поверхность M. Показать, что ее площадь равна

$$\int_a^b 2\pi f \sqrt{1+(f')^2}.$$

б) Вычислить площадь сферы S^2.

5.27. Пусть T: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ — линейное отображение, сохраняющее норму, и M есть k-мерное многообразие в $\mathbf{R}^n$. Показать, что M и $T(M)$ имеют одинаковый объем.

5.28. а) Показать, что на k-мерном многообразии M можно определить абсолютный тензор k-й степени $|dV|$, даже если M неориентируемо, так, что M будет иметь объем $\int_M |dV|$.

б) Показать, что для c: $[0, 2\pi] \times (-1, 1) \to \mathbf{R}^3$, определенного равенством

$$c(u, v) = \left(2\cos u + v \sin\frac{u}{2}\cos u,\ 2\sin u + v\sin\frac{u}{2}\sin u,\ v\cos\frac{u}{2}\right),$$

$c([0, 2\pi] \times (-1, 1))$ есть лист Мёбиуса, и найти его площадь.

5.29. Показать, что если на k-мерном многообразии M существует всюду отличная от нуля форма k-й степени, то M ориентируемо.

5.30. а) Пусть f: $[0, 1] \to \mathbf{R}$ дифференцируема и c: $[0, 1] \to \mathbf{R}^2$ определено равенством $c(x) = (x, f(x))$. Показать, что $c([0, 1])$ имеет длину $\int_0^1 \sqrt{1+(f')^2}$.

б) Показать, что эта длина является верхней гранью длин вписанных ломаных. (Указание: Если $0 \leqslant t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_n = 1$, то

$$|c(t_i) - c(t_{i-1})| = \sqrt{(t_i - t_{i-1})^2 + (f(t_i) - f(t_{i-1}))^2} = \\ = \sqrt{(t_i - t_{i-1})^2 + f'(s_i)^2 (t_i - t_{i-1})^2}$$

с некоторым $s_i \in [t_{i-1}, t_i]$.)

5.31. Пусть ω — форма второй степени, определенная на $\mathbf{R}^3 \setminus 0$ равенством

$$\omega = \frac{x\,dy \wedge dz + y\,dz \wedge dx + z\,dx \wedge dy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}.$$

а) Показать, что ω замкнута.

б) Показать, что

$$\omega(p)(v_p, w_p) = \frac{\langle v \times w, p\rangle}{|p|^3}.$$

Пусть $r > 0$ и $S^2(r) = \{x \in \mathbf{R}^3: |x| = r\}$. Показать, что сужение ω на касательную плоскость к $S^2(r)$ есть элемент объема, умноженный на $1/r^2$, и что $\int\limits_{S^2(r)} \omega = 4\pi$. Вывести отсюда, что форма ω не точна. Тем не менее обозначим ω через $d\Theta$, поскольку, как мы увидим, $d\Theta$ является аналогом формы первой степени $d\theta$ на $\mathbf{R}^2 \setminus 0$.

в) Показать, что если v_p — такой касательный вектор, что $v = \lambda p$ для некоторого $\lambda \in \mathbf{R}$, то $d\Theta(p)(v_p, w_p) = 0$ для всех w_p.

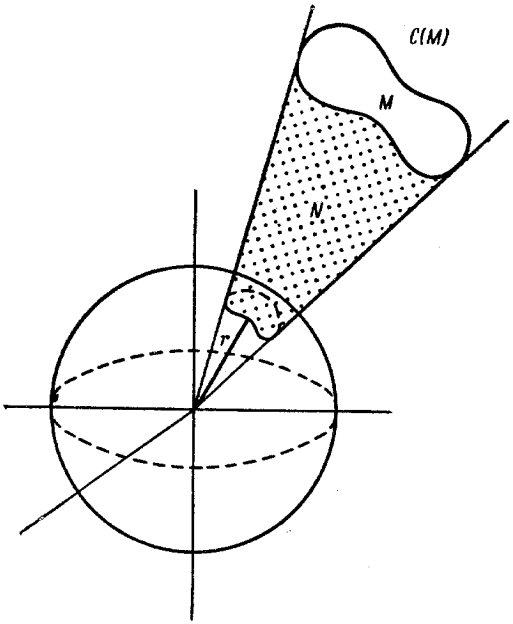

Рис. 5.10.

