightarrow \mathbf{R}^n$ таково, что $g_*(H(b)) = F(b)$ для всех $b \in V$, то координатные функции для $H(b)$ должны совпадать с координатными функциями для $G(f^{-1}(g(b)))$, так что дифференцируемость G влечет дифференцируемость H .

В точности те же рассмотрения проводятся и для форм. Функция ω , которая каждому $x \in M$ относит $\omega(x) \in \Lambda^p(M_x)$, называется *формой p -й степени на M* . Если $f: W \rightarrow \mathbb{R}^n$ — система координат, то $f^*\omega$ будет формой p -й степени на W . Форма ω называется дифференцируемой, если дифференцируема форма $f^*\omega$. Форма p -й степени ω на M может быть записана в виде

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_p} \omega_{i_1, \dots, i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p},$$

где функции ω_{i_1, \dots, i_p} определены только на M . Прежнее определение $d\omega$ было бы лишено здесь смысла, поскольку не определены $D_j(\omega_{i_1, \dots, i_p})$. Тем не менее существует разумный способ определения $d\omega$.

5.3. Теорема. *Существует единственная форма $(p+1)$ -й степени $d\omega$ на M , такая, что*

$$f^*(d\omega) = d(f^*\omega)$$

для всякой системы координат $f: W \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Доказательство. Пусть $f: W \rightarrow \mathbb{R}^n$ — система координат с $x = f(a)$ и $v_1, \dots, v_{p+1} \in M_a$. В \mathbb{R}_a^k имеются однозначно определенные векторы w_1, \dots, w_{p+1} , для которых $f_*(w_i) = v_i$. Положим теперь по определению $d\omega(x)(v_1, \dots, v_{p+1}) = d(f^*\omega)(a)(w_1, \dots, w_{p+1})$. Можно проверить, что это задание $d\omega(x)$ не зависит от выбора системы координат, так что $d\omega$ определено корректно.

При этом ясно, что $d\omega$ обязано удовлетворять условию этого определения и потому единственno. ■

Часто бывает необходимо выбрать ориентацию μ_x в каждом касательном пространстве M_x многообразия M . Такие ориентации называются *согласованными* (рис. 5.6), если для каждой системы координат $f: W \rightarrow \mathbb{R}^n$ и каждой пары $a, b \in W$ равенство

$$[f_*((e_1)_a), \dots, f_*((e_k)_a)] = \mu_{f(a)}$$

выполнено тогда и только тогда, когда

$$[f_*((e_1)_b), \dots, f_*((e_k)_b)] = \mu_{f(b)}.$$

Предположим, что выбраны согласованные ориентации μ_x . Если система координат $f: W \rightarrow \mathbb{R}^n$ такова, что

$$[f_*((e_1)_a), \dots, f_*((e_k)_a)] = \mu_{f(a)}$$

для некоторого, а потому и для каждого $a \in W$, то говорят, что f *сохраняет ориентацию*. Если f не сохраняет ориентацию и $T: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ — линейное отображение с $\det T = -1$,

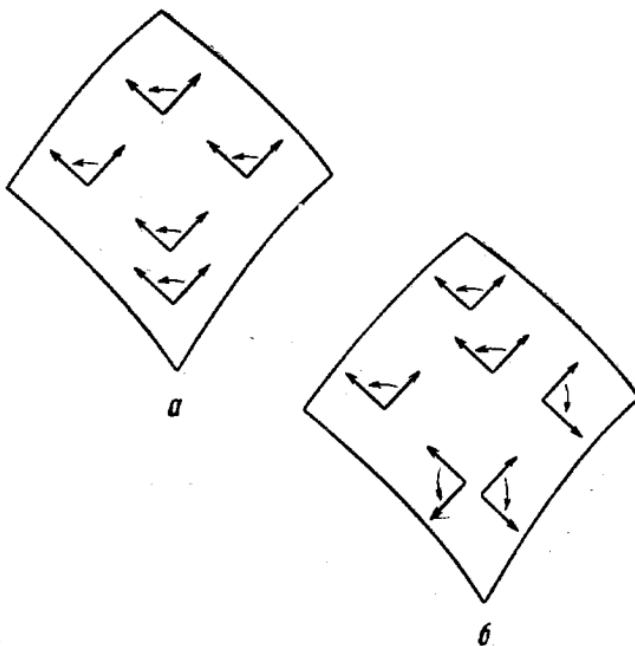


Рис. 5.6.

a — согласованный выбор ориентаций, *b* — несогласованный выбор ориентаций.

