прямой, то $\lim\limits_{x\to a} y(x) = \lim\limits_{x\to a} x = a$. Несмотря на тривиальность этих равенств, они являются отправными точками для вычисления пределов.

Основные утверждения, используемые для вычисления пределов.

Если существуют $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} f_2(x)$, то

a) $\lim\limits_{x\to a}(f_1(x)+f_2(x)) = \lim\limits_{x\to a} f_1(x) + \lim\limits_{x\to a} f_2(x)$;

b) $\lim\limits_{x\to a}(f_1(x)\cdot f_2(x)) = \lim\limits_{x\to a} f_1(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} f_2(x)$;

c) если $\lim\limits_{x\to a} f_2(x) \neq 0$, то $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to a} f_2(x)}$;

d) если в некоторой проколотой окрестности точки $x=a$ имеем

$$f_1(x) \leqslant g(x) \leqslant f_2(x) \text{ и } \lim_{x\to a} f_1(x) = \lim_{x\to a} f_2(x) = A, \text{ то } \lim_{x\to a} g(x) = A$$

(принцип двустороннего ограничения).

Пример 6. Найдем $\lim\limits_{x\to a}(\alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1}x + \alpha_n)$ (a — собственная точка числовой прямой).

Решение. Пользуясь утверждениями о пределе суммы и произведения, получаем, что

$$\lim_{x\to a}(\alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1}x + \alpha_n) = \alpha_0 a^n + \alpha_1 a^{n-1} + \\ + \ldots + \alpha_{n-1}a + \alpha_n,$$

т. е. предел многочлена при x, стремящемся к числу a, существует и равен значению этого многочлена в точке a.

В дальнейшем постоянно пользуемся тем, что для любой основной элементарной функции $f(x)$ и точки a из ее области определения справедливо соотношение

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Определение. Если функция $f(x)$ определена всюду в некоторой окрестности точки a (правой полуокрестности, левой полуокрестности) и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ ($\lim\limits_{x\to a+} f(x) = f(a)$, $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = f(a)$), то функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* a (непрерывной справа, непрерывной слева).

Пользуясь этим определением, можно предыдущее замечание сформулировать так: каждая основная элементарная функция непрерывна в каждой внутренней точке своей области определения и непрерывна справа (слева) в крайней левой (крайней правой) точке области определения.

При вычислении пределов постоянно применяется *теорема о пределе композиции:*

если функция $f(x)$ непрерывна в точке $x=a$ и существует $\lim\limits_{t\to t_0} x(t)=a$, то верно утверждение

$$\lim_{t\to t_0} f(x(t))=f(\lim_{t\to t_0} x(t))=f(a).$$

Пример 7. Найдем $\lim\limits_{x\to 4\pi} \ln(1+\sqrt{1+\sin^2(x/2)})$.

Решение. Напишем цепочку соотношений

$$y_1=x/2,\ y_2=\sin y_1,\ y_3=y_2^2,\ y_4=1+y_3,$$

$$y_5=\sqrt{y_4},\ y_6=1+y_5,\ y_7=\ln y_6.$$

Применяя последовательно теорему о пределе композиции, получим

$$\lim_{x\to 4\pi} y_1(x)=2\pi;\ \lim_{x\to 4\pi} y_2(x)=\lim_{y_1\to 2\pi}\sin y_1=0;$$

$$\lim_{x\to 4\pi} y_3(x)=\lim_{y_2\to 0} y_2^2=0;\ \lim_{x\to 4\pi} y_4(x)=$$

$$=\lim_{y_3\to 0}(1+y_3)=1;\ \lim_{x\to 4\pi} y_5(x)=\lim_{y_4\to 1}\sqrt{y_4}=1,$$

$$\lim_{x\to 4\pi} y_6(x)=\lim_{y_5\to 1}(1+y_5)=2,$$

$$\lim_{x\to 4\pi}\ln(1+\sqrt{1+\sin^2(x/2)})=\lim_{x\to 4\pi} y_7(x)=\lim_{y_6\to 2}\ln y_6=\ln 2.$$

Заметим, что условие непрерывности функции f в точке $x=a$ в теореме о пределе композиции нельзя заменить на условие существования предела функции f при $x\to a$. Дело в том, что если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, $\lim\limits_{t\to t_0} x(t)=a$ и $\lim\limits_{t\to t_0} f(x(t))$ существует, то верно равенство $\lim\limits_{t\to t_0} f(x(t))=\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, но существование предела $f(x(t))$ не вытекает из существования пределов функций $f(x)$ и $x(t)$.

Пример 8. Пусть

$$f(x)=\operatorname{sign}^2 x=\begin{cases}1, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

и

$$x(t)=\begin{cases} t, & x\in(1/2k,\ 1/(2k-1)),\ k\in Z,\ k\neq 0;\\ -t, & x\in(1/(2k+1),\ 1/2k),\ k\in Z,\ k\neq 0;\\ 0, & x=1/k,\quad k\in Z,\ k\neq 0.\end{cases}$$

Пусть $\varepsilon>0$ — произвольное число и $\delta=\varepsilon$. Так как $|x(t)|\leqslant|t|$, то из неравенства $0<|t|<\delta$ следует неравенство $|x(t)|<\varepsilon$, т. е. $\lim\limits_{t\to 0} x(t)=0$. Так как для любого $x\neq 0$ имеем $f(x)-1=0$, то $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$.

Рассмотрим $f(x(t))$. Для любого $\delta>0$ в интервалах $(-\delta, 0)$ и $(0, \delta)$ найдется бесконечно много t, равных $1/k$, $k\in Z$, $k\neq 0$, для которых $x(t)=0$ и, следовательно, $f(x(t))=0$. С другой стороны, при всех значениях t, отличных от нуля, и чисел вида $1/k$, $k\in Z$, $k\neq 0$, имеем $x(t)\neq 0$, следовательно, $f(x(t))=1$.

Таким образом, в любой проколотой окрестности точки $t=0$ функция $f(x(t))$ принимает как значение 1, так и значение 0. Отсюда следует, что $f(x(t))$ не имеет предела при $t\to 0$.

Пример 9. Найдем $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \sin(1/x)$.

Решение. Пользуясь неравенством $-x^2\leqslant x^2\sin(1/x)\leqslant x^2$ и принципом двустороннего ограничения, получаем, что

$$\lim_{x\to 0} x^2 \sin(1/x)=0.$$

Пример 10. Найдем $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3-1}{x^2-4x+3}$.

Решение. Пользуясь результатом первого примера и утверждением о пределе отношения, получаем, что

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^3-1}{x^2-4x+3}=\frac{\lim\limits_{x\to -1}(x^3-1)}{\lim\limits_{x\to -1}(x^2-4x+3)}=\frac{-1-1}{1+4+3}=\frac{1}{4}.$$

Определение. Функция $f(x)$ при $x\to a$ называется бесконечно большой, если для любого положительного числа C существует окрестность $U(a)$ такая, что $|f(x)|>C$ для любых $x\in \dot{U}(a)\cap E$ (E — множество определения функции $f(x)$).

Заменяя в этом определении неравенство $|f(x)|>C$ на $f(x)>C$ ($f(x)<-C$), получаем определение положительной бесконечно большой (отрицательной бесконечно большой) функции.

Сравнивая определение бесконечно большой функции с определением функции, имеющей предел, видим большую общность: если в первом определении требуется, чтобы все значения функции в некоторой проколотой окрестности точки a оси OX попадали в заданную окрестность несобственной точки оси OY, во втором определении требуется, чтобы все значения функции в некоторой проколотой окрестности точки a оси OX попадали в заданную окрестность собственной точки A оси OY.

Коротко утверждение, что функция $f(x)$ при $x\to a$ является бесконечно большой (положительной бесконечно большой, отрицательной бесконечно большой) записывается так:

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty \quad (\lim_{x\to a} f(x)=+\infty,\ \lim_{x\to a} f(x)=-\infty).$$

Основные соотношения для бесконечно больших функций:

е) если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, $f(x)\neq 0$, то $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{f(x)}=\infty$,
обратно, если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, то $\lim\limits_{x\to a} 1/f(x)=0$;

f) если $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)=\infty$ и $\lim\limits_{x\to a} f_2(x)=A$, то $\lim\limits_{x\to a}(f_1(x)+f_2(x))=\infty$;

g) если $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)=+\infty$ и $\lim\limits_{x\to a} f_2(x)=+\infty$, то $\lim\limits_{x\to a}(f_1(x)+$ $+f_2(x))=+\infty$;

h) если $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)=\infty$ и $\lim\limits_{x\to a} f_2(x)=A\neq 0$, то $\lim\limits_{x\to a}(f_1(x)\cdot f_2(x))=\infty$.

Из соотношений a) — h) следует, что если $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)=A\neq 0$, $f_2(x)\neq 0$, $\lim\limits_{x\to a} f_2(x)=0$, то $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)/f_2(x)=\infty$; если же $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)=A$, $\lim\limits_{x\to a} f_2(x)=\infty$, то $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)/f_2(x)=0$.

Пример 11. Найдем $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x^2+4x+2)}{\ln(x^{10}+x^3+x^2)}$.

Решение. Пользуясь соотношением e) и утверждением о пределе произведения, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x^2+4x+2)}{\ln(x^{10}+x^3+x^2)}=\lim_{x\to 0}\ln(x^2+4x+2)\times$$

$$\times\lim_{x\to 0}\frac{1}{\ln(x^{10}+x^3+x^2)}=\ln 2\cdot 0=0.$$

Пример 12. Найдем $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{2^x}$.

Решение. Рассмотрим обратную величину $\dfrac{2^x}{x}=2^x\cdot\dfrac{1}{x}$. Применяя соотношение e) и утверждение о пределе произведения, получаем

$$\lim_{x\to-\infty}\left(2^x\cdot\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}2^x\cdot\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0,$$

откуда, применив еще раз соотношение e), следует, что $\lim\limits_{x\to-\infty} x/2^x=-\infty$.

Пример 13. Найдем $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{4x^2+4x}+x)$.

Решение. Из соотношения g) следует, что

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{4x^2+4x}+x)=+\infty.$$

Пример 14. Найдем $\lim\limits_{x\to\infty}(x+\cos x)$.

Решение. Так как $0\leqslant|\cos x/x|\leqslant 1/|x|$, то применяя соотношение e) и принцип двустороннего ограничения, получаем, что $\lim\limits_{x\to\infty}|\cos x/x|=0$, т. е. $\lim\limits_{x\to\infty}\cos x/x=0$, следовательно, в силу утверждения о пределе суммы $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\cos x/x)=1$, применяя соотношение h), получаем, что

$$\lim_{x\to\infty}(x+\cos x)=\lim_{x\to\infty}x(1+\cos x/x)=\infty.$$

Рассмотрим теперь, как находится предел степенно-показательной функции $[u(x)]^{v(x)}(u(x)>0)$.

Пользуясь непрерывностью показательной функции, получаем

$$\lim_{x\to a} u(x)^{v(x)} = \lim_{x\to a} e^{v(x)\ln u(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}[v(x)\ln u(x)]}.$$

Таким образом, нахождение предела степенно-показательной функции сводится к нахождению $\lim\limits_{x\to a}[v(x)\ln u(x)]$.

Рассмотрим подробнее отдельные случаи (I—III).

I. Если $\lim\limits_{x\to a} v(x) = A$, $\lim\limits_{x\to a} \ln u(x) = B$, то $\lim\limits_{x\to a} u(x) = e^B$, так как

$$\lim_{x\to a} u(x) = \lim_{x\to a} e^{\ln u(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}\ln u(x)} = e^B$$

и

$$e^{\lim\limits_{x\to a}[v(x)\ln u(x)]} = e^{A\cdot B} = (e^B)^A = [\lim_{x\to a} u(x)]^{\lim\limits_{x\to a} v(x)}.$$

Другими словами, если $\lim\limits_{x\to a} u(x) = u$, $u > 0$ и $\lim\limits_{x\to a} v(x) = v$, то $\lim\limits_{x\to a} u(x)^{v(x)} = u^v$.

II. Если $\lim\limits_{x\to a}[v(x)\ln u(x)] = +\infty$, то и $e^{\lim\limits_{x\to a}[v(x)\ln u(x)]} = +\infty$, если $\lim\limits_{x\to a}[v(x)\ln u(x)] = -\infty$, то $e^{\lim\limits_{x\to a}[v(x)\ln u(x)]} = 0$.

Отсюда видно, что если $\lim\limits_{x\to a}[v(x)\ln u(x)] = \infty$ и произведение $v(x)\ln u(x)$ не сохраняет знак ни в какой проколотой окрестности точки a, то функция $u(x)^{v(x)} = e^{v(x)\ln u(x)}$ не имеет предела при $x \to a$.

Пример 15. Найдем $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2}{x^2+1}\right)^{\operatorname{ctg}\pi x}$.

Решение. Так как

$$\lim_{x\to 1}\ln\frac{x^2}{x^2+1} = \ln\frac{1}{2}, \text{ а } \lim_{x\to 1}\operatorname{ctg}\pi x = \infty,$$

то

$$\lim_{x\to 1}\left[\ln\frac{x^2}{x^2+1}\cdot\operatorname{ctg}\pi x\right] = \infty.$$

При $0 < x < 1$ имеем, что

$$\ln\frac{x^2}{x^2+1}\operatorname{ctg}\pi x > 0,$$

при $1 < x < 2$ имеем

$$\ln\frac{x^2}{x^2+1}\cdot\operatorname{ctg}\pi x < 0,$$

таким образом, бесконечно большая функция $\ln\frac{x^2}{x^2+1}\cdot\operatorname{ctg}\pi x$ в любой проколотой окрестности точки $a=1$ принимает значения разных знаков. Поэтому функция

$$\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)^{\operatorname{ctg}\pi x}=e^{\operatorname{ctg}\pi x\ln\frac{x^2}{x^2+1}}$$

не имеет предела при $x\to1$ и не является бесконечно большой при $x\to1$. (В то же время

$$\lim_{x\to1+}\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)^{\operatorname{ctg}\pi x}=+\infty,\quad \lim_{x\to1-}\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)^{\operatorname{ctg}\pi x}=0.)$$

Пример 16. Найдем $\lim\limits_{x\to1}\left(\sin\frac{\pi x}{4}\right)^{x^2+3}$.

Решение. Так как

$$\lim_{x\to1}\sin\frac{\pi x}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \lim_{x\to1}(x^2+3)=4,$$

то

$$\lim_{x\to1}\left(\sin\frac{\pi x}{4}\right)^{x^2+3}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4=\frac{1}{4}.$$

Пример 17. Найдем $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{x+1}{x+3}\right)^{\operatorname{ctg}^2\pi x}$.

Решение. Так как

$$\lim_{x\to1}\frac{x+1}{x+3}=\frac{1}{2},\quad \lim_{x\to1}\operatorname{ctg}^2\pi x=+\infty,$$

то

$$\lim_{x\to1}\operatorname{ctg}^2\pi x\ln\frac{x+1}{x+3}=-\infty,$$

следовательно,

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{x+1}{x+3}\right)^{\operatorname{ctg}^2\pi x}=0.$$

Пример 18. Найдем $\lim\limits_{x\to\pi+}(\sin^2x)^{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$.