Показать, что если двумерное многообразие M в $\mathbf{R}^3$ является частью обобщенного конуса, т. е. объединением отрезков лучей, исходящих из нуля, то $\int\limits_M d\Theta = 0$.

г) Пусть $M \subset \mathbf{R}^3 \setminus 0$ — такое компактное двумерное многообразие с краем, что любой луч, исходящий из 0, пересекает M не более одного раза (рис. 5.10). Объединение всех исходящих из 0 лучей, пересекающих M, образует телесный угол $C(M)$. За *телесный угол*, стягиваемый многообразием M, принимается

площадь $C(M) \cap S^2$ или, что то же, площадь $C(M) \cap S^2(r)$ при любом $r > 0$, деленная на r^2. Доказать, что телесный угол, стягиваемый многообразием M, равен $\left| \int\limits_M d\Theta \right|$. (Указание: выбрать r столь малым, чтобы существовало трехмерное многообразие с краем N (как на рис. 5.10), имеющее в качестве ∂N объединение M, $C(M) \cap S^2(r)$ и части обобщенного конуса. (В действительности N будет многообразием с углами; см. замечания в конце следующего параграфа.).)

5.32. Пусть f, g: $[0, 1] \to \mathbf{R}^3$ — непересекающиеся замкнутые кривые. Определим *коэффициент зацепления* $l(f, g)$ кривых f и g формулой (ср. задачу 4.34)

$$l(f, g) = \frac{-1}{4\pi} \int\limits_{c_{f,g}} d\Theta.$$

а) Показать, что если (F, G) — гомотопия непересекающихся замкнутых кривых, то $l(F_0, G_0) = l(F_1, G_1)$.

б). Показать, что если $r(u, v) = |f(u) - g(v)|$, то

$$l(f, g) = -\frac{1}{4\pi} \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \frac{1}{|r(u, v)|^3} A(u, v)\, du\, dv,$$

где

$$A(u, v) = \det \begin{pmatrix} (f^1)'(u) & (f^2)'(u) & (f^3)'(u) \\ (g^1)'(v) & (g^2)'(v) & (g^3)'(v) \\ f^1(u) - g^1(v) & f^2(u) - g^2(v) & f^3(u) - g^3(v) \end{pmatrix}.$$

в) Показать, что если обе кривые f и g лежат в плоскости x, y, то $l(f, g) = 0$. Кривые на рис. 4.5, *б* задаются формулами $f(u) = (\cos u, \sin u, 0)$ и $g(v) = (1 + \cos v, 0, \sin v)$. Читатель может легко убедиться в том, что здесь вычисление $l(f, g)$ с помощью указанного интеграла — занятие безнадежное. Следующая задача показывает, как находить $l(f, g)$ без прямого вычисления.

5.33. а) Для точки $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$ положим

$$d\Theta_{(a, b, c)} = \frac{(x-a)\, dy \wedge dz + (y-b)\, dz \wedge dx + (z-c)\, dx \wedge dy}{[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]^{3/2}}.$$

Далее, для компактного двумерного многообразия с краем M в $\mathbf{R}^3$ и точки $(a, b, c) \notin M$ положим

$$\Omega(a, b, c) = \int\limits_M d\Theta_{(a, b, c)}.$$

Пусть (a, b, c) — точка, лежащая по ту же сторону от M, что и внешняя нормаль, и (a', b', c') — точка, лежащая по противо-

положную сторону. Показать, что, выбирая (a, b, c) и (a', b', c') достаточно близкими, можно сделать $\Omega(a, b, c) - \Omega(a', b', c')$ сколь угодно близким к -4π. (Указание: сначала показать, что если $M = \partial N$, то $\Omega(a, b, c) = -4\pi$ при $(a, b, c) \in N \setminus M$ и $\Omega(a, b, c) = 0$ при $(a, b, c) \notin N$.)

б) Пусть $f([0, 1]) = \partial M$ для некоторого компактного ориентированного двумерного многообразия с краем M. (Если f не имеет самопересечений, такое M всегда существует, даже если f заузлено, см. [13, стр. 138].) Предположим, что g — кривая, обладающая тем свойством, что касательный вектор v к g в точках x, где g пересекает M, не лежит в M_x. Пусть n^+ — число тех пересечений, для которых вектор v направлен в сторону внешней нормали, n^- — число остальных пересечений и $n = n^+ - n^-$. Показать, что

$$n = \frac{-1}{4\pi} \int_g d\Omega.$$

в) Доказать, что

$$D_1\Omega(a, b, c) = \int_f \frac{(y-b)\,dz - (z-c)\,dy}{r^3},$$

$$D_2\Omega(a, b, c) = \int_f \frac{(z-c)\,dx - (x-a)\,dz}{r^3},$$

$$D_3\Omega(a, b, c) = \int_f \frac{(x-a)\,dy - (y-b)\,dx}{r^3},$$

где $r(x, y, z) = |(x, y, z)|$.

