Откуда

$$2+2\left(\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^2+\sqrt{2}\,y''\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+y''\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-$$

$$-\left(1-\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\,\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)=0$$

и

$$y''\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{-4}{(1+\sqrt{2})^3}.$$

§ 2. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ И ИНВАРИАНТНОСТЬ ЕГО ФОРМЫ

Пусть f определена в некоторой окрестности точки x_0. Если приращение функции f имеет главную часть, линейную относительно приращения аргумента, т. е. если справедливо представление $\Delta f=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\Delta x+o(\Delta x)$, $\Delta x\to 0$, где $A\neq 0$, то эта главная часть $A\Delta x$ называется *дифференциалом* df *функции* f в точке x_0 и говорят, что f имеет в точке x_0 дифференциал. В случае $A=0$ дифференциал функции по определению считается равным нулю.

Для функции одного переменного существование производной в точке x_0 и существование дифференциала в точке x_0 эквивалентны. Поэтому термин «дифференцируемая в точке x_0 функция» означает одновременно существование и производной, и дифференциала y функции f в точке x_0. Если функция дифференцируема в точке x_0, то ее дифференциал в этой точке равен $f_x'(x_0)\Delta x$. В частности, для функции $y=x$ имеем $dy=\Delta x$, т. е. дифференциал независимого переменного x совпадает с приращением Δx. Поэтому дифференциал функции f записывается в форме $df=f_x'dx$, и производная f_x' может быть записана как отношение дифференциалов: $f_x'=\frac{df}{dx}$.

Основные правила вычисления дифференциалов функций те же, что и для вычисления производной.

Если функции f и g дифференцируемы в точке x_0, то в этой точке имеем

1. $d(\alpha f+\beta g)=\alpha df+\beta dg$ (α и β — постоянные);
2. $d(fg)=gdf+fdg$.
3. $d\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{gdf-fdg}{g^2}$ $(g(x_0)\neq 0)$.

Главным свойством дифференциала является инвариантность его формы относительно композиции функций, а именно если $y=y(x)$ и $x=x(t)$, то $dy=y_t'dt=y_x'\cdot dx$. Необходимо только иметь в виду, что если x — независимая переменная, то dx есть прираще-

ние Δx, а если $x=x(t)$, то dx есть главная часть приращения Δx, линейная относительно Δt.

Свойством инвариантности дифференциала широко пользуются при преобразовании выражений, содержащих производные.

Пример 1. Пусть дано выражение $(1-x^2)y_x' - xy\,(y=y(x))$. Положим $x=\sin t$, тогда, переходя в этом выражении к новой независимой переменной t и считая, что $y=y(t)$, имеем

$$y_x' = \frac{dy}{dx},\quad dx = \cos t\,dt,\quad y_t' = \frac{dy}{dt}.$$

Следовательно,

$$(1-x^2)\,y_x' - xy = \frac{(1-x^2)\,dy - xydx}{dx} =$$

$$= \frac{(1-\sin^2 t)\,y_t'\cdot dt - \sin t\cdot y\cdot \cos t dt}{\cos t\cdot dt} = \cos t\cdot y_t' - y\sin t.$$

В данном случае, вместо того чтобы использовать понятие дифференциала, можно было пользоваться только правилами дифференцирования сложной функции: $y_t' = y_x'\cdot x_t'$, откуда $y_x' = \frac{y_t'}{x_t'}$, но при более сложной замене переменной и функции использование дифференциалов дает более простой путь при вычислениях.

Пример 2. В выражении $(1+x^2)y''-y$, где $y=y(x)$, перейдем к функции $u(t)$, если $y=\frac{u}{\cos t}$, $x=\operatorname{tg} t$.

Имеем

$$y_x' = \frac{dy}{dx},\quad y''_{x^2} = (y_x')_x' = \frac{d(y_x')}{dx},\quad dx = \frac{dt}{\cos^2 t},$$

$$dy = \frac{\cos t\cdot du + u\sin t\cdot dt}{\cos^2 t};\quad y_x' = \frac{\cos t\cdot du + u\sin t\cdot dt}{\cos^2 t\cdot dt}\times$$

$$\times\cos^2 t = \cos t\cdot u_t' + u\sin t;\quad d(y_x') = -\sin t\cdot dt\cdot u_t' +$$

$$+\cos t\cdot d(u_t') + du\sin t + u\cos t\cdot dt = -\sin t\cdot u_t' dt +$$

$$+\cos t\cdot u''_{t^2}dt + \sin t u_t'\cdot dt + u\cos t\cdot dt;$$

$$y''_{x^2} = \frac{d(y_x')}{dx} = \frac{(-\sin t\cdot u_t' dt + \cos t\cdot u''_{t^2}dt + \sin t\cdot u_t' dt + u\cos t dt)\cos^2 t}{dt} =$$

$$= \cos^3 t\,(u''_{t^2} + u).$$

Подставляя выражения для y и y'' в исходное выражение, получаем

$$(1+\operatorname{tg}^2 t)\,(u''_{t^2}+u)\cos^3 t - \frac{u}{\cos t} = \frac{u''\cos^2 t - u\sin^2 t}{\cos t}.$$

Пример 3. В выражении $2y''+(x+y)(1-y')^3$, $y=y(x)$ перейдем к функции $v(u)$, если $x=u+v$, $y=v-u$.

Решение. Имеем $dx=du+dv=du(1+v_u')$;

$$dy=dv-du=(v_u'-1)\,du;\quad y_x'=\frac{dy}{dx}=\frac{v_u'-1}{v_u'+1};$$

$$dy_x'=\frac{d(v')(v'+1)-d(v')(v'-1)}{(v'+1)^2}=\frac{2dv'}{(v'+1)^2},$$

$$y_{x^2}''=\frac{d(y_x')}{dx}=\frac{2dv'}{(v'+1)^2\,du\,(1+v')}=\frac{2v_{u^2}''}{(1+v')^3}.$$

Подставляя выражения для x, y, y', y'' в исходное выражение, получаем

$$\frac{4v_{u^2}''}{(1+v_u')^3}+2v\left(1-\frac{v_u'-1}{v_u'+1}\right)^3=\frac{4v_{u^2}''+4v}{(1+v_u')^3}.$$

§ 3. ПРИЛОЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Касательные и нормали к кривым

Пусть L — непрерывная кривая и точка M_0 лежит на L. Пусть l_M — полупрямая, выходящая из M_0 и проходящая через несовпадающую с M_0 точку M, лежащую на L. Рассмотрим множество полупрямых l_M, когда точки M лежат на L по одну сторону от M_0. Если существует полупрямая l_0, выходящая из точки M, такая, что угол между l_0 и l_M стремится к нулю, когда $M\to M_0$, то полупрямая l_0 называется *односторонней полукасательной* к L в точке M_0. Если в точке M_0 существуют односторонние полукасательные к L как с одной, так и с другой стороны и угол между ними равен π (т. е. эти две полупрямые сливаются в прямую), то эта прямая называется *касательной к кривой* L в точке M_0.

Если кривая L на плоскости является графиком непрерывной функции $y=y(x)$, то дифференцируемость y в точке x_0 эквивалентна существованию невертикальной касательной в точке $M_0(x_0, y(x_0))$ кривой и уравнение $y-y_0=y'(x_0)(x-x_0)$ является уравнением этой касательной.

Если функция y непрерывна в точке x_0 и $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{y(x)-y(x_0)}{x-x_0}=+\infty$ (или $-\infty$), то в точке $M_0(x_0, y(x_0))$ соответствующая кривая имеет вертикальную касательную, уравнение которой есть $x=x_0$. Локальное поведение кривой в окрестности такой точки показано на рис. 29, *а* и *б*.

Если в точке x_0 непрерывная функция y не дифференцируема, однако существуют $y'_+(x_0)$ и $y'_-(x_0)$, то соответствующая кривая имеет в точке $M_0(x_0, y(x_0))$ односторонние полукасательные: ле-

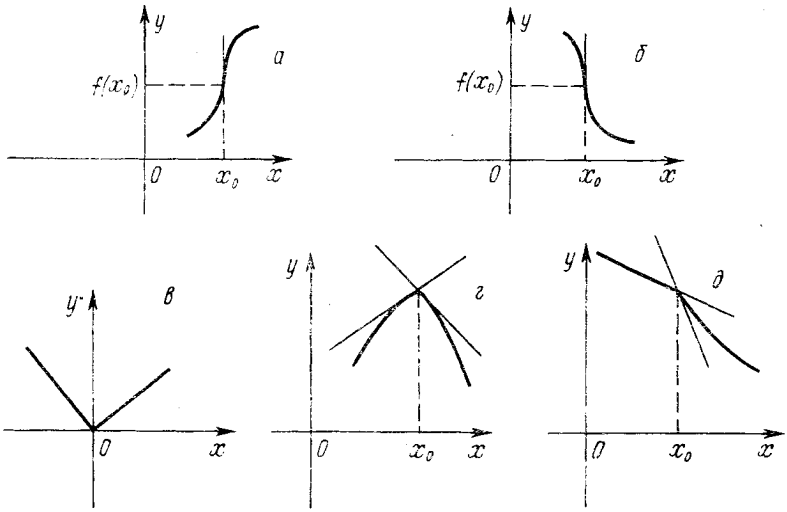

Рис. 29

вую — полупрямую $y-y_0=y'_-(x_0)(x-x_0)$, $x\leqslant x_0$ и правую — полупрямую $y-y_0=y'_+(x_0)(x-x_0)$, $x\geqslant x_0$. Тогда точка x_0 называется *точкой излома* или *угловой точкой кривой* (см. рис. 29 *в*, *г*, *д*).

Если функция y непрерывна в точке x_0 и $\lim\limits_{x\to x_0+}\frac{y(x)-y(x_0)}{x-x_0}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0-}\frac{y(x)-y(x_0)}{x-x_0}=-\infty$ $\left(\lim\limits_{x\to x_0+}\frac{y(x)-y(x_0)}{x-x_0}=-\infty,\ \lim\limits_{x\to x_0-}\frac{y(x)-y(x_0)}{x-x_0}=+\infty\right)$, то соответствующая кривая в точке $M_0(x_0,\ y(x_0))$ имеет левую и правую полукасательные, каждая из которых является вертикальной полупрямой, направленной вверх: $x=x_0$, $y\geqslant y_0$ (вниз: $x=x_0$, $y\leqslant y_0$). Точка кривой, в которой односторонние полукасательные являются одинаково направленными полупрямыми, называется *точкой возврата*. Поведение кривой в окрестности такой точки показано на рис. 30, *а*, *б*, *в*. Отметим, что для графика непрерывной функции возможен только один из вариантов: а) или б).

Если две кривые имеют общую точку M_0 и в этой точке каждая из этих кривых имеет касательную, то углом между этими кривыми называется угол между их касательными в точке M_0. Для краткости в дальнейшем вместо слов «кривая, являющаяся графиком функции $y=y(x)$», говорим «кривая $y=y(x)$».

Пример 1. Напишем уравнения касательных к кривой $y=x2^{-x}$ в точках с абсциссами: а) $x=0$, б) $x=-1$.

Решение. Имеем $y(0)=0$, $y(-1)=-2$, $y_x'=2^{-x}-x2^{-x}\ln 2=2^{-x}(1-x\ln 2)$, $y'(0)=1$, $y'(-1)=2(1+\ln 2)$.

Следовательно, уравнения касательных соответственно будут: а) $y=x$, б) $y+2=2(1+\ln 2)\ (x+1)$ (см. рис. 31).

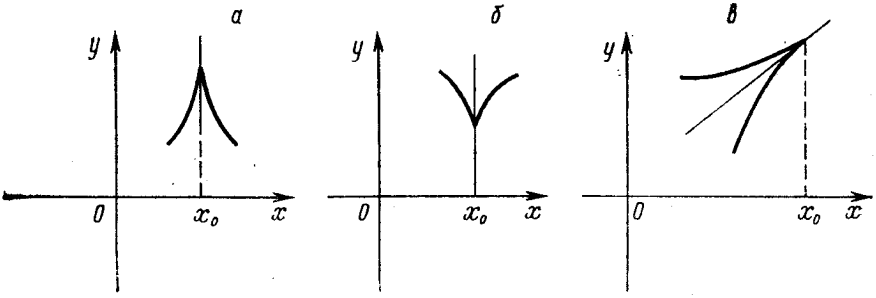

Рис. 30

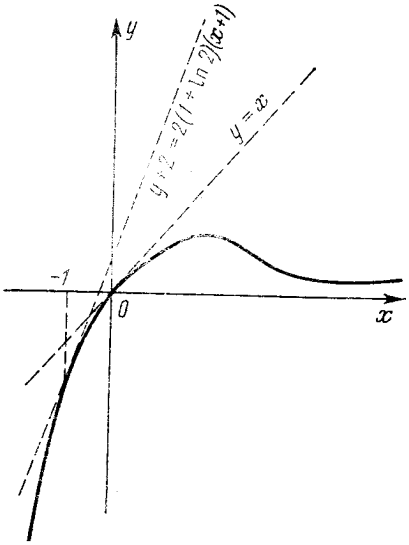

Рис. 31

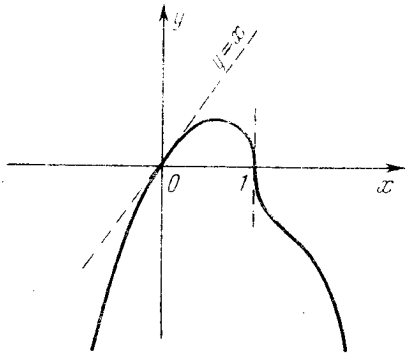

Рис. 32

Пример 2. Напишем уравнения касательных к кривой $y=x\sqrt[3]{(1-x)}$ в точках с абсциссами: а) $x=0$; б) $x=1$; в) $x=9$.

Решение. Имеем $y(0)=0$, $y(1)=0$, $y(9)=-18$,

$$y'=(1-x)^{1/3}-x\cdot\frac{1}{3}(1-x)^{-2/3}=\frac{1}{3}(1-x)^{-2/3}(3-4x), \qquad (3)$$

$$y'(0)=1,\ y'(9)=-\frac{11}{4}.$$

Следовательно, уравнения касательных будут в случаях а) и в) соответственно $y=x$ и $y+18=-\frac{11}{4}(x-9)$; в случае б) при $x=$

$=1$ формула (3) теряет смысл. В данном случае можно непосредственно вычислить, что

$$\lim_{x\to 1}\frac{y(x)-y(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x}{-\sqrt[3]{(1-x)^2}}=-\infty.$$

Заметим, что проще использовать утверждение: если $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)=\infty$, то $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0))/(x-x_0)=\infty$ (соответственно $+\infty$ или $-\infty$). Таким образом, в точке (1, 0) непрерывная кривая $y=x\sqrt[3]{1-x}$ имеет вертикальную касательную $x=1$ (см. рис. 32).

Пример 3. Напишем уравнения касательных к кривой $x=2\cos t-\cos 2t$, $y=2\sin t-\sin 2t$ в точках:

а) $t=\pi/2$; б) $t=\pi$; в) $t=3\pi/2$.

Решение. Имеем

$$t=\pi/2\Rightarrow x=1,\ y=2;\ t=\pi\Rightarrow x=-3,\ y=0;$$

$$t=3\pi/2\Rightarrow x=1,\ y=-2;$$

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{\sin\frac{3t}{2}\sin\frac{t}{2}}{\cos\frac{3t}{2}\sin\frac{t}{2}}=\operatorname{tg}\frac{3t}{2};\ y'_x|_{t=\pi/2}=-1;\ y'_x|_{t=3\pi/2}=1.$$

Следовательно, уравнения касательных будут в случаях а) и в) соответственно $y-2=-(x-1)$ и $y+2=x-1$; б) в точке $t=\pi$ ($x=-3$, $y=0$) функция y_x' не определена.

Рассмотрим кривую в окрестности точки $x=-3$. Параметрическую связь x и y можно рассматривать и как определение функции $y(x)$, и как определение функции $x(y)$. Так как в окрестности точки $t=\pi$ имеем $y_t'<0$, то в этой окрестности x есть непрерывная однозначная функция y и $x_y'=x_t'/y_t'=\operatorname{ctg}(3t/2)$, т. е. уравнение касательной к графику этой функции в точке $y=0$, $x=-3$ есть $x+3=0\cdot y$ или $x=-3$ — касательная параллельна оси OY. Если же рассматривать функцию $y(x)$, то точка $x=-3$, $y=0$ является общей точкой графиков двух однозначных непрерывных функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$, соответствующих участкам монотонного изменения $x(t)$: при $t\in(\pi/3,\pi)$ x убывает от 3/2 до -3, при $t\in(\pi, 5\pi/3)$ x возрастает от -3 до 3/2. Так как $x\geqslant -3$, то обе ветви $y_1(x)$ и $y_2(x)$ кривой $x=x(t)$, $y=y(t)$ лежат справа от прямой $x=-3$, и в этой точке можно говорить только об односторонних полукасательных к каждой из ветвей. Имеем

$$\lim_{x\to -3+} y_1'(x)=\lim_{t\to\pi-}\operatorname{tg}\frac{3t}{2}=+\infty,\quad \lim_{x\to -3+} y_2'(x)=\lim_{t\to\pi+}\operatorname{tg}\frac{3t}{2}=-\infty.$$

Отсюда, рассматривая кривую в целом, видим, что полукасательная «сверху» в точке (—3, 0) является вертикальной полупрямой, направленной вверх: $x=-3$, $y\geqslant 0$; полукасательная «снизу» —

вертикальной полупрямой, направленной вниз: $x=-3$, $y\leqslant 0$. Так как угол между этими полупрямыми равен π, то кривая в точке имеет вертикальную касательную $x=-3$ (см. рис. 33).