то $f \circ T$ уже сохраняет ориентацию. Поэтому в окрестности любой точки существует система координат, сохраняющая ориентацию. Если f и g сохраняют ориентацию и $x = f(a) = g(b)$, то из равенств

$[f_*((e_1)_a), \dots, f_*((e_k)_a)] = \mu_x = [g_*((e_1)_b), \dots, g_*((e_k)_b)]$ следует, что

$[(g^{-1} \circ f)_*((e_1)_a), \dots, (g^{-1} \circ f)_*((e_k)_a)] = [(e_1)_b, \dots, (e_k)_b]$, откуда $\det(g^{-1} \circ f)' > 0$ — важный факт, который следует запомнить.

Многообразие M , допускающее выбор согласованных ориентаций μ_x , называется *ориентируемым*, а всякий такой выбор μ_x — *ориентацией* μ этого многообразия. Многообразие M вместе с его ориентацией μ называется *ориентированным многообразием*. Классическим примером неориентируемого многообразия является лист Мёбиуса. Модель его можно получить, склеив концы бумажной полоски, закрученной на пол оборота (рис. 5.7).

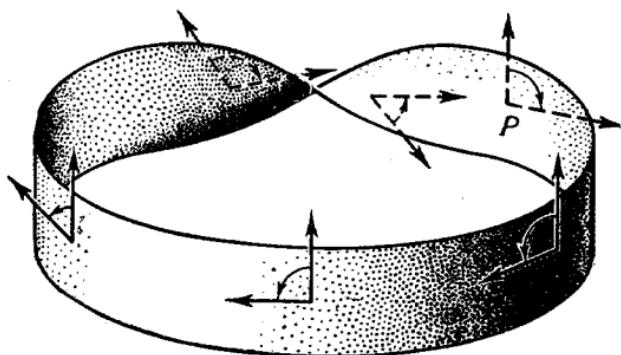


Рис. 5.7. Лист Мёбиуса, пример неориентируемого многообразия.

Базис движется вправо, начиная от P , и, сделав один оборот, возвращается в P уже с противоположной ориентацией.

Наши определения векторных полей, форм и ориентаций можно распространить и на многообразия с краем. Если M есть k -мерное многообразие с краем и $x \in \partial M$, то $(\partial M)_x$ есть $(k-1)$ -мерное подпространство k -мерного векторного пространства M_x . Таким образом, существуют в точности два единичных вектора в M_x , перпендикулярных к $(\partial M)_x$. Их можно различить следующим образом (рис. 5.8). Пусть $f: W \rightarrow \mathbf{R}^n$ — система координат с $W \subset \mathbf{H}^k$ и $f(0) = x$. Тогда только один из этих единичных векторов равен $f_*(v_0)$ для некоторого v_0 с $v^k < 0$. Этот единичный вектор $n(x)$ называется *ортом внешней нормали*. Нетрудно проверить, что это определение не зависит от системы координат f .

Пусть μ — ориентация на k -мерном многообразии с краем M . Для всякого $x \in \partial M$ выберем $v_1, \dots, v_{k-1} \in (\partial M)_x$ так, чтобы $[n(x), v_1, \dots, v_{k-1}] = \mu_x$.

Если также $[n(x), w_1, \dots, w_{k-1}] = \mu_x$, то $[v_1, \dots, v_{k-1}]$ и $[w_1, \dots, w_{k-1}]$ задают одну и ту же ориентацию на $(\partial M)_x$; она обозначается $(\partial\mu)_x$. Легко видеть, что ориен-