Решение. Так как

$$\lim_{x\to\pi+}\ln\sin^2x=-\infty,\quad \lim_{x\to\pi+}\operatorname{tg}\frac{x}{2}=-\infty,$$

то

$$\lim_{x\to\pi+}(\ln\sin^2x)\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}=+\infty,\quad \lim_{x\to\pi+}(\sin^2x)^{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}=+\infty.$$

III. Пусть в произведении $v(x)\ln u(x)$ предел одного из сомножителей при $x \to a$ равен нулю, а второй сомножитель является бесконечно большой функцией. Такое положение возможно в трех случаях:

а) $\lim\limits_{x\to a} v(x) = 0, \quad \lim\limits_{x\to a} u(x) = +\infty$ (символически ∞^0),

б) $\lim\limits_{x\to a} v(x) = 0, \quad \lim\limits_{x\to a} u(x) = 0$ (символически 0^0),

в) $\lim\limits_{x\to a} v(x) = \infty, \quad \lim\limits_{x\to a} u(x) = 1$ (символически 1^∞).

Непосредственное применение теорем о свойствах пределов и бесконечно больших функций не дает возможности вычислить такие пределы. Так же обстоит дело с вычислением $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$, когда $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$. Этот предел нельзя найти, пользуясь теоремой о пределе отношения, так как предел знаменателя равен нулю, нельзя использовать и соотношения e)—h), так как предел числителя равен нулю. В этом случае говорят, что имеется неопределенность $\frac{0}{0}$.

Аналогично вводятся символические обозначения неопределенностей $\frac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$.

В тех случаях, когда имеет место неопределенность, для вычисления предела — «раскрытия неопределенности» — преобразовывают выражение так, чтобы получить возможность его вычислить. Для таких преобразований используются или тождественные (в проколотой окрестности точки a) соотношения, либо сравнение поведения функций при стремлении аргумента к предельной точке.

Пример 19. Найдем $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-4x+3}$ $\left(\text{неопределенность типа } \frac{0}{0}\right)$.

Решение. В проколотой окрестности точки $x=1$ функции $\frac{x^3-1}{x^2-4x+3}$ и $\frac{x^2+x+1}{x-3}$ тождественно равны, значит, имеют при $x\to 1$ один и тот же предел. Предел $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+x+1}{x-3}$ вычисляется с использованием утверждения о пределе частного и пределе многочлена. Итак,

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-4x+3} = \lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1}{x-3} = \frac{\lim\limits_{x\to 1}(x^2+x+1)}{\lim\limits_{x\to 1}(x-3)} = -\frac{3}{2}.$$

Пример 20. Найдем

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\alpha_0x^n+\alpha_1x^{n-1}+\ldots+\alpha_{n-1}x+\alpha_n}{\beta_0x^m+\beta_1x^{m-1}+\ldots+\beta_{m-1}x+\beta_m}\quad(m>n\geqslant 1,\quad \alpha_0\beta_0\neq 0)$$

$\left(\text{неопределенность } \frac{\infty}{\infty}\right)$.

Решение. $\dfrac{\alpha_0x^n+\alpha_1x^{n-1}+\ldots+\alpha_{n-1}x+\alpha_n}{\beta_0x^m+\beta_1x^{m-1}+\ldots+\beta_{m-1}x+\beta_m}=$

$$=\frac{\alpha_0\cdot\frac{1}{x^{m-n}}+\ldots+\alpha_{n-1}\cdot\frac{1}{x^{m-1}}+\alpha_n\frac{1}{x^m}}{\beta_0+\beta_1\cdot\frac{1}{x}+\ldots+\beta_{m-1}\cdot\frac{1}{x^{m-1}}+\beta_m\frac{1}{x^m}},$$

следовательно, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\alpha_0x^n+\cdots+\alpha_n}{\beta_0x^m+\ldots+\beta_m}=\dfrac{0}{\beta_0}=0$ (правильная рациональная дробь при $x\to\infty$ стремится к нулю).

Если в числителе такой дроби стоит многочлен нулевой степени, т. е. константа, то стремление дроби к нулю при $x\to\infty$ следует непосредственно из соотношения е) для бесконечно больших функций.

Пример 21. Найдем $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+4x+5}+x)$ (неопределенность типа $\infty-\infty$).

Решение. Если $x<0$, то $(\sqrt{x^2+4x+5}+x)=\dfrac{4x+5}{\sqrt{x^2+4x+5}-x}=$

$$=\frac{4+\frac{5}{x}}{-\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}-1},\ \text{следовательно,}\ \lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+4x+5}+x)=$$

$=-2$.

Пример 22. Найдем $\lim\limits_{x\to\pi+}\sqrt{1+\cos x}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$ (неопределенность типа $0\cdot\infty$).

Решение. Если $\pi<x<\dfrac{3\pi}{2}$, то $\sqrt{1+\cos x}=\sqrt{2\cos^2\dfrac{x}{2}}=$

$=-\sqrt{2}\cos\dfrac{x}{2}$, следовательно,

$$\lim_{x\to\pi+}\sqrt{1+\cos x}\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\lim_{x\to\pi+}\left(-\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)=-\sqrt{2}.$$

Пример 23. Найдем $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x^2+4x+2)}{\ln(x^{10}+x^3+x)}$ $\left(\text{неопределенность типа } \frac{\infty}{\infty}\right)$.

Решение. Имеем

$$\frac{\ln(x^2+4x+2)}{\ln(x^{10}+x^3+x)}=\frac{2\ln|x|+\ln\left(1+\frac{4x+2}{x^2}\right)}{10\ln|x|+\ln\left(1+\frac{x^3+x}{x^{10}}\right)}=$$

$$=\frac{2+\frac{\ln\left(1+\frac{4x+2}{x^2}\right)}{\ln|x|}}{10+\frac{\ln\left(1+\frac{x^3+x}{x^{10}}\right)}{\ln|x|}}.$$

Применяя соотношение e) для бесконечно больших функций и соотношение b) для вычисления пределов, получаем

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{4x+2}{x^2}\right)}{\ln|x|}=\lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{4x+2}{x^2}\right)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\ln|x|}=0,$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{x^2+1}{x^9}\right)}{\ln|x|}=0,$$

откуда, применяя соотношения a) и b) для вычисления пределов, получаем

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x^2+4x+2)}{\ln(x^{10}+x^3+x)}=\frac{2+0}{10+0}=\frac{1}{5}.$$

Пример 24. Найдем $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{2^x}$ $\left(\text{неопределенность типа } \frac{\infty}{\infty}\right)$.

Решение. Методом математической индукции доказывается, что для всех натуральных чисел n имеем $n<2^n$. Пользуясь монотонностью показательной функции 2^x, отсюда получаем, что для $x>0$ имеем $x/2<[x/2]+1<2^{[x/2]+1}\leqslant 2^{x/2+1}$, где $[\alpha]$ — целая часть α. Следовательно, для $x>0$ имеем $x^2/4<2^{x+2}$ и $0<x/2^x<16/x$. Применяя соотношение e) для бесконечно больших функций, получаем, что

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2^x}=0.$$

Пример 25. Найдем $\lim\limits_{x\to 0+}x^x$ (неопределенность типа 0^0).

Решение. Необходимо найти $\lim\limits_{x\to 0+}x\ln x$. Положим $x=2^{-\alpha}$, тогда условие $x\to 0+$ эквивалентно условию $\alpha\to+\infty$. Пользуясь результатом предыдущего примера, получаем, что

$$\lim_{x\to 0+}x\ln x=\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{-\alpha\ln 2}{2^\alpha}=0,$$

следовательно,

$$\lim_{x\to 0+} x^x = e^{\lim\limits_{x\to 0+} x\ln x} = e^0 = 1.$$

Сравнение поведения функций при $x\to a$.

Определения.

1. $f(x)\sim g(x)$ при $x\to a$ ($f(x)$ *эквивалентна* $g(x)$ при $x\to a$), если $f(x)=\alpha(x)g(x)$, где $\alpha(x)\to 1$ при $x\to a$.

2. $f(x)=O(g(x))$ при $x\to a$, если $f(x)=\alpha(x)g(x)$, где $\alpha(x)$ ограничена в некоторой проколотой окрестности точки $x=a$.

3. $f(x)=o(g(x))$ при $x\to a$, если $f(x)=\alpha(x)\cdot g(x)$, где $\alpha(x)\to 0$ при $x\to a$.

Замечание. Если $g(x)$ не обращается в нуль в некоторой проколотой окрестности точки $x=a$, то

$f(x)\sim g(x)$ при $x\to a$, если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$;

$f(x)=O(g(x))$ при $x\to a$, если отношение $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ограничено в некоторой проколотой окрестности точки $x=a$;

$f(x)=o(g(x))$ при $x\to a$, если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$.

Отметим, что символом $O(1)$ обозначается ограниченная в некоторой проколотой окрестности точки $x=a$ функция, символом $o(1)$ обозначается функция, имеющая нулевой предел при $x\to a$ (бесконечно малая функция при $x\to a$).

Свойства введенных соотношений. (Везде подразумевается, что $x\to a$.)

1. Если $f(x)\sim g(x)$, то $g(x)\sim f(x)$ (симметричность соотношения эквивалентности).
2. Если $f(x)\sim g(x)$ и $g(x)\sim h(x)$, то $f(x)\sim h(x)$.
3. Если $f(x)\sim g(x)$, то $f(x)=O(g(x))$.
4. Если $f(x)=o(g(x))$, то $f(x)=O(g(x))$.
5. Если $f(x)\sim g(x)$, то $o(f(x))=o(g(x))$.
6. Если постоянная $C\neq 0$, то
   $C\cdot O(g(x))=O(g(x))$, $C\cdot o(g(x))=o(g(x))$.
7. $O(O(g(x))=O(g(x))$, $O(o(g(x))=o(O(g(x)))=o(g(x))$,
   $o(o(g(x)))=o(g(x))$.
8. $h(x)\cdot O(g(x))=O(h(x)\cdot g(x))$, $h(x)\cdot o(g(x))=o(h(x)g(x))$.
9. $O(g(x))\cdot O(g(x))=O(g^2(x))$, $O(g(x))\cdot o(g(x))\cdot o(g^2(x))$,
   $o(g(x))\cdot o(g(x))=o(g^2(x))$.
10. $O(g(x))+O(g(x))=O(g(x))$, $O(g(x))+o(g(x))=O(g(x))$,
    $o(g(x))+o(g(x))=o(g(x))$.
11. Если $f(x)\sim g(x)$ и $h(x)\sim s(x)$, то $f(x)\cdot h(x)\sim g(x)\cdot s(x)$.
12. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=k\neq 0$, то $f(x)\sim k$.

Из этих свойств следует, что если $f(x)\sim g(x)$, то $f(x)-g(x)=$ $=o(g(x))$ или $f(x)=g(x)+o(g(x))$. Если функция $f(x)$ представлена в виде такой суммы, то говорят, что $g(x)$ есть главная часть $f(x)$ при $x\to a$.

Пример 26. Рассмотрим соотношение

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\alpha_0x^n+\alpha_1x^{n-1}+\ldots+\alpha_{n-1}x+\alpha_n}{\alpha_0x^n}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\alpha_0+\frac{\alpha_1}{x}+\frac{\alpha_2}{x^2}+\ldots+\frac{\alpha_n}{x^n}}{\alpha_0}=1,\quad \alpha_0\neq 0.$$

Следовательно, α_0x^n есть главная часть

$$\alpha_0x^n+\alpha_1x^{n-1}+\ldots+\alpha_{n-1}x+\alpha_n\quad(\alpha_0\neq 0)\text{ при }x\to\infty.$$

(Обращаем внимание, что, например, функции

$$y=\alpha_0x^n+\alpha_1x^{n-1}\text{ и }y=\alpha_0x^n+\alpha_1x^{n-1}+\alpha_2x^{n-2}$$

также являются главными частями данной функции при $x\to\infty$.)

Пример 27.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha_0x^n+\alpha_1x^{n-1}+\ldots+\alpha_{n-m}x^m}{\alpha_{n-m}x^m}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\alpha_0x^{n-m}+\alpha_1x^{n-m-1}+\ldots+\alpha_{n-m}}{\alpha_{n-m}}=1\quad(\alpha_{n-m}\neq 0,\ \alpha_0\neq 0,\ 1\leqslant$$

$$\leqslant m\leqslant n),$$

следовательно, $\alpha_{n-m}x^m$ есть главная часть $\alpha_0x^n+\alpha_1x^{n-1}+\ldots+\alpha_{n-m}x^m$ при $x\to 0$.

Справедливы следующие соотношения (*два основных предела*):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1;\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

В другой записи:

$$\sin x\sim x,\quad e^x-1\sim x\text{ при }x\to 0.$$

Отсюда получаем, что при $x\to 0$:

$$1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}\sim\frac{x^2}{2}\quad\text{(свойство 11)};$$

$$\operatorname{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x}\sim x\quad\text{(свойства 11 и 12)};$$

$$\arcsin x\sim\sin(\arcsin x)=x;$$

$$\ln(1+x)\sim e^{\ln(1+x)}-1=x.$$

Сведем полученные и аналогичные им соотношения в таблицу (с. 62). Из разобранных примеров следует, что при $x\to+\infty$

1) $\alpha_0x^n+\alpha_1x^{n-1}+\ldots+\alpha_{n-1}x+\alpha_n=$
$=o(\beta_0x^m+\beta_1x^{m-1}+\ldots+\beta_{m-1}x+\beta_m)\quad(\alpha_0\beta_0\neq 0,\quad m>n)$,

2) $x=o(2^x)$.

Эквивалентность при $x \to 0$	Равенство при $x \to 0$
$\sin x \sim x$	$\sin x = x + o(x)$
$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$	$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$
$\operatorname{tg} x \sim x$	$\operatorname{tg} x = x + o(x)$
$\arcsin x \sim x$	$\arcsin x = x + o(x)$
$\operatorname{arctg} x \sim x$	$\operatorname{arctg} x = x + o(x)$
$e^x - 1 \sim x$	$e^x = 1 + x + o(x)$
$\ln(1+x) \sim x$	$\ln(1+x) = x + o(x)$
$(1+x)^m - 1 \sim mx$	$(1+x)^m = 1 + mx + o(x)$

Пример 28. Справедливы соотношения:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 + \operatorname{tg} 5x - \cos x}{\sqrt{1-x^2} - \sqrt[5]{1+x}} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + 5x + o(x) - 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - 1 - \frac{x}{5} + o(x)} =$$

$$= \lim_{\to} \frac{5x + o(x)}{-\frac{x}{5} + o(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{5 + o(1)}{-\frac{1}{5} + o(1)} = \frac{5}{-\frac{1}{5}} = -25;$$

$$\lim_{\to} \frac{\ln(e^x + x) - \sin 3x}{\operatorname{arctg} 4x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 + 2x + o(x)) - 3x + o(x)}{4x + o(x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2x - 3x + o(x)}{4x + o(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-1 + o(1)}{4 + o(1)} = -\frac{1}{4};$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x\,(1 - \cos x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{(x + o(x))\left(1 - 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)}{x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{2} + o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{2}.$$

Для упрощения выкладок полезно заметить, что из соотношения $f \sim g$ при $x \to a$ следует, что $\lim\limits_{x\to a} h(x) f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) g(x)$ или оба эти предела одновременно не существуют, т. е. при вычислении предела произведения $f(x) \cdot g(x)$ один из сомножителей $f(x)$ или $g(x)$ (или оба) в этом произведении можно заменить эквивалентной функцией. Пользуясь этим свойством, решение предыдущего примера записывается короче:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x\,(1 - \cos x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x \cdot \frac{x^2}{2}}{x^3} = \frac{1}{2}.$$

В этом примере ясно видно, что соотношение $f(x)=o(x)$ при $x\to 0$ определяет только то, что $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$, поэтому из соотношений $\sin x=x+o(x)$, $\operatorname{tg} x=x+o(x)$ $(x\to 0)$, следует только, что $\operatorname{tg} x-\sin x=o(x)$, $x\to 0$ (свойства 6 и 10), т. е. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x}=0$, но эти соотношения никак не дают сравнения функции $\operatorname{tg} x-\sin x$ с функцией x^3. Для такого сравнения требуется более глубокий анализ.