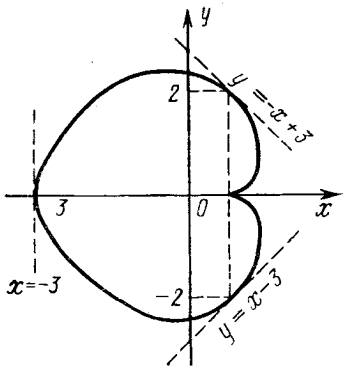

Рис. 33

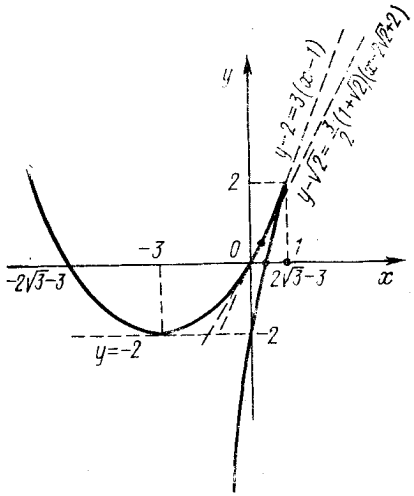

Рис. 34

Пример 4. Напишем уравнения касательных к кривой $x=2t-t^2$, $y=3t-t^3$ в точках а) $t=-1$; б) $t=1$; в) $t=\sqrt{2}$.

Решение. Имеем $t=-1\Rightarrow x=-3$, $y=-2$; $t=1\Rightarrow x=1$, $y=2$; $t=\sqrt{2}\Rightarrow x=2\sqrt{2}-2$; $y=\sqrt{2}$;

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{3(1-t^2)}{2(1-t)}=\frac{3}{2}(1+t),\ t\neq 1;$$

$$y'_x|_{t=-1}=0,\ y'_x|_{t=\sqrt{2}}=\frac{3}{2}(1+\sqrt{2}).$$

Следовательно, уравнения касательных будут в случаях а) и в) соответственно $y+2=0$ и $y-\sqrt{2}=\frac{3}{2}(1+\sqrt{2})(x-2\sqrt{2}+2)$; случае б) в точке $t=1$ функция $\frac{3(1-t^2)}{2(1-t)}$ не определена. В отличие от предыдущего примера при $t=1$ и $y_t'=0$, и $x_t'=0$. Поэтому нельзя утверждать, что в окрестности точки (1, 2) переменная y является однозначной функцией x или переменная x является однозначной функцией y. Функция $x(t)$ имеет два участка монотонности: на $(-\infty, 1]$ она возрастает от $-\infty$ до 1, на $[1, +\infty)$ — убывает от 1 до $(-\infty)$. Соответственно имеем две однозначные непрерывные ветви рассматриваемой кривой $y_1(x)$ и $y_2(x)$ каждая с областью определения $x\leqslant 1$. Точка $M_0(1, 2)$ — общая для них. Так

как $x \leqslant 1$, то можно определить только односторонние полукасательные к каждой из ветвей в точке M_0. Имеем

$$\lim_{x\to 1-} \frac{y_1(x)-2}{x-1} = \lim_{x\to 1-} y_1'(x) = \lim_{x\to 1-} \frac{3}{2}(1+t) = 3;$$

$$\lim_{x\to 1-} \frac{y_2(x)-2}{x-1} = \lim_{x\to 1-} y_2'(x) = \lim_{x\to 1-} \frac{3}{2}(1+t) = 3.$$

Итак, полупрямая $y-2=3(x-1)$, $x \leqslant 1$, является общей полукасательной для обеих ветвей рассматриваемой кривой в точке (1; 2). Точка (1; 2) — точка возврата (см. рис. 34).

Пример 5. Напишем уравнения касательных к кривой $xy(x+y)+x^2=2y^2$ в точках с абсциссами а) $x=4$; б) $x=0$.

Решение. Из данного уравнения получаем

$$y = \frac{x^2 \pm \sqrt{x^4+8x^2-4x^3}}{4-2x},$$

т. е. кривая состоит из двух ветвей

$$y_1 = \frac{x^2+\sqrt{x^4+8x^2-4x^3}}{4-2x} \quad \text{и} \quad y_2 = \frac{x^2-\sqrt{x^4+8x^2-4x^3}}{4-2x}.$$

Таким образом, значение $x=4$ определяет две точки, лежащие соответственно на двух ветвях кривой: $M_1(4, -2\sqrt{2}-4)$ и $M_2(4, 2\sqrt{2}-4)$, а при $x=0$ имеем $y_1=y_2=0$, т. е. точка $M_0(0, 0)$ является общей для обеих ветвей. Пользуясь правилом дифференцирования неявной функции, находим, что

$$2xy + x^2y' + 2yy'x + y^2 + 2x = 4yy', \tag{3}$$

откуда $y' = \dfrac{2xy+y^2+2x}{4y-x^2-2xy}$. Угловые коэффициенты касательной в точке M_1 и в точке M_2 равны нулю, и уравнения соответствующих касательных есть $y=2\sqrt{2}-4$ и $y=-2\sqrt{2}-4$. В точке $M_0(0, 0)$ уравнение (3) вырождается — превращается в тождество $0=0$. Найти касательную к каждой из ветвей в этой точке можно, например, дифференцируя каждую из явных функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$, однако сделаем это другим способом, поскольку часто уравнения ветвей неявно заданной функции не выражаются аналитически в явном виде $y=y(x)$ или $x=x(y)$.

В некоторых случаях удается разделить ветви кривой, заданной уравнением $F(x, y)=0$, введением параметра. Так, для нашей кривой введем параметр $t=\dfrac{y}{x}$, тогда параметр t и переменная x связаны уравнением $tx^2(x+tx)+x^2=2t^2x^2$, откуда $x = \dfrac{2t^2-1}{t(1+t)}$. Точке $M_0(0, 0)$ соответствуют два значения параметра $t=1/\sqrt{2}$ и $t=-1/\sqrt{2}$. Легко проверить, что функция $x(t)$ строго монотонна

как в окрестности точки $t=1/\sqrt{2}$, так и в окрестности точки $t=-1/\sqrt{2}$. Так что действительно при изменении t в соответствующей окрестности этих точек мы получаем две различные ветви нашей кривой. Имеем

$$y'_x(0)=\lim_{x\to 0}\frac{y-y(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{y}{x}=\lim_{x\to 0}t.$$

Поскольку условие $x\to 0$ на одной из ветвей эквивалентно условию $t\to 1/\sqrt{2}$, а на другой — условию $t\to -1/\sqrt{2}$, то касательная к одной из ветвей в точке (0, 0) имеет уравнение $y=x/\sqrt{2}$, а к другой — $y=-x/\sqrt{2}$. Отметим, что особая точка $M_0(0, 0)$ кривой $xy(x+y)+x^2=2y^2$ представляет собой точку пересечения двух ее гладких ветвей, образующих между собой угол $\alpha=\operatorname{arctg} 2\sqrt{2}$.

Пример 6. Найдем угол, под которым пересекаются кривые

$$x^2+y^2=12x \text{ и } y=\sqrt[3]{(x-6)^2}.$$

Решение. Чтобы найти точку пересечения кривых, надо решить уравнение $(x-6)^2+\sqrt[3]{(x-6)^4}=36$. Положим $(x-6)^2=z^3$, тогда $z^3+z^2=36$. Так как $z^3+z^2-36=(z-3)(z^2+4z+12)$, то уравнение имеет единственный корень $z=3$, откуда $x=6\pm\sqrt{27}$. Итак, точками пересечения кривых являются точки $M_1(6+\sqrt{27}, 9)$ и $M_2(6-\sqrt{27}, 9)$. Для первой кривой имеем $2x+2yy'=12$, откуда $y'=(6-x)/y$. Следовательно, угловые коэффициенты касательных к ней в точке M_1 есть $-\sqrt{3}/3$, а в точке M_2 есть $\sqrt{3}/3$. Для второй кривой $y'=2(x-6)^{1/3}/3$, следовательно, в точке M_1 угловой коэффициент касательной есть $2/3\sqrt{3}$, а в точке M_2 есть $-2/3\sqrt{3}$. Углы, под которыми пересекаются кривые в точках M_1 и M_2, одинаковы и равны

$$\operatorname{arctg}\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{2}{3\sqrt{3}}}{1-\frac{2}{9}}=\operatorname{arctg}\frac{5\sqrt{3}}{7} \text{ (см. рис. 35).}$$

Пример 7. Найдем угол между левой и правой полукасательными к кривой $y=\arcsin\frac{2x}{1+x^2}$ в угловой точке (см. стр. 104).

Решение. Имеем

$$y'=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}}\cdot\frac{2+2x^2-4x^2}{(1+x^2)^2}=\frac{2(1-x^2)}{\sqrt{(1-x^2)^2(1+x^2)}}\ (|x|\neq 1).$$

Следовательно, угловыми точками могут быть только точки $M_1(1, \pi/2)$ и $M_2(-1, -\pi/2)$. Имеем

$$y'_+(1) = \lim_{x\to 1+} y'_x = \lim_{x\to 1+} \frac{-2}{1+x^2} = -1; \quad y'_-(1) = \lim_{x\to 1-} y'_x = 1.$$

Угловые коэффициенты левой и правой полукасательных в точке M_1 равны 1 и -1, угол между ними равен $\pi/2$. Так как функция

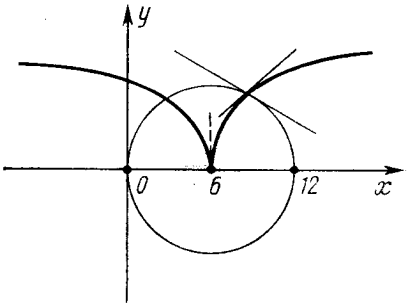

Рис. 35

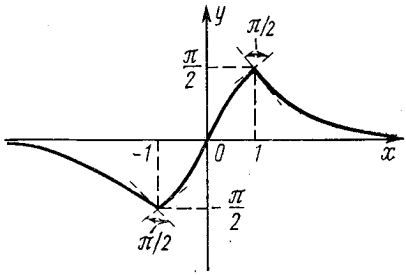

Рис. 36

$y(x)$ нечетная, то кривая симметрична относительно начала координат и угол между левой и правой полукасательными в точке M_2 также равен $\pi/2$ (см. рис. 36).

Возрастание и убывание функции

Определение. Пусть функция f определена на интервале (a, b). Если произведение $(f(x_1)-f(x_2))(x_1-x_2)$ не меняет знака на (a, b), то говорят, что функция f *монотонна* на (a, b). Если $(f(x_1)-f(x_2))(x_1-x_2)>0$ $((f(x_1)-f(x_2))(x_1-x_2)<0)$ для любых $x_1, x_2, x_1\neq x_2$, из (a, b), то f *строго возрастает* (*строго убывает*) на (a, b), если же это произведение обращается в нуль для несовпадающих x_1, x_2, то говорят, что монотонность нестрогая.

Если монотонная на (a, b) функция дифференцируема на (a, b), то ее производная не меняет знака на (a, b). Если f дифференцируема на (a, b) и $f'(x)>0$ $(f'(x)<0)$ для всех $x\in(a, b)$, исключая, быть может, конечное множество (на котором $f'(x)=0$), то f строго возрастает (строго убывает) на (a, b).

Определение. Функция f, заданная на (a, b), имеет в точке $x_0\in(a, b)$ локальный экстремум, если существует такая окрестность $U(x_0)\in(a, b)$, что разность $f(x)-f(x_0)$ не меняет знака для $x\in U(x_0)$.

Если $f(x)-f(x_0)\leqslant 0$ для любого $x\in U(x_0)$, то точка x_0 называется *точкой максимума*; если $f(x)-f(x_0)\geqslant 0$ для любого $x\in U(x_0)$, то x_0 называется *точкой минимума*. Заметим, что точка

локального экстремума обязательно есть внутренняя точка области определения функции.

Точки, в которых $f(x)$ определена, а $f'(x)$ равна нулю или не существует, называем критическими точками f. Всякая точка локального экстремума является критической точкой, но, как показано ниже на примерах, не всякая критическая точка есть точка экстремума.

Достаточные условия локального экстремума

1. Пусть функция $f(x)$ непрерывна в некоторой окрестности критической точки x_0 и дифференцируема в ее проколотой окрестности, причем $f'(x)$ в левой $(U_-(x_0))$ и правой $(U_+(x_0))$ полуокрестностях сохраняет знак. Тогда если $f'(x)>0$ для $x\in U_-(x_0)$, а $f'(x)<0$ для $x\in U_+(x_0)$, то точка x_0 есть точка максимума; если $f'(x)<0$ для $x\in U_-(x_0)$ и $f'(x)>0$ для $x\in U_+(x_0)$, то точка x_0 — точка минимума. Требование непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 существенно.

Пример 8. Пусть

$$f(x)=\begin{cases} 1+x, & x<0; \\ 0, & x=0; \\ -1-x, & x>0, \end{cases}$$

тогда $f'(x)=1$ при $x<0$ и $f'(x)=-1$ при $x>0$, т. е. при переходе через точку $x=0$ производная меняет знак, но точка $x=0$ не является точкой локального экстремума.

2. Пусть f имеет в точке x_0 производную порядка n, $f'(x_0)=f''(x_0)=\ldots=f^{(n-1)}(x_0)=0$ и $f^{(n)}(x_0)\neq 0$. Если n — четное и $f^{(n)}(x_0)>0$, то x_0 — точка минимума; если $f^{(n)}(x_0)<0$, то x_0 — точка максимума; если n — нечетное, то критическая точка x_0 не будет точкой экстремума.

Если функция f рассматривается на отрезке $[a, b]$ или луче $[a, +\infty)$, то кроме локальных экстремумов f может иметь краевой экстремум: точка a (точка b) является точкой краевого экстремума, если существует такая ее правая (левая) полуокрестность, в которой разность $f(x)-f(a)$ $(f(x)-f(b))$ не меняет знака.

Пример 9. Найдем точки экстремума и промежутки монотонности функции

$$y(x)=\frac{1+\sqrt{x+1}}{x+2}+\operatorname{arctg}\sqrt{x+1}.$$

Решение. Имеем

$$y'(x)=\frac{1-\sqrt{x+1}}{(x+2)^2\sqrt{x+1}}\quad (x>-1).$$

Функция $y(x)$ определена и непрерывна на луче $x\geqslant -1$, а функция $y'(x)$ — на луче $x>-1$; $y'(x)>0$ для $-1<x<0$, $y'(0)=0$,

$y'(x)<0$ для $x>0$. Итак, на интервале $-1<x<0$ функция $y(x)$ возрастает, на луче $x>0$ — убывает, $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)=\frac{\pi}{2}$; в точке $x=-1$ — краевой минимум $y(-1)=1$, в точке $x=0$ — локальный и абсолютный максимум $y(0)=1+\pi/4$.

Пример 10. Найдем точки экстремума и промежутки монотонности функции $y(x)=x^3\cdot\sqrt[3]{x^2-1}$.

Решение. Имеем

$$y'(x)=\frac{x^2(11x^2-9)}{3\sqrt[3]{(1-x^2)^2}}.$$

Точки $x=0$, $x=1$, $x=-1$, $x=\frac{3}{\sqrt{11}}$, $x=-\frac{3}{\sqrt{11}}$ являются критическими точками данной непрерывной функции. Функция $y'(x)$ меняет знак только в точках $x_1=-3/\sqrt{11}$ и $x_2=3/\sqrt{11}$, причем $y'(x)>0$ для $x<-3/\sqrt{11}$, $y'(x)<0$ для $-3/\sqrt{11}<x<3/\sqrt{11}$, $y'(x)>0$ для $x>3/\sqrt{11}$. Таким образом, функция $y(x)$ возрастает на промежутках $(-\infty, -3/\sqrt{11})$, убывает на $(-3/\sqrt{11}, 3/\sqrt{11})$, возрастает на $(3/\sqrt{11}, +\infty)$, в точке $x_1=-3/\sqrt{11}$ имеет локальный максимум, в точке $x_2=3/\sqrt{11}$ — локальный минимум. Критические точки $x=-1$, $x=0$, $x=1$ не являются точками локального экстремума.

Пример 11. Покажем, что функция $y(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ строго возрастает при $x>0$.

Решение. Имеем

$$y'(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\left(\ln\frac{x+1}{x}-\frac{1}{x+1}\right).$$

Так как $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x>0$ для $x>0$, то знак $y'(x)$ совпадает со знаком функции $g(x)=\ln\frac{x+1}{x}-\frac{1}{x+1}$. Имеем $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$, $g'(x)=\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{x(x+1)}<0$, $x>0$. Итак, функция $g(x)$ стремится к нулю при $x\to+\infty$, монотонно убывая, следовательно, для всех $x>0$ функция $g(x)>0$ и, значит, $y'(x)>0$, $x>0$. Откуда вытекает, что $y(x)$ строго возрастает при $x>0$.

Пример 12. Доказать неравенство $1+2\ln x\leqslant x^2$ для $x>0$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x)=x^2-2\ln x-1$. Имеем $f(1)=0$, $f'=\frac{2(x^2-1)}{x}$. Для $x>1$ имеем $f'(x)>0$, а для $0<x<1$ имеем $f'(x)<0$. Таким образом, $f(x)$ на интервале $(0, 1)$ убывает, на интервале $(1, +\infty)$ возрастает, и так как $f(x)$ непрерывна при $x=1$, то точка $x=1$ является точкой минимума. Следовательно, для $x>0$ $f(x)=x^2-2\ln x-1\geqslant f(1)=0$, откуда и вытекает неравенство $x^2\geqslant 1+2\ln x$, $x>0$.

Пусть непрерывная функция f задана на отрезке $[a, b]$. Тогда на отрезке $[a, b]$ существуют точки x_1 и x_2 такие, что

$$f(x_1) = \max_{x \in [a,b]} f(x) \text{ и } f(x_2) = \min_{x \in [a,b]} f(x).$$

Если хотя бы одна из этих точек лежит внутри отрезка, т. е. на интервале (a, b), то в этой точке функция f имеет локальный экстремум. Таким образом, точки x_1 и x_2 входят в множество, состоящее из всех точек локального экстремума функции f на (a, b) и концевых точек $x=a$ и $x=b$.