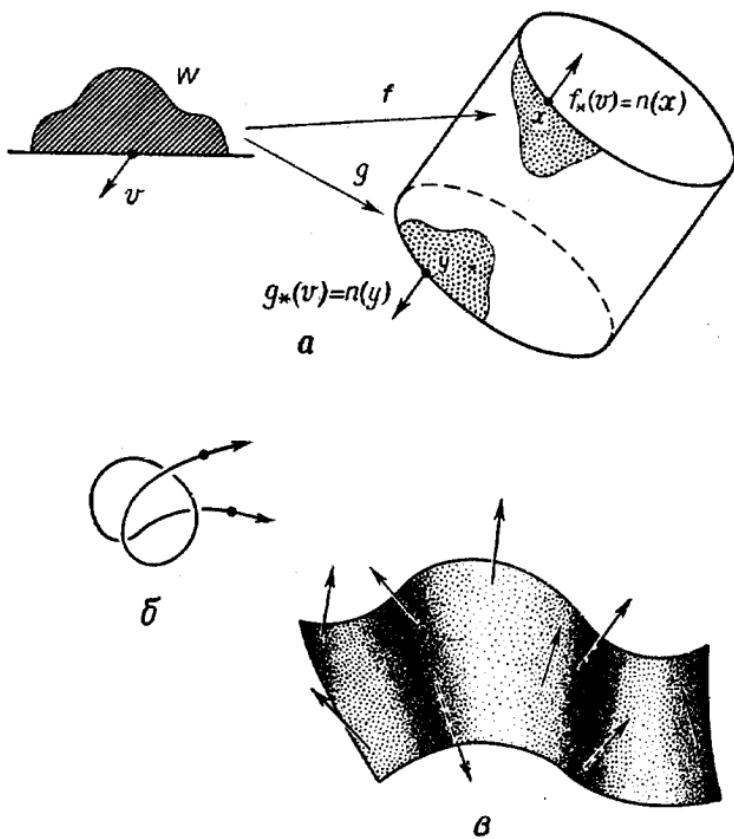


Рис. 5.8. Некоторые орты внешних нормалей многообразий с краем в \mathbb{R}^3 .

тации $(\partial\mu)_x$ для $x \in \partial M$ согласованы на ∂M . Таким образом, если M ориентируемо, то также ∂M ориентируемо, и ориентация μ на M определяет ориентацию $\partial\mu$ на ∂M , называемую *индуцированной ориентацией*. Если мы применим эти определения к полупространству H^k с его стандартной ориентацией, то увидим, что индуцированной ориентацией на $\mathbb{R}^{k-1} = \{x \in H^k : x^k = 0\}$ служит стандартная ориентация, умноженная на $(-1)^k$. Основания для описанного

выбора индуцированной ориентации выясняется в следующем параграфе.

В том случае, когда M — *ориентированное* ($n - 1$)-мерное многообразие в \mathbf{R}^n , можно определить орты внешних нормалей, даже в том случае, когда M не является границей n -мерного многообразия. Пусть $[v_1, \dots, v_{n-1}] = \mu_x$. Выберем единичный вектор $n(x)$ в \mathbf{R}_x^n так, чтобы он был перпендикулярен M_x , а $[n(x), v_1, \dots, v_{n-1}]$ было стандартной ориентацией на \mathbf{R}_x^n , и по-прежнему назовем $n(x)$ ортом внешней нормали к M (определенным ориентацией μ). Вектор $n(x)$ в очевидном смысле непрерывно зависит от точки $x \in M$. Обратно, всякое заданное на M непрерывное семейство единичных нормальных векторов $n(x)$ определяет на M ориентацию. Это показывает, что такой непрерывный выбор нормальных векторов на листе Мёбиуса невозможен. В бумажной модели листа Мёбиуса в точках по обе стороны бумажной полоски (которая имеет толщину) можно приложить нормальные векторы, направленные в противоположные стороны. Невозможность непрерывного выбора нормальных векторов отражена в знаменитом свойстве этой бумажной модели: она имеет только одну сторону (начав красить ее с одной стороны, вы в конце концов закрасите ее всю); другими словами, произвольно выбрав нормальный вектор $n(x)$ в некоторой точке и затем перемещая его в другие точки с соблюдением непрерывности, можно вернуться в исходную точку с противоположно направленным $n(x)$.

Задачи

5.9. Показать, что M_x состоит из касательных векторов в t к всевозможным кривым c , лежащим в M и таким, что $c(t) = x$.

5.10. Пусть на M задан такой набор систем координат \mathcal{C} , что
 1) для каждого $x \in M$ существует $f \in \mathcal{C}$, являющееся системой координат в окрестности точки x ;

2) $\det(f^{-1} \circ g) > 0$ для любых $f, g \in \mathcal{C}$.

Показать, что на M существует единственная ориентация, сохраняющаяся при всех $f \in \mathcal{C}$.

5.11. Пусть M есть n -мерное многообразие с краем в \mathbf{R}^n . Возьмем в качестве μ_x стандартную ориентацию пространства $M_x = \mathbf{R}_x^n$ (так определенная ориентация μ называется *стандарт-*

ной ориентацией многообразия M). Показать, что для $x \in \partial M$ оба данных выше определения $n(x)$ совпадают.

5.12. а) Пусть F —дифференцируемое векторное поле на многообразии $M \subset \mathbb{R}^n$. Показать, что существуют такие открытое множество $A \supset M$ и дифференцируемое векторное поле \tilde{F} на A , что $\tilde{F}(x) = F(x)$ для всех $x \in M$. (Указание: сделать это локально и воспользоваться разбиением единицы.)