г) Показать, что число n из б) равно интегралу задачи 5.32, б, и, используя этот результат, показать, что $l(f, g) = 1$ для кривых f и g, изображенных на рис. 4.6, *б*, и $l(f, g) = 0$ для кривых f и g на рис. 4.6, *в*. (Эти результаты были известны Гауссу [3]. Намеченные здесь доказательства взяты из [7]; см. также [8].)

КЛАССИЧЕСКИЕ ТЕОРЕМЫ

Теперь подготовлен весь аппарат, необходимый для формулирования и доказательства классических теорем „стоксовского типа". Мы разрешим себе несколько классических обозначений, имеющих очевидный смысл.

5.7. Теорема Грина. *Пусть $M \subset \mathbf{R}^2$ — компактное двумерное многообразие с краем. Предположим, что*

$\alpha, \beta : M \to \mathbf{R}$ *дифференцируемы. Тогда*

$$\int_{\partial M} \alpha dx + \beta dy = \int_M (D_1\beta - D_2\alpha)\, dx \wedge dy =$$
$$= \iint_M \left(\frac{\partial\beta}{\partial x} - \frac{\partial\alpha}{\partial y}\right) dx\, dy,$$

где на M задана стандартная ориентация, а на ∂M — индуцированная ориентация, известная также как „обход против часовой стрелки“.

Доказательство. Это весьма специальный случай теоремы 5.5, поскольку

$$d(\alpha dx + \beta dy) = (D_1\beta - D_2\alpha)\, dx \wedge dy \cdot \blacksquare$$

5.8. Теорема Гаусса — Остроградского. *Пусть $M \subset \mathbf{R}^3$ — компактное трехмерное многообразие с краем, n — орт внешней нормали на ∂M и F — дифференцируемое векторное поле на M. Тогда*

$$\int_M \operatorname{div} F dV = \int_{\partial M} \langle F, n\rangle\, dA.$$

Это равенство записывается также в виде

$$\iiint_M \left(\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y} + \frac{\partial\gamma}{\partial z}\right) dV = \iint_{\partial M} (n^1\alpha + n^2\beta + n^3\gamma)\, dS,$$

где $\alpha, \beta, \gamma : M \to \mathbf{R}$ — тройка дифференцируемых функций.

Доказательство. Рассмотрим на M форму $\omega = F^1 dy \wedge dz + F^2 dz \wedge dx + F^3 dx \wedge dy$. Имеем $d\omega = \operatorname{div} F dV$. С другой стороны, применяя теорему 5.6 к ∂M, получаем, что на ∂M

$$n^1\, dA = dy \wedge dz,$$
$$n^2\, dA = dz \wedge dx,$$
$$n^3\, dA = dx \wedge dy.$$

Поэтому на ∂M

$$\langle F, n\rangle\, dA = F^1 n^1\, dA + F^2 n^2\, dA + F^3 n^3\, dA =$$
$$= F^1\, dy \wedge dz + F^2\, dz \wedge dx + F^3\, dx \wedge dy = \omega.$$

Таким образом, в силу теоремы 5.5

$$\int_M \operatorname{div} F\, dV = \int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega = \int_{\partial M} \langle F,\ n\rangle\, dA. \ \blacksquare$$

5.9. Теорема Стокса. *Пусть $M \subset \mathbf{R}^3$ — компактное ориентированное двумерное многообразие с краем, n — орт внешней нормали на M, определяемый ориентацией M, и ∂M наделено индуцированной ориентацией. Пусть, далее, T — векторное поле на ∂M, для которого $ds(T) = 1$, и F — дифференцируемое векторное поле в открытом множестве, содержащем M. Тогда*

$$\int_M \langle (\nabla \times F), n\rangle\, dA = \int_{\partial M} \langle F,\ T\rangle\, ds.$$