В свою очередь это множество есть подмножество множества, состоящего из точек $x=a$, $x=b$ и всех критических точек функции f на (a, b). Сравнивая значения функции f во всех точках этого множества (т. е. в концевых и критических точках), находим $\max\limits_{x \in [a,b]} f(x)$ и $\min\limits_{x \in [a,b]} f(x)$.

Пример 13. Найдем $\max\limits_{x \in [-4,4]} f(x)$ и $\min\limits_{x \in [-4,4]} f(x)$, если $f(x) = x^3+3x^2-9x+5$.

Решение. Так как функция $f(x)$ дифференцируема на всей прямой, то критические точки данной функции есть те точки, где $f'(x)=0$. Поскольку $f'(x)=3x^2+6x-9$ и $f'(x)=0$ при $x=-3$ и $x=1$, то критические точки есть $x_1=-3$ и $x_2=1$. Эти точки принадлежат отрезку $[-4, 4]$. Следовательно, надо сравнить значение функции в точках $x_0=-4$, $x_1=-3$, $x_2=1$ и $x_3=4$. Поскольку $f(-4)=25$; $f(-3)=32$, $f(1)=0$ и $f(4)=81$, то $\max\limits_{[-4,4]} f(x)=f(4)=81$, $\min\limits_{[-4,4]} f(x)=f(-1)=0$.

Пример 14. Найдем $\max\limits_{[-2,3]} f(x)$ и $\min\limits_{[-2,3]} f(x)$, если $f(x)=|3x^4-16x^3+24x^2-43|$.

Решение. Функция $f(x)$ может быть недифференцируема в тех точках, где $3x^4-16x^3+24x^2-43=0$. Имеем $3x^4-16x^3+24x^2-43=(x+1)(3x^3-19x^2+43x-43)$. Положим $g(x)=3x^3-19x^2+43x-43$. Тогда $g'(x)=9x^2-38x+43>0$ для всех x, т. е. $g(x)$ монотонно возрастает, и так как $g(3)=-4$, то $g(x)<0$ для всех $x \in [-2, 3]$. Следовательно, $x=-1$ единственная возможная точка недифференцируемости $f(x)$ на $[-2, 3]$. Для $x<-1$ имеем $f'(x)=12x(x-2)^2$, для $x>-1$ имеем $f'(x)=-12x(x-2)^2$, следовательно, критическими точками $f(x)$ на отрезке $[-2, 3]$ будут точки $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=2$. Вычисляя значения $f(x)$ для $x_0=-2$, $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=2$, $x_4=3$, получаем $f(-2)=229$, $f(-1)=0$, $f(0)=43$, $f(2)=27$, $f(3)=16$, т. е.

$$\max_{[-2,3]} f(x)=f(-2)=229, \quad \min_{[-2,3]} f(x)=f(-1)=0.$$

Формула Тейлора, правило Лопиталя

Пусть функция f в некотором интервале (a, b) имеет n производных. Тогда для любой точки $x_0 \in (a, b)$ можно написать *мно-*

гочлен Тейлора $T_n(f, x_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$. Разность $R_n(f, x_0) = f(x) - T_n(f, x_0)$ называется *остаточным членом формулы Тейлора* $f(x) = T_n(f, x_0) + R_n(f, x_0)$.

При данных условиях, налагаемых на функцию f, $R_n(f, x_0) = o(x-x_0)^n (x \to x_0)$ и R_n называется *остаточным членом в форме Пеано*. Если потребовать, что на (a, b) существует $f^{(n+1)}(x)$, то для любого x из (a, b) $R_n(f, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, где ξ — некоторая точка интервала (x_0, x), и R_n называется *остаточным членом в форме Лагранжа*.

Использование формулы Тейлора с остаточным членом в форме Пеано для выделения главной части функции f в окрестности некоторой точки и для вычисления пределов было подробно рассмотрено выше. Выражение R_n в форме Пеано в отличие от R_n в форме Лагранжа позволяет оценить величину погрешности, допускаемой при замене функции f многочленом $T_n(x)$ на некотором промежутке.

Пример 15. Оценим погрешность при замене функции $f(x) = \operatorname{arctg} x$ многочленом Тейлора $T_5(f, 1)$ на отрезке $[1/2, 3/2]$.

Решение. Поскольку

$$f'_x = \frac{1}{1+x^2}, \quad f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x^2)^{n/2}} \sin(n \operatorname{arcctg} x), \quad n \geqslant 2$$

(это можно показать, используя тождество

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i}\right)),$$

то

$$T_5(f, 1) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2 + \frac{1}{12}(x-1)^3 - \frac{1}{40}(x-1)^5$$

и

$$f(x) - T_5(f, 1) = R_5(f, 1) = \frac{f^{(6)}(\xi)(x-1)^6}{6!}.$$

Так как точка ξ лежит между x и 1, $|x-1| < 1/2$ и $|\sin(n \operatorname{arcctg} \xi)| \leqslant 1$, то

$$|R_5(f, 1)| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^6 \cdot \frac{1}{6!} \cdot \frac{5!}{(1+\xi^2)^3} \leqslant \frac{1}{2^6 \cdot 6} \cdot \frac{4^3}{5^3} = \frac{1}{6 \cdot 5^3} = \frac{1}{750}.$$

Итак, многочлен

$$\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2 + \frac{1}{12}(x-1)^3 - \frac{1}{40}(x-1)^5$$

приближает функцию $\operatorname{arctg} x$ для всех $x \in [1/2, 3/2]$ с погрешностью не более чем 1/750.

Правило Лопиталя. Пусть функции f и g определены и дифференцируемы в некоторой правой полуокрестности точки $a: U_+(a) = \{x : a < x < a+\delta\}$, $\delta > 0$, причем $g'(x) \neq 0$, $x \in U_+(a)$ и $\lim\limits_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$. Тогда, если

1) $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = \lim\limits_{x \to a+} g(x) = 0$

или

2) $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = \lim\limits_{x \to a+} g(x) = \infty$,

то

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

Правило верно и тогда, когда A есть один из символов ∞, $+\infty$, $-\infty$.

Аналогичное утверждение справедливо и для $\lim\limits_{x \to a-} \frac{f(x)}{g(x)}$ и для $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ (в первом случае функции f и g должны удовлетворять соответствующим условиям в некоторой левой полуокрестности точки a, во втором случае — в некоторой проколотой окрестности точки a).

Пример 16. Найдем

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \pi \operatorname{ctg} \pi x \right).$$

Решение. Чтобы иметь возможность применить правило Лопиталя, представим данную разность в виде отношения функций

$$\frac{1}{\ln x} - \pi \operatorname{ctg} \pi x = \frac{\sin \pi x - \pi \ln x \cdot \cos \pi x}{\ln x \cdot \sin \pi x} = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Функции $f(x) = \sin \pi x - \pi \ln x \cos \pi x$ и $g(x) = \ln x \cdot \sin \pi x$ удовлетворяют условиям применимости правила Лопиталя при x из окрестности $\dot{U}_{\frac{1}{2}}(1) = (1/2, 3/2) \setminus \{1\}$. Отношение производных $f'(x)/g'(x)$ равно

$$\frac{\pi \cos \pi x - \frac{\pi}{x} \cos \pi x + \pi^2 \ln x \cdot \sin \pi x}{\frac{1}{x} \sin \pi x + \pi \cos \pi x \cdot \ln x} =$$

$$= \frac{\pi x \cos \pi x - \pi \cos \pi x + \pi^2 x \ln x \sin \pi x}{\sin \pi x + \pi x \cos \pi x \cdot \ln x}.$$

Это отношение опять представляет собой неопределенность типа $\frac{0}{0}$. Применим правило Лопиталя к нему. Отношение производной числителя к производной знаменателя равно

$$\frac{\pi\cos\pi x-\pi^2x\sin\pi x+\pi^2\sin\pi x+\pi^2\ln x\cdot\sin\pi x+\pi^2\sin\pi x+\pi^3x\ln x\cos\pi x}{\pi\cos\pi x+\pi\cos\pi x\ln x+\pi\cos\pi x-\pi^2x\ln x\sin\pi x}.$$

Предел этого отношения при $x\to1$ равен 1/2. Следовательно,

$$\lim_{x\to1}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{1}{2}.$$

Таким образом,

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{\ln x}-\pi\operatorname{ctg}\pi x\right)=\lim_{x\to1}\frac{\sin\pi x-\pi\cos\pi x\cdot\ln x}{\sin\pi x\cdot\ln x}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\pi x\cos\pi x-\pi\cos\pi x+\pi^2x\ln x\cdot\sin\pi x}{\sin\pi x+\pi x\cos\pi x\cdot\ln x}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\pi\cos\pi x-\pi^2x\sin\pi x+\pi^2\sin\pi x+\pi^2\ln x\sin\pi x+\pi^2\sin\pi x+\pi^3x\ln x\cos\pi x}{\pi\cos\pi x+\pi\cos\pi x\ln x+\pi\cos\pi x-\pi^2x\ln x\ \sin\pi x}=$$

$$=\frac{1}{2}.$$

По смыслу эта цепочка равенства должна читаться с конца: так как предел последнего отношения существует, то существует и равен ему предел предпоследнего отношения и т. д.

Если же предел отношения производных не существует, то это ничего не говорит о существовании или несуществовании предела отношения функций. Приведем соответствующий пример.

Пусть

$$f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}+2\sin x \text{ и } g(x)=x.$$

Тогда

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to0}\left(x\sin\frac{1}{x}+2\frac{\sin x}{x}\right)=2,$$

а отношение $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ равно $\frac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}+2\cos x}{1}$ и не имеет предела при $x\to0$.

Применяя правило Лопиталя, необходимо также следить за тем, чтобы было выполнено либо условие 1), либо условие 2). Так, например, пусть

$$f(x)=\sin x+\cos x \text{ и } g(x)=x+2.$$

Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{1}{2},\quad \text{а}\quad \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\sin x}{1}=1.$$

(Здесь не выполнены ни условие $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$, ни условие $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} g(x)=\infty$.)

Исследование функций и построение кривых

Считаем, что исследовать функцию — это означает:

1) найти область определения;

2) отметить (если они есть) особенности функции (периодичность, четность и нечетность, сохранение знака), найти точки пересечения графика функции с осями координат;

3) если граничные точки области определения функции принадлежат ей, то найти значения функции в этих точках, в противном случае — выяснить поведение функции в окрестности этих точек (включая и несобственные точки $-\infty$ и $+\infty$);

4) найти наклонные асимптоты (вертикальные и горизонтальные определяются в пункте 3) или убедиться в их отсутствии;

5) найти участки возрастания и убывания функции, определить локальные и краевые экстремумы;

6) найти интервалы, на которых функция выпукла вверх или вниз, определить точки перегиба.

По результатам такого исследования функции строится ее график.

Пример 17. Исследуем функцию $y=\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$ и построим ее график.

Решение.

1) $x\neq 1$;

2) при $x=0$ $y=1$, при $x=-1$ $y=0$, при $x>-1$ $y>0$, при $x<-1$ $y<0$;

3) $\lim\limits_{x\to 1+} y(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 1-} y(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} y(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to -\infty} y(x)=-\infty$;

4) $k_+=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{y(x)}{x}=1$, $b_+=\lim\limits_{x\to +\infty}(y(x)-x)=5$,

$k_-=\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{y(x)}{x}=1$, $b_-=\lim\limits_{x\to -\infty}(y(x)-x)=5$;

5) $y'(x)=\frac{(x+1)^2(x-5)}{(x-1)^3}$, $x\neq 1$, $y'>0$ при $x<1$ и $x>5$; $y'<0$ при $1<x<5$;

6) $y''(x)=\frac{24(x+1)}{(x-1)^4}$, $x\neq 1$, $y''>0$ при $x>-1$, $x\neq 1$; $y''<0$ при $x<-1$.

Итак, функция $y(x)=\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$ определена на множестве $(-\infty, 1)\cup(1, +\infty)$. График ее пересекает ось OY в точке $(0, 1)$ и ось OX в точке $(-1, 0)$. Вертикальная асимптота $x=1$, наклонная асимптота $y=x+5$. На промежутках $x<1$ и $x>5$ функция возрастает, на промежутке $1<x<5$ убывает, в точке $\left(5, 13\frac{1}{2}\right)$ имеет локальный минимум. На промежутке $x<-1$ функция выпукла вверх, на промежутках $-1<x<1$ и $x>1$ — вниз, $(-1, 0)$ — точка перегиба. График данной функции представлен на рис. 37.

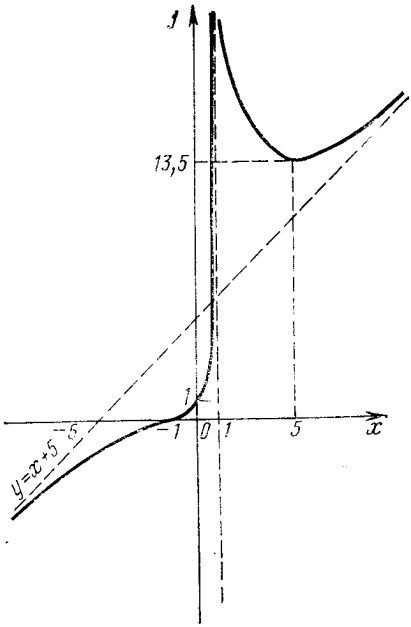

Рис. 37

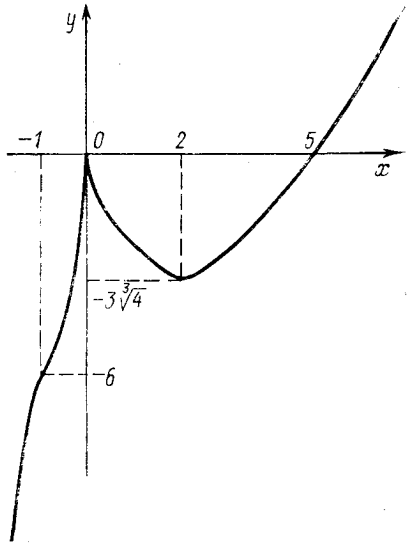

Рис. 38

Отметим, что $y'(-1)=0$, т. е. график функции имеет в этой точке горизонтальную касательную, точка $x=-1$ является критической, но локального экстремума у функции в этой точке нет.

Пример 18. Исследуем функцию $y=(x-5)\sqrt[3]{x^2}$ и построим ее график.

Решение. Имеем

1) $x\in R$;

2) $y=0$ при $x=0$ и $x=5$; $y>0$ при $x>5$; $y<0$ при $x<5$, $x\neq 0$;

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} y(x)=-\infty$;

4) $k_+ = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{y(x)}{x} = +\infty$, $k_- = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{y(x)}{x} = +\infty$;

5) $y'(x) = \frac{5x^{-1/3}(x-2)}{3}$, $x \neq 0$, $y'(x) > 0$ при $x < 0$ и $x > 2$; $y'(x) < 0$ при $0 < x < 2$;

6) $y''(x) = \frac{10}{9} x^{-\frac{4}{3}} (x+1)$, $x \neq 0$, $y''(x) > 0$ при $-1 < x < 0$ и $x > 0$; $y''(x) < 0$ при $x < -1$.

Итак, функция $y(x) = (x-5)\sqrt[3]{x^2}$ определена на всей числовой прямой. График ее пересекает ось OX в точках $x=0$ и $x=5$. Асимптот нет. На промежутках $-\infty < x < 0$ и $2 < x < +\infty$ функция возрастает, на промежутке $0 < x < 2$ — убывает, в точке (0, 0) имеет локальный максимум, в точке $(2, -3\sqrt[3]{4})$ — локальный минимум. На промежутках $-1 < x < 0$ и $0 < x < +\infty$ функция выпукла вниз, на промежутке $-\infty < x < -1$ — вверх. Точка $(-1, -6)$ — точка перегиба. Поскольку $f(x)$ непрерывна в нуле и

$$\lim_{x\to0+} \frac{y(x)-y(0)}{x-0} = \lim_{x\to0+} \frac{x-5}{\sqrt[3]{x}} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to0-} \frac{y(x)-y(0)}{x-0} = \lim_{x\to0-} \frac{x-5}{\sqrt[3]{x}} = +\infty,$$

то полупрямая $x=0$, $y \leqslant 0$ является и левой и правой полукасательной к графику функции в точке (0, 0). Следовательно, точка (0, 0) — точка возврата кривой. График данной функции представлен на рис. 38.