б) Показать, что если M замкнуто, то в качестве A можно взять все пространство \mathbb{R}^n .

5.13. Пусть $g: A \rightarrow \mathbb{R}^p$ то же, что в теореме 5.1.

а) Пусть $x \in M = g^{-1}(0)$ и $h: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ —тот по существу единственный диффеоморфизм, для которого $g \circ h(x) = (x^{n-p+1}, \dots, x^n)$ и $h(0) = x$. Определим $f: \mathbb{R}^{n-p} \rightarrow \mathbb{R}^n$ равенством $f(a) = h(0, a)$. Показать, что f_* взаимно однозначно, так что $n-p$ векторов $f_*(e_1)_0, \dots, f_*(e_{n-p})_0$ линейно независимы.

б) Показать, что ориентации μ_x могут быть выбраны согласованно, так что M —ориентируемое многообразие.

в) Показать, что если $p=1$, то координаты орта внешней нормали в x кратны $D_{1g}(x), \dots, D_{ng}(x)$.

5.14. Пусть $M \rightarrow \mathbb{R}^n$ —ориентируемое k -мерное многообразие. Доказать существование такого $g: A \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$, что $M = g^{-1}(0)$ и $g'(x)$ имеет ранг $n-k$ для всякого $x \in M$. (Указание: задача 5.4 дает локальное решение; используя ориентацию, выбрать согласованные локальные решения и воспользоваться разбиением единицы).

5.15. Пусть M есть $(n-1)$ -мерное многообразие в \mathbb{R}^n и $M(\varepsilon)$ —совокупность концов всех нормальных векторов длины ε (приведенных в обоих направлениях). Предположим, что ε столь мало, что $M(\varepsilon)$ также есть $(n-1)$ -мерное многообразие. Показать, что $M(\varepsilon)$ ориентируемо (даже если M было неориентируемо). Что такое $M(\varepsilon)$ в случае, когда M —лист Мёбиуса?

5.16. Пусть $g: A \rightarrow \mathbb{R}^p$ то же, что и в теореме 5.1. Показать, что если $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируема и ее максимум (или минимум) на $g^{-1}(0)$ достигается в точке a , то существуют такие $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$, что

$$D_j f(a) = \sum_{i=1}^p \lambda_i D_j g^i(a), \quad j = 1, \dots, n. \quad (1)$$

(Указание: эти равенства можно переписать в виде $df(a) = \sum_{i=1}^p \lambda_i dg^i(a)$; они очевидны, когда $g(x) = (x^{n-p+1}, \dots, x^n)$.)

Максимум (или минимум) функции f на $g^{-1}(0)$ иногда называют условным экстремумом при уравнениях связи $g^i = 0$. Можно пытаться отыскивать a , решая систему уравнений (1).

В частности, если $g: A \rightarrow \mathbf{R}$, мы должны решить $n+1$ уравнений

$$D_j f(a) = \lambda D_j g(a),$$

$$g(a) = 0$$

относительно $n+1$ неизвестных a^1, \dots, a^n, λ , что часто очень просто, если оставить уравнение $g(a) = 0$ напоследок. Это *метод Лагранжа*, а полезное, но постороннее λ называется *множителем Лагранжа*. В следующей задаче дается пример изящного теоретического использования множителей Лагранжа.

5.17. а) Пусть $T: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ — самосопряженный оператор с матрицей $A = (a_{ij})$, так что $a_{ij} = a_{ji}$. Показать, что если $f(x) = \langle Tx, x \rangle = \sum a_{ij} x^i x^j$, то $D_k f(x) = 2 \sum_{j=1}^n a_{kj} x^j$. Рассматривая

максимум функции $\langle Tx, x \rangle$ на сфере S^{n-1} , доказать существование $x \in S^{n-1}$ и $\lambda \in \mathbf{R}$, таких, что $Tx = \lambda x$.

б) Пусть $V = \{y \in \mathbf{R}^n: \langle x, y \rangle = 0\}$. Показать, что $T(V) \subset V$ и что оператор $T: V \rightarrow V$ самосопряжен.

в) Доказать существование базиса, состоящего из собственных векторов оператора T .