Это равенство часто записывают в виде

$$\int_{\partial M} \alpha\, dx + \beta\, dy + \gamma\, dz =$$

$$= \int_M\int \left[n^1\left(\frac{\partial\gamma}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial z}\right) + n^2\left(\frac{\partial\alpha}{\partial z} - \frac{\partial\gamma}{\partial x}\right) + \right.$$

$$\left. + n^3\left(\frac{\partial\beta}{\partial x} - \frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)\right] ds.$$

Доказательство. Рассмотрим на M форму $\omega = F^1\, dx + F^2\, dy + F^3\, dz$. Так как $\nabla \times F$ имеет компоненты $D_2F^3 - D_3F^2$, $D_3F^1 - D_1F^3$, $D_1F^2 - D_2F^1$, то, как и при доказательстве теоремы 5.8, заключаем, что на M

$$\langle (\nabla \times F),\ n\rangle\, dA =$$

$$= (D_2F^3 - D_3F^2)\ dy \wedge dz + (D_3F^1 - D_1F^3)\ dz \wedge dx +$$

$$+ (D_1F^2 - D_2F^1)\ dx \wedge dy = d\omega.$$

С другой стороны, так как $ds(T) = 1$, то на ∂M

$$T^1\, ds = dx,$$

$$T^2\, ds = dy,$$

$$T^3\, ds = dz.$$

(Эти равенства можно проверить применением обеих частей к T_x для $x \in \partial M$, поскольку T_x является базисом для $(\partial M)_x$.) Поэтому на ∂M имеем

$$\langle F, T\rangle\, ds = F^1 T^1 ds + F^2 T^2 ds + F^3 T^3 ds =$$
$$= F^1 dx + F^2 dy + F^3 dz = \omega,$$

Таким образом, в силу теоремы 5.5

$$\int_M \langle (\nabla \times F), n\rangle\, dA = \int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega = \int_{\partial M} \langle F, T\rangle ds. \blacksquare$$

Теоремы 5.8 и 5.9 служат основанием для обозначений $\operatorname{div} F$ и $\operatorname{curl} F$ [1]). Если $F(x)$ — вектор скорости жидкости в точке x (в некоторый момент времени), то $\int_M \langle F, n\rangle\, dA$ есть количество жидкости, „расходящейся" из M. Следовательно, условие $\operatorname{div} F = 0$ выражает тот факт, что жидкость несжимаема. Если M — диск, то $\int_{\partial M} \langle F, T\rangle\, ds$ есть мера количества жидкости, циркулирующей вдоль границы этого диска. Если она равна 0 для всех дисков, то $\nabla \times F = 0$ и течение жидкости называется *безвихревым*.

Эти интерпретации $\operatorname{div} F$ и $\operatorname{curl} F$ принадлежат Максвеллу [8]. В действительности он работал с величиной $-\operatorname{div} F$, которую соответственно называл *конвергенцией*.

Для $\nabla \times F$ Максвелл „с большой неуверенностью" предложил термин „rotation" (вращение) поля F; этим неудачным термином подсказано сокращение $\operatorname{rot} F$, иногда еще встречающееся [2]).

Классические теоремы этого параграфа обычно устанавливаются при несколько более широких условиях, чем было сделано здесь. Например, теорема Грина верна для квадрата, а теорема Гаусса — Остроградского — для куба. Эти два специальных факта можно доказать, аппроксимируя квадрат или куб многообразиями с краем. Полное обобщение

---

[1]) Напомним, что div — сокращение от divergence (расходимость), а curl означает вихрь (англ.). — *Прим. перев.*

[2]) В отечественной математической литературе обозначение rot используется не менее часто, чем curl. — *Прим. перев.*

теорем этого параграфа требует понятия многообразий с углами; это подмножества в $\mathbf{R}^n$, локально диффеоморфные частям $\mathbf{R}^k$, ограниченным кусками $(k-1)$-мерных плоскостей. Строгое определение многообразий с углами и исследование того, как можно обобщить на них результаты всей главы, будут достойными упражнениями для читателя, имеющего к этому вкус.

Задачи

5.34. Обобщить теорему Гаусса — Остроградского на случай n-мерного многообразия с краем в $\mathbf{R}^n$.

5.35. Применяя обобщенную теорему Гаусса — Остроградского к множеству $M = \{x \in \mathbf{R}^n: |x| \leqslant a\}$ и $F(x) = x_x$, выразить $(n-1)$-мерный объем сферы $S^{n-1} = \{x \in \mathbf{R}^n: |x| = 1\}$ через n-мерный объем шара $B_n = \{x \in \mathbf{R}^n: |x| \leqslant 1\}$ $\Big($последний объем равен $\pi^{n/2} \Big/ \left(\frac{n}{2}\right)!$, если n четно, и $\dfrac{2^{\frac{n+1}{2}} \pi^{\frac{n-1}{2}}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot n}$, если n нечетно$\Big)$.