Пример 19. Исследуем и построим график кривой, заданной параметрически

$$x(t) = \frac{t^2}{t^2-1}, \quad y(t) = \frac{t^2}{t^3+1}.$$

Решение. Параметрические соотношения определяют функцию $y(x)$, однозначную и непрерывную на тех промежутках изменения параметра t, на которых функция $x(t)$ непрерывна и строго монотонна. Выделим такие промежутки. Имеем

$$x'_t = \frac{-2t}{(t^2-1)^2}, \quad y'_t = \frac{t(2-t^3)}{(t^3+1)^2}.$$

Графики функций $x(t)$ и $y(t)$ изображены на рис. 39, *а*, *б*. Функция $x(t)$ строго монотонна на четырех промежутках: $(-\infty, -1)$; $(-1, 0]$, $[0, 1)$, $(1, +\infty)$. Так как формальное дифференцирование на всех промежутках производится одинаково, то имеем при $t \neq 0$ и $t \neq -1$

$$y'_x = \frac{t(2-t^3)(t^2-1)^2}{(t^3+1)^2(-2t)} = \frac{(t^3-2)(t-1)^2}{2(t^2-t+1)^2},$$

$$y''_{x^2} = -\frac{(t^2-1)^3(t^3-3t^2+9t-8)}{4(t^2-t+1)^2} \quad t \neq 0,\ t \neq -1.$$

Пусть $t<-1$, тогда:

1) $x>1$ (см. рис. 39, *а*);

2) $y<0$ (см. рис. 39, *б*);

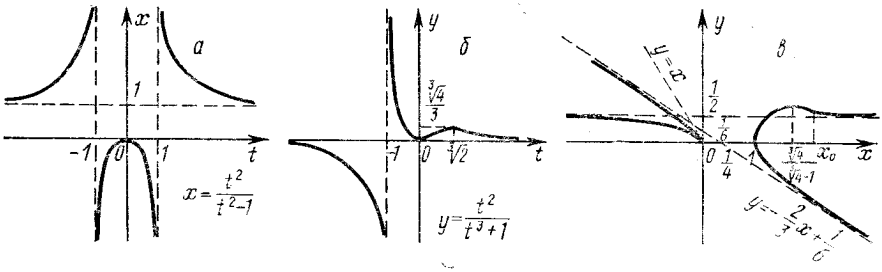

Рис. 39

3) условие $x \to 1+$ эквивалентно на промежутке $t<-1$ условию $t \to -\infty$, поэтому $\lim\limits_{x\to 1+} y(x) = \lim\limits_{t\to-\infty} y(t) = 0$; точно так же $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = \lim\limits_{t\to-1-} y(t) = -\infty$;

4) $k_+ = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim\limits_{t\to-1-} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim\limits_{t\to-1-} \frac{t-1}{t^2-t+1} = -\frac{2}{3}$;

$$b_+ = \lim_{x\to+\infty}\left(y(x)+\frac{2}{3}x\right) = \lim_{t\to-1-} \frac{t^2(2t-1)}{3(t-1)(t^2-t+1)} = \frac{1}{6};$$

5) так как $t<-1$, то $y_x'<0$;

6) обозначим через $g(t)$ многочлен t^3-3t^2+9t-8; так как $g(-1)=-21<0$ и $g'(t)=3t^2-6t+9>0$, то $g(t)<0$ для $t<-1$. Отсюда следует, что для $t<-1$ имеем $y''_{x^2}>0$. Итак, ветвь кривой, соответствующая изменению t на промежутке $(-\infty, -1)$, представляет график непрерывной, отрицательной, монотонно убывающей, выпуклой вниз на луче $x>1$ функции с асимптотой $y=-\frac{2}{3}x+\frac{1}{6}$ и краевым условием $\lim\limits_{x\to 1+} y(x)=0$.

Пусть $-1<t\leqslant 0$, тогда:

1) $x\leqslant 0$ (см. рис. 39, *а*);

2) $y\geqslant 0$ (см. рис. 39, *б*);

3) условие $x\to-\infty$ эквивалентно на промежутке $-1<t\leqslant 0$ условию $t\to-1+$, поэтому $\lim\limits_{x\to-\infty} y(x) = \lim\limits_{t\to-1+} y(t) = +\infty$, значению $x=0$ соответствует значение $t=0$, следовательно, значение y при $x=0$ равно 0;

4) $k_- = \lim\limits_{t\to-1+} \frac{y(t)}{x(t)} = -\frac{2}{3}$, $b_- = \lim\limits_{t\to-1+}\left(y(t)-\frac{2}{3}x(t)\right) = \frac{1}{6}$;

5) так как $-1<t<0$, то $y'_x<0$, $\lim\limits_{t\to 0-} y'_x = -1$;

6) $y_{x^2}<0$.

Итак, ветвь кривой, соответствующая изменению t на промежутке $-1<t\leqslant 0$, представляет график непрерывной, неотрицательной, монотонно убывающей, выпуклой вверх на луче $x\leqslant 0$ функции с асимптотой $y=-\frac{2}{3}x+\frac{1}{6}$ и краевым минимумом $x=0$, $y=0$, имеющей в точке (0, 0) левую полукасательную: луч $y=-x$, $x\leqslant 0$.

Пусть $0\leqslant t<1$, тогда:

1) $x\leqslant 0$ (см. рис. 39, *а*);

2) $y\geqslant 0$ (см. рис. 39, *б*);

3) условие $x\to-\infty$ эквивалентно на промежутке $0\leqslant t<1$ условию $t\to 1-$, поэтому $\lim\limits_{x\to-\infty} y(x)=\lim\limits_{t\to 1-} y(t)=\frac{1}{2}$. Значению $x=0$ соответствует значение $y=0$;

4) наклонных асимптот нет, так как при $x\to-\infty$ $y(x)$ не является бесконечно большой величиной;

5) так как $0\leqslant t<1$, то $y'_x<0$, $\lim\limits_{t\to 0} y'_x=-1$;

6) $y''_{x^2}<0$.

Итак, ветвь кривой, соответствующая изменению t на промежутке $0\leqslant t<1$, представляет график непрерывной, неотрицательной, монотонно убывающей, выпуклой вверх на луче $x\leqslant 0$ функции с асимптотой $y=1/2$ и с краевым минимумом $x=0$, $y=0$, имеющей в точке (0, 0) левую полукасательную — луч $y=-x$, $x\leqslant 0$.

Таким образом, точка (0, 0) является общей точкой двух ветвей кривой, которые подходят к ней слева и сверху, и обе эти ветви имеют в точке (0, 0) общую левую полукасательную: луч $y=-x$, $x\leqslant 0$. Точка (0, 0) является точкой возврата кривой.

Пусть $t>1$, тогда:

1) $x>1$ (см. рис. 39, *а*);

2) $y>0$ (см. рис. 39, *б*);

3) условие $x\to 1+$ эквивалентно на промежутке $t>1$ условию $t\to+\infty$, поэтому $\lim\limits_{x\to 1+} y(x)=\lim\limits_{t\to+\infty} y(t)=0$.

Аналогично $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)=\lim\limits_{t\to 1+} y(t)=\frac{1}{2}$;

4) наклонных асимптот нет;

5) $y'_x>0$ для $t>\sqrt[3]{2}$, т. е. для $1<x<\sqrt[3]{4}\,/\,(\sqrt[3]{4}-1)$; $y'_x<0$ для $1<t<\sqrt[3]{2}$, т. е. для $x>\sqrt[3]{4}\,/\,(\sqrt[3]{4}-1)$, точка $(\sqrt[3]{4}\,/\,(\sqrt[3]{4}-1);\ \sqrt[3]{4}/3)$ — точка локального максимума;

6) для многочлена $g(t)=t^3-3t^2+9t-8$ имеем $g(1)=-1<0$,

$$g(\sqrt[3]{2})=-3\sqrt[3]{4}+9\sqrt[3]{2}-6=-3(\sqrt[3]{2}-1)(\sqrt[3]{2}-2)>0,$$

$$g'(t)>0.$$

Следовательно, на промежутке $(1, \sqrt[3]{2})$ существует единственная точка t_0 такая, что $y''_{x^2}<0$ для $1<t<t_0$ и $y''_{x^2}>0$ для $t_0<t<\sqrt[3]{2}$.

Итак, ветвь кривой, соответствующая изменению t на промежутке $t>1$, представляет собой график непрерывной положительной на луче $x>1$ функции. Эта функция имеет горизонтальную асимптоту $y=1/2$ и краевое условие $\lim\limits_{x\to 1+} y(x)=0$. На промежутке $(1, \sqrt[3]{4}/(\sqrt[3]{4}-1))$ функция возрастает, на промежутке $(\sqrt[3]{4}/(\sqrt[3]{4}-1), +\infty)$ убывает, точка $(\sqrt[3]{4}/(\sqrt[3]{4}-1), \sqrt[3]{4}/3)$ — точка локального максимума. Существует точка $x_0=x(t_0)$, $x_0>\sqrt[3]{4}/(\sqrt[3]{4}-1)$ такая, что на промежутке $(1, x_0)$ функция выпукла вверх, на промежутке $(x_0, +\infty)$ выпукла вниз, точка $(x(t_0), y(t_0), t_0\in(1, \sqrt[3]{2}))$ — точка перегиба. Заметим еще, что при параметрическом задании кривой, если существуют пределы $\lim\limits_{t\to\infty} x(t)=a$, $\lim\limits_{t\to\infty} y(t)=b$, то точка (a, b) также считается принадлежащей этой кривой. Таким образом, в нашем случае точка $(1, 0)$ принадлежит кривой. Имеем $\lim\limits_{x\to 1+} y'_x=\lim\limits_{t\to -\infty} y'_x=-\infty$ для $t<-1$ и $\lim\limits_{x\to 1+} y'_x=\lim\limits_{t\to +\infty} y'_x=+\infty$ для $t>1$.

Таким образом, ветвь кривой, подходящая снизу к точке $(1, 0)$, в этой точке имеет правую полукасательную — луч $x=1$, $y\leqslant 0$; ветвь кривой, подходящая сверху к точке $(1, 0)$, имеет в этой точке правую полукасательную — луч $x=1$, $y\geqslant 0$. Угол между этими лучами равен π, следовательно, кривая имеет в точке $(1, 0)$ вертикальную касательную $x=1$. Объединяя все сказанное, строим кривую (см. рис. 39, *в*).

Задачи

Найти производную следующей функции:

1. $y=\dfrac{(x+\sqrt[3]{x})^2}{x^3}$.

2. $y=(3x-5)^6$.

3. $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{(3x+4)^2}}$.

4. $y=\sqrt[4]{(8x-3)^3}$.

5. $y=\dfrac{1-\sqrt[3]{1+x}}{x\sqrt{1-x}}$.

6. $y=\dfrac{1}{\sin^3 2x}$.

7. $y=x\ln(x+\sqrt{x^2+1})$.

8. $y=\ln\operatorname{tg}x+\dfrac{1}{2}\operatorname{ctg}2x$.

9. $y=e^{3x}\cdot(x+3)$.

10. $y=e^{-x}(\cos x+\sin x)$.

11. $y=3^{\sin^2\frac{x}{2}}$.

12. $y=\log_2\dfrac{\cos x+x\sin x}{\sin x-x\cos x}$.

13. $y=\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{1-2x}{1+2x}}$.

14. $y=x^2\operatorname{arctg}x$.

15. $y = x \cdot 2^{1-x^2}$.

16. $y = \dfrac{\sin 2x + 1}{\sin x - \cos x}$.

17. $y = 2^{\sqrt[5]{\operatorname{tg} 5x + 1}}$.

18. $y = \dfrac{\ln(x + \sqrt{1 + x^2})}{\sqrt{1 + x^2}}$.

19. $y = 3^{\ln^2(1 + e^{-x})}$.

20. $y = \arccos \dfrac{1 - x^3}{1 + x^3}$.

21. $y = x^2 \cdot \arccos 3x$.

22. $y = 4^{x \operatorname{tg} \frac{x}{2}}$.

23. $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{\arcsin x^2}$.

24. $y = 2^{\operatorname{arcctg} \sqrt{x^2+1}}$.

25. $y = (\arcsin x)^{\frac{\sin x}{x}}$.

26. $y = (\operatorname{arctg} 4x)^{\sqrt[3]{1 + x^2}}$.

27. $y = \left(\operatorname{tg} \dfrac{x}{2}\right)^{x \arcsin 2x}$.

28. $y = (e^x + e^{-x})^{\cos 2x}$.

29. $y = \left(\operatorname{ctg} \dfrac{x}{3}\right)^{\sqrt[3]{e^x - e^{-x}}}$.

30. $y = \arcsin(\sin x)$.

31. $y = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} + x, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$

32. $y = \begin{cases} (x + 1) \operatorname{arctg}^2 \dfrac{1}{x + 1} + 2x, & x \neq -1, \\ -2, & x = -1. \end{cases}$

33. Найти $f'(0)$, если

а) $f(x) = |x|(1 - \cos x)$;

б) $f(x) = \begin{cases} \sin\left(x^4 \sin \dfrac{5}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$

в) $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \dfrac{4}{3x} + \dfrac{x}{2}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

34. Найти числа a_1, b_1, a_2, b_2 так, чтобы следующие функции были дифференцируемы на всей числовой прямой:

а) $y = \begin{cases} a_1 x + b_1, & x > \dfrac{\pi}{2}, \\ \cos x, & x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right], \\ a_2 x + b_2, & x < -\dfrac{\pi}{2}; \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} a_1 x^2 + b_1, & x > 1, \\ x \sin \pi x, & x \in [-1, 1], \\ a_2 x + b_2, & x < -1; \end{cases}$

в) $y=\begin{cases} a_1(x-2)^2+b_1, & x>1, \\ x^2\operatorname{arctg}x, & |x|\leqslant 1, \\ a_2(x+2)^2+b_2, & x<-1; \end{cases}$

г) $y=\begin{cases} a_1x^2+b_1, & x<\frac{1}{e}, \\ x^2\ln x, & \frac{1}{e}\leqslant x\leqslant e, \\ a_2x+b_2, & x>e. \end{cases}$

35. Найти многочлен наименьшей степени $g(x)$ такой, чтобы функция $f(x)$ была: 1) непрерывна на всей прямой, 2) дифференцируема на всей прямой, если

а) $f(x)=\begin{cases} \frac{5x}{4+x^2}, & |x|\geqslant 1, \\ g(x), & |x|<1; \end{cases}$

б) $f(x)=\begin{cases} x^2e^{-2x}, & |x|\leqslant 1, \\ g(x), & |x|>1; \end{cases}$

в) $f(x)=\begin{cases} \frac{4-x^2}{1+x^2}, & 1\leqslant |x|\leqslant 2, \\ g(x), & |x|\leqslant 1 \text{ или } |x|\geqslant 2. \end{cases}$

(только пункт 1)

Найти $y'_-(x)$ и $y'_+(x)$ для следующих функций:

36. $y=\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}$.

37. $y=x|\sin x|$.

38. $y=\begin{cases} \frac{x}{2^{\frac{1}{x}}-1}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$

39. $y=\begin{cases} x\,\mathrm{arcsincos}\frac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$

40. $y=\arcsin e^{-x^2}$.

41. $y=\arccos\sqrt{1-x^2}$.

42. Для каких значений p и q функция

$$y=|x|^p\cos\frac{\pi}{|x|^q},\quad x\neq 0,\quad y(0)=0\ (q>0)$$

а) непрерывна в точке $x=0$;
б) дифференцируема в точке $x=0$;
в) функция $y'(x)$ непрерывна в точке $x=0$.

Найти производную n-го порядка следующих функций:

43. $y=\cos^4 x$.

44. $y=\frac{1}{x^2-5x+6}$.

45. $y=(x^2+x+1)e^{-3x}$.

46. $y=e^{-x}\sin x$.

47. $y=\frac{x+2}{\sqrt[3]{1-x}}$.

48. $y=\frac{1+2x}{3x-1}$.

49. $y=\sin x\cdot\cos^2 2x$. **50.** $y=x^2\sin^2 x$. **51.** $y=x^2\ln\frac{1}{1+x}$.

52. $y=e^{3x}\sin 4x$. **53.** $y=\operatorname{arctg} x$. **54.** $y=e^x\cos^2 x$.

Найти производные указанного порядка следующих функций, заданных параметрически, если:

55. $y'''_{x^3}: x(t)=e^t(\cos t+\sin t),\quad y(t)=e^t(\cos t-\sin t)$.

56. $y''_{x^2}: x(t)=a\left(\cos t-\ln\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\right),\quad y(t)=a\sin t$.

57. $y''_{x^2}: x(t)=\ln(t+\sqrt{1+t^2}),\quad y(t)=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$.

58. $y'''_{x^3}: x(t)=a(1+\cos t)\cos t,\quad y(t)=a(1-\cos t)\sin t$.

59. $y'''_{x^3}: x(t)=a\cos t+(at+b)\sin t,\quad y(t)=a\sin t-(at+b)\cos t$.

60. $y'''_{x^3}: x(t)=a\cos^5 t,\quad y(t)=a\sin^5 t$.

61. $y'''_{x^3}: x(t)=t^2,\quad y(t)=\ln\sin t-t\operatorname{ctg} t$.

62. $y''_{x^2}: x(t)=t^3+3t,\quad y(t)=t\operatorname{arctg} t-\ln\sqrt{1+t^2}$.

Найти производные y'_x и y''_{x^2} следующих функций, заданных неявно, если:

63. $x+y=e^{x-y}$.

64. $x^2-1+\cos xy=0$.

65. $x^3+4y^3-3yx^2=2$.

66. $x^2+2xy+y^2-4x+2y=2$, $x=1$.

67. $x(x^2+y^2)=a(x^2-y^2)$, $x=\frac{a}{2}$.

68. $x\cos\pi y-y\sin\pi x=x-1$, $x=y=\frac{1}{2}$.

Сделать указанную замену переменных в следующих уравнениях:

69. $x^2y''-4xy'+6y=0,\quad x=e^t,\quad y=y(t)$.

70. $(tu')'+u^n t^\sigma=0,\quad s=\ln t,\quad u=u(s)$.

71. $v''+\frac{v'}{t}+\left(1-\frac{\mu^2}{t^2}\right)v=0,\quad u=\sqrt{t}\,v,\quad u=u(t)$.

72. $u''+\frac{\mu}{t^2}u=0,\quad u=\sqrt{t}\,z,\quad t=e^s,\quad z=z(s)$.

73. $(x^2-1)u''+2xu'-\frac{m^2}{x^2-1}u=0,\quad x=\frac{e^t+e^{-t}}{2},\quad u=u(t)$.

74. $u''-q(t)u=0,\quad u=\sqrt{t}\,v,\quad s=\frac{1}{2}\ln t,\quad v=v(s)$.

75. $(t^3u')'+t^3u^2=0,\quad s=\frac{1}{2}t^2,\quad u=\frac{2v}{s},\quad v=v(s)$.

76. $(\sqrt{t}\,u')'-t^{7/2}u^5=0,\quad s=2\sqrt{t},\quad u=4v,\quad v=v(s)$.