ТЕОРЕМА СТОКСА НА МНОГООБРАЗИЯХ

Пусть на k -мерном многообразии с краем M заданы форма p -й степени ω и сингулярный p -мерный куб c . Интеграл от ω по c определяется точно так же, как и раньше:

$$\int_c \omega = \int_{[0, 1]^p} c^* \omega.$$

Интегралы по сингулярным p -мерным цепям так же определяются, как и выше. В случае $p = k$ может оказаться, что существуют такие открытое множество $M \supset [0, 1]^k$ и система координат $f: W \rightarrow \mathbf{R}^n$, что $c(x) = f(x)$ для всех $x \in [0, 1]^k$. Сингулярные k -мерные кубы в M всегда будут считаться принадлежащими этому типу. Если M ориентировано, то будем говорить, что сингулярный k -мерный куб c в M *сориентирован*, если f сохраняет ориентацию.

5.4. Теорема. Пусть M — ориентированное k -мерное многообразие, $c_1, c_2: [0, 1]^k \rightarrow M$ — два сориентированных сингулярных k -мерных куба в M и ω — форма

k -й степени на M , обращающаяся в 0 вне $c_1([0, 1]^k) \cap c_2([0, 1]^k)$. Тогда

$$\int_{c_1} \omega = \int_{c_2} \omega.$$

Доказательство. Имеем

$$\int_{c_1} \omega = \int_{[0, 1]^k} c_1^*(\omega) = \int_{[0, 1]^k} (c_2^{-1} \circ c_1)^* c_2^*(\omega).$$

(Здесь $c_2^{-1} \circ c_1$ определено только на подмножестве из $[0, 1]^k$, и второе равенство существенно опирается на то, что $\omega = 0$ вне $c_1([0, 1]^k) \cap c_2([0, 1]^k)$.) Поэтому достаточно показать, что

$$\int_{[0, 1]^k} (c_2^{-1} \circ c_1)^* c_2^*(\omega) = \int_{[0, 1]^k} c_2^*(\omega) = \int_{c_2} \omega.$$

Пусть $c_2^*(\omega) = f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k$. Обозначая $c_2^{-1} \circ c_1$ через g , в силу теоремы 4.9 имеем

$$\begin{aligned} (c_2^{-1} \circ c_1)^* c_2^*(\omega) &= g^*(g dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k) = \\ &= (f \circ g) \cdot \det g' \cdot dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k = \\ &= (f \circ g) |\det g'| \cdot dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k, \end{aligned}$$

поскольку $\det g' = \det (c_2^{-1} \circ c_1)' > 0$. Утверждаемый результат вытекает теперь из теоремы 3.13. ■

Последнее равенство в этом доказательстве помогает понять, почему мы должны были уделять столько внимания ориентациям.

Пусть ω — форма k -й степени на ориентированном k -мерном многообразии M . Если в M найдется такой сориентированный сингулярный k -мерный куб c , что $\omega = 0$ вне $c([0, 1]^k)$, то мы по определению положим

$$\int_M \omega = \int_c \omega.$$

Теорема 5.4 показывает, что $\int_M \omega$ не будет зависеть от выбора c .

Пусть теперь ω — произвольная форма k -й степени на M и M обладает таким открытым покрытием \mathcal{G} , что для каждого $U \in \mathcal{G}$ существует такой сориентированный сингулярный k -мерный куб c , что $U \subset c([0, 1]^k)$. Пусть Φ — разбиение единицы на M , подчиненное этому покрытию. Положим

$$\int_M \omega = \sum_{\varphi \in \Phi} \int_M \varphi \cdot \omega$$

в предположении, что сумма сходится (она во всяком случае сходится, когда M компактно). Рассуждения, аналогичные использованным при доказательстве теоремы 3.12, показывают, что так определенный $\int_M \omega$ не зависит от покрытия \mathcal{G} и разбиения Φ .

Все наши определения можно было бы дать и для k -мерного многообразия с краем M , снабженного ориентацией μ . Наделим ∂M индуцированной ориентацией $d\mu$, и пусть c — такой сориентированный сингулярный k -мерный куб в M , что $c_{(k, 0)}$ лежит в ∂M и является единственной гранью, хотя бы одна внутренняя точка которой принадлежит ∂M . Из замечаний, сделанных после определения $d\mu$, следует, что $c_{(k, 0)}$ сориентирована, если k четно, и несориентирована, если k нечетно. Таким образом, для всякой формы $(k-1)$ -й степени ω на M , равной нулю всюду вне $c([0, 1]^k)$, имеем

$$\int_{c_{(k, 0)}} \omega = (-1)^k \int_{\partial M} \omega.$$

С другой стороны, $c_{(k, 0)}$ входит с коэффициентом $(-1)^k$ в ∂c . Поэтому

$$\int_{\partial c} \omega = \int_{(-1)^k c_{(k, 0)}} \omega = (-1)^k \int_{c_{(k, 0)}} \omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Наш выбор $d\mu$ был сделан с тем расчетом, чтобы полностью избавиться от отрицательных знаков в этом равенстве и следующей теореме.