Внимание! Одна из самых распространенных ошибок при вычислении предела некоторого выражения заключается в замене функции, не являющейся множителем всего этого выражения, на эквивалентную функцию (чаще всего такая ошибочная замена делается в отдельном слагаемом алгебраической суммы).

Пример 29. Справедливы следующие соотношения:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos 2x-\sin^2 2x}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{1-2\cos 2x+\cos^2 2x}{x^4}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos 2x)^2}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{4x^4}{x^4}=4.$$

Если же заменить функцию $y=2-2\cos 2x$ при $x\to 0$ эквивалентной функцией $4x^2$ и функцию $y=\sin^2 2x$ эквивалентной функцией $4x^2$, то получим $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4x^2-4x^2}{x^4}=0$, что не совпадает с ранее полученным верным результатом.

Пример 30. Пользуясь тем, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{2^x}=0$ (см. с. 59) и соотношением е) для бесконечно больших функций, получаем, что

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2^{x^2}+x}{2^{x^2+x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{x}{2^x}\cdot\frac{1}{2^{x^2-x}}}{2^x}=0.$$

Если же в функции $y=2^{x^2+x}$ заменить показатель эквивалентной при $x\to+\infty$ функцией $y=x^2$, то получим

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2^{x^2}+x}{2^{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{x}{2^x}\cdot\frac{1}{2^{x^2-x}}\right)=1,$$

что не совпадает с ранее полученным верным результатом.

Если ищется предел функции при $x\to a$, $a\neq 0$, то для удобства можно перейти к новому аргументу $y=x-a$, предел которого равен нулю при $x\to a$.

Пример 31. Найдем $\lim\limits_{x\to\pi/4}(x-\pi/4)\operatorname{tg} 2x$.

Решение. Положим $x-\pi/4=y$, тогда

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{tg}2x=\lim_{y\to0}y\cdot\operatorname{tg}\left(2y+\frac{\pi}{2}\right)=\lim_{y\to0}y(-\operatorname{ctg}2y)=$$

$$=-\lim_{y\to0}\left(\frac{y}{\sin2y}\cdot\cos2y\right)=-\lim_{y\to0}\frac{y}{\sin2y}\cdot\lim_{y\to0}\cos2y=$$

$$=-\left(\lim_{y\to0}\frac{y}{2y}\right)\cdot1=-\frac{1}{2}.$$

Пример 32. Найдем

$$\lim_{x\to1}\frac{\cos\frac{3\pi x^{\alpha}}{2}}{\ln(2x-\sqrt[7]{x})}.$$

Решение. Положим $y=x-1$, тогда

$$\lim_{x\to1}\frac{\cos\frac{3\pi x^{\alpha}}{2}}{\ln(2x-\sqrt[7]{x})}=\lim_{y\to0}\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}(1+y)^{\alpha}\right)}{\ln(2y+2-\sqrt[7]{1+y})}=$$

$$=\lim_{y\to0}\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{3\pi}{2}\alpha y+o(y)\right)}{\ln\left(2y+2-1-\frac{1}{7}y+o(y)\right)}=\lim_{y\to0}\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}\alpha y+o(y)\right)}{\ln\left(1+\frac{13}{7}y+o(y)\right)}=$$

$$=\lim_{y\to0}\left[\left(\frac{3\pi}{2}\alpha y+o(y)\right):\left(\frac{13}{7}y+o(y)\right)\right]=\frac{21}{26}\pi\alpha.$$

Пример 33. Найдем

$$\lim_{x\to1}(\sin\pi x+x)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}.$$

Решение. Вычислим

$$\lim_{x\to1}\left[\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}\ln(\sin\pi x+x)\right],$$

полагая $y=x-1$. Имеем

$$\lim_{x\to1}\left[\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}\ln(\sin\pi x+x)\right]=\lim_{y\to0}\left[\operatorname{tg}\frac{\pi(y+1)}{2}\ln(\sin\pi(y+1)+\right.$$

$$\left.+y+1)\right]=-\lim_{y\to0}\left[\operatorname{ctg}\frac{\pi y}{2}\ln(1+y-\sin\pi y)\right]=$$

$$=-\lim_{y\to0}\left[\frac{2}{\pi y}(y-\sin\pi y)\right]=-\lim_{y\to0}\frac{2(y-\pi y+o(y))}{\pi y}=\frac{2(\pi-1)}{\pi}.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to 1}(\sin \pi x + x)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}} = e^{\frac{2(\pi-1)}{\pi}}.$$

Отметим, что при $x\to a$ утверждения «$f(x)\sim g(x)$» и «$g(x)$ есть главная часть $f(x)$» равносильны. Так как функция $f(x)$ при $x\to a$ имеет бесконечное множество эквивалентных функций, то при постановке задачи выделения главной части $f(x)$ при $x\to a$, т. е. нахождении эквивалентной функции, указывается, какой именно вид эта главная часть должна иметь.

Пример 34. Найдем главную часть вида Cx^{α} для функции

$$f(x)=\sqrt{x+\sqrt[3]{x^2}}\cdot\ln\frac{1-x^2}{1+x^2} \text{ при } x\to 0.$$

Решение. Имеем

$$\sqrt{x+\sqrt[3]{x^2}}\cdot\ln\frac{1-x^2}{1+x^2}=\sqrt{x+x^{2/3}}\cdot\ln\left(1-\frac{2x^2}{1+x^2}\right)=$$

$$=|x|^{\frac{1}{3}}\sqrt{x^{1/3}+1}\cdot\ln\left(1-\frac{2x^2}{1+x^2}\right)\sim|x|^{1/3}\cdot(-2x^2)=$$

$$=-2|x|^{7/3}\ (x\to 0).$$

Следовательно, главной частью $f(x)$ при $x\to 0$ является функция

$$g(x)=-2|x|^{7/3}.$$

Пример 35. Найдем главную часть вида $C(1-x)^{\alpha}$ для функции

$$f(x)=4\sqrt[4]{x}-5\sqrt[5]{x}+1 \text{ при } x\to 1.$$

Решение. Если ввести новую переменную $z=1-x$, то получим, что

$$f(x)=4(1-z)^{1/4}-5(1-z)^{1/5}+1=4\left(1-\frac{z}{4}+o(z)\right)-$$

$$-5\left(1-\frac{z}{5}+o(z)\right)+1=4-z+o(z)-5+z+o(z)+1=o(z),$$

таким образом, этим методом мы не получили функцию, эквивалентную данной. Введем переменную t так, чтобы избавиться от иррациональности: $x=t^{20}$. Тогда так как $x\to 1$, то $t\to 1$ и

$$1-x=1-t^{20}=(1-t)(1+t+t^2+\ldots+t^{19})\sim 20(1-t),$$

$$1-t\sim\frac{1-x}{20}$$

и

$$f(x)=4t^5-5t^4+1=(1-t)^2(4t^3+3t^2+2t+1)\sim 10(1-t)^2.$$

Следовательно,

$$f(x)\sim\frac{(1-x)^2}{400}\cdot 10=\frac{(1-x)^2}{40}.$$

Итак, главной частью функции $f(x)$ является функция

$$g(x)=\frac{(1-x)^2}{40}\quad(x\to 1).$$

Пример 36. Найдем главную часть вида Cx^α для функции

$$f(x)=\operatorname{arctg}x-\arccos\frac{1}{x}\quad\text{при } x\to+\infty.$$

Решение. Имеем

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\operatorname{arctg}x-\arccos\frac{1}{x}\right)=0,$$

следовательно, при $x\to+\infty$

$$\left(\operatorname{arctg}x-\arccos\frac{1}{x}\right)\sim\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}x-\arccos\frac{1}{x}\right)=\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{1+x\sqrt{x^2-1}}=$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\cdot\frac{1}{x^2\left(\frac{1}{x^2}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)}\sim$$

$$\sim\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{x\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)}\sim\frac{1}{2x^3}.$$

Итак, главной частью функции является функция $g(x)=\frac{1}{2x^3}$ $(x\to+\infty)$.

Пример 37. Найдем асимптоты графика функции $y=x+1+\sqrt{x^2+3x+7}$.

Решение. При $x\to+\infty$ имеем

$$y=x+1+x\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{7}{x^2}}=x+1+x\left(1+\frac{3}{2x}+\right.$$

$$\left.+\frac{7}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)=2x+\frac{5}{2}+o(1),$$

а при $x=-\infty$

$$y=x+1-x\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{7}{x^2}}=x+1-x\left(1+\frac{3}{2x}+\right.$$
$$\left.+\frac{7}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)=-\frac{1}{2}+o(1).$$

Итак, график данной функции имеет правую асимптоту $y=2x+\frac{5}{2}$ и левую асимптоту $y=-1/2$.

§ 2. ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Последовательность $\{a_n\}$ есть функция, заданная на множестве натуральных чисел $N=\{1, 2, 3, \ldots\}$. Это множество имеет единственную предельную точку — несобственную точку $+\infty$. Переформулируем определение *предела* функции на случай *последовательности:* $A=\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, если для любого положительного $\varepsilon\,(\forall\varepsilon>0)$ найдется такой номер $N\,(\exists N)$, что для любого n, $n>N\,(\forall n>N)$, справедливо неравенство $|A-a_n|<\varepsilon$. Если вместо множества всех натуральных чисел взять некоторое его бесконечное подмножество $\{n_k\}$, $k=1, 2, \ldots, n_k<n_{k+1}$, то получим подпоследовательность $\{a_{n_k}\}$. Предел подпоследовательности $\{a_{n_k}\}$, если он существует, называется *частичным пределом данной последовательности.*

Если последовательность ограничена сверху, то и множество всех ее частичных пределов ограничено сверху. Тогда доказывается, что это множество обязательно содержит максимальный элемент. Этот максимальный элемент называется верхним пределом данной последовательности и обозначается $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$. Другими словами, $A=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$, если $\forall\varepsilon>0 \quad \exists N : \forall n>N : a_n<A+\varepsilon$ и $\exists\ \{a_{n_k}\}: \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k}=A$.

Если последовательность не ограничена сверху, то $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n=+\infty$.

Аналогично определяется $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$ — нижний предел последовательности $\{a_n\}$. Если последовательность не ограничена снизу, то $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n=-\infty$, в противном случае $B=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$ есть наименьший из частичных пределов, т. е. $B=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$, если $\forall\varepsilon>0\ \exists N: \forall n>N$, $a_n>B-\varepsilon$ и $\exists\,\{a_{n_k}\}: \underline{\lim\limits_{k\to\infty}}\, a_{n_k}=B$.

Условие существования предела последовательности эквива-

лентно условию равенства верхнего и нижнего пределов этой последовательности.

Так как последовательность есть функция, заданная на множестве натуральных чисел, то все рассмотренные выше методы вычисления пределов функций применяются и для вычисления пределов последовательностей.

Рассмотрим еще один метод вычисления предела последовательности. Разберем его на примерах последовательностей, заданных рекуррентно.

Пример 1. Рассмотрим последовательность $a_1=1$, $a_{n+1}=\frac{a_n}{2}+1$, $\forall n\in N$. Прежде всего выясним, существует ли $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Методом математической индукции проверяем, что для любого n справедливо неравенство $a_n<2$. Отсюда получаем, что $a_{n+1}-a_n=1-a_n/2>0$. Таким образом, $\{a_n\}$ монотонно возрастает и ограничена сверху, следовательно, последовательность $\{a_n\}$ имеет предел. Обозначим его через A. Для определения A перейдем к пределу в рекуррентном соотношении $a_{n+1}=a_n/2+1$, имеем $A=A/2+1$, откуда $A=2$. Итак, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=2$.

Пример 2. Рассмотрим последовательность

$$a_n=\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}$$

(n корней). Возрастание a_n с ростом n следует непосредственно из формулы для a_n. Для того чтобы сделать вывод о существовании предела a_n, необходимо проверить, что последовательность a_n ограничена сверху. Действительно, заменив в последнем радикале число 2 на 4, тем самым увеличив выражение для a_n, получим, что для любого n выполняется $a_n<2$. Итак, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ существует. Обозначим его через A. Для определения A перейдем к пределу в рекуррентном соотношении $a_n=\sqrt{2+a_{n-1}}$, имеем $A=\sqrt{2+A}$, откуда $A=2$. Итак, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=2$.

Пример 3. Рассмотрим последовательность $a_n=(-1)^n$, $n\in N$. Так как $a_{2k}=1$, $a_{2k+1}=-1$, то $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n=1$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n=-1$, откуда следует, что данная последовательность предела не имеет. Члены ее удовлетворяют рекуррентному соотношению $a_n=-a_{n-1}$. Если формально перейти к пределу в этом соотношении, то получим $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=-\lim\limits_{n\to\infty} a_{n-1}$, откуда $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$. Этот пример показывает, что возможность перехода в рекуррентном соотношении к пределу должна быть обоснована, т. е. существование предела должно быть установлено заранее.

Вычисление верхнего и нижнего пределов последовательности сводится к тому, что выделяют сходящиеся подпоследовательности и сравнивают их пределы — частичные пределы исходной последовательности.

Пример 4. Пусть дана последовательность $a_n = n^{(-1)^n}$, $n \in N$. Так как для любого n имеем, что $a_n > 0$, то любой частичный предел этой последовательности неотрицателен. Поскольку $a_{2n} = 2n$ и $a_{2n+1} = \frac{1}{2n+1}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = +\infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1} = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = 0$.

Пример 5. Пусть дана последовательность $a_n = \left(2 + \cos\frac{\pi n}{3}\right) \times \left(1 + \frac{1}{n}\cos\frac{\pi n}{6}\right)$, $n \in N$. Так как для любого n имеем, что $a_n \leqslant 3(1 + 1/n)$, то $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n \leqslant 3$. С другой стороны, $a_{12k} = 3(1 + 1/12k)$, откуда следует, что $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = 3$. Точно так же из соотношений $a_n \geqslant 1 - 1/n$, для $n \in N$ и $a_{6k+3} = 1$, $k \in N$, следует, что $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = 1$.

Замечание. В этом примере кроме подпоследовательностей $\{a_{12k}\}$ и $\{a_{6k+3}\}$ существуют и подпоследовательности, сходящиеся к пределу, отличному от 1 и 3, например $\{a_{6k+2}\}$. Ее предел равен 3/2.

Используя понятие предела последовательности, можно дать определения *верхнего* и *нижнего пределов функции* $f(x)$, $x \in E$:

число A есть верхний предел функции $f(x)$ при $x \to a$ (обозначение $A = \overline{\lim\limits_{x\to a}} f(x)$), если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \dot{U}(a) : \forall x \in \dot{U}(a),\ x \in E,\ f(x) < A + \varepsilon$ и существует последовательность $x_k \to a$, для которой $A = \lim\limits_{k\to\infty} f(x_k)$. Число B есть нижний предел функции $f(x)$ при $x \to a$ (обозначение $B = \underline{\lim\limits_{x\to a}} f(x)$), если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \dot{U}(a) : \forall x \in \dot{U}(a),\ x \in E$ $f(x) > B - \varepsilon$ и существует последовательность $x_k \to a$, для которой $B = \lim\limits_{k\to\infty} f(x_k)$.