77. $y''+2y(y')^2=0,\quad x=x(y)$.

78. $y'-\frac{x-y}{x+y}=0,\quad x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi,\quad r=r(\varphi)$.

79. $(x^2+y^2)^3 y'' - 2(xy'-y)(yy'+x)^2 = 0,$
$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad r = r(\varphi).$

Написать уравнения касательной и нормали или полукасательной к кривой в заданной точке:

80. $y = 2^{-x^2} \cdot \sin \pi x$ а) $x = 0$; б) $x = 1$.

81. $x(t) = e^{-t}\sin t, \quad y(t) = e^{-t}\cos t$ а) $t = 0$; б) $t = \frac{\pi}{4}$;
в) $t = \frac{3\pi}{4}$.

82. $x(t) = \pi t - \sin \pi t, \quad y(t) = t - \operatorname{arctg} t$ а) $t = 0$; б) $t = 1$;
в) $t = 2$.

83. $y = x^2 \arcsin \frac{x}{2}$ а) $x = 1$; б) $x = \sqrt{3}$.

84. $2x^4 - y^2 - x^2 + 2y = 0, \quad x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

85. $y = \sqrt[3]{1 - \cos^3 2x}$ а) $x = 0$; б) $x = \frac{\pi}{6}$.

86. $y = x^3 \operatorname{ctg} \pi x$ а) $x = \frac{1}{4}$; б) $x = \frac{1}{2}$.

87. $x^2 - xy + 2y^2 + x - y - 14 = 0, \quad x = 1$.

88. $2^{\frac{x}{y}} + 2^{\frac{2y}{x}} = 6 \quad x = 2, \quad y = 1$.

89. $x(t) = t^3 - 3t; \quad y(t) = t^2 + 2t$ а) $t = -1$; б) $t = 0$;
в) $t = \sqrt{3}$.

Найти углы между кривыми:

90. $y = x^2 \ln x, \quad y = 4 - 4x^2$.

91. $y = \frac{x^2}{2}, \quad y = \frac{1}{1+x^2}$.

92. $x(t) = t^3 + 3t, \quad y(t) = (t+1)\ln(1+t), \quad y = -\frac{x}{1+x^2}$.

93. $y = 4 + 2\sqrt[3]{x-2}, \quad y = 2x$.

94. $r = a, \quad r^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$.

95. $r = 5a\cos\varphi, \quad r = a(4 - 3\cos\varphi)$.

96. Найти такое значение R, чтобы окружности $x^2+y^2=1$ и $(x-2)^2+y^2=R^2$ пересекались под прямым углом (были ортогональны).

97. Показать, что семейство гипербол $x^2-y^2=a^2$ и $xy=b$ образуют ортогональную сетку, т. е. любая кривая первого семейства пересекает любую кривую второго семейства под прямым углом.

98. Найти угол между левой и правой касательными в угловых точках кривых:

а) $y=\sqrt{\ln(1+9x^2)}$;

б) $y=\arccos\dfrac{2}{e^{2x}+e^{-2x}}$;

в) $y=\arccos(\sin x)$, $x\in[-2\pi, 2\pi]$.

99. Доказать, что любая касательная к логарифмической спирали $r=ae^{m\varphi}$ образует постоянный угол с радиусом-вектором точки касания.

100. Проверить, что любая касательная к гиперболе $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ образует с ее асимптотами треугольник постоянной площади.

101. Проверить, что у астроиды $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ для любой касательной длина ее отрезка, заключенного между осями координат, постоянна.

102. Проверить, что у трактрисы $x(t)=a\left(\ln\operatorname{tg}\dfrac{t}{2}+\cos t\right)$, $y(t)=a\sin t$, $0<t<\pi$, для любой касательной длина ее отрезка от точки касания до оси OX постоянна.

103. Найти угол между двумя окружностями одного радиуса, если центр одной из них лежит на другой.

104. Проверить, что кривая $xy\sin(x+y)=2x^2-y^2$ касается с прямой $y=x$ во всех общих точках, кроме начала координат.

105. Проверить, что расстояние от начала координат до любой нормали к кривой $x(t)=a(\cos t+t\sin t)$, $y(t)=a(\sin t-t\cos t)$ постоянно.

106. Проверить, что касательные к кривой $x(t)=a(t-\sin t)$, $y(t)=a(1-\cos t)$, проведенные в точках, соответствующих значениям t_0 и $t_0+\pi$, перпендикулярны при любом $t_0\neq k\pi$, $k\in Z$.

107. Найти промежутки возрастания и убывания, выделить точки экстремума и выяснить их характер для следующей функции:

а) $y=x^2e^{-x}$;

б) $y=(x-2)^3\cdot\sqrt[3]{x^2}$;

в) $y=\dfrac{3x-7}{(x^2-1)^2}$;

г) $y=\dfrac{\ln^2 x}{\sqrt{x}}$;

д) $y=\arcsin\sqrt{1-4x^2}-2\sqrt{1-4x^2}$;

е) $y=\operatorname{arctg}x-\ln x$;

ж) $y=x^x$;

з) $y=x-\sin 2x$;

и) $y=x^2-\ln x^2$;

к) $y=\dfrac{\pi}{2}x-x\operatorname{arctg}x$.

108. Доказать неравенства:

а) $x-\dfrac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x$, $x>0$;

б) $x-\dfrac{x^3}{6}<\sin x$, $x>0$;

в) $(x^a+y^a)^{\frac{1}{a}}>(x^b+y^b)^{\frac{1}{b}}$, $x>0$, $y>0$, $0<a<b$;

г) $e^x + e^{-x} \geqslant x^2 + 2$;

д) $\dfrac{2x + \pi x^2}{2x^2 + 2} > \operatorname{arctg} x, \quad x > 0$;

е) $xe^{-x} \geqslant \dfrac{1}{e} - \dfrac{(x-1)^2}{2}, \quad x > 0$;

ж) $\dfrac{\sin x}{x} > \dfrac{\sin y}{y}, \quad 0 < x < y < \pi$;

з) $\dfrac{1}{x} - \operatorname{ctg} x < \dfrac{1}{y} - \operatorname{ctg} y, \quad 0 < x < y < \pi$.

109. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, если

I. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 2$: а) $a = -4$, $b = 2$; б) $a = -1$, $b = 0$; в) $a = -6$, $b = 4$;

II. $f(x) = e^x (x^2 - x - 1)$: а) $a = -3$, $b = 0$; б) $a = -3$, $b = 2$; в) $a = -1$, $b = 0$.

110. Найти $\sup\limits_{x \in E} f(x)$ и $\inf\limits_{x \in E} f(x)$, если

I. $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 10}$: а) $E = \{x : x > 2\}$; б) $E = \{x : |x| < \infty\}$; в) $E = \{x : |x| < 2\}$.

II. $f(x) = \dfrac{x^2 + x\sqrt{3 + x^2}}{3 + x^2}$: а) $E = \{x : x > 0\}$; б) $E = \{x : |x| < \infty\}$; в) $E = \{x : |x| < 1\}$.

111. Средней порядка s для двух положительных чисел a и b называется функция, определяемая равенством

$$\Delta_s(a, b) = \left(\frac{a^s + b^s}{2}\right)^{\frac{1}{s}}, \text{ если } s \neq 0.$$

Доказать, что

а) $\min(a, b) \leqslant \Delta_s \leqslant \max(a, b)$;

б) функция $\Delta_s(a, b)$ при $a \neq b$ есть возрастающая функция переменной s;

в) найти:

1) $\lim\limits_{s \to -\infty} \Delta_s(a, b)$.

2) $\lim\limits_{s \to +\infty} \Delta_s(a, b)$.

3) $\lim\limits_{s \to 0} \Delta_s(a, b)$.

112. Найти вертикальные касательные к кривой $r = a(1 + \cos\varphi)$ и показать, что кривая лежит между этими касательными.

113. По углам прямоугольной пластинки со сторонами a и b вырезаны четыре равных квадрата. Из оставшейся фигуры обра-

зована коробка, высота которой равна стороне квадрата. Найти длину стороны вырезаемого квадрата, при которой получается коробка наибольшего объема.

114. Прочность бруса с прямоугольным поперечным сечением пропорциональна произведению основания на квадрат высоты этого прямоугольника. Найти форму такого бруса, вытесанного из бревна, поперечное сечение которого есть круг радиуса a, допускающего наибольшую нагрузку.

115. Найти наибольшую площадь прямоугольника, вписанного симметрично в сектор круга радиуса a с центральным углом 2α.

116. Найти наибольший объем конуса с данной образующей длины l.

117. Найти наименьший объем конуса, описанного около полушара радиуса a.

118. Из сектора круга радиуса a свертывается коническая воронка. При каком центральном угле она имеет наибольший объем?

119. Две точки равномерно движутся по осям координат. Скорость первой точки равна v_1, скорость второй — v_2. В некоторый момент времени точки занимали положения $A(a, 0)$ и $B(0, b)$ соответственно. Найти возможное кратчайшее расстояние между ними.

120. Точка движется по плоскости со скоростью v_1, а по оси OX со скоростью v_2, $v_2 > v_1$. Найти путь из точки $A(0, a)$ в точку $B(b, 0)$, требующий наименьшего времени на его прохождение.

121. Рычаг второго рода имеет точку опоры на одном конце и уравновешивается силой F на втором. Вес единицы длины рычага равен m. На расстоянии a от точки опоры к рычагу подвешен груз P. При какой длине рычага l сила F будет наименьшей?

122. Чашка имеет форму полушара радиуса a. В нее опущен стержень длиной l, $l > 2a$. Найти положение равновесия стержня.

123. Стержень длиной $2b$ опирается концами на две прямые в вертикальной плоскости, наклоненные к горизонтами под углами α и β. При каком положении стержня его середина находится выше всего?

124. При каком наклоне боковых сторон равнобедренной трапеции ее площадь будет наибольшая, если меньшее основание трапеции равно a, а боковые стороны равны b.

125. Сечение канала представляет равнобедренную трапецию площадью S и высотой h. Каким должен быть угол между боковой стороной и основанием, чтобы сумма длин нижнего основания и боковых сторон была наименьшая?

126. От канала шириной a под прямым углом к нему отходит канал шириной b. Стенки каналов прямолинейны вплоть до вершины угла. Найти наибольшую длину бревна l, которое можно сплавлять по этим каналам из одного в другой.

127. Яркость освещения выражается формулой $I = \frac{m \sin \varphi}{r^2}$, где φ — угол наклона лучей, r — расстояние от площадки до ис-

точника света, m — постоянная (сила источника света). На какой высоте h надо поместить фонарь на столбе, чтобы освещение горизонтальной площадки на расстоянии a от столба было наибольшим?

128. Под каким углом к оси OX надо провести прямую через точку $A(a, b)$ $(a>0, b>0)$, чтобы отрезок ее между положительными полуосями координат имел наименьшую длину?

129. Под каким углом к оси OX надо провести прямую через точку $A(a, b)$ $(a>0, b>0)$, чтобы треугольник, образованный этой прямой и положительными полуосями координат, имел наименьший периметр?

130. На оси OX найти точку $A(x, 0)$ $(x>0)$ такую, что отрезок $[1, 4]$ оси OY виден из точки A под наибольшим углом.

131. Написать многочлен Тейлора $T_4(f, 0)$ четвертого порядка для следующих функций:

а) $y=\sqrt[3]{\frac{\sin x}{x}}$; б) $y=(1+x)^{\frac{1}{x}}$; в) $y=\operatorname{arcctg} x$.

132. Написать многочлен Тейлора $T_n(f, x_0)$ порядка n и оценить разность этого многочлена и функции на указанном отрезке, принимая в качестве x_0 середину этого отрезка:

а) $y=\sqrt[3]{x}$ на $[-9, -7]$, $n=4$; б) $y=\operatorname{tg} x$ на $[-\pi/6, \pi/6]$, $n=5$;

в) $y=\cos x$ на $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $n=6$; г) $y=xe^{-x}$ на $[0, 2]$, $n=6$;

д) $y=x\ln(1+x)$ на $[1, 3]$, $n=4$.

133. Вычислить с точностью до 10^{-3}:

а) $\sqrt{10}$; б) $\sqrt[3]{26}$;

в) $\arcsin\frac{1}{3}$; г) $\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)$;

д) $\ln 10$ $(\ln 3 \simeq 1{,}0986)$; е) $\ln 15$ $(\ln 2 \simeq 0{,}6932)$.

134. Написать многочлен Тейлора третьего порядка в указанной точке для следующей функции $y(x)$, заданной неявно:

а) $x^4-4ax^2y+2ay^3+a^2y^2=0$, $x=y=a$ $(a>0)$;

б) $x^3+y^3-axy=a^3$, $x=0$, $y=a$;

в) $y^3-x^2y+x^5=1$, $x=1$, $y=0$;

г) $x\cos y+y\cos x=2x$, $x=y=0$.

Найти следующие пределы, используя правило Лопиталя:

135. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin(e^{x-1}-1)}{\ln x}$.

136. $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\ln x}{1+2\ln\sin x}$.

137. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x+x^2)+\ln(1-x+x^2)}{1-\cos x}$.

138. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\ln(\sqrt{1+x^2}+x)}{x-\sin x}$.

139. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)+\frac{x^2}{2}-\sin x}{\operatorname{arctg}^3 x}$.

140. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x-\operatorname{arctg} x}{\ln(1+x^3)}$.

141. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{tg} x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$.

142. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2}{\sin^2 x}-\frac{1}{1-\cos x}\right)$.

143. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(\operatorname{tg} x+\frac{2}{2x-\pi}\right)$.

144. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2 x\right)$.

145. $\lim\limits_{x\to +\infty}(\pi-2\operatorname{arctg} x)\ln x$.

146. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x}{\frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x+1}}$.

147. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(\frac{x}{\operatorname{ctg} x}-\frac{\pi}{2\cos x}\right)$.

148. $\lim\limits_{x\to +\infty} x\ln\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

149. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\pi x-1}{2x^2}+\frac{\pi}{x(e^{2\pi x}-1)}\right]$.

150. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{x^2}}-1}{2\operatorname{arctg} x^2-\pi}$.

151. $\lim\limits_{x\to 0+} x\ln\ln\frac{1}{x}$.

152. $\lim\limits_{x\to 0+}\sin x\cdot\ln x$.

153. $\lim\limits_{x\to +\infty} x\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{x}\right)$.

154. $\lim\limits_{x\to +\infty}(x+2^x)^{\frac{1}{x}}$.

155. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x\right)^{\frac{1}{x}}$.

156. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$.

157. $\lim\limits_{x\to 0+} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$.

158. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{\sin\pi x}}$.

159. $\lim\limits_{x\to \pi-}(\sin x)^{\pi-x}$.

160. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arcctg} x\right)^x$.

161. $\lim\limits_{x\to a}\left(2-\frac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}}$.

162. $\lim\limits_{x\to 0+}(\ln\operatorname{ctg} x)^{\operatorname{tg} x}$.

163. $\lim\limits_{x\to 0}(2\sqrt{x}+x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

164. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{1+x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

165. Найти такое значение a, при котором функция $f(x)$ непрерывна в точке $x=0$. Проверить существование и найти величины производных $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$, $f^{\text{IV}}(0)$, если

а) $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ a, & x=0;\end{cases}$

б) $f(x)=\begin{cases}\frac{e^x-1}{x}, & x\neq 0,\\ a, & x=0;\end{cases}$

в) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}-\operatorname{ctg} x, & x\neq 0,\\ a, & x=0.\end{cases}$

Исследовать функции и начертить их графики:

166. $y=\frac{x^4}{x^3-2}$.

167. $y=\sqrt[3]{\frac{x^2}{1-x^2}}$.

168. $y=\sqrt[3]{\frac{1-x^2}{x^2}}$.

169. $y=\frac{(x+2)(x^2+6x+4)}{(x+1)^2}$.

170. $y=\sqrt[3]{x(x-3)^2}$.

171. $y=\frac{x^3(x+2)}{(x+1)^3}$.

172. $y=\frac{x^3(3x+4)}{(x+1)^3}$.

173. $y=\frac{x^3(x+3)}{(x+1)^3}$.

174. $y=\sqrt[3]{(x+2)^2}+\sqrt[3]{(x-2)^2}$.

175. $y=\sqrt[3]{(x-2)^2}-\sqrt[3]{(x+2)^2}$.

176. $y=\sqrt[3]{x^2}\,e^{-\frac{2x}{3}}$.

177. $y=(x-6)\,e^{-\frac{1}{x}}$.

178. $y=\sqrt{x}\ln x$.

179. $y=x^2\ln^2 x$.

180. $y=x\ln^{2/3}x$.

181. $y=\frac{\ln^{2/3}x}{x}$.

182. $y=x^2e^{-x^2}$.

183. $y=x^2e^{-x}$.

184. $y=2x+4\operatorname{arcctg}x$.

185. $y=x\operatorname{arctg}x-\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)x$.

186. $y=\arccos\frac{2x}{1+x^2}-\frac{2x}{5}$.

187. $y=2+\sqrt{\frac{x^3}{x-6}}$.

188. $y=\arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2}-\frac{2x}{17}$.

189. $y=\operatorname{arcctg}\frac{1}{x}-\frac{x}{2}$.

Исследовать и начертить кривые, заданные параметрически:

190. $x(t)=\frac{t^3}{t^3+1}$, $y(t)=\frac{t^2}{t^3+1}$.

191. $x(t)=\frac{t}{3-t^2}$, $y(t)=\frac{t(2-t^2)}{3-t^2}$.

192. $x(t)=\frac{(t+2)^2}{t+1}$, $y(t)=\frac{(t-2)^2}{t-1}$.

193. $x(t)=\frac{2t}{1+t^2}$, $y(t)=t^3-t$.

194. $x(t)=\frac{2t}{1+t^2}$, $y(t)=t^3-6t$.

195. $x(t)=\frac{2t}{1+t^2}$, $y(t)=t^3-3t$.