5.5. Теорема Стокса. Пусть M — компактное ориентированное k -мерное многообразие с краем и ω — форма $(k-1)$ -й степени на M . Тогда

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega,$$

где ∂M наделено индуцированной ориентацией.

Доказательство. Предположим сначала, что в $M \setminus \partial M$ имеется такой сориентированный сингулярный k -мерный куб c , что $\omega = 0$ вне $c([0, 1]^k]$. В силу теоремы 4.13 и определения $d\omega$

$$\int_c d\omega = \int_{[0, 1]^k} c^*(d\omega) = \int_{[0, 1]^k} d(c^*\omega) = \int_{\partial I^k} c^*\omega = \int_{\partial c} \omega.$$

Тогда

$$\int_M d\omega = \int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega = 0,$$

поскольку $\omega = 0$ на ∂c . С другой стороны, и $\int_{\partial M} \omega = 0$,

поскольку $\omega = 0$ на ∂M .

Предположим теперь, что в M имеется такой сориентированный сингулярный k -мерный куб c , что единственной его гранью, лежащей в ∂M , служит $c_{(k, 0)}$ и $\omega = 0$ вне $c([0, 1]^k)$. Тогда

$$\int_M d\omega = \int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Обратимся, наконец, к общему случаю. M допускает такое открытое покрытие \mathcal{O} и такое подчиненное ему разбиение единицы Φ , что для каждого $\varphi \in \Phi$ форма $\varphi\omega$ принадлежит одному из двух уже рассмотренных типов. Имеем

$$0 = d(1) = d\left(\sum_{\varphi \in \Phi} \varphi\right) = \sum_{\varphi \in \Phi} d\varphi,$$

так что

$$\sum_{\varphi \in \Phi} d\varphi \wedge \omega = 0.$$

Поскольку M компактно, эта сумма конечна, и потому

$$\sum_{\Phi \in \Phi} \int_M d\varphi \wedge \omega = 0.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_M d\omega &= \sum_{\Phi \in \Phi} \int_M \varphi d\omega = \sum_{\Phi \in \Phi} \int_M d\varphi \wedge \omega + \varphi \cdot d\omega = \\ &= \sum_{\Phi \in \Phi} \int_M d(\varphi \omega) = \sum_{\Phi \in \Phi} \int_{\partial M} \varphi \omega = \int_{\partial M} \omega. \blacksquare \end{aligned}$$

Задачи

5.18. Пусть M есть n -мерное многообразие (или многообразие с краем) в \mathbf{R}^n , наделенное стандартной ориентацией. Показать, что интеграл $\int_M f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$, определенный в этой главе,

совпадает с интегралом $\int_M f$, определенным в гл. 3.

5.19. а) Показать, что для некомпактных M теорема 5.5 неверна. (Указание: если M — многообразие с краем, для которого справедлива теорема 5.5, то $M \setminus \partial M$ — также многообразие с краем (пустым).)

б) Показать, что теорема 5.5 верна и для некомпактного M , если ω равна нулю всюду вне некоторого его компактного подмножества.

5.20. Доказать, что если ω — форма $(k - 1)$ -й степени на компактном k -мерном многообразии M , то $\int_M d\omega = 0$. Дать контрпример с некомпактным M .

5.21. *Абсолютным тензором k -й степени на V* называется функция $\eta: V^k \rightarrow \mathbf{R}$ вида $|\omega|$, где $\omega \in \Lambda^k(V)$. *Абсолютной формой k -й степени на M* называется такая функция η , что $\eta(x)$ есть абсолютный тензор k -й степени на M_x для каждого $x \in M$. Показать, что можно определить интеграл $\int_M \eta$ даже если M неориентируемо.

5.22. Пусть $M_1, M_2 \subset \mathbf{R}^n$ — компактные n -мерные многообразия с краем, причем $M_2 \subset M_1 \setminus \partial M_1$, и ω — форма $(n - 1)$ -й степени на M_1 . Доказать, что

$$\int_{\partial M_1} \omega = \int_{\partial M_2} \omega.$$

где ∂M_1 и ∂M_2 наделены ориентациями, индуцированными стандартными ориентациями многообразий M_1 и M_2 . (Указание: найти такое многообразие с краем M , что $\partial M = \partial M_1 \cup \partial M_2$ и индуцированная ориентация на ∂M совпадает на ∂M_1 с ориентацией ∂M_1 и противоположна на ∂M_2 ориентации ∂M_2 .)