Условие существования предела функции при $x \to a$ эквивалентно условию равенства ее верхнего и нижнего пределов при $x \to a$.

Пример 6. Рассмотрим функцию $f(x) = \sin\frac{\pi}{x}$ при $x \to 0$. С одной стороны, $-1 \leqslant \sin\frac{\pi}{x} \leqslant 1$ для любого x, $x \neq 0$; с другой стороны, если $x_k = \frac{1}{2k + 1/2}$, $k \in N$, то $x_k \to 0$ и $\sin\frac{\pi}{x_k} = 1$; если $\tilde{x}_k = \frac{1}{2k - 1/2}$, $k \in N$, то $\tilde{x}_k \to 0$ и $\sin\frac{\pi}{\tilde{x}_k} = -1$. Отсюда следует, что $\overline{\lim\limits_{x\to 0}} f(x) = 1$, $\underline{\lim\limits_{x\to 0}} f(x) = -1$. Следовательно, данная функция предела при $x \to 0$ не имеет.

§ 3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ С ПОМОЩЬЮ ФОРМУЛЫ ТЕЙЛОРА

Иногда соотношения эквивалентности могут оказаться недостаточными для определения главной части функции при $x \to a$. В таком случае одним из методов определения главной части является разложение функции в многочлен Тейлора с остаточным членом в форме Пеано. При этом важно, с одной стороны, не потерять членов нужного порядка, взяв слишком малую степень многочлена Тейлора, а с другой — не выписывать лишних членов, так как это загромождает и затрудняет выкладки. Поэтому при вычислении пределов полезно оценить заранее, какого порядка малости погрешность уже не влияет на предел соответствующего выражения.

Многочленом Тейлора порядка n функции f в точке a является многочлен $T_n(f, a)$ вида $\sum_{=0}^{n} c_k (x-a)^k$ такой, что $f - T_n(f, a) = o(x-a)^n$. Приведем следующие основные формулы:

а) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n), \ x \to 0;$

б) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}), \ x \to 0;$

в) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}), \ x \to 0;$

г) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n), \ x \to 0;$

д) $(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \ldots +$

$+ \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!} x^n + o(x^n), \ x \to 0.$

Обратим внимание на то, что степень многочлена Тейлора $T_n(f, a)$ может быть и меньше его порядка (больше не может быть по определению), т. е. любые его коэффициенты, в том числе и при старших степенях, могут быть равны нулю. В частности, один и тот же многочлен может быть многочленом Тейлора разных порядков функции f в точке a. Например, многочлен $x - \frac{x^3}{6}$ является многочленом Тейлора как третьего, так и четвертого порядков функции $\sin x$ в нулевой точке.

Пример 1. Пусть $y(x) = (x^6 - 2x^{10}) e^{x^4}$. Так как $y(x) \sim x^6$ при $x \to 0$, то все многочлены Тейлора ниже шестого порядка функции y в нулевой точке представляют собой тождественный нуль ($c_0 = c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c_5 = 0$). Так как $y - x^6 = o(x^6)$, $x \to 0$, то многочлен Тейлора шестого порядка $T_6(y, 0)$ функции y в нулевой точке

есть x^6, а так как $e^{x^4}=1+x^4+o(x^4)$ и, следовательно, $y(x)=(x^6-2x^{10})(1+x^4+o(x^4))=x^6-x^{10}+o(x^{10})$, то $T_6(y,\ 0)=T_7(y,\ 0)=T_8(y,\ 0)=T_9(y,\ 0)=x^6$ и $T_{10}(y,\ 0)=x^6-x^{10}$.

Из всего вышесказанного следует, что если в многочлене Тейлора порядка n функции y в точке a все коэффициенты c_i с номерами меньше k $(k<n)$ равны нулю, а $c_k\neq 0$, то при $x\to a$ имеем, что $y\sim T_n(y,0)\sim c_k(x-a)^k$.

Используя формулы а)—д) для нахождения многочлена Тейлора, необходимо правильно оценивать отклонение полученного многочлена от данной функции, иначе можно допустить грубые ошибки.

Пример 2. Найдем многочлены Тейлора первого, второго, третьего и четвертого порядков функции $y=\ln(1+x+x^2)$ в нулевой точке.

Решение. Воспользуемся формулой $\ln(1+\alpha)=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{i-1}\alpha^i}{i}+o(\alpha^n)$, $\alpha\to 0$. В нашем примере $\alpha=x+x^2$. Заметим, что $\alpha\sim x$, $x\to 0$, следовательно, $o(\alpha^n)=o(x^n)$, $x\to 0$, $n\in N$. Поэтому $\ln(1+x+x^2)=\alpha+o(\alpha)=x+x^2+o(x)=x+o(x)$. Итак, многочлен Тейлора первого порядка функции y в нулевой точке есть $T_1(y,0)=x$.

Обратим внимание, что поскольку $y=x+x^2+o(x)$, то нельзя утверждать, что многочлен второй степени $x+x^2$ является многочленом Тейлора второго порядка функции в нулевой точке. Покажем, что это неверно. Действительно, при $x\to 0$ $\ln(1+x+x^2)=\ln(1+\alpha)=\alpha-\frac{\alpha^2}{2}+o(\alpha^2)=(x+x^2)-\frac{1}{2}(x+x^2)^2+o(x^2)$; при раскрытии скобок используем то, что $x^k=o(x^2)$, если $k>2$, $k\in N$, следовательно, $(x+x^2)-\frac{1}{2}(x+x^2)^2+o(x^2)=x+x^2-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$. Итак, многочленом Тейлора второго порядка функции y в нулевой точке является многочлен $T_2(y,\ 0)=x+\frac{x^2}{2}$. Таким же образом получаем

$$\ln(1+x+x^2)=x+x^2-\frac{1}{2}(x+x^2)^2+\frac{1}{3}(x+x^2)^3+o(x^3)=$$

$$=x+x^2-\frac{1}{2}(x^2+2x^3)-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)=x+\frac{1}{2}x^2-\frac{4}{3}x^3+o(x^3),$$

следовательно,

$$T_3(y,\ 0)=x+\frac{1}{2}x^2-\frac{4}{3}x^3;$$

$$\ln(1+x+x^2)=x+x^2-\frac{1}{2}(x+x^2)^2+\frac{1}{3}(x+x^2)^3-\frac{1}{4}(x+x^2)^4+$$

$$+o(x^4)=x+\frac{1}{2}x^2-\frac{4}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+o(x^4),$$

следовательно,

$$T_4(y,\ 0)=x+\frac{1}{2}x^2-\frac{4}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4.$$

Пример 3. Найдем главную часть вида $C|x|^a$ функции

$$y(x)=\sin x-\ln\left(1+x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}\right) \text{ при } x\to 0.$$

Решение. Пользуясь формулами б) и г), пишем последовательно многочлены Тейлора функции $y(x)$ в нулевой точке увеличивающегося порядка, пока не получим многочлен, отличный от нуля.

Для первого порядка имеем

$$y(x)=\sin x-\ln\left(1+x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}\right)=(x+o(x))-(x+o(x))=$$

$$=o(x),\ x\to 0,$$

т. е. $T_1(y,\ 0)\equiv 0$.

Для второго порядка

$$y(x)=(x+o(x^2))-\left(x+\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)=o(x^2),\ x\to 0,$$

т. е. $T_2(y,\ 0)\equiv 0$.

Для третьего порядка

$$y(x)=\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)-\left(x+\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}(x^2+x^3)+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)\right)=$$

$$=o(x^3),\ (x\to 0),$$

т. е. $T_3(y,\ 0)\equiv 0$.

Для четвертого порядка

$$y(x)=\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right)-\left(x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}-\frac{1}{2}\left(x^2+x^3+\frac{x^4}{4}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{3}\left(x^3+\frac{3x^4}{2}\right)-\frac{1}{4}x^4+o(x^4)\right)=o(x^4),\ x\to 0,$$

т. е. $T_4(y,\ 0)\equiv 0$.

Для пятого порядка

$$y(x)=\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)\right)-\left(x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}-\frac{1}{2}\left(x^2+x^3+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{4}\right)+\frac{1}{3}\left(x^3+\frac{3x^4}{2}+\frac{3x^5}{4}\right)-\frac{1}{4}(x^4+2x^5)+\frac{1}{5}x^5+o(x^5)\right)=$$

$$=-\frac{1}{15}x^5+o(x^5),\ x\to 0,$$

т. е. $T_5(y, 0) = -\frac{1}{15}x^5$ и степенная функция $-\frac{1}{15}x^5$ есть главная часть функции $y = \sin x - \ln\left(1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8}\right)$ при $x \to 0$.

Пример 4. Найдем главную часть вида $C|x-1|^a$ функции $y = \sqrt[4]{x^2 - x + 1} - \sqrt[8]{e^{x^2-1}}$ при $x \to 1$.

Решение. Чтобы воспользоваться формулами а)—д), сделаем замену переменного $x = t + 1$. Тогда задача сводится к нахождению главной части вида $C|t|^a$ функции $y(t) = (1 + t + t^2)^{1/4} - e^{\frac{2t+t^2}{8}}$ при $t \to 0$. Пользуясь формулами а) и д), пишем последовательно многочлены Тейлора функции $y(t)$ в нулевой точке увеличивающегося порядка, пока не получим многочлен, отличный от нуля.

Для первого порядка

$$y(t) = (1 + t + t^2)^{1/4} - e^{t/4 + t^2/8} = \left(1 + \frac{1}{4}t + o(t)\right) - \left(1 + \frac{t}{4} + o(t)\right) = o(t), \quad t \to 0,$$

т. е. $T_1(y, 0) \equiv 0$.

Для второго порядка

$$y(t) = \left(1 + \frac{1}{4}(t + t^2) - \frac{3}{32}t^2 + o(t^2)\right) - \left(1 + \frac{t}{4} + \frac{t^2}{8} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\quad}{16} + o(t^2)\right) = o(t^2), \quad t \to 0,$$

т. е. $T_2(y, 0) \equiv 0$.

Для третьего порядка

$$y(t) = \left(1 + \frac{1}{4}(t + t^2) - \frac{3}{32}(t^2 + 2t^3) + \frac{7}{128}t^3 + o(t^3)\right) - \left(1 + \frac{t}{4} + \frac{t^2}{8} + \frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{16} + \frac{t^3}{32}\right) + \frac{1}{6}\cdot\frac{t^3}{64} + o(t^3)\right) = -\frac{1}{6}t^3 + o(t^3), \quad t \to 0,$$

т. е. $T_3(y, 0) = -\frac{1}{6}t^3$ и степенная функция $-\frac{1}{6}t^3$ есть главная часть функции $y(t) = (1 + t + t^2)^{1/4} - e^{t/4 + t^2/8}$ при $t \to 0$. Возвращаясь к переменному x, получим, что функция $-1/6\,(x-1)^3$ есть главная часть функции $y(x) = \sqrt[4]{x^2 - x + 1} - \sqrt[8]{e^{x^2-1}}$ при $x \to 1$.

Пример 5. Найдем предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)-x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}.$$

Решение. Так как в знаменателе стоит x^5, то достаточно найти разложение числителя в многочлен Тейлора с погрешностью порядка $o(x^5)$ при $x\to 0$. Так как $\sin x\sim x$, то $o(x^5)=o(\sin^5 x)$, $x\to 0$. По формуле Тейлора имеем

$$\sin(\sin x)=\sin x-\frac{\sin^3 x}{6}+\frac{\sin^5 x}{120}+o(\sin^5 x),$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5).$$

Тогда

$$\sin^3 x=\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)\right)^3=(x+\alpha(x))^3=$$

$$=x^3+3x^2\cdot\alpha(x)+3x\alpha^2(x)+\alpha^3(x),$$

где $\alpha(x)=-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)$. Поэтому $\alpha(x)\sim-\frac{x^3}{6}$, $x\to 0$; $x\alpha^2(x)\sim x\cdot\frac{x^6}{36}=o(x^5)$, $x\to 0$; $\alpha^3(x)\sim-\frac{x^9}{216}=o(x^5)$, $x\to 0$, и, следовательно, $\sin^3 x=x^3-\frac{1}{2}x^5+o(x^5)$, $x\to 0$. Так как $\alpha(x)\sim-\frac{x^3}{6}=o(x)$, $x\to 0$, то $x+\alpha(x)\sim x$, $x\to 0$, и $\sin^5 x=(x+\alpha(x))^5\sim x^5$ $x\to 0$, т. е. $\sin^5 x=x^5+o(x^5)$, $x\to 0$. Итак, при $x\to 0$

$$\sin(\sin x)=x-\frac{y^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)-\frac{1}{6}\left(x^3-\frac{x^5}{2}\right)+$$

$$+o(x^5)+\frac{1}{120}x^5+o(x^5)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{10}+o(x^5).$$

Аналогично

$$x\sqrt[3]{1-x^2}=x(1-x^2)^{\frac{1}{3}}=x\left(1-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{9}x^4+o(x^4)\right)=$$

$$=x-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{9}x^5+o(x^5).$$

Итак,

$$\sin(\sin x)-x\sqrt[3]{1-x^2}=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{10}x^5+o(x^3)-x+$$

$$+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{9}x^5+o(x^5)=\frac{19}{90}x^5+o(x^5),$$

и, следовательно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)-x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{19}{90}+\frac{o(x^5)}{x^5}\right)=\frac{19}{90}.$$

Приведем еще ряд примеров разложения по степеням x некоторых функций.

Пример 6. Найдем разложение функции $y=\operatorname{tg} x$ при $x\to 0$ до порядка $o(x^5)$.

Решение. Первый способ. Имеем

$$\operatorname{tg} x=(\sin x)(1-\sin^2 x)^{-\frac{1}{2}}=\sin x\left(1+\frac{1}{2}\sin^2 x+\frac{3}{8}\sin^4 x+\right.$$

$$\left.+o(x^4)\right)=\sin x+\frac{1}{2}\sin^3 x+\frac{3}{8}\sin^5 x+o(x^5)=$$

$$=\left[x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)\right]+\frac{1}{2}\left[x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right]^3+$$

$$+\frac{3}{8}[x+o(x)]^5+o(x^5)=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)+$$

$$+\frac{1}{2}x^3-\frac{x^5}{4}+o(x^5)+\frac{3}{8}x^5+o(x^5)=$$

$$=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+o(x^5)\quad(x\to 0).$$

Второй способ. Надлежит найти разложение функции $\operatorname{tg} x$ по степеням x с погрешностью $o(x^5)$ при $x\to 0$. Ищем это разложение в виде

$$\operatorname{tg} x=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+o(x^5).$$

Из того, что $y=\operatorname{tg} x$ — нечетная функция легко показать, что $a_0=a_2=a_4=0$. Поскольку $\operatorname{tg} x\sim x$ при

$$x\to 0 \text{ и } a_1x+a_3x^3+a_5x^5+o(x^5)\sim a_1x,\ x\to 0, \text{ то } a_1=1.$$

Для нахождения остальных коэффициентов имеем соотношение

$$\sin x=(x+a_3x^3+a_5x^5+o(x^5))\cdot\cos x,\ x\to 0,$$

или

$$x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)=$$

$$=(x+a_3x^3+a_5x^5+o(x^5))\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)\right),$$

т. е.

$$x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)=x+x^3\left(a_3-\frac{1}{2}\right)+$$

$$+x^5\left(a_5-\frac{a_3}{2}+\frac{1}{24}\right)+o(x^5).$$

Поделив это равенство на x^3, получаем

$$-\frac{1}{6}+\frac{x^2}{120}+o(x^2)=a_3-\frac{1}{2}+x^2\left(a_5-\frac{a_3}{2}+\frac{1}{24}\right)+o(x^2).$$

Переходя к пределу при $x\to 0$, получаем

$$-\frac{1}{6}=a_3-\frac{1}{2},\quad \text{т. е. } a_3=\frac{1}{3}.$$

Аналогично из соотношения

$$\frac{x^2}{120}+o(x^2)=x^2\left(a_5-\frac{a_3}{2}+\frac{1}{24}\right)+o(x^2)$$

получим, что $a_5=2/15$.