196. $x(t)=\frac{\ln t}{t^2}$, $y(t)=t^2\ln t$.

197. $x(t)=\frac{t^2}{t-1}$, $y(t)=\frac{t}{t^2-1}$.

198. $x(t)=\frac{t^3}{t^3+1}$, $y(t)=\frac{t^3}{t+1}$.

199. $x(t)=\frac{t^2}{t^2-1}$, $y(t)=\frac{t^2}{t-1}$.

Ответы

1. $-\frac{x\sqrt[3]{x}+10\sqrt[3]{x^2}+7}{3x^3\sqrt[3]{x}}$. 2. $18(3x-5)^5$. 3. $\frac{-2}{\sqrt[3]{(3x+4)^5}}$. 4. $\frac{6}{\sqrt[4]{8x-3}}$.

5. $\frac{6-5x-7x^2+3(3x-2)(1+x)^{2/3}}{6x^2(1-x)^{3/2}(1+x)^{2/3}}$. 6. $\frac{-6\cos 2x}{\sin^4 2x}$.

7. $\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. 8. $\frac{2}{\sin 2x}-\frac{1}{\sin^2 2x}$. 9. $e^{3x}(3x+10)$.

10. $-2e^{-x}\sin x$. 11. $\frac{\ln 3}{2}\sin x\cdot 3^{\sin^2\frac{x}{2}}$. 12. $\frac{-x^2}{\ln 2}\cdot\frac{2}{(1-x^2)\sin 2x-2x\cos 2x}$.

13. $-\frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}$. 14. $2x\operatorname{arctg}x+\frac{x^2}{1+x^2}$. 15. $2^{1-x^2}(1-x^2\ln 4)$.

16. $\frac{(\cos x+\sin x)(\sin 2x-3)}{1-\sin 2x}$. 17. $2^{\sqrt[5]{\operatorname{tg}5x+1}}\cdot\frac{\ln 2}{(\operatorname{tg}5x+1)^{4/5}}\cdot\frac{1}{\cos^2 5x}$.

18. $\frac{\sqrt{1+x^2}-x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$. 19. $-3^{\ln^2(1+e^{-x})}\cdot\frac{2\ln 3\ln(1+e^{-x})}{1+e^{-x}}e^{-x}$.

20. $\frac{3\sqrt{x}}{1+x^3}$. 21. $2x\arccos 3x-\frac{3x^2}{\sqrt{1-9x^2}}$. 22. $4^{x\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\cdot\ln 4\cdot\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\right.$

$\left.+\frac{x}{2\cos^2\frac{x}{2}}\right)$. 23. $\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{\arcsin x^2}\cdot\ln\frac{1}{3}\cdot 2x}{\sqrt{1-x^4}}$. 24. $2^{\operatorname{arcctg}\sqrt{1+x^2}}\cdot\ln 2\times$

$\times\frac{-x}{(2+x^2)\sqrt{1+x^2}}$. 25. $(\arcsin x)^{\frac{\sin x}{x}}\left(\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}\ln\arcsin x+\right.$

$\left.+\frac{\sin x}{x}\frac{1}{\arcsin x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$. 26. $(\operatorname{arctg}4x)^{\sqrt[3]{1+x^2}}\left(\frac{2}{3}x(1+x^2)^{-2/3}\times\right.$

$\left.\times\ln\operatorname{arctg}4x+\frac{\sqrt[3]{1+x^2}}{\operatorname{arctg}4x}\cdot\frac{4}{1+16x^2}\right)$. 27. $\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)^{x\arcsin 2x}\left(\arcsin 2x\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\right.$

$\left.+\frac{2x}{\sqrt{1-4x^2}}\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{x\arcsin 2x}{\sin x}\right)$. 28. $(e^x+e^{-x})^{\cos 2x}(-2\sin 2x\cdot\ln(e^x+$

$+e^{-x})+\cos 2x\cdot\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}})$. 29. $\left(\operatorname{ctg}\frac{x}{3}\right)^{\sqrt[3]{e^x-e^{-x}}}\left(\frac{1}{3}(e^x-e^{-x})^{-\frac{2}{3}}\times\right.$

$\times (e^x + e^{-x}) \ln \operatorname{ctg} \frac{x}{3} - \frac{2}{3} \frac{1}{\sin \frac{2x}{3}} \cdot \sqrt[3]{e^x - e^{-x}}\Big)$. **30.** $y' = \operatorname{sign} \cos x$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $y'_+\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = (-1)^k$, $y'_-\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) = (-1)^{k+1}$, $k \in Z$.

31. $y' = \begin{cases} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} + 1, & x \neq 0; \\ 1, & x = 0. \end{cases}$ **32.** $y' = \begin{cases} \frac{-2(x+1) \operatorname{arctg} \frac{1}{x+1}}{x^2 + 2x + 2} + \\ + \operatorname{arctg}^2 \frac{1}{x+1} + 2, & x \neq -1; \\ \frac{\pi^2}{4} + 2, & x = -1. \end{cases}$

33. а) 0; б) 0; в) $\frac{1}{2}$. **34.** а) $a_1 = -1$, $b_1 = \frac{\pi}{2}$, $a_2 = 1$, $b_2 = \frac{\pi}{2}$; б) $a_1 = -\frac{\pi}{2}$, $b_1 = \frac{\pi}{2}$, $a_2 = \pi$, $b_2 = \pi$; в) $a_1 = -\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}$, $b_1 = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}$, $a_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}$, $b_2 = -\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}$; г) $a_1 = -\frac{1}{2}$, $b_1 = -\frac{1}{2e^2}$, $a_2 = 3e$, $b_2 = -2e^2$. **35.** а) 1) x, 2) $-\frac{1}{5}x^3 + \frac{6}{5}x$; б) 1) $\frac{e^{-2} - e^2}{2}x + \frac{e^2 + e^{-2}}{2}$, 2) $\left(\frac{-3}{4}e^2 - \frac{e^{-2}}{4}\right)x^3 + e^2x^2 + \left(\frac{3}{4}e^{-2} + \frac{1}{4}e^2\right)x + \left(\frac{e^{-2}}{2} - \frac{e^2}{2}\right)$; в) 1) $-\frac{1}{2}x^2 + 2$. **36.** $y'_+ = y'_- = \frac{2 \operatorname{sign} x}{1 + x^2}$, $x \neq 0$, $y'_+(0) = 2$, $y'_-(0) = -2$. **37.** $y'_+ = y'_- = |\sin x| + x \cos x \operatorname{sign} \sin x$, $x \neq k\pi$, $y'_+(0) = y'_-(0) = 0$, $y'_+(k\pi) = k\pi \operatorname{sign} k$, $y'_-(k\pi) = -k\pi \operatorname{sign} k$, $k \in Z$.

38. $y'_+ = y'_- = \frac{2^{\frac{1}{x}}\left(1 + \frac{\ln 2}{x}\right) - 1}{(2^{\frac{1}{x}} - 1)^2}$, $x \neq 0$, $y'_+(0) = 0$, $y'_-(0) = -1$.

39. $y_+ = y_- = \frac{1}{x} \operatorname{sign}\left(\sin \frac{1}{x}\right) + \arcsin \cos \frac{1}{x}$, $x \neq \frac{1}{k\pi}$, $x \neq 0$, $y'_+(0)$ и $y'_-(0)$ не существуют, $y'_-\left(\frac{1}{\pi k}\right) = (-1)^k\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $y'_+\left(\frac{1}{\pi k}\right) = (-1)^{k+1}\left(\pi k - \frac{\pi}{2}\right)$. **40.** $y'_+ = y'_- = \frac{-2xe^{-x^2}}{\sqrt{1 - e^{-2x^2}}}$, $x \neq 0$, $y'_+(0) = -\sqrt{2}$, $y'_-(0) = \sqrt{2}$. **41.** $y'_+ = y'_- = \frac{\operatorname{sign} x}{\sqrt{1 - x^2}}$, $x \neq 0$, $y'_+(0) = 1$, $y'_-(0) = -1$. **42.** а) $p > 0$; б) $p > 1$; в) $p > q + 1$. **43.** $2^{n-1} \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}n\right) + 2^{2n-3} \cos\left(4x + \frac{\pi}{2}n\right)$. **44.** $(-1)^n n! \left(\frac{1}{(x-3)^{n+1}} -\right.$

$-\frac{1}{(x-2)^{n+1}}\Big)$. **45.** $(-1)^{n-2}\,3^{n-2}e^{-3x}\,(9x^2+x(9-6n)+n^2-4n+9)$.
46. $(\sqrt{2})^n e^{-x}\sin\left(x+\frac{3\pi n}{4}\right)$. **47.** $\frac{2\cdot(-1)^n}{3^n}\,(1\cdot4\cdot7\cdot\ldots\cdot(3n-5))\cdot(x-$
$-1)^{\frac{2}{3}-n}-\frac{(-1)^n}{3^{n-1}}\,(1\cdot4\ldots(3n-2))\,(x-1)^{-\frac{1}{3}-n}$, $n\geqslant2$.
48. $\frac{(-1)^n\cdot5\cdot3^{n-1}\cdot n!}{(3x-1)^{n+1}}$. **49.** $\frac{1}{2}\sin\left(x+\frac{\pi n}{2}\right)-\frac{3^n}{4}\sin\left(3x+\frac{\pi n}{2}\right)+$
$+\frac{5^n}{4}\sin\left(5x+\frac{\pi n}{2}\right)$. **50.** $y'=x-x\cos2x+x^2\sin2x$, $y''=1-\cos2x+$
$+4x\sin2x+2x^2\cos2x$, $y^{(n)}=-2^{n-3}\left(4x^2\cos\left(2x+\frac{\pi n}{2}\right)+4nx\cos\left(2x+\right.\right.$
$\left.\left.+\frac{\pi(n-1)}{2}\right)+(n^2-n)\cos\left(2x+\frac{\pi(n-2)}{2}\right)\right)$, $n\geqslant3$. **51.** $y'=$
$=-2x\ln(1+x)-\frac{x^2}{1+x}$, $y''=-2\ln(1+x)-\frac{4x+3x^2}{(1+x)^2}$, $y^{(n)}=$
$=\frac{(-1)^{n+1}(n-3)!}{(x+1)^n}(2x^2+2xn+n^2-n)$, $n\geqslant3$. **52.** $5^n e^{3x}\sin(4x+n\varphi)$,
$\varphi=\arcsin\frac{4}{5}$. **53.** $\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x^2)^{n/2}}\sin(n\operatorname{arcctg}x)$. **54.** $\frac{e^x}{2}+\frac{e^x}{2}5^{n/2}\times$
$\times\cos\left(2x+n\arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$. **55.** $\frac{\cos t-3\sin t}{4e^{2t}\cos^5 t}$. **56.** $\frac{\sin t}{a\cos^4 t}$.
57. $\frac{t^2-1}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2}}$. **58.** $-\frac{3}{16a^2}\,\frac{\cos2t}{\cos^5\frac{t}{2}\sin^3\frac{3t}{2}}$. **59.** $\frac{3(at+b)\sin t-a\cos t}{(at+b)^3\cos^5 t}$.
60. $-\frac{3}{25a^2}\,\frac{1+7\sin^2 t}{\cos^{13}t\cdot\sin t}$. **61.** $\frac{t+2t\cos^2 t+\frac{1}{2}\sin2t}{4t^3\sin^4 t}$. **62.** $\frac{1-2t\operatorname{arctg}t}{9(1+t^2)^3}$.
63. $y'_x=\frac{1-x-y}{1+x+y}$, $y''_{xx}=\frac{4x+4y}{(1+x+y)^3}$. **64.** $y'_x=\frac{2}{\sin xy}-\frac{y}{x}$, $y''_{xx}=\frac{2y}{x^2}-$
$-\frac{2}{x\sin xy}-\frac{4x\cos xy}{\sin^3 xy}$. **65.** $y'_x=\frac{x}{x+2y}$, $y''_{xx}=\frac{2xy+4y^2-x^2}{(x+2y)^3}$. **66.** $y'_x=$
$=-2$; $y''_{xx}=\frac{1}{3}$ при $x=1$, $y=-5$; $y'_x=0$, $y''_{xx}=-1/3$ при $x=1$,
$y=1$. **67.** $y'_x=\frac{1}{3\sqrt{3}}$, $y''_{xx}=\frac{-8\sqrt{3}}{9a}$ при $x=\frac{a}{2}$, $y=\frac{a}{\sqrt{12}}$; $y'_x=$
$=-\frac{1}{3\sqrt{3}}$, $y''_{xx}=\frac{8\sqrt{3}}{9a}$ при $x=\frac{a}{2}$, $y=-\frac{a}{\sqrt{12}}$. **68.** $y'_x=\frac{-2}{\pi+2}$,
$y''_{xx}=\frac{\pi^3+2\pi^2+8\pi}{(\pi+2)^2}$. **69.** $y''-5y'+6y=0$. **70.** $u''+e^{s(\sigma+1)}\cdot u^n=0$.
71. $u''+\left(1-\frac{\mu^2-1/4}{t^2}\right)u=0$. **72.** $z''+\left(\mu-\frac{1}{4}\right)z=0$. **73.** $u''+$

$+\frac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{sh} t}u'-\frac{m^2}{\operatorname{sh}^2 t}u=0$. **74.** $v''-[1+4e^{4s}q(e^{2s})]v=0$. **75.** $v''+\frac{v^2}{s^2}=0$. **76.** $v''-s^8v^5=0$. **77.** $x''-2x'y=0$. **78.** $r'\cos\left(2\varphi+\frac{\pi}{4}\right)-r\cos\left(2\varphi-\frac{\pi}{4}\right)=0$. **79.** $r''-r=0$. **80.** а) $y=\pi x$, $y=-\frac{1}{\pi}x$; б) $y=-\frac{\pi}{2}(x-1)$, $y=\frac{2}{\pi}(x-1)$. **81.** а) $y-1=-x$, $y-1=x$; б) $x=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\pi/4}$, $y=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\pi/4}$; в) $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3\pi}{4}}$, $x=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3\pi}{4}}$. **82.** а) $y=\frac{2}{\pi^3}x$, $y=-\frac{\pi^3}{2}x$; б) $y+\frac{\pi}{4}-1=\frac{1}{4\pi}(x-\pi)$, $y+\frac{\pi}{4}-1=-4\pi(x-\pi)$; в) $x=2\pi$, $y=2-\operatorname{arctg}2$. **83.** а) $y-\frac{\pi}{6}=\left(\frac{\pi}{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)(x-1)$, $y-\frac{\pi}{6}=\frac{-1}{\frac{\pi}{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}}(x-1)$; б) $y-\pi=\left(\frac{2\pi}{\sqrt{3}}+3\right)(x-\sqrt{3})$, $y-\pi=\frac{-1}{\frac{2\pi}{\sqrt{3}}+3}(x-\sqrt{3})$. **84.** $y=-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $y=\sqrt{2}\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ при $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $y=0$; $y-2=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $y-2=-\sqrt{2}\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ при $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $y=2$. **85.** а) полукасательная $x=0$, $y\geqslant 0$; б) $y-\frac{\sqrt[3]{7}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{49}}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$, $y-\frac{\sqrt[3]{7}}{2}=-\frac{\sqrt[3]{49}}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$. **86.** а) $y-\frac{1}{64}=\frac{6-\pi}{32}\left(x-\frac{1}{4}\right)$, $y-\frac{1}{64}=\frac{32}{\pi-6}\left(x-\frac{1}{4}\right)$; б) $y=-\frac{\pi}{8}\left(x-\frac{1}{2}\right)$, $y=\frac{8}{\pi}\left(x-\frac{1}{12}\right)$. **87.** $y=3$, $x=1$ при $x=1$, $y=3$, $y+2=\frac{1}{2}(x-1)$, $y+2=-2(x-1)$ при $x=1$, $y=-2$. **88.** $y-1=\frac{1}{2}(x-2)$, $y-1=-2(x-2)$. **89.** а) полукасательная $y+1=-\frac{1}{3}(x-2)$, $x\leqslant 2$; б) $y=-\frac{2}{3}x$, $y=\frac{3}{2}x$; в) $y-(3+2\sqrt{3})=\frac{\sqrt{3}+1}{3}x$, $y-(3+2\sqrt{3})=-\frac{3}{\sqrt{3}+1}x$. **90.** $\operatorname{arctg}\frac{9}{7}$. **91.** $\operatorname{arctg}3$. **92.** $\operatorname{arctg}2$. Указание. Показать, что точка (0, 0) единственная точка пересечения. **93.** $\varphi=\operatorname{arctg}4/7$ в точках (1; 2) и (3; 6); $\varphi=\operatorname{arctg}1/2$ в точке (2; 4). **94.** $\pi/3$. Указание. Уравнение данных кривых представить в виде $x=x(\varphi)$, $y=y(\varphi)$, полагая $x=r(\varphi)\cos\varphi$, $y=r(\varphi)\sin\varphi$. **95.** $\operatorname{arctg}2\sqrt{3}$.