ЭЛЕМЕНТ ОБЪЕМА

Пусть M есть k -мерное многообразие (или многообразие с краем) в \mathbb{R}^n , наделенное ориентацией μ . Для каждого $x \in M$ введенные раньше ориентация μ_x и внутреннее произведение T_x определяют элемент объема $\omega(x) \in \Lambda^k(M_x)$. Мы получаем поэтому всюду отличную от нуля форму k -й степени ω на M , которая называется *элементом объема на M* (определенным μ) и обозначается dV , хотя она, вообще говоря, и не является дифференциалом какой-либо формы $(k-1)$ -й степени. Под *объемом M* понимают

$\int_M dV$ в предположении, что этот интеграл существует,

что во всяком случае имеет место, когда M компактно. Для одномерных или двумерных многообразий „объем“ обычно называют соответственно *длиной* или *площадью*, а dV обозначают ds („элемент длины“) или dA (а также dS) („элемент площади [поверхности]“).

Интересующий нас конкретный случай — это элемент объема ориентированной поверхности (двумерного многообразия) M в \mathbb{R}^3 . Пусть $n(x)$ — орт внешней нормали в точке $x \in M$. Если $\omega \in \Lambda^2(M_x)$ определить формулой

$$\omega(v, w) = \det \begin{Bmatrix} v \\ w \\ n(x) \end{Bmatrix},$$

то $\omega(v, w) = 1$, если v и w образуют ортонормальный базис в M_x с $[v, w] = \mu_x$. Таким образом, $dA = \omega$. С другой стороны, $\omega(v, w) = \langle v \times w, n(x) \rangle$ по определению $v \times w$, так что

$$dA(v, w) = \langle v \times w, n(x) \rangle.$$

Так как $v \times w$ для любых $v, w \in M_x$ кратно $n(x)$, то заключаем, что

$$dA(v, w) = |v \times w|$$

при $[v, w] = \mu_x$. Чтобы найти площадь поверхности M , мы должны вычислить $\int_{[0, 1]^2} c^*(dA)$ для ориентированных сингулярных двумерных кубов c . Положим

$$E(a) = [D_1 c^1(a)]^2 + [D_1 c^2(a)]^2 + [D_1 c^3(a)]^2,$$

$$F(a) = D_1 c^1(a) \cdot D_2 c^1(a) + D_1 c^2(a) \cdot D_2 c^2(a) + D_1 c^3(a) \cdot D_2 c^3(a),$$

$$G(a) = [D_2 c^1(a)]^2 + [D_2 c^2(a)]^2 + [D_2 c^3(a)]^2.$$

Тогда

$$c^*(dA)((e_1)_a, (e_2)_a) = dA(c_*((e_1)_a), c_*((e_2)_a)) =$$

$$= |(D_1 c^1(a), D_1 c^2(a), D_1 c^3(a)) \times (D_2 c^1(a), D_2 c^2(a), D_2 c^3(a))| = \\ = \sqrt{E(a)G(a) - F(a)^2}$$

по задаче 4.9. Таким образом,

$$\int_{[0, 1]^2} c^*(dA) = \int_{[0, 1]^2} \sqrt{EG - F^2}.$$

Очевидно, что вычисление площади поверхности — отважное предприятие. К счастью, редко требуется знать площадь поверхности. Кроме того, существует простое выражение для dA , достаточное для теоретических рассмотрений.

5.6. Теорема. Пусть M — компактное ориентированное двумерное многообразие (или многообразие с краем) в \mathbb{R}^3 и n — орт внешней нормали. Тогда

$$1) dA = n^1 dy \wedge dz + n^2 dz \wedge dx + n^3 dx \wedge dy.$$

Кроме того,

$$2) n^1 dA = dy \wedge dz,$$

$$3) n^2 dA = dz \wedge dx,$$

$$4) n^3 dA = dx \wedge dy.$$

Доказательство. Равенство (1) эквивалентно равенству

$$dA(v, w) = \det \begin{pmatrix} v \\ w \\ n(x) \end{pmatrix},$$

что явствует из разложения определителя по минорам нижней строки. Для доказательства остальных равенств рассмотрим

$z \in M_x$. Так как $v \times w = an(x)$ с некоторым $a \in \mathbb{R}$, то
 $\langle z, n(x) \rangle \cdot \langle v \times w, n(x) \rangle = \langle z, n(x) \rangle a =$
 $= \langle z, an(x) \rangle = \langle z, v \times w \rangle$.