Итак, при $x\to 0$ имеем $\operatorname{tg} x=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+o(x^5)$.

При разложении рациональных дробей удобно пользоваться методом деления многочлена на многочлен углом.

Пример 7. Найдем разложение функции

$$y=\frac{1+x-4x^2+2x^3}{1+3x+x^2} \quad \text{до} \qquad \text{а } o(x^7) \text{ при } x\to 0.$$

Решение. Имеем

$$\begin{array}{l|l}
-1+x-4x^2+2x^3 & 1+3x+x^2 \\ \cline{2-2}
\underline{-1+3x+x^2} & 1-2x+x^2+x^3-4x^4+11x^5-29x^6+76x^7+o(x^7) \\
\quad -2x-5x^2+2x^3 & \\
\quad \underline{-2x-6x^2-2x^3} & \\
\qquad -x^2+4x^3 & \\
\qquad \underline{x^2+3x^3+x^4} & \\
\qquad\quad -x^3-x^4 & \\
\qquad\quad \underline{-x^3+3x^4+x^5} & \\
\qquad\qquad -4x^4-x^5 & \\
\qquad\qquad \underline{11x^5+4x^6} & \\
\qquad\qquad\quad -29x^6-11x^7 & \\
\qquad\qquad\quad \underline{76x^7+o(x^7)} &
\end{array}$$

Пример 8. Найдем разложение функций $y=\operatorname{sh} x$ и $y=\operatorname{ch} x$ до порядка $o(x^7)$ при $x\to 0$.

Решение. Получаем, что

$$\operatorname{sh} x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\frac{1}{2}\left[\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^7}{7!}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+o(x^7)\right)-\left(1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^5}{5!}+\frac{x^6}{6!}-\frac{x^7}{7!}+o(x^7)\right)\right]=$$
$$=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}+o(x^7)\quad(x\to 0).$$

Аналогично

$$\operatorname{ch} x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+o(x^7)\quad(x\to 0).$$

Задачи

1. Доказать соотношения ($x\to a$):

а) если $f(x)\sim g(x)$, то $g(x)\sim f(x)$.

б) если $f(x)\sim g(x)$ и $g(x)\sim h(x)$, то $f(x)\sim h(x)$;

в) если $f(x)\sim g(x)$, то $f(x)=O(g(x))$;

г) если $f(x)=o(g(x))$, то $f(x)=O(g(x))$;

д) если $f(x)\sim g(x)$, то $o(f(x))=o(g(x))$;

е) если C — константа ($C\neq 0$), то $C\cdot O(g(x))=O(g(x))$, $C\cdot o(g(x))=o(g(x))$;

ж) $O(O(g(x))=O(g(x))$, $O(o(g(x)))=o(O(g(x)))=o(o(g(x)))=o(g(x))$;

з) $h(x)\cdot O(g(x))=O(h(x)\cdot g(x))$, $h(x)\cdot o(g(x))=o(h(x)\cdot g(x))$;

и) $O(g(x))\cdot O(g(x))=O(g^2(x))$, $O(g(x))\cdot o(g(x))=O(g^2(x))$, $o(g(x))\cdot o(g(x))=o(g^2(x))$;

к) $O(g(x))+O(g(x))=O(g(x))$, $O(g(x))+o(g(x))=O(g(x))$, $o(g(x))+o(g(x))=o(g(x))$;

л) если $f(x)\sim g(x)$ и $h(x)\sim s(x)$, то $f(x)h(x)\sim g(x)s(x)$;

м) если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=k$, $k\neq 0$, то $f(x)\sim k$.

2. Показать, что для любых $a>1$ и $p>0$ при $x\to+\infty$ $x^p=o(a^x)$, $\ln x=o(x^p)$ и что $\lim\limits_{x\to 0+}(\operatorname{ctg} x)^{\operatorname{tg} x}=1$.

3. Показать, что для любого $p>0$ при $x\to 0$ $\ln|x|=o(1/x^p)$.

4. Показать, что $x-\sin x=O(x^3)$ при $x\to 0$.

5. Найти главные части вида Cx^a при $x\to+\infty$ следующих функций:

а) $\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_{m-1}x+b_n}$, $a_0b_0\neq 0$.

б) $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$;

в) $(x-\sqrt{x^2-1})^a+(x+\sqrt{x^2-1})^a$ $(a>0)$;

г) $x^2\operatorname{arc\,ctg} x$;

д) $x^2\operatorname{arcctg}(-x)$;

е) $(x^2-4x+10)e^{\frac{1}{x}}$;

ж) $\ln(x^2+4+4^{x^2})$;

з) $(x^2+2)\ln(x+2)-x^2\ln x$;

и) $\dfrac{\pi}{4}-\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x}{x+1}$;

к) $\arcsin\dfrac{4x+1}{x^2+10x}$.

6. Найти главные части вида Cx^{α} при $x \to 0$ следующих функций:

а) $(1+mx)^n-(1+nx)^m$, $m, n \in N$

б) $\sqrt{1-2x-4x^2}+x-1$;

в) $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$;

г) $\sqrt[m]{1+ax}\cdot\sqrt[n]{1+bx}-1$;

д) $\ln\cos\pi x$;

е) a^x-b^x, $a \neq b$;

ж) $1+\sin ax-\cos ax$;

з) $\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x-1$;

и) $\ln(x^2+4^x)$;

к) $\operatorname{ctg}\pi x$.

7. Найти главные части вида $C(1-x)^{\alpha}$ при $x \to 1$ следующих функций:

а) x^3+5x^2-3x-3;

б) $x+x^2+\ldots+x^n-n$;

в) $(x^6-x^4-x^2+1)\operatorname{tg}\pi x$;

г) $\arccos x$;

д) x^x-1;

е) $\ln\sin\frac{\pi x}{2}$;

ж) $3\cdot 2^x-2\cdot 3^x$;

з) $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}{\sqrt[3]{1-\sqrt[7]{x}}}$

и) $\dfrac{1}{\ln\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}}$;

к) $\dfrac{\sqrt[5]{x^a-x^b}}{\operatorname{arc\,tg} x-\pi/4}$ $(a \neq b)$.

8. Найти главные части вида $C\cdot\frac{1}{n^{\alpha}}$ для следующих последовательностей при $n \to \infty$:

а) $a_n=\sqrt[4]{n^4+an+b}-n$;

б) $a_n=\ln\frac{n+1}{n+5}\cdot\sin\frac{\pi}{n}$;

в) $a_n=\sin(\pi\sqrt{n^2+k})$;

г) $a_n=a^{\frac{1}{n}}-\frac{1}{2}(b^{\frac{1}{n}}+c^{\frac{1}{n}})$, $a>0$, $b>0$, $c>0$, $a^2 \neq bc$;

д) $a_n=\operatorname{ctg}\frac{\pi n}{4n-2}-1$;

е) $a_n=\sin\frac{\pi n}{2n+1}-1$;

ж) $a_n=(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{n}$;

з) $a_n=\sqrt[n]{2}-\sqrt[n+1]{2}$;

и) $a_n=\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$;

к) $a_n=\ln(1+3^n)$.

9. Проверить, что при $x \to 0$:

а) $x \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x} = O(x)$ и $x = O\left(x \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x}\right)$;

б) $x \cos \frac{1}{x} = O(x)$, но $x \neq O\left(x \cos \frac{1}{x}\right)$.

10. Проверить, что при $x \to \infty$:

а) $\sqrt{x^2+4} \operatorname{arc\,tg} x = O(x)$ и $x = O(\sqrt{x^2+4} \operatorname{arc\,tg} x)$;

б) $\ln(x^2+2^x) = O(x)$, но $x \neq O(\ln(x^2+2^x))$.

Вычислить:

11. $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^2+x-6}{x^2-3x+2}$.

12. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2+x-6}{x^2-3x+2}$.

13. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2+x-6}{x^2-3x+2}$.

14. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^3-12x+16}{x^2-4}$.

15. $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^2-1}{x^3-3x-2}$.

16. $\lim\limits_{x \to 5} \frac{4-\sqrt{21-x}}{\sqrt[3]{x-13}+2}$.

17. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{\sqrt[3]{25+x}-\sqrt[3]{29-x}}{x-\sqrt{2x}}$.

18. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{3\sqrt[3]{1+x}-4\sqrt[4]{1+x}+1}{2-2\sqrt{1-x}}$.

19. $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2+5x}+x)$.

20. $\lim\limits_{x \to -\infty} (\sqrt{x^2+5x}+x)$.

21. $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2+2x}-x)$.

22. $\lim\limits_{x \to -\infty} (\sqrt{x^2+2x}-x)$.

23. $\lim\limits_{x \to +\infty} x(\sqrt{x^2+1}+x)$.

24. $\lim\limits_{x \to -\infty} x(\sqrt{x^2+1}+x)$.

25. $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{1+2x+x^2}-\sqrt{x^2-4x+1})$.

26. $\lim\limits_{x \to -\infty} (\sqrt{1+2x+x^2}-\sqrt{x^2-4x+1})$.

27. $\lim\limits_{x \to \infty} (\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}-\sqrt[3]{x^3-x^2+x-1})$.

28. $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt[3]{x}\,(\sqrt[3]{(x+4)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2})$.

29.

а) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{3\sqrt[3]{1+x}-4\sqrt[4]{1+x}+1}{2-2\sqrt{1+x}+x}$;

б) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{3\sqrt[3]{1+x}-4\sqrt[4]{1+x}+1}{2-2\sqrt{1-x}-x}$.

30. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin \pi x}{x}$.

31. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin\frac{\pi x}{2}}{x}$.

32. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\sin\frac{\pi x}{2}}{x}$.

33. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arc\,tg} x}{2x}$.

34. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\operatorname{arc\,tg} x}{2x}$.

35. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\operatorname{arc\,tg} x}{2x}$.

36. $\lim\limits_{x\to +\infty} x\left(\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg} x\right)$.

37. $\lim\limits_{x\to -\infty} x(\pi-\operatorname{arc\,ctg} x)$.

38. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin \pi x}{\sin 4\pi x}$.

39. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(xe^x)-\cos(xe^{-x})}{\arcsin^3 x}$.

40. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos 2\pi x+\cos \pi x}{\ln(x^2-2x+2)}$.

41. $\lim\limits_{x\to \infty} x^2\left(e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x+1}}\right)$.

42. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(x\operatorname{tg} x-\dfrac{\pi}{2\cos x}\right)$.

43. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin 2x}{x+\sin 3x}$.

44. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin x+\cos x+1}{\sin 2x-\cos 2x+1}$.

45. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x\sin x-\cos 2x}{\operatorname{arc\,tg}\sin^2 x}$.

46. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 \alpha x-\sin^2 \beta x}{\operatorname{arc\,tg}^2 x+x^3}$.

47. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x-\sin^2 x}{\operatorname{tg}^2 x+\ln(1+7x)}$.

48. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x-x^3)+\arcsin 2x-3x^3}{\sin 3x+\operatorname{tg}^2 x+(e^x-1)^{10}}$.

49. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx-n}{\sin x^2}$.

50. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+\sin 2x+\ldots+\sin nx}{\sqrt{1+2x}-1}$.

51. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} 2x+\ldots+\operatorname{tg} nx}{\operatorname{arc\,tg} x}$.

52. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}+\sqrt[3]{1+3x}-\sqrt[3]{1+5x}-\sqrt{1+6x}}{\sqrt[5]{1+x}-\sqrt[5]{1+2x}}$.

53. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arc\,tg}^2 x}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$.

54. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{1+\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\pi x^2}-\pi}$.

55. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\operatorname{tg} \pi x}{x+2}$.

56. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{e^{\sin x}-e^{\sin 2x}}{\sqrt[3]{\pi x^2}-\pi}$.

57. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1-3x}-\sqrt{1-2x}}{1-\cos \pi x}$.

58. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1-3x}-\sqrt{1-2x}}{\cos\dfrac{\pi+x}{2}}$.

59. $\lim\limits_{x\to 1+}\dfrac{(a^x-a)^3}{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{2x-2}}$.

60. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\ln\sin\dfrac{x}{2}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{\pi}}$.

61. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln\cos\pi x}{\sqrt{x^2+4}-\sqrt{4x}}$.

62.

а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-\sqrt[4]{4x^4+1}}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-\sqrt[4]{4x^4+1}}{x}$.

63. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt[5]{x^5+2}}{x}$.

64. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt[5]{x^5+2}}{x}$.

65. $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}-x\sqrt{2}\right)$.

66. $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}-x\sqrt{2}\right)$.

67. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{e^x-e^2}{(x-4)e^x+xe^2}$.

68. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln\left(x^2+\cos\dfrac{\pi x}{2}\right)}{\sqrt{x}-1}$

69. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x^2+e^x)}{\ln(1+xe^x)}$.

70. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos 4x}{x^2+\sqrt[3]{1-x^2}-1}$.

71. $\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{\ln(2x^2-x)}{\ln(x^4+x^2-x)}$.

72. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(2x^2-x)}{\ln(x^4+x^2-x)}$.

73. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\sin^2 ax}{\ln\sin^2 bx}$.

74. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x^2-4x+4)}{\ln(x^{10}+5x^7+2)}$.

75. $\lim\limits_{x\to b}\dfrac{a^x-a^b}{\sqrt[3]{bx^2}-b}$ $(a>0)$.

76. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha^x-\beta^x}{x}$ $(\alpha>0,\ \beta>0)$.

77. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2^{x^2}-16}{\ln(x^2-x-1)}$.

78. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{x^2}-b^{x^2}}{\ln\cos 2x}$ $(a>0,\ b>0)$.

79. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[21]{1+\sin 3x}-1+\operatorname{tg} x}{\arcsin x}$.

80. $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln\ln x}{2x-2e}$.

81. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^\alpha-x^\beta}{\sqrt[5]{x}-1}$.

82. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{a^x - x^a}{x-a} \quad (a>0)$.

83. $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\sqrt{1-e^{-x}} - \sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{\sin x}}$.

84. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin \pi x^{\alpha}}{\sin 2\pi x^{\beta}} \quad (\beta \neq 0)$.

85. $\lim\limits_{x\to 0} \left[\dfrac{a^{\sin x} + b^{\sin x}}{2}\right]^{\frac{1}{x}} \quad (a>0,\ b>0)$.

86. $\lim\limits_{x\to \beta} \left(\dfrac{\sin \alpha x}{\sin \beta x}\right)^{\frac{1}{x-\beta}} \quad (\alpha \neq k\pi,\ \beta \neq n\pi,\ k \in Z,\ n \in Z)$.

87. $\lim\limits_{x\to \alpha} \left(2 - \dfrac{x}{\alpha}\right)^{\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{\alpha}}$.