5.36. Пусть F — векторное поле на $\mathbf{R}^3$, определенное равенством $F(x) = (0, 0, cx^3)_x$, и M — компактное трехмерное многообразие с краем, содержащееся в полупространстве $M \subset \{x: x^3 \leqslant 0\}$. Поле F можно представить себе как давление жидкости плотности c, заполняющей область $\{x: x^3 \leqslant 0\}$. Поскольку жидкость оказывает равное давление во всех направлениях, мы будем под *выталкивающей силой*, действующей на M, понимать $-\int\limits_{\partial M} \langle F, n\rangle \, dA$. Доказать *закон Архимеда*: действующая на M выталкивающая сила равна весу жидкости, вытесненной M.

ЛИТЕРАТУРА

1. Альфорс (Ahlfors), Complex analysis, New York, 1953.
2. Ауслендер и Маккензи (Auslander, MacKenzie), Introduction to differentiable manifolds, New York, 1963.
3. Гаусс (Gauss), Zur mathematischen Theorie der elektrodynamischen Wirkungen, Werke, B.5, Göttingen, 1877.
4. Дьедонне Ж., Основы современного анализа, изд-во „Мир", М., 1964.
5. Келли (Kelley), General topology, Princeton, 1955 (русский перевод готовится к печати в изд-ве „Наука").
6. Кобаяси и Номидзу (Kobayashi, Nomizu), Foundations of differential geometry, New York, 1963.
7. Курант Р., Курс дифференциального и интегрального исчисления, ч. II, ГНТИ, М. — Л., 1931 (перевод последнего переработанного издания готовится к печати в изд-ве «Наука»).
8. Максвелл Дж. К., Избранные сочинения по теории электромагнитного поля, ГИТТЛ, М., 1954.
9. Натансон Н. П., Теория функций вещественной переменной, ГИТТЛ, М., 1957.
10. Радо (Radó), Length and area, New York, 1948.
11. де Рам Ж., Дифференцируемые многообразия, ИЛ, М., 1956.
12. Стернберг (Sternberg), Lectures on differential geometry, Englewood Cliffs, 1964.
13. Форт (Fort), Topology of 3-manifolds, Englewood Cliffs, 1962.
14. Хелгасон С., Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, изд-во „Мир", М., 1964.
15. Хилтон Дж. и Уайли С., Теория гомологий, изд-во „Мир", М., 1966.
16. Ху Сы-цзян, Теория гомотопий, изд-во „Мир", М., 1964.
17. Чезари (Cesari), Surface area, Princeton, 1956.

Литература, добавленная при переводе

18. Бишоп Р., Криттенден Р., Геометрия многообразий, изд-во „Мир", 1967.
19. Ленг С., Введение в теорию дифференцируемых многообразий, изд-во „Мир", М., 1967.
20. Номидзу К., Группы Ли и дифференциальная геометрия, ИЛ, М., 1960.
21. Рудин У., Основы математического анализа, изд-во „Мир", 1966.
22. Стинрод Н., Топология косых произведений, ИЛ, М., 1953.
23. Телеман К., Элементы топологии и дифференцируемые многообразия, изд-во „Мир", 1967.
24. Уитни Х., Геометрическая теория интегрирования, ИЛ, М., 1960.
25. Шевалле К., Теория групп Ли, ИЛ, М., т. 1, 1948; т. 2, 3, 1958.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

М. Спивак

Математический анализ на многообразиях

Редактор *Л. Б. Штейнпресс*
Художник *Н. Н. Власик*
Художественный редактор *В. И. Шаповалов*
Технический редактор *И. К. Дерва*

Сдано в производство 10/X 1967 г. Подписано к печати 22/II 1968 г. Бумага типографская № 2. Формат $84\times108^1/_{32}=2{,}56$ бум. л. 8,61 усл. печ. л. Уч.-изд. л. 7,81. Изд. № 1/4422. Цена 56 к. Зак. 904
Темплан 1968 г. Издательство „Мир", № 20

ИЗДАТЕЛЬСТВО „МИР"
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой
Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР
Измайловский проспект, 29