Взяв в качестве z векторы e_1, e_2 и e_3 , получим (2), (3) и (4). ■

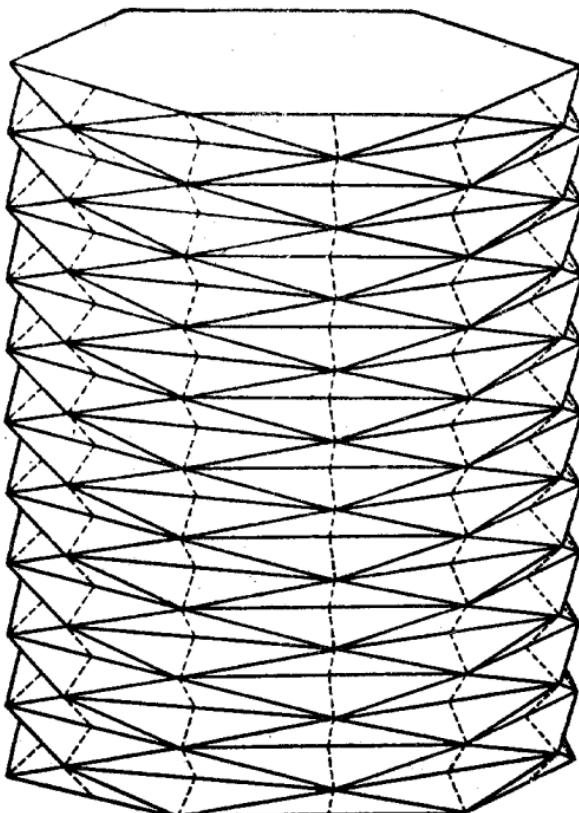


Рис. 5.9. Поверхность образована треугольниками, вписанными в часть цилиндра.

Основания треугольников лежат на параллельных плоскостях, перпендикулярных оси цилиндра. Расстояния между соседними плоскостями равны. Будем увеличивать число треугольников, уменьшая это расстояние, и потребуем, чтобы нижняя грань длин оснований всех треугольников была при этом строго больше нуля. В таком случае площадь вписанной поверхности можно сделать сколь угодно большой.

Предостережение: для $\omega \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3_a)$, определенного равенством
 $\omega = n^1(a) dy(a) \wedge dz(a) + n^2(a) dz(a) \wedge dx(a) +$
 $+ n^3(a) dx(a) \wedge dy(a)$,

неверно, например, что

$$n^1(a) \omega = dy(a) \wedge dz(a).$$

Обе стороны дают одинаковый результат, только будучи примененными к $v, w \in M_a$.

Несколько замечаний относительно оснований для данных нами определений длины кривой и площади поверхности. Если $c : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^n$ дифференцируемо и $c([0, 1])$ — одномерное многообразие с краем, то можно показать (но с помощью довольно канительного доказательства), что его длина действительно является верхней гранью длин вписанных ломаных. При $c : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbf{R}^n$ естественно ожидать, что площадь $c([0, 1]^2)$ будет верхней гранью площадей поверхностей, составленных из треугольников, вершины которых лежат в $c([0, 1]^2)$. Довольно поразительно, что такая верхняя грань обычно не существует — можно вписывать многогранные поверхности, сколь угодно близкие к $c([0, 1]^2)$, но имеющие сколь угодно большую площадь. На рис. 5.9 это продемонстрировано на примере цилиндра. Было предложено много определений площади поверхности, которые расходятся друг с другом, но все согласуются с нашим определением для случая дифференцируемых поверхностей. Рассмотрение этих трудных вопросов читатель может найти в работах [17] или [10].

Задачи

5.23. Показать, что если M — ориентированное одномерное многообразие в \mathbf{R}^n и $c : [0, 1] \rightarrow M$ сориентировано, то

$$\int_{[0, 1]} c^*(ds) = \int_{[0, 1]} V[(c^1)'^2 + \dots + (c^n)'^2].$$

5.24. Показать, что если M есть n -мерное многообразие в \mathbf{R}^n со стандартной ориентацией, то $dV = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$, так что его объем, определенный в этом параграфе, совпадает с объемом, определенным в гл. 3. (Заметим, что здесь проявляется влияние числового коэффициента в определении $\omega \wedge \eta$.)

5.25. Обобщить теорему 5.6 на случай ориентированного $(n - 1)$ -мерного многообразия в \mathbf{R}^n .

5.26. а) Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ — неотрицательная функция и график f в плоскости xy вращается вокруг оси x в \mathbf{R}^3 , образуя