88. $\lim\limits_{x\to 0} (2^x + \sin x)^{\operatorname{ctg} x}$.

89. $\lim\limits_{x\to 0} (1 + \operatorname{tg}^2 x)^{\frac{1}{\ln \cos x}}$.

90. $\lim\limits_{x\to 1} [\ln(e^x + x - 1)]^{\frac{1}{\sqrt[3]{x}-1}}$.

91. $\lim\limits_{x\to 0} [\ln(x^2 + e^{x+1})]^{\operatorname{ctg} x}$.

92. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\alpha_1^x + \alpha_2^x + \ldots + \alpha_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{\sin x}} \quad (\alpha_i > 0)$.

93. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[m]{\cos \alpha x} - \sqrt[m]{\cos \beta x}}{\operatorname{arc\,tg}^2 x}$.

94. $\lim\limits_{x\to 0} (1 + x^2 e^x)^{\frac{1}{1-\cos x}}$.

95. $\lim\limits_{x\to \infty} x^2 \left(\cos \dfrac{1}{x} - \sqrt[5]{\dfrac{x^3+2x}{1+x^3}}\right)$.

96. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x \cdot 2^x + 1}{[x \cdot 3^x}\right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}$.

97. $\lim\limits_{x\to 1} (x^2 + \sin^2 \pi x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

98. $\lim\limits_{x\to 1} (\cos 2\pi x)^{\frac{1}{\ln(x^2-2x+2)}}$.

99. $\lim\limits_{x\to 1} (3\sqrt[3]{x} - 2\sqrt{x})^{\frac{1}{\ln x}}$.

100. $\lim\limits_{x\to 0+} [\ln(x + e^x)]^{\frac{1}{\operatorname{arc\,tg} x}}$.

101. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left[\dfrac{\ln(10 + e^x)}{x}\right]^{\sqrt{e^{2x}+10}}$.

102. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\operatorname{tg} \dfrac{\pi x}{4}\right)^{\frac{1}{\sqrt{x+3}-2}}$.

103. $\lim\limits_{x\to 1} x^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}$.

104. $\lim\limits_{x\to \pi} \left(\dfrac{\cos x}{\cos 3x}\right)^{\frac{1}{(\sqrt{\pi x} - \pi)^2}}$.

105. $\lim\limits_{x\to 0} (2 - e^{-x})^{\operatorname{ctg} x}$.

106. $\lim\limits_{x\to 1} (4^x - \sqrt{x+8})^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}$.

107. $\lim\limits_{x\to 0}(3^x+x)^{\frac{1}{\sin x}}$.

108. $\lim\limits_{x\to 0}[\cos(\sin x)]^{\frac{1}{\arcsin^2 x}}$.

109. $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\sqrt{e^{x^2}-1}}{\arcsin x}$.

110. $\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{\sqrt{e^{x^2}-1}}{\arcsin x}$.

111. $\lim\limits_{x\to \pi+}\dfrac{\sqrt{1+\cos x}}{x-\pi}$.

112. $\lim\limits_{x\to \pi-}\dfrac{\sqrt{1+\cos x}}{x-\pi}$.

113. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3}{\sqrt{x}-1}-\dfrac{2}{\sqrt[3]{x}-1}\right)$.

114. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x-\operatorname{arc\,tg} x}{x^3}$.

115. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\arcsin x}{\operatorname{arc\,tg} x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

116. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\operatorname{arc\,ctg}\dfrac{1}{x}\right)^x$.

117. $\lim\limits_{x\to 0}|\operatorname{th} x|^{\operatorname{sh} 2x}$.

118. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\cos x)^{\sin 2x}-1}{x^3}$.

119. $\lim\limits_{x\to +\infty}(\operatorname{th} x)^{\operatorname{sh} 2x}$.

120. $\lim\limits_{x\to 1-}\dfrac{\arccos x}{\sqrt{-\ln x}}$.

121. $\lim\limits_{x\to 1-}\left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{4}\right)^{\frac{1}{\arccos^2 x}}$.

Найти следующие пределы:

122. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$.

123. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}\quad (a>1)$.

124. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{[2+(-1)^n]^n}{3^n\ln n}$.

125. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{4\cdot 7}+\dfrac{1}{7\cdot 10}+\ldots+\dfrac{1}{(3n+1)(3n+4)}\right)$.

126. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}\right)$.

127. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n+2}-2\sqrt[3]{n+1}+\sqrt[3]{n})$.

128. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+3n+1}-\sqrt{n^2+3n-1}}{\ln(1+n)-\ln(2+n)}$.

129. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3}{\sqrt{n+3}-\sqrt{n}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}\right)$.

130. $\lim\limits_{n\to\infty} n\arccos\dfrac{n^2}{n^2+1}$.

131. $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{a}-1)$.

132. $\lim\limits_{n\to\infty} n\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\cos\pi(\sqrt{4n^2+10})$.

133. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arc\,tg} nx\right)^{\operatorname{ctg}\pi\sqrt{n^2+1}}$ $(x>0)$.

134. Доказать сходимость и найти пределы следующих последовательностей:

а) $a_n=\sin(\sin(\sin\ldots\sin x))\ldots)$ (n скобок);

б) $a_n=x_{n+1}-x_n$, где $0<x_1<x_2<\ldots<x_n<\ldots$ и $x_n=\operatorname{tg} x_n$;

в) $a_{n+1}=\frac{a_n+A}{4}$, $a_1=0$;

г) $a_{n+1}=\operatorname{arc\,tg} a_n$, $a_1=25$;

д) $a_{n+1}=\frac{1}{3}\left(2a_n+\frac{M}{a_n^2}\right)$, $a_1=M>0$;

е) $3,\ 3+\frac{1}{3},\ 3+\frac{3}{3+\frac{1}{3}},\quad 3+\frac{1}{3+\frac{1}{3+\frac{1}{3}}},\ldots$.

135. Найти $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n$ и $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n$ последовательностей:

а) $a_n=((-1)^n+1)\cdot 2^n$; б) $a_n=n\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$;

в) $a_n=(n+1):(n+1+n\cdot(-1)^n)$;

г) $a_n=\left(1+\sin\frac{\pi n}{4}\right)\left(1-\cos\frac{\pi n}{6}\right)$.

136. Найти $\varliminf\limits_{x\to 0} f(x)$ и $\varlimsup\limits_{x\to 0} f(x)$ следующих функций:

а) $f(x)=\frac{\operatorname{sign} x}{x^2+1}$; б) $f(x)=e^{\frac{1}{x}}(x^2+4x+1)$;

в) $f(x)=(\sin\pi x)\cos\frac{\pi}{x}$.

137. Найти $\varlimsup\limits_{x\to 2} f(x)$ и $\varliminf\limits_{x\to 2} f(x)$ функции $f(x)=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x-2}\cdot\sin\frac{\pi}{x-2}$.

138. Проверить следующие формулы $(x\to 0)$:

а) $(1+x)^x=1+x^2-\frac{x^3}{2}+\frac{5}{6}x^4+o(x^4)$;

б) $\ln\left(1+x^3+\frac{x^6}{2}\right)=x^3-\frac{x^9}{6}+\frac{x^{12}}{8}+o(x^{12})$;

в) $\operatorname{ch}(\sin x)=1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+o(x^4)$;

г) $\cos(\operatorname{sh} x)=1-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+o(x^4)$;

д) $(\operatorname{ch} x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{2}} \cdot \left[1 - \frac{x^2}{12} + \frac{37}{1440} x^4 + o(x^4)\right]$;

е) $\sin(\operatorname{tg} x) = x + \frac{x^3}{6} - \frac{1}{40} x^5 + o(x^5)$;

ж) $\operatorname{tg}(\operatorname{th} x) = x - \frac{x^5}{15} + o(x^5)$.

139. При $x \to 0$ найти главные части вида Cx^n для следующих функций:

а) $(\cos x)^{2 \sin x} - e^{-x^2}$;

б) $e - (1+x)^{\frac{1}{x}}$;

в) $(1+x)^{\frac{1}{x} + \frac{1}{2} - \frac{x}{12}} - e$;

г) $\operatorname{tg}(\sin x) - \operatorname{sh} x$;

д) $(\cos x^4 - 1) \operatorname{arctg} x^2 \cdot 2x^2 e^{\sin x}$;

е) $\sin x^3 - \ln\left(1 + x^3 + \frac{x^6}{2}\right)$;

ж) $[\operatorname{sh}(\operatorname{sh} x) - \operatorname{tg} x] \arcsin x^2$;

з) $\sqrt[3]{\cos(x\sqrt{6})} - 1 - \ln(1 - x^2)$;

и) $\sqrt[3]{\cos(3xe^{-\frac{x^2}{2}})} - \cos(\sqrt{3}\, x)$;

к) $\left[\operatorname{sh}\left(\operatorname{sh} x - \operatorname{tg} x + \frac{1}{6} x^3\right)\right] \cdot \operatorname{tg} x^2$.

л) $e^{[\operatorname{tg}(\sin x) - \sin(\operatorname{tg} x)]} - \sqrt[5]{1 + \sin x}$.

Вычислить пределы, используя формулу Тейлора:

140. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x\sqrt[3]{\cos x} - \sin x}{x^5}$.

141. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(\sin x) - \operatorname{th} x}{x^5}$.

142. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[4]{e^{-x^2}}}{x^4}$.

143. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln \cos x^2 + \sqrt[6]{1 + 3x^4} - 1}{x^8}$.

144. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos 2x - e^{-2x^2 + \frac{4}{3} x^4}}{\operatorname{tg} x^4}$.

145. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos 2x - e^{-2x^2 - \frac{4}{3} x^4}}{\operatorname{tg} x^4}$.

146. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(1 + x^2)^{\frac{1}{x} + 5} - e^x}{\ln \cos x}$.

147. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{\frac{x}{3}} - \sqrt{\frac{x+3}{3-x}}}{x^3}$.

148. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x\sqrt[3]{1 + x^2}}{x^5}$.

149. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{18\sqrt[3]{\sin x^3} - 18x + x^7}{x^{13}}$.

150. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\cos x)^{\sin x}-\sqrt{1-x^3}}{x^6}$.

151. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos^2 x+x^2\sqrt[6]{1+x^2-x^4}}{x^6}$.

152. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(\sin x)-\sqrt{1-x^2+x^4}}{x^4}$.

153. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}(\sin x)-\operatorname{sh} x}{(\sqrt[5]{\cos x}-1)^2\operatorname{arctg} x^2}$.

154. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}\cos x-\operatorname{ch} x-e^{-x^2}\operatorname{ch} x+\cos x}{x^6}$.

155. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3\sqrt{1+x}-\sin^3 x-\dfrac{x^3}{2}\operatorname{tg} x}{\ln(1+x^2)(\sqrt[3]{1+2x^3}-1)}$.

156. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+3\sin x}-e^{-x^3}-\operatorname{sh} x}{\arcsin x^3}$.

157. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\cos x\sqrt[3]{1+3x+6x^2}}{\arcsin 2x\cdot\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{sh} 3x}$.

158. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e\left(\sqrt{1-x+\dfrac{x^2}{2}}+\sqrt[3]{1+x^2}-1\right)}{x^3}$.

159. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\left(xe^{\frac{x^2}{6}}\right)-x\cos x^2}{x^2\cdot\ln(1+x^3)}$.

160. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\dfrac{\sin x}{x}+e^{\frac{x^2}{6}}-1}{\ln\cos x+\sqrt{1+x^2}-1}$.

161. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\frac{-x^2}{2}}-\sqrt[4]{\cos 2x}\cdot\operatorname{ch} x^3}{\ln^2(\cos 2x)}$.

162. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}\cdot\cos x-\operatorname{ch} x}{x^5+x^3\sin^3 x}$.

163. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}\cos x-\operatorname{ch} x+x^5}{x^6+x^2\sin^3 x}$.

164. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-(\cos x)^{\sin x}}{x-\sin(x+x^3)}$.

165. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}-e\right]^2}{\ln(x+\cos x)-x}$.

166. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x+e^{\frac{x^2}{2}}-1}{(\sqrt[3]{1+3x}-\sqrt{1+2x})\operatorname{tg}^2(\sin x)}$.

167. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sqrt{1-x^2}-\cos x\ln(1+x)-\frac{x^2}{2}}{\operatorname{tg}x-\sin x}$.

168. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x-x^2e^{-x}-x^3}{1-\sqrt{1+x^2}\cos x}$.

169. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin x)-x+\frac{x^3}{3}}{\operatorname{sh}(\operatorname{sh}x)-\operatorname{tg}x}$.

170. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x+x^2-x^3+x^4)-\ln(1-x+x^2)+x^3\cos x-\frac{x^5}{2}\sqrt[3]{1+3x}}{x^7}$.

171. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2x^4\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)+\sqrt[3]{8x^9+12x^8+14x^7+15x^6+16x^5}\right)$.

172. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-e^{-2x^2-\frac{4}{3}x^4}}{\operatorname{tg}(3x^2)-3\operatorname{th}x^2}$.

173. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[4]{\cos 4x}-\cos(2xe^{x^2})}{(\sin 2x-2\operatorname{tg}x)^2}$.

174. Найти наклонную асимптоту для графика функции:

а) $y=\sqrt{x^2+2x+3}-x$;

б) $y=(2x+3)e^{\frac{1}{x}}$;

в) $y=\sqrt{x^4+x^3}-x^2$;

г) $y=x^2\sin\frac{1}{x}$;

д) $y=x\cos\frac{1}{x}$;

е) $y=\ln(1+e^{2x})$;

ж) $y=\dfrac{x^2+\sin x}{x+\sqrt{x^2-1}}$.

Ответы

5. а) $\frac{a_0}{b_0}x^{n-m}$; б) $x^{\frac{1}{2}}$; в) $2^a x^a$; г) x; д) πx^2; е) x^2; ж) $x^2\ln 4$; з) $2x$; и) $\frac{1}{2x}$; к) $\frac{4}{x}$. 6. а) $\frac{mn(m-n)}{2}x^2$; б) $-2x^2$; в) $x^{\frac{1}{8}}$; г) $\left(\frac{a}{m}+\frac{b}{n}\right)x$; д) $-\frac{\pi^2}{2}x^2$; е) $x\ln\frac{a}{b}$; ж) ax; з) $-7x^2$; и) $x\ln 4$; к) $\frac{1}{\pi x}$.