Указание. См. предыдущую задачу. **96.** $R=\sqrt{3}$. **98.** а) $\operatorname{arctg}(3/4)$; б) $\operatorname{arctg}(4/3)$; в) $\pi/2$. **103.** $\pi/3$. **107.** а) на промежутках $(-\infty, 0)$, $(2, +\infty)$ убывает, на промежутке $(0, 2)$ возрастает; при $x=0$ минимум, $x=2$ — локальный максимум; б) на промежутках $(-\infty, 0)$, $(4/11, +\infty)$ возрастает, на промежутке $(0, 4/11)$ убывает, $x=0$ — локальный максимум, $x=4/11$ — локальный минимум; в) на промежутках $(-\infty, -1)$, $(1/9, 1)$, $(3, +\infty)$ убывает, на промежутках $(-1, 1/9)$, $(1, 3)$ возрастает, $x=1/9$ и $x=3$ — локальные максимумы; г) на промежутках $(0, 1)$, $(e^4, +\infty)$ убывает, на промежутке $(1, e^4)$ возрастает, $x=1$ — минимум, $x=e^4$ — локальный максимум; д) на промежутках $(-1/2, -1/4)$, $(0, 1/4)$ возрастает, на промежутках $(-1/4, 0)$, $(1/4, 1/2)$ убывает, при $x=\pm 1/2$ краевой минимум; при $x=\pm 1/4$ максимум, $x=0$ — локальный минимум; е) на промежутке $(0, +\infty)$ убывает; ж) на промежутке $(0, 1/e)$ убывает, на промежутке $(1/e, +\infty)$ возрастает, $x=1/e$ минимум. з) на промежутках $\left(\frac{\pi}{6}+\pi k < x < \frac{5\pi}{6}+\pi k\right)$, $k\in Z$, возрастает, на промежутках $(-\pi/6+\pi k < x < \pi/6+\pi k)$, $k\in Z$ убывает, $x=-\pi/6+\pi k$, $k\in Z$, — локальные максимумы, $x=\pi/6+\pi k$, $k\in Z$, — локальные минимумы; и) на промежутках $(-\infty, -1)$, $(0, 1)$ убывает, на промежутках $(-1, 0)$, $(1, +\infty)$ возрастает, $x=\pm 1$ — минимум; к) на промежутке $(-\infty, +\infty)$ возрастает. **109.** I. а) $\max f(x)=29$, $\min f(x)=-3$; б) $\max f(x)=13$, $\min f(x)=2$; в) $\max f(x)=78$, $\min f(x)=-52$. II. а) $\max f(x)=5e^{-2}$, $\min f(x)=-1$; б) $\max f(x)=e^2$, $\min f(x)=-e$; в) $\max f(x)=1/e$, $\min f(x)=-1$. **110.** I. а) $\sup f(x)=7/5$, $\inf f(x)=8/7$; б) $\sup f(x)=7/5$, $\inf f(x)=0$; в) $\sup f(x)=8/7$, $\inf f(x)=0$. II. а) $\sup f(x)=2$, $\inf f(x)=0$, б) $\sup f(x)=2$, $\inf f(x)=-1/4$; в) $\sup f(x)=3/4$, $\inf f(x)=-1/4$.

111. в) 1) $\min(a, b)$; 2) $\max(a, b)$; 3) $\sqrt{ab}$. **112.** $x=2a$, $x=-a/4$. **113.** $\frac{a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}$. **114.** $2a/\sqrt{3}$ — ширина, $2a\sqrt{2}/\sqrt{3}$ — высота.

115. $a^2 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. **116.** $\frac{2\pi l^3}{9\sqrt{3}}$. **117.** $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi a^3$. **118.** $2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$.

119. $\frac{|av_2-bv_1|}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}$. **120.** Если $x=\frac{av_1}{\sqrt{v_2^2-v_1^2}}<b$, то ломаная ACB, где $C=C(x, 0)$; если $x\geqslant b$, то прямая AB. **121.** $l=\sqrt{2ap/m}$, если $p>ma/2$; $l=a$, если $p\leqslant ma/2$. **122.** При $l\leqslant 4a$ угол наклона стержня к горизонту равен $\arccos\frac{l+\sqrt{l^2+128a^2}}{16a}$. **123.** $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{\sin(\alpha-\beta)}{2\sin\alpha\cdot\sin\beta}$, где φ — угол наклона стержня к горизонту. **124.** $\varphi=\arccos\frac{\sqrt{a^2+8b^2}-a}{4b}$.

125. $\varphi=\frac{\pi}{3}$ при $S\geqslant\frac{h^2}{3}$, $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{h^2}{S}$ при $S<\frac{h^2}{3}$. **126.** $l=(a^{2/3}+b^{2/3})^{3/2}$. **127.** $h=\frac{a}{\sqrt{2}}$. **128.** $\varphi=\operatorname{arctg}\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$. **129.** $\varphi=\arcsin\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ —

$-\arcsin\frac{a-b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. **130.** $x=2$. **131.** а) $1-\frac{x^2}{18}+\frac{x^4}{3240}$; б) $e-\frac{ex}{2}+\frac{11e}{24}x^2-\frac{7e}{16}x^3+\frac{2447e}{5760}x^4$; в) $\frac{\pi}{2}-x+\frac{1}{3}x^3$. **132.** а) $-2+\frac{1}{12}(x+8)+\frac{1}{9\cdot 32}(x+8)^2+\frac{5}{2^8}(x+8)^3+$ $+\frac{5}{3^5\cdot 2^{10}}(x+8)^4$, $|R_4(f,\ 8)|\leqslant\frac{22\cdot\sqrt[3]{7}}{3^6\cdot 7^5}\leqslant\frac{1}{10^6}$; б) $x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5$, $|R_5(f,\ 0)|\leqslant\frac{1}{45}\cdot\frac{2^6}{27\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{6}\right)^6\cdot\frac{189}{8}<\frac{1}{50}$; в) $\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-$ $-\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+\frac{1}{6\sqrt{2}}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3+\frac{1}{24\sqrt{2}}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^4-\frac{1}{120\sqrt{2}}\times$ $\times\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^5-\frac{1}{720\sqrt{2}}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^6$, $\left|R_6\left(f,\ \frac{\pi}{4}\right)\right|\leqslant\left(\frac{\pi}{4}\right)^7\cdot\frac{1}{7!}\leqslant$ $\leqslant\frac{1}{5000}$; г) $\frac{1}{e}-\frac{1}{2e}(x-1)^2+\frac{1}{3e}(x-1)^3-\frac{1}{8e}(x-1)^4+\frac{1}{30e}(x-1)^5-$ $-\frac{1}{144e}(x-1)^6$, $|R_6(f,\ 1)|\leqslant\frac{1}{6!}=\frac{1}{720}$; д) $2\ln 3+\left(\ln 3+\frac{2}{3}\right)(x-2)+$ $+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{9}(x-2)^2+\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{27}(x-2)^3+\frac{1}{24}\cdot\frac{4}{27}(x-2)^4$, $|R_4(f,\ 2)|\leqslant$ $\leqslant\frac{6}{5!}\cdot\frac{6}{32}<\frac{1}{100}$. **133.** а) 3,162; б) 2,963; в) 0,340; г) 1,823; д) 2,303; е) 2,708. **134.** а) $a+(x-a)-\frac{1}{4a}(x-a)^2-\frac{(x-a)^3}{8a^2}$; б) $a+\frac{1}{3}x-$ $-\frac{28}{81}x^3$; в) $5(x-1)+130(x-1)^3$; г) $x+x^3$. **135.** 1. **136.** 1/2. **137.** 2. **138.** 1. **139.** 1/2. **140.** 1/2. **141.** 1/2. **142.** 1/2. **143.** 0. **144.** $\frac{2}{3}$. **145.** 0. **146.** -1. **147.** -1. **148.** 0. **149.** $\pi^2/6$. **150.** $-1/2$. **151.** 0. **152.** 0. **153.** 2π. **154.** 2. **155.** 1. **156.** $e^{-1/3}$. **157.** e. **158.** $e^{1/\pi}$. **159.** 1. **160.** $e^{\frac{1}{\pi}}$. **161.** $e^{-\frac{2}{\pi}}$. **162.** 1. **163.** $\sqrt{e}$. **164.** 1. **165.** а) $a=1$, $f'(0)=0$, $f''(0)=-1/3$, $f'''(0)=0$, $f^{(IV)}(0)=\frac{1}{5}$; б) $a=1$; $f'(0)=1/2$; $f''(0)=1/3$; $f'''(0)=1/4$; $f^{(IV)}(0)=1/5$; в) $a=0$, $f'(0)=1/3$, $f''(0)=0$, $f'''(0)=2/15$, $f^{(IV)}(0)=0$. **166.** $x\neq\sqrt[3]{2}$; асимптоты $y=x$ и $x=\sqrt[3]{2}$; локальный минимум $\left(2,\ 2\frac{2}{3}\right)$; локальный максимум $(0,\ 0)$; на $(-\infty,\ 0)$ и $(2,\ +\infty)$ возрастает; на $(0,\ \sqrt[3]{2})$ и $(\sqrt[3]{2},\ 2)$ убывает; $\left(-\sqrt[3]{4},\ -\frac{2}{3}\sqrt[3]{4}\right)$ — точка перегиба; на $(-\infty,\ -\sqrt[3]{4})$ и $(\sqrt[3]{2},\ +\infty)$ выпукла вниз; на $(-\sqrt[3]{4},\ \sqrt[3]{2})$ выпукла вверх. **167.** $x\neq\pm 1$; четная; асимп-

тоты $x=-1$, $x=1$ и $y=-1$; локальный минимум (0, 0); на (0, 1) и (1, $+\infty$) возрастает; на ($-\infty$, -1) и (-1, 0) убывает; (0, 0)— точка возврата, вертикальная полукасательная $x=0$, $y\geqslant 0$; ($-1/3$, 2); (1/3, 2)—точки перегиба; на ($-\infty$, -1), ($-1/3$, 0), (0, 1/3), (1, $+\infty$) выпукла вверх; на (-1, $-1/3$) и (1/3, 1) выпукла вниз. **168.** $x\neq 0$; четная; асимптоты $x=0$ и $y=-1$; в точках (-1, 0) и (1, 0) вертикальная касательная; на ($-\infty$, 0) возрастает; на (0, $+\infty$) убывает; точки перегиба $(-\sqrt{5}/3, \sqrt[3]{4/5})$, $(\sqrt{5}/3, \sqrt[3]{4/5})$, (1, 0) и ($-1$, 0); на ($-\infty$, -1), $(-\sqrt{5/3}, 0)$, $(0, \sqrt{5/3})$ и (1, $+\infty$) выпукла вниз; на $(-1, -\sqrt{5}/3)$ и $(\sqrt{5}/3, 1)$ выпукла вверх. **169.** $x\neq -1$; $y=0$ при $x=-\sqrt{5}-3$, $x=-2$, $x=\sqrt{5}-3$; асимптоты $x=-1$ и $y=x+6$; локальный максимум (-3, 5/4); на ($-\infty$, -3) и (-1, $+\infty$) возрастает; на (-3, -1) убывает; точка перегиба (0, 8), на ($-\infty$, -1), (-1, 0) выпукла вверх; на (0, $+\infty$) выпукла вниз. **170.** $y=0$ при $x=0$ и $x=-3$; асимптота $y=x-2$; локальный максимум $(1, \sqrt[3]{4})$; локальный минимум (3, 0); (3, 0)—точка возврата; вертикальная полукасательная $x=3$, $y\geqslant 0$; на ($-\infty$, 1) и (3, $+\infty$) возрастает; на (1, 3) убывает; точка перегиба (0, 0); на (0, 3) и (3, $+\infty$) выпукла вверх; на ($-\infty$, 0) выпукла вниз. **171.** $x\neq -1$; $y=0$ при $x=0$ и $x=-2$; асимптоты $x=-1$ и $y=x-1$; возрастает на ($-\infty$, -1) и (-1, $+\infty$); точка перегиба (0, 0); на ($-\infty$, -1) и (0, $+\infty$) выпукла вниз; на (-1, 0) выпукла вверх. **172.** $x\neq -1$; $y=0$ при $x=0$ и $x=-4/3$; асимптоты $x=-1$ и $y=3x-5$; возрастает на ($-\infty$, -1) и (-1, $+\infty$); точки перегиба (-2, -16), (0, 0); на ($-\infty$, -2) и (-1, 0) выпукла вверх; на (-2, -1) и (0, $+\infty$) выпукла вниз. **173.** $x\neq -1$; $y=0$ при $x=0$ и $x=-3$; асимптоты $x=-1$, $y=x$; возрастает на ($-\infty$, -1) и (-1, $+\infty$); точки перегиба (0, 0) и (3, 81/32); на ($-\infty$, -1) и (0, 3) выпукла вниз; на (-1, 0) и (3, $+\infty$) выпукла вверх. **174.** Четная; положительная, локальный максимум $(0, 2\sqrt[3]{4})$; минимум $(-2, 2\sqrt[3]{2})$ и $(2, 2\sqrt[3]{2})$; возрастает на (-2, 0) и (2, $+\infty$); убывает на ($-\infty$, -2) и (0, -2); в точках $(-2, 2\sqrt[3]{2})$ и $(2, 2\sqrt[3]{2})$ вертикальные полукасательные $x=-2$, $y\geqslant 2\sqrt[3]{2}$ и $x=2$, $y\geqslant 2\sqrt[3]{2}$; выпукла вверх на ($-\infty$, -2), (-2, 2), (2, $+\infty$). **175.** Нечетная; $y=0$ при $x=0$; асимптота $y=0$. Максимум $(-2, 2\sqrt[3]{2})$; минимум $(2, -2\sqrt[3]{2})$; возрастает на ($-\infty$, -2), (2, $+\infty$); убывает на (-2, 2), в точках $(-2, 2\sqrt[3]{2})$ и $(2, -2\sqrt[3]{2})$ вертикальные полукасательные $x=-2$, $y\leqslant 2\sqrt[3]{2}$ и $x=2$, $y\geqslant -2\sqrt[3]{2}$, точка перегиба (0, 0); на (0, 2) и (2, $+\infty$) выпукла вверх, на ($-\infty$, -2), (-2, 0) выпукла вниз. **176.** Неотрицательная; $y=0$ при $x=0$; асимптота $y=0$ при $x\to+\infty$; локальный максимум $(1, \sqrt[3]{e^{-2}})$; минимум (0, 0); возрастает на (0, 1); убывает на ($-\infty$, 0) и (1, $+\infty$); в точке (0, 0)—вертикальная полукасательная $x=0$, $y\geqslant 0$; точки перегиба (x_1, y_1) и (x_2, y_2), где $x_1=1-\sqrt{\frac{3}{2}}$, $y_1=y(x_2)$, $x_2=1+$

$+\sqrt{\frac{3}{2}}$, $y_2=y(x_1)$, на $(x_1, 0)$ и $(0, x_2)$ выпукла вверх; на $(-\infty, x_1)$ $(x_2, +\infty)$ выпукла вниз. **177.** $x\neq 0$, $y=0$ при $x=6$; наклонная асимптота $y=x-7$; вертикальная асимптота $x=0$, $y\leqslant 0$; $\lim\limits_{x\to 0+} y(x)=$ $=0$; локальный максимум $(-3, -9\sqrt[3]{e})$; локальный минимум $(2, -4/\sqrt{e})$; $\lim\limits_{x\to 0+} y'=0$; точка перегиба (x_0, y_0), где $x_0=6/13$, $y_0=$ $=y(x_0)$; на $(-\infty, 0)$ и $(0, 6/13)$ выпукла вверх; на $(6/13, +\infty)$ выпукла вниз. **178.** $x>0$; $y=0$ при $x=1$; $\lim\limits_{x\to 0+} y(x)=0$; минимум $(1/e^2, -2/e)$; возрастает на $(1/e^2, +\infty)$; убывает на $(0, 1/e^2)$; $\lim\limits_{x\to 0+} y'=-\infty$; точка перегиба $(1, 0)$; на $(0, 1)$ выпукла вверх; на $(1, +\infty)$ выпукла вниз. **179.** $x>0$; неотрицательная; $y=0$ при $x=1$; $\lim\limits_{x\to 0+} y=0$; локальный максимум $(1/e, 1/e^2)$; минимум $(1, 0)$; на $(0, 1/e)$ и $(1, +\infty)$ возрастает; на $(1/e, 1)$ убывает; $\lim\limits_{x\to 0+} y'=0$; точки перегиба (x_1, y_1) и (x_2, y_2), где $\ln x_1=(-3-\sqrt{5})/2$, $\ln x_2=$ $=(-3+\sqrt{5})/2$, $y_1=y(x_1)$, $y_2=y(x_2)$; на $(0, x_1)$ и $(x_2, +\infty)$ выпукла вниз; на (x_1, x_2) выпукла вверх. **180.** $x>0$; неотрицательная; $y=0$ при $x=1$; $\lim\limits_{x\to 0+} y(x)=0$; минимум в точке $(1, 0)$; локальный максимум в точке $(e^{-2/3}, e^{-2/3}\sqrt[3]{4/9})$; в точке $(1, 0)$ вертикальная полукасательная $x=1$, $y\geqslant 0$; точка перегиба $(\sqrt[3]{e}, \sqrt[3]{e/9})$; на $(0, 1)$ и $(1, \sqrt[3]{e})$ выпукла вверх; на $(\sqrt[3]{e}, +\infty)$ выпукла вниз. **181.** $x>0$; неотрицательная; $y=0$ при $x=1$; $x=0$, $y\geqslant 0$ — вертикальная асимптота; асимптота $y=0$ при $x\to+\infty$; минимум в точке $(1, 0)$; локальный максимум в точке $(e^{2/3}, e^{-2/3}\sqrt[3]{4/9})$; убывает на $(0, 1)$ и $(e^{2/3}, +\infty)$; возрастает на $(1, e^{2/3})$; в точке $(1, 0)$ вертикальная полукасательная $x=1$, $y\geqslant 0$; точка перегиба (x_1, y_1) и (x_2, y_2), где $\ln x_1=(3-\sqrt{13})/6$, $y_1=y(x_1)$, $\ln x_2=(3+\sqrt{13})/6$, $y_2=y(x_2)$; на $(0, x_1)$ и $(x_2, +\infty)$ выпукла вниз; на $(x_1, 1)$ и $(1, x_2)$ выпукла вверх. **182.** Четная; неотрицательная; $y=0$ при $x=0$; асимптота $y=0$; максимум в точках $(-1, 1/e)$ и $(1, 1/e)$; минимум в точке $(0, 0)$; возрастает на $(-\infty, -1)$ и $(0, 1)$; убывает на $(-1, 0)$ и $(1, +\infty)$; точки перегиба (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4), где $x_1=-\frac{1}{2}\sqrt{5+\sqrt{17}}$, $x_2=-\frac{1}{2}\sqrt{5-\sqrt{17}}$, $x_3=$ $=\frac{1}{2}\sqrt{5-\sqrt{17}}$, $x_4=\frac{1}{2}\sqrt{5+\sqrt{17}}$, $y_1=y(x_1)$, $y_2=y(x_2)$, $y_3=$ $=y(x_3)$, $y_4=y(x_4)$; на $(-\infty, x_1)$, (x_2, x_3), $(x_1, +\infty)$ выпукла вниз; на (x_1, x_2) и (x_3, x_4) выпукла вверх. **183.** Неотрицательная; $y=0$ при $x=0$; асимптота $y=0$ при $x\to+\infty$; минимум в точке $(0, 0)$; локальный максимум в точке $\left(2, \frac{4}{e^2}\right)$; возрастает на $(0, 2)$; убывает на $(-\infty, 0)$ и $(2, +\infty)$; точки перегиба (x_1, y_1), (x_2, y_2), где $x_1=$