7. а) $-10(1-x)$; б) $-\frac{n(n+1)}{2}(1-x)$; в) $-8\pi(1-x)^3$; г) $\sqrt{2}(1-x)^{\frac{1}{2}}$; д) $-(1-x)$; е) $-\frac{\pi^2}{8}(1-x)^2$; ж) $6\ln\frac{3}{2}(1-x)$; з) $\frac{2}{\pi}\sqrt[3]{7}(1-x)^{-\frac{4}{3}}$; и) $-\frac{2}{\pi}(1-x)^{-1}$; к) $2(a-b)^{\frac{1}{5}}(1-x)^{-4/5}$. 8. а) $\frac{a}{4n^2}$; б) $-\frac{4\pi}{n^2}$; в) $\frac{(-1)^k}{2n}\pi k$; г) $\frac{1}{n}\ln\frac{a}{\sqrt{bc}}$; д) $\frac{\pi}{n}$; е) $\frac{\pi}{2n}$; ж) $\frac{1}{n^{3/2}}$; з) $\frac{\ln 2}{n^2}$; и) $\frac{1}{\sqrt{2n}}$; к) $\ln 3\left(\frac{1}{n}\right)^{-1}$. 11. -1. 12. 5. 13. 1. 14. 0. 15. ∞. 16. $\frac{3}{2}$. 17. $\frac{4}{27}$. 18. 0. 19. $+\infty$. 20. $-\frac{5}{2}$. 21. 1. 22. $+\infty$. 23. $+\infty$. 24. $-\frac{1}{2}$. 25. 3. 26. -3. 27. $\frac{2}{3}$. 28. $\frac{10}{3}$. 29. а) $\frac{1}{6}$; б) $\frac{1}{6}$. [Указание: $x=t^{12}-1$. 30. π. 31. 1. 32. 0. 33. $\frac{1}{2}$. 34. $\frac{\pi}{8}$. 35. 0. 36. 1. 37. -1. 38. $-\frac{1}{4}$. 39. -1. 40. $-\frac{3\pi^2}{2}$. 41. 1. 42. -1. 43. $-\frac{1}{4}$. 44. $-\frac{1}{2}$. 45. 3. 46. $\alpha^2-\beta^2$. 47. $\frac{3}{7}$. 48. 1. 49. $-\frac{n(n+1)(2n+1)}{12}$. 50. $\frac{n(n+1)}{2}$. 51. $\frac{n(n+1)}{2}$. 52. $\frac{40}{3}$. 53. 4. 54. $-\frac{3}{2}$. 55. π. 56. $-\frac{9}{2}$. 57. $-\frac{1}{\pi^2}$. 58. 0. 59. 0. 60. 0. 61. $-2\sqrt{2}\pi^2$. 62. а) $1-\sqrt[4]{4}$; б) $\sqrt[4]{4}-1$. 63. -2. 64. 0. 65. $\frac{\sqrt{2}}{8}$. 66. $-\infty$. 67. ∞. 68. $4-\pi$. 69. 1. 70. -12. 71. 1. 72. $\frac{3}{5}$. 73. 1. 74. $\frac{1}{5}$. 75. $\frac{3a^b\ln a}{2}$. 76. $\ln\frac{\alpha}{\beta}$. 77. $\frac{64}{3}\ln 2$. 78. $-\frac{1}{2}\ln\frac{a}{b}$. 79. $\frac{8}{7}$. 80. $\frac{1}{2e}$. 81. $5(\alpha-\beta)$. 82. $a^a\ln\frac{a}{e}$. 83. 1. 84. $-\frac{\alpha}{2\beta}$. 85. $\sqrt{ab}$. 86. $e^{\alpha\operatorname{ctg}\alpha\beta}$. 87. $e^{-\frac{1}{\pi}}$. 88. $2e$. 89. e^{-2}. 90. $e^{3\left(1+\frac{1}{e}\right)}$. 91. e. 92. $\sqrt[n]{a_1, a_2 \ldots a_n}$. 93. $\frac{\beta^2-\alpha^2}{m}$. 94. e^2. 95. $\frac{9}{10}$. 96. $\left(\frac{4}{27}\cdot\frac{1}{e}\right)^{-\frac{2}{3\pi}}$. 97. e^2. 98. $e^{-2\pi^2}$. 99. 1. 100. 0. 101. 1. 102. $e^{2\pi}$. 103. $e^{-\frac{2}{\pi}}$. 104. e^{16}. 105. e. 106. $e^{-\frac{2}{\pi}\left(4\ln 4-\frac{1}{6}\right)}$. 107. $3e$. 108. $e^{-\frac{1}{2}}$. 109. 1. 110. -1. 111. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 112. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. 113. $-\frac{1}{2}$. 114. $\frac{1}{2}$.

115. $e^{\frac{1}{2}}$. 116. e^2. 117. 1. 118. -1. 119. e^{-1}. 120. $\sqrt{2}$. 121. $e^{-\frac{\pi}{4}}$. 122. 1. 123. 0. 124. 0. 125. $\frac{1}{12}$. 126. $\frac{1}{4}$. 127. 0. 128. -2. 129. 0. 130. $\sqrt{2}$. 131. $\ln a$. 132. -1. 133. $e^{-\frac{2}{\pi x}}$. 134. а) 0; б) π; в) $\frac{A}{3}$; г) 0; д) $\sqrt[3]{M}$; е) $\frac{3+\sqrt{13}}{2}$. 135. а) 0, $+\infty$; б) -1; 1; в) $\frac{1}{2}$; $+\infty$; г) 0; 4. 136. а) 1; -1; б) $+\infty$; 0; в) 0; 0. 137. $\frac{\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{2}$. 139. а) $-\frac{1}{40}x^7$; б) $\frac{ex}{2}$; в) $-\frac{1}{24}x^3$; г) $-\frac{1}{30}x^5$; д) $-x^{12}$; е) $-\frac{1}{8}x^{12}$; ж) $-\frac{1}{30}x^7$; з) $-\frac{13}{30}x^6$; и) $-\frac{21}{20}x^6$; к) $-\frac{1}{8}x^7$; л) $-\frac{1}{6}x^7$. 140. $-\frac{1}{45}$. 141. $-\frac{1}{30}$. 142. $-\frac{1}{24}$. 143. $-\frac{17}{24}$. 144. $-\frac{8}{3}$. 145. 0. 146. -10. 147. $-\frac{1}{81}$. 148. $\frac{11}{45}$. 149. $-\frac{1}{180}$. 150. $\frac{1}{4}$. 151. $-\frac{101}{360}$. 152. $-\frac{1}{6}$. 153. $-\frac{10}{3}$. 154. $-\frac{4}{45}$. 155. $\frac{9}{16}$. 156. $\frac{4}{3}$. 157. $\frac{1}{2}$. 158. $-\frac{1}{2}e$. 159. $\frac{79}{180}$. 160. $-\frac{1}{25}$. 161. $\frac{1}{12}$. 162. 0. 163. 1. 164. $-\frac{3}{5}$. 165. $-\frac{e^2}{4}$. 166. $-\frac{1}{12}$. 167. $-\frac{2}{3}$. 168. $-\frac{5}{2}$. 169. -3. 170. $\frac{13}{24}$. 171. 0. 172. $-\frac{32}{225}$. 173. -3. 174. а) $y=1$ при $x\to+\infty$; $y=-2x-1$ при $x\to-\infty$; б) $y=2x+5$; в) $y=\frac{x}{2}-\frac{1}{8}$; г) $y=x$; д) $y=x$; е) $y=2x$ при $x\to+\infty$; $y=0$ при $x\to-\infty$; ж) $y=\frac{x}{2}$ при $x\to+\infty$.

Глава III
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОГО ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

§ 1. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ

Пусть $f:(a, b)\to R$ определена на интервале $(a, b)\in R$ и $x_0\in\in(a, b)$.

Определение. Число $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ называется *производной функции f в точке x_0* и обозначается $f'(x_0)$. Операция

нахождения производной называется *дифференцированием*. Функция, имеющая производную в данной точке, называется дифференцируемой в этой точке. Необходимым условием дифференцируемости в точке является непрерывность функции в данной точке.

Если функция f дифференцируема в каждой точке интервала (a, b), то на этом интервале определяется функция f', значение которой в точке $x \in (a, b)$ равно *производной* $f'(x)$ *функции* f в этой точке.

Формулы дифференцирования основных элементарных функций:

1. $(1)' = 0$.
2. $(x^a)' = ax^{a-1}$.
3. $(a^x)' = a^x \ln a$ (в частности, $(e^x)' = e^x$).
4. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$ $\left(\text{в частности, } (\ln x)' = \dfrac{1}{x}\right)$.
5. $(\sin x)' = \cos x$.
6. $(\cos x)' = -\sin x$.
7. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.
8. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.
9. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
10. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
11. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.
12. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.
13. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$.
14. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$.
15. $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$.
16. $(\operatorname{cth} x)' = \dfrac{-1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

Заметим, что все эти формулы справедливы для точек, являющихся внутренними точками промежутка, на котором зависимость f от x задана соответствующей функцией, если в этой точке аналитическое выражение $f'(x)$ имеет смысл.

Основные правила дифференцирования

Если f и g функции, дифференцируемые в точке x_0, α и β постоянные, то в этой точке

1) $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$;

2) $(fg)' = f'g + g'f$;

3) $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - g'f}{g^2}$ $(g(x_0) \neq 0)$;

4) если $h(x)$ дифференцируема в точке x_0, а $f(h)$ дифференцируема в точке $h_0=h(x_0)$, то в точке x_0

$$f_x'=f_h'\cdot h_x',$$

индекс h в выражении f_h' показывает, что производная берется по аргументу h, т. е.

$$f_h'=\lim_{\Delta h\to 0}\frac{f(h_0+\Delta h)-f(h_0)}{\Delta h}.$$

Для дифференцирования степенно-показательной функции $[u(x)]^{v(x)}(u(x)>0)$, где $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы в точке x_0, пользуются тождеством $[u(x)]^{v(x)}=e^{v(x)\ln u(x)}$.

Степенная функция $y=x^\alpha$ при $0<\alpha<1$ определена, но не дифференцируема при $x=0$; и именно при $x=0$ аналитическое выражение ее производной теряет смысл. Точно так же аналитическое выражение производной функций $y=\arcsin x$ и $y=\arccos x$ теряет смысл, если $|x|\geqslant 1$, т. е. именно при тех значениях аргумента, при которых соответствующие функции либо не определены, либо не дифференцируемы. Все остальные основные элементарные функции дифференцируемы во всех точках множества определения, и аналитические выражения их производных имеют смысл во всех точках соответствующего множества. Поэтому любая элементарная функция f дифференцируема во всякой точке, в которой аналитическое выражение ее производной имеет смысл. Если же аналитическое выражение производной (т. е. функция f') не определено для некоторого значения x_0 из множества определения f, то это говорит о том, что какая-то из основных элементарных функций, композицией которых является функция f, не дифференцируема при соответствующем значении аргумента; и, следовательно, вопрос о существовании и величине производной f в этой точке требует дополнительного исследования.

Пример. Пусть $f(x)=x\sqrt{(1-x)^2\sin x^2}$, $x\in(-\sqrt{3},\sqrt{3})$. Формально применяя правила дифференцирования, получаем

$$f'=\sqrt{(1-x)^2\sin x^2}+x\cdot\frac{2x\cos x^2\cdot(1-x)^2-2(1-x)\sin x^2}{2\sqrt{(1-x)^2\sin x^2}}. \qquad (1)$$

Функция f' не определена только при $x=0$ и $x=1$. Поэтому для всех x из множества $\{(-\sqrt{3},\sqrt{3})\setminus\{0\}\setminus\{1\}\}$ производная существует и ее значение вычисляется по формуле (1). Вопрос о существовании и величине производной данной функции при $x=0$ и при $x=1$ решаем непосредственно исходя из определения производной в точке.

Рассмотрим отношение $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ при $x_0=0$ и $x_0=1$. Если $x_0=0$, то $\frac{f(h)-f(0)}{h}=\sqrt{(1-h)^2\sin h^2}$, следовательно,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=0=f'(0).$$

Если $x_0=1$, то $\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=(1+h)\sqrt{\sin(1+h)^2}\cdot\frac{\sqrt{h^2}}{h}$. Эта функция не имеет предела при $h\to 0$.

Итак, функция $f(x)=x\sqrt{(1-x)^2\sin x^2}$ не дифференцируема при $x=1$, а при $x=0$ имеет производную, равную нулю.

Пример 2. Найдем производную функции

$$y=\frac{4x^2-2x+10}{\sqrt{x}}.$$

Решение. Имеем

$$y=4x^{3/2}-2x^{1/2}+10x^{-1/2},$$

$$y'=4\cdot\frac{3}{2}x^{1/2}-2\cdot\frac{1}{2}x^{-1/2}+10\cdot(-1/2)x^{-3/2}=$$

$$=\frac{6x^2-x-5}{x\sqrt{x}},\ x>0.$$

Пример 3. Найдем производную функции $y=x(\cos x-4\sin x)$.

Решение. Имеем

$$y'=(\cos x-4\sin x)+x(-\sin x-4\cos x)=$$

$$=(1-4x)\cos x-(4+x)\sin x,\ x\in R.$$

Пример 4. Найдем производную функции $y=\frac{\arcsin x}{1-x^2}$.

Решение. Получаем

$$y'=\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(1-x^2)-(-2x)\arcsin x}{(1-x^2)^2}=\frac{\sqrt{1-x^2}+2x\arcsin x}{(1-x^2)^2},\ |x|<1.$$

Пример 5. Найдем производную функции $y=\sqrt{\operatorname{tg}^3 2x+2}$, $|x|<\frac{\pi}{8}$.

Решение. Запишем $y(x)$ в виде цепочки суперпозиций основных элементарных функций: $y=h^{1/2}$; $h=t^3+2$; $t=\operatorname{tg} z$; $z=2x$.

Следовательно,

$$y'_x=y'_h\cdot h'_x=y'_h\cdot h'_t\cdot t'_x=y'_h\cdot h'_t\cdot t'_z\cdot z'_x=$$

$$=\frac{1}{2}h^{-1/2}\cdot 3t^2\cdot\frac{1}{\cos^2 z}\cdot 2=\frac{1}{2}\cdot(\operatorname{tg}^3 2x+2)^{-1/2}\cdot 3\operatorname{tg}^2 2x\cdot\frac{1}{\cos^2 2x}\cdot 2,$$

т. е.

$$y'_x=\frac{3\operatorname{tg}^2 2x}{\sqrt{\operatorname{tg}^3 2x+2}\cdot\cos^2 2x}.$$

Пример 6. Найдем производную функции

$$y=\ln^3 \operatorname{arctg}^2 \sqrt{\frac{1}{x^3}}.$$

Решение. Получаем

$$y'=3\ln^2 \operatorname{arctg}^2 \sqrt{\frac{1}{x^3}}\cdot\frac{1}{\operatorname{arctg}^2\sqrt{\frac{1}{x^3}}}\cdot 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1}{x^3}}\times$$

$$\times\frac{1}{1+\frac{1}{x^3}}\cdot\left(-\frac{3}{2}x^{-5/2}\right)=-\frac{9\ln^2\operatorname{arctg}^2\sqrt{\frac{1}{x^3}}}{\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1}{x^3}}}\cdot\frac{\sqrt{x}}{1+x^3},\ x>0.$$

Пример 7. Найдем производную функции $y=x^x$, $x>0$.
Решение. Имеем $y=e^{x\ln x}$,

$$y'=e^{x\ln x}(x\ln x)'=e^{x\ln x}\left(\ln x+x\cdot\frac{1}{x}\right)=$$

$$=e^{x\ln x}(\ln x+1)=x^x(\ln x+1).$$

Числа

$$\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'_+(x_0)\ \text{и}\ \lim_{\Delta x\to 0-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'_-(x_0)$$

называются соответственно левой и правой производной функции f в точке x_0. Условие $f'_+(x_0)=f_-'(x_0)$ эквивалентно дифференцируемости функции f в точке x_0, при этом $f'(x_0)=f'_+(x_0)=f'_-(x_0)$.

Пример 8. Найдем $f'_+(x)$, $f'_-(x)$ для функции

$$f(x)=\sqrt{1-e^{-x^2}}.$$

Решение. Имеем

$$f'(x)=\frac{-e^{-x^2}\cdot(-2x)}{2\sqrt{1-e^{-x^2}}}=\frac{xe^{-x^2}}{\sqrt{1-e^{-x^2}}}.$$

Функция f' определена для всех $x\neq 0$. Если $x\to 0$, то

$$\sqrt{1-e^{-x^2}}\sim\sqrt{x^2},$$

следовательно,

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{\sqrt{1-e^{-x^2}}}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{\sqrt{x^2}}{x}=1$$

и

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{\sqrt{x^2}}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{-x}{x}=-1.$$

Итак, $f'_+(x)=f'_-(x)=\frac{xe^{-x_2}}{\sqrt{1-e^{-x^2}}}$, $x\neq 0$, $f'_+(0)=1$; $f'_-(0)=-1$.

Так как $f'_+(0)\neq f'_-(0)$, то в точке $x=0$ рассматриваемая непрерывная функция не дифференцируема.

Пример 9. Найдем $f'_+(x)$, $f'_-(x)$ для функции $f(x)=x\sqrt{\ln(1+x^2)}$.

Решение. Имеем

$$f'(x)=\sqrt{\ln(1+x^2)}+\frac{x^2}{\sqrt{\ln(1+x^2)}}\cdot\frac{1}{(1+x^2)}.$$

Функция $f'(x)$ определена для всех $x\neq 0$. Для $x=0$ находим

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{x\sqrt{\ln(1+x^2)}}{x}=\lim_{x\to 0+}\sqrt{\ln(1+x^2)=0}$$

и

$$f'_-(0)=0.$$

Так как $f'_+(0)=f'_-(0)=0$, то $f'(0)=0$.

Итак, функция $f(x)$ дифференцируема на всей числовой прямой и

$$f'_+(x)=f'_-(x)=f'(x)=\begin{cases}\sqrt{\ln(1+x^2)}+\frac{x^2}{\sqrt{\ln(1+x^2)}}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

Пример 10. Найдем $f'_+(x)$, $f'_-(x)$ для функции

$$f(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

Решение. Заметим, что функция f непрерывна на всей числовой оси (почему?). Если $x\neq 0$, то

$$f'_+(x)=f'_-(x)=f'(x)=\sin\frac{1}{x}-x\cdot\frac{1}{x^2}\cdot\cos\frac{1}{x}=$$
$$=\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}.$$

Найти производную $f'(0)$, пользуясь формулами и правилами дифференцирования, нельзя, так как точка 0 не лежит внутри интервала, на котором зависимость f от x задана элементарной функцией. Так как $\frac{f(x)-f(0)}{x}=\sin\frac{1}{x}$ и функция $\sin\frac{1}{x}$ не имеет предела как при $x\to 0+$, так и при $x\to 0-$, то функция f не имеет в точке $x=0$ ни левой, ни правой производной.

На практике удобно пользоваться следующим свойством: если функция f непрерывна в точке a, производная f' существует в некоторой правой (левой) полуокрестности a и существует $\lim\limits_{x\to a+} f'(x)$

$(\lim\limits_{x\to a-} f'(x))$, то этот предел равен $f'_+(a)$ $(f'_-(a))$. Обратим внимание, что условие непрерывности функции f в этом утверждении существенно. В самом деле,

пусть

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Тогда

$$-\pi/2 = \lim_{x\to 0-} f(x) < f(0) < \lim_{x\to 0+} f(x) = \pi/2,$$

т. е. функция f в точке $x=0$ не является непрерывной ни справа, ни слева, откуда видно, что функция f не имеет в точке $x=0$ ни левой, ни правой производной. В то же время для $x\neq 0$

$$f'(x) = -\frac{1}{1+x^2},$$

и существуют оба предела

$$\lim_{x\to 0-} f'(x) = -1, \ \lim_{x\to 0+} f'(x) = -1.$$

Пример 11. Найдем производную функции

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} x, & x \geqslant 0, \\ x^2 + x, & x < 0. \end{cases}$$

Решение. Заметим, что функция $f(x)$ непрерывна на всей числовой прямой. Для $x>0$ имеем $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, для $x<0$ $f'(x) = 2x+1$, следовательно,

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{1+x^2} = 1, \ f'_-(0) = \lim_{x\to 0-} (2x+1) = 1.$$

Итак, функция $f(x)$ дифференцируема на всей числовой прямой и

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+x^2}, & x > 0; \\ 1, & x = 0; \\ 2x+1, & x < 0. \end{cases}$$

Пример 12. Найдем производную функции

$$f(x) = \begin{cases} (x-4)\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-4}, & x \neq 4; \\ 0, & x = 4. \end{cases}$$

Решение. Заметим, что функция $f(x)$ непрерывна на всей числовой прямой. Если $x \neq 4$, то

$$f'(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x-4} + \frac{x-4}{1+(x-4)^2},$$

откуда получаем

$$f'_+(4) = \lim_{x \to 4+} f'(x) = \frac{\pi}{2},$$

$$f'_-(4) = \lim_{x \to 4-} f'(x) = -\frac{\pi}{2}.$$

Итак,

$$f'(x) = f'_+(x) = f'_-(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x-4} + \frac{x-4}{1+(x-4)^2}, \quad x \neq 4,$$

так как

$$f'_-(4) = -\frac{\pi}{2}, \quad f'_+(4) = \frac{\pi}{2}, \text{ то в точке } x = 4$$

функция $f(x)$ не дифференцируема.

Пример 13. Найдем производную функции

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Решение. Имеем $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$, если $x \neq 0$. Значение $f'(0)$ вычислим по определению:

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

Итак, функция f дифференцируема на всей числовой прямой, и

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Заметим, что пределы $\lim\limits_{x \to 0+} f'(x)$ и $\lim\limits_{x \to 0-} f'(x)$ не существуют.

Пример 14. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & x \geqslant a; \\ h(x), & x < a. \end{cases}$$

Какому условию должны удовлетворять непрерывные функции g и h, чтобы функция f была дифференцируемой на всей числовой прямой?

Решение. Так как $f(x)=g(x)$ для $x>a$ и $f(x)=h(x)$ для $x<a$, то условие дифференцируемости g для $x>a$ и h для $x<a$ необходимо и достаточно для дифференцируемости f на множестве $\{x<a\}\cup\{x>a\}$. Для дифференцируемости f в точке a прежде всего необходимо условие непрерывности $h(a)=\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$, т. е. $\lim\limits_{x\to a-} h(x)=g(a)$.

Если $\Delta x>0$, то $\dfrac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=\dfrac{g(a+\Delta x)-g(a)}{\Delta x}$; если $\Delta x<0$, то $\dfrac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=\dfrac{h(a+\Delta x)-h(a)}{\Delta x}$. Таким образом, для дифференцируемости f в точке a необходимо и достаточно, чтобы $g(a)=h(a)$ и $g'_+(a)=h'_-(a)$, поскольку

$$f'_+(a)=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{g(a+\Delta x)-g(a)}{\Delta x} \text{ и } f'_-(a)=\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{h(a+\Delta x)-h(a)}{\Delta x}.$$

Пример 15. Пусть

$$f(x)=\begin{cases} e^x, & x\leqslant 0,\\ x^2+ax+b, & x>0.\end{cases}$$

Найдем такие значения a и b, чтобы f была дифференцируемой на всей числовой прямой.

Решение. Заметим, что так как f должна быть непрерывна в точке 0, то $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0-} f(x)=1$, т. е.

$$\lim_{x\to 0+}(x^2+ax+b)=b=e^0=1, \text{ откуда } b=1.$$

Далее, $f'_+(0)=(x^2+ax+b)'|_{x=0}=a$ и $f'_-(0)=(e^x)'|_{x=0}=1$, следовательно, $f'(0)$ существует, если $a=1$ и $b=1$. При этих значениях a и b функция f дифференцируема на всей прямой.

Перейдем теперь ко второй производной и производной n-го порядка.

Производная функции $f'(x)$ называется *второй производной функции* f и обозначается f''. Далее определение идет по индукции: *производная n-го порядка* (n-я производная) — f^n — есть производная от производной $(n-1)$-го порядка: $f^{(n)}=(f^{(n-1)})'$.

Пример 16. Покажем, что n-я производная функции $y=\sin x$ есть $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}n\right)$.

Решение. Имеем $y'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$. Если $y^{(n-1)}(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}(n-1)\right)$, то

$$y^{(n)}(x)=(y^{(n-1)}(x))'=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}(n-1)\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}n\right).$$

Согласно принципу математической индукции формула доказана.

Справедливы следующие формулы:

$$(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a \; (a > 0); \quad (e^x)^{(n)} = e^x;$$

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} n\right);$$

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{\pi}{2} n\right);$$

$$(x^m)^{(n)} = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)\, x^{m-n};$$

$$(\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}.$$

Для нахождения n-й производной функции f в некоторых случаях полезно функцию предварительно преобразовать, например, рациональную функцию разложить в сумму простейших дробей, понизить степень тригонометрической функции с помощью кратных углов, перейти к комплексным переменным и т. д. Так, например, при нахождении n-й производной от функций

$$y = \frac{1}{x^2-1}, \; y = \sin^4 x, \; y = \ln\frac{1+x}{3x+1}, \; y = \sin 2x \cos^2 3x, \; y = e^x \cos x$$

$$y = e^x \cos x$$

представим их соответственно в виде

$$y = \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right); \; y = \sin^4 x =$$

$$= \frac{1}{8}(\cos 4x - 4\cos 2x + 3);$$

$$y = \ln\frac{1+x}{3x+1} = \ln|1+x| - \ln|3x+1|; \; y = \sin 2x \cdot \cos^2 3x =$$

$$= \frac{1}{4}(\sin 8x - \sin 4x) + \frac{1}{2}\sin 2x; \; y = e^x \cos x = \operatorname{Re} e^{x(1+i)}.$$

При нахождении производных высших порядков от произведения двух функций полезно пользоваться *формулой Лейбница:*

если каждая из функций $u = f(x)$ и $v = g(x)$ имеет в точке x_0 производную n-го порядка, то их произведение $u \cdot v$ также имеет n-ю производную в точке x_0, причем

$$(u \cdot v)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)},$$

здесь

$$u^{(0)} \equiv u(x), \; v^{(0)} \equiv v(x), \; C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Пример 17. Найдем $y^{(10)}$, если $y(x)=(x^3+4x^2+2)e^{2x}$.

Решение. Обозначим $u(x)=x^3+4x^2+2$, $v(x)=e^{2x}$, тогда, применяя формулу Лейбница, имеем

$$[(x^3+4x^2+2)e^{2x}]^{(10)}=C_{10}^0\cdot(x^3+4x^2+2)^{(0)}\cdot(e^{2x})^{(10)}+$$
$$+C_{10}^1\cdot(x^3+4x^2+2)^{(1)}\cdot(e^{2x})^{(9)}+C_{10}^2\cdot(x^3+4x^2+2)^{(2)}\cdot(e^{2x})^{8}+$$
$$+C_{10}^3\cdot(x^3+4x^2+2)^{(3)}\cdot(e^{2x})^{(7)}=2^{10}\cdot e^{2x}\cdot(x^3+4x^2+2)+$$
$$+2^9\cdot 10\cdot(3x^2+8x)e^{2x}+2^8\cdot 45\cdot(6x+8)e^{2x}+2^7\cdot 120\cdot 6\cdot e^{2x}.$$

Здесь мы воспользовались тем, что все производные порядка более трех от функции $y=x^3+4x^2+2$ равны нулю.

Поясним теперь, как находятся производные функций, заданных параметрически.

Пусть функция $y(x)$ задана параметрически: $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t\in T$. Если в некотором промежутке $(\alpha, \beta)\subset T$ функции $x(t)$ и $y(t)$ дифференцируемы и $x'(t)\neq 0$, то в промежутке (α, β) функция $y(x)$ однозначно определена, дифференцируема и $y'_x=\dfrac{y'_t}{x'_t}$.

Производная y_x' связана с аргументом x так же, как и исходная функция y через параметр $t: y_x'=\varphi(t)$, $x=x(t)$. Поэтому при выполнении соответствующих условий вторая производная y по x равна $y''_{x^2}=(y'_x)'_x=\dfrac{(y'_x)'_t}{x'_t}=\dfrac{y''_{t^2}x'_t-x''_{t^2}y'_t}{(x'_t)^3}$ и т. д.

Пример 18. Найдем y'_x, y''_{x^2} и y'''_{x^3} для функции $y(x)$, заданной параметрически:

$$x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t).$$

Решение. Так как $x_t'=a(1-\cos t)$ неотрицательна для $t\neq 2\pi k$, $k\in Z$, то в соответствующих точках

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{\sin t}{1-\cos t}=\operatorname{ctg}\frac{t}{2},\quad y''_{x^2}=\frac{-\dfrac{1}{2\sin^2\dfrac{t}{2}}}{2a\sin^2\dfrac{t}{2}}=$$

$$=-\frac{1}{4a\sin^4\dfrac{t}{2}};\quad y'''_{x^3}=\frac{\cos\dfrac{t}{2}}{4a^2\sin^2\dfrac{t}{2}\cdot\sin^5\dfrac{t}{2}}=\frac{\cos\dfrac{t}{2}}{4a^2\sin^7\dfrac{t}{2}}.$$

Рассмотрим теперь дифференцирование функции, заданной неявно, т. е. соотношением $F(x, y(x))=0$. Предположим, что такая функция определена и дифференцируема на некотором интервале (α, β). Тогда при формальном дифференцировании соотношения

$F(x, y(x))=0$ по переменной x получим линейное относительно y_x' уравнение, из которого находим выражение этой производной (условие существования и дифференцирования заданной таким образом функции $y(x)$ рассматривается в теории функций многих переменных).

Пример 19. Пусть функция $y(x)$ определяется из уравнения $x^3+y^3-y^5-x=0$.

Найдем $y_x'(1)$, если $y(1)=1$.

Решение. Заметим, что значения $x=1$ и $y=1$ удовлетворяют данному уравнению. Дифференцируя соотношение

$$x^3+y^3(x)+y^5(x)-x\equiv 0$$

по переменной x, получаем

$$3x^2+3y^2y_x'-5y^4y_x'-1=0.$$

При $x=1$ и $y=1$ имеем

$$3+3y_x'(1)-5y_x'(1)-1=0,$$

откуда $y_x'(1)=1$.

При соответствующих условиях функция $y(x)$ будет иметь и производные высших порядков, которые определяются уравнениями $(F(x, y(x)))''_{x^2}=0$, $(F(x, y(x)))'''_{x^3}=0$ и т. д.

Пример 20. Пусть функция $y(x)$ определяется из уравнения $\ln(x^2+y^2)=x-y$ и $x_0=y_0=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Найдем $y'(x_0)$ и $y''(x_0)$.

Решение. Дифференцируя соотношение $\ln(x^2+y^2(x))=x-y(x)$, имеем

$$\frac{2x+2y(x)\,y_x'(x)}{x^2+y^2(x)}-1+y'(x)=0,$$

или

$$2x+2y(x)y'(x)-(1-y'(x))(x^2+y^2(x))=0, \qquad (2)$$

откуда следует, что $y'(x)=\frac{x^2+y^2(x)-2x}{x^2+y^2(x)+2y(x)}$, следовательно, $y'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$. Дифференцируя по x равенство $y'=\frac{x^2+y^2-2x}{x^2+y^2+2y}$, получим y''. Заметим, что в соотношение, определяющее y'', входит y', которое уже найдено. Технически проще вычислить y'', дифференцируя соотношение (2). В нашем случае имеем

$$2+2(y'(x))^2+2y(x)\,y''+y''(x^2+y^2(x))-$$
$$-(1-y'(x))(2x+2y(x)\,y'(x))=0.$$