$=2-\sqrt{2}$, $y_1=y(x_1)$, $x_2=2+\sqrt{2}$, $y_2=y(x_2)$; на $(-\infty, x_1)$, $(x_2, +\infty)$ выпукла вниз; на (x_1, x_2) выпукла вверх. **184.** $y=2\pi$ при $x=0$, асимптота $y=2x$ при $x\to+\infty$; асимптота $y=2x+4\pi$ при $x\to-\infty$; локальный максимум в точке $(-1, -2+3\pi)$; локальный минимум в точке $(1, 2+\pi)$; возрастает на $(-\infty, -1)$, $(1+\infty)$; убывает на $(-1, 1)$; точка перегиба $(0, 2\pi)$; на $(-\infty, 0)$ выпукла вверх; на $(0, +\infty)$ выпукла вниз. **185.** $y=0$ при $x=0$; асимптота $y=\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)x-1$ при $x\to+\infty$; асимптота $y=\left(-\frac{1}{2}-\frac{3\pi}{4}\right)x-1$ при $x\to-\infty$; минимум в точке $(1, -1/2)$; убывает на $(-\infty, 1)$; возрастает на $(1, +\infty)$; выпукла вниз. **186.** $y=\pi/2$ при $x=0$; асимптота $y=-\frac{2x}{5}+\frac{\pi}{2}$; локальные минимумы в точках $\left(-2, \pi+\frac{4}{5}-\arccos\frac{4}{5}\right)$, $(1, -2/5)$; локальные максимумы в точках $\left(-1, \pi+\frac{2}{5}\right)$, $\left(2, \arccos\frac{4}{5}-\frac{4}{5}\right)$; точки $\left(-1, \pi+\frac{2}{5}\right)$, $\left(1, -\frac{2}{5}\right)$ — угловые; в точке $\left(-1, \pi+\frac{2}{5}\right)$ левая полукасательная $y=\left(\pi+\frac{2}{5}\right)+\frac{3}{5}(x+1)$, $x\leqslant-1$, правая полукасательная $y=\left(\pi+\frac{2}{5}\right)-\frac{7}{5}(x+1)$, $x\geqslant-1$; в точке $(1, -2/5)$ левая полукасательная $y=-\frac{2}{5}-\frac{7}{5}(x-1)$, $x\leqslant1$; правая полукасательная $y=-\frac{2}{5}+\frac{3}{5}(x-1)$, $x\geqslant1$; убывает на $(-\infty, -2)$, $(-1, 1)$, $(2, +\infty)$; возрастает на $(-2, -1)$, $(1, 2)$; точка перегиба $(0, \pi/2)$; на $(-\infty, -1)$, $(0, 1)$ выпукла вниз; на $(-1, 0)$ и $(1, +\infty)$ выпукла вверх. **187.** $x>6$, $x\leqslant0$; $y=2$ при $x=0$; асимптота $y=-x-1$ при $x\to-\infty$; асимптота $y=x+5$ при $x\to+\infty$; локальный минимум в точке $(9, 2+9\sqrt{3})$, краевой минимум в точке $(0, 2)$; убывает на $(-\infty, 0)$ и $(6, 9)$; возрастает на $(9, +\infty)$; выпукла вниз на $(-\infty, 0)$ и $(6, +\infty)$. **188.** $y=\frac{\pi}{2}$ при $x=0$; асимптота $y=-\frac{2x}{17}-\frac{\pi}{2}$; локальный минимум в точке $(-4, 8/17-\arcsin 15/16)$; локальный максимум в точке $(0, \pi/2)$; точка $(0, \pi/2)$ — угловая, левая полукасательная $y=\frac{\pi}{2}+\frac{32}{17}x$; правая полукасательная $y=\frac{\pi}{2}-\frac{36}{17}x$; убывает на $(-\infty, -2)$ и $(0, +\infty)$; возрастает на $(2, 0)$; выпукла вниз на $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$. **189.** $x\neq0$; $\lim\limits_{x\to0+} y(x)=0$, $\lim\limits_{x\to0-} y(x)=\pi$; асимптота $y=(\pi-x)/2$; локальный минимум $\left(-1, \frac{3\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)$;

локальный максимум $\left(1, \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)$; убывает на $(-\infty, -1)$, $(1, +\infty)$; возрастает на $(-1, 0)$ и $(0, 1)$; выпукла вниз на $(-\infty, 0)$; выпукла вверх на $(0, +\infty)$. **190.** $y=0$ при $x=0$; асимптота $y=-x+1/3$; локальный минимум в точке $(0, 0)$; локальный максимум в точке $(2/3, \sqrt[3]{4}/3)$; на $(-\infty, 0)$ и $(2/3, +\infty)$ убывает; на $(0, 2/3)$ возрастает; $(0, 0)$ точка возврата; вертикальная полукасательная $x=0$, $y\geqslant 0$; $(1, 0)$ точка перегиба; на $(-\infty, 0)$ и $(0, 1)$ выпукла вверх; на $(1, +\infty)$ выпукла вниз. **191.** Кривая состоит из трех ветвей. Для первой ветви $y(-x)=,-y(x)$; при $x=0$, $x=\pm\sqrt{2}$, $y=0$; локальный минимум в точке $(-1/2, -1/2)$; локальный максимум в точке $(1/2, 1/2)$; правая асимптота $y=-x+\sqrt{3}$; левая асимптота $y=-x-\sqrt{3}$; на $(-\infty, -1/2)$ и $(1/2, +\infty)$ убывает; на $(-1/2, 1/2)$ возрастает; $(0, 0)$—точка перегиба; на $(-\infty, 0)$ выпукла вниз; на $(0, +\infty)$ выпукла вверх. Вторая ветвь: $x>0$, асимптота $x=0$, $y=-x-\sqrt{3}$; максимум в точке $(\sqrt{2/3}, -4\sqrt{2/3})$; выпукла вверх. Третья ветвь симметрична со второй относительно начала координат. **192.** Кривая состоит из четырех ветвей. Первая ветвь $x\geqslant 4$, $-9/2<y\leqslant -4$; асимптота $y=-9/2$; краевой максимум $(4, -4)$; на $(4, +\infty)$ убывает; выпукла вниз. Вторая ветвь симметрична первой ветви относительно прямой $y=-x$. Третья ветвь $x>9/2$, $y\geqslant 0$, $y=0$ при $x=16/3$, асимптоты $x=9/2$ и $y=x-6$, минимум в точке $(16/3, 0)$, выпукла вниз. Четвертая ветвь симметрична относительно прямой $y=-x$ второй ветви; $(4, -4)$—точка возврата кривой с полукасательной $y=-x$, $x\geqslant 4$. **193.** Кривая состоит из трех ветвей. Первая ветвь $-1\leqslant x\leqslant 1$, $y(-x)=-y(x)$, $y=0$, при $x=0$, $x=1$ и $x=-1$, $(-\sqrt{3}/2, 2/3\sqrt{3})$—точка максимума, $(\sqrt{3}/2, -2/3\sqrt{3})$—точка минимума, на $(-1, -\sqrt{3}/2)$ и $(\sqrt{3}/2, 1)$ возрастает, на $(-\sqrt{3}/2, \sqrt{3}/2)$ убывает, $(0, 0)$—точка перегиба, на $(-1, 0)$ выпукла вверх, на $(0, 1)$ выпукла вниз. Вторая ветвь $0<x\leqslant 1$, $y\geqslant 0$; $y=0$ при $x=1$; асимптота $x=1$; $(1, 0)$—краевой минимум; на $(0, 1)$ убывает; $\left(\sqrt{15}/4, \frac{2}{3}\sqrt{5/3}\right)$—точка перегиба; на $(0, \sqrt{15}/4)$ выпукла вниз; на $(\sqrt{15}/4, 1)$ выпукла вверх. Третья ветвь симметрична со второй относительно начала координат. Кривая в точках $(-1, 0)$ и $(1, 0)$ имеет вертикальные касательные $x=-1$ и $x=1$. **194.** Кривая состоит из трех ветвей. Первая ветвь $-1\leqslant x\leqslant 1$, $y(-x)=-y(x)$; $y=0$ при $x=0$, $y(-1)=5$, $y(1)=-5$; краевой максимум $(-1, 5)$; краевой минимум $(1, -5)$; на $(-1, 1)$ убывает; $(0, 0)$—точка перегиба; на $(-1, 0)$ выпукла вниз; на $(0, 1)$ выпукла вверх. Вторая ветвь $0<x\leqslant 1$; $y(1)=-5$; $y(2\sqrt{6}/7)=0$; асимптота $x=0$; $(2\sqrt{2}/3, 4\sqrt{2})$—точка минимума; на $(0, 2\sqrt{2}/3)$ убывает; на $(2\sqrt{2}/3, 1)$ возрастает; выпукла вниз. Третья ветвь симметрична со второй ветвью относительно начала координат. Кривая имеет в точках $(-1, 5)$ и $(1, -5)$ вертикальные касательные $x=-1$ и $x=1$ и две двойные точки—пересечение первой ветви со второй и третьей. **195.** Кривая состоит из трех ветвей. Первая

ветвь $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $y(1) = -2$; $y(-x) = -y(x)$; $y(0) = 0$, $y(-1) = 2$; краевой максимум $(-1, 2)$; краевой минимум $(1, -2)$; на $(-1, 1)$ убывает; $(0, 0)$ — точка перегиба; на $(-1, 0)$ выпукла вниз; на $(0, 1)$ выпукла вверх. Вторая ветвь $0 < x \leqslant 1$, $y(\sqrt{3}/2) = 0$; асимптота $x = 0$; $(1, -2)$ — краевой минимум; на $(0, 1)$ убывает; выпукла вниз. Третья ветвь симметрична со второй относительно начала координат. Точки возврата кривой $(-1, 2)$, $(1, 2)$; полукасательные $y = 2 - 12(x+1)$, $x \geqslant -1$ и $y = -2 - 12(x-1)$, $x \leqslant 1$. **196.** Кривая симметрична относительно прямой $y = -x$; при $x = 0$. На промежутке $(-\infty, 0]$ имеем $y = 0$ при $x = 0$, асимптота $y = 0$, минимум в точке $(-e/2, -1/2e)$, на $(-\infty, -e/2)$ убывает, на $(-e/2, 0)$ возрастает, $(-\sqrt{2}e^{\sqrt{2}}/2, -\sqrt{2}/2e^{\sqrt{2}})$ — точка перегиба, на $(-\infty, -\sqrt{2}e^{\sqrt{2}}/2)$ выпукла вверх, на $(-\sqrt{2}e^{\sqrt{2}}/2, 0)$ выпукла вниз. **197.** Кривая состоит из пяти ветвей. Первая ветвь $x < -1/2$, $y < 0$; асимптоты $y = 0$, $x = -1/2$; на $(-\infty, -1/2)$ убывает и выпукла вверх. Вторая ветвь $x \leqslant 0$, $y \leqslant 0$; $y(0) = 0$; асимптота $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$; возрастает и выпукла вниз. Третья ветвь $-1/2 < x \leqslant 0$, $y \geqslant 0$; $y(0) = 0$; асимптота $x = -1/2$; убывает и имеет точку перегиба x_0, соответствующей t_0 такому, что $t_0^3 + 3t_0 - 1 = 0$; на $(-1/2, x_0)$ выпукла вниз; на $(x_0, 0)$ выпукла вверх. Четвертая ветвь $x \geqslant 4$, $y \geqslant 2/3$; $y(4) = \frac{2}{3}$; асимптота $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$, возрастает и выпукла вверх. Пятая ветвь $x \geqslant 4$, $y \leqslant 2/3$; асимптота $y = 0$; убывает и выпукла вниз. Кривая имеет вертикальные касательные в точках $(0, 0)$ и $(4, 2/3)$ соответственно $x = 0$ и $x = 4$ и двойную точку — пересечение первой и второй ветвей. **198.** $x \neq 1$; $y = 0$ при $x = 0$; асимптоты $x = 1$, $y = 3x + 1$; локальный минимум в точке $(27/19, 27/4)$; на $(-\infty, 1)$ и $(27/19, +\infty)$ возрастает; на $(1, 27/19)$ убывает; $(8/133, 8/175)$ — точка перегиба; на $(-\infty, 8/133)$ выпукла вверх; на $(8/133, 1)$ и $(1, +\infty)$ выпукла вниз. **199.** Кривая состоит из четырех ветвей. Первая ветвь $x \leqslant 0$, $-1/2 < y \leqslant 0$; $y(0) = 0$; асимптота $y = -1/2$; возрастает; выпукла вниз. Вторая ветвь $x \leqslant 0$, $y \leqslant 0$; $y(0) = 0$; асимптота $y = 2x + \frac{1}{2}$; возрастает; выпукла вверх. Третья ветвь $x > 1$, $y > 0$; асимптоты $x = 1$, $y = 2x + \frac{1}{2}$; минимум в $(4/3, 4)$; на $(1, 4/3)$ убывает; на $(4/3, +\infty)$ возрастает; выпукла вниз. Четвертая ветвь $x > 1$, $y < 0$; асимптоты $x = 1$, $y = -1/2$; возрастает; выпукла вверх; $(0, 0)$ — точка возврата кривой с полукасательной $y = x$, $x \leqslant 0$.

Глава IV
ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

§ 1. ОБЩИЕ СВОЙСТВА ЧИСЛОВЫХ МНОЖЕСТВ НА ПРЯМОЙ

Множества обозначим большими буквами латинского алфавита. Знак «$\cup$» обозначает объединение, знак «$\cap$» — пересечение, а знак «$\setminus$» — разность множеств. Для любого множества M через CM обозначим дополнение множества M до всей прямой.

1. Доказать, что каждое из условий $A\cap B=A$ и $A\cup B=B$ необходимо и достаточно для того, чтобы $A\subset B$.

2. Доказать, что если $A\setminus B=D$, то $A\subset(B\cup D)$.

3. Привести пример таких множеств A и B, что $A\neq B\cup(A\setminus B)$.

4. Доказать, что если $A=B\cup D$, то $A\setminus B\subset D$.

5. Привести пример таких множеств A, B, D, что $A=B\cup D$, но $A\setminus B\neq D$.

6. Доказать, что $A\setminus(B\cup E)=(A\setminus B)\setminus E$.

7. Привести пример таких множеств A, B, E, D, что $D=A\cup\cup(B\setminus E)$, но $D\neq(A\cup B)\setminus E$.

8. Доказать, что если $D=A\cup(B\setminus E)$, то $(A\cup B)\setminus E\subset D$.

9. Доказать, что $(A_1\cup A_2)\setminus(B_1\cup B_2)\subset(A_1\setminus B_1)\cup(A_2\setminus B_2)$.

10. Привести пример таких множеств A_1, A_2, B_1, B_2, что $(A_1\cup A_2)\setminus(B_1\cup B_2)\neq(A_1\setminus B_1)\cup(A_2\setminus B_2)$.

11. Доказать, что

а) $C(A\cup B)=CA\cap CB$;

б) $C(A\cap B)=CA\cup CB$.

12. Доказать, что

а) $C((A\cup B)\setminus(A\cap B))=(C(A\cup B))\cup(A\cap B)$,

б) $(A\cup CB)\cap(CA\cup B)=(A\cap B)\cup(CA\cap CB)$.

Пусть E — подмножество числовой прямой. Через E' обозначим множество предельных точек множества E, через $\bar{E}$ — замыкание E, т. е. пересечение всех замкнутых множеств, содержащих E, через ∂E — множество граничных точек E.

13. Привести примеры множества E, удовлетворяющего соотношению:

а) $E=E'$; б) $E'\subset E$ и $E\setminus E'\neq\varnothing$; в) $E\subset E'$ и $E'\setminus E\neq\varnothing$; г) $E'-E\neq\varnothing$ и $E\setminus E'\neq\varnothing$; д) $E\cap E'=\varnothing$; е) $\sup E\subset E$; ж) $\sup E\,\overline{\in}\,E$; з) $\sup E\in E\setminus E'$.

14. Привести пример множества, имеющего:
а) ровно одну предельную точку; б) ровно шесть предельных точек.

15. Дано множество E на прямой, причем

$$\inf_{n,m,n\neq m}|x_n-x_m|=a>0,$$

где x_n, x_m — любые точки E. Доказать, что множество E не имеет предельных точек.

16. Может ли множество, состоящее только из изолированных точек, иметь предельные точки.

17. Доказать, что, для того чтобы множество было замкнутым, необходимо и достаточно, чтобы оно содержало все свои точки прикосновения, т. е. точки, любые окрестности которых имеют непустые пересечения с множеством.

18. Доказать, что для любого множества E имеем $\bar{E}=E\cup E'$.

19. Доказать, что если множество включается в производное (т. е. в множество всех предельных точек этого множества), то оно не содержит изолированных точек.

20. Является ли замкнутым множеством множество рациональных точек отрезка $[0, 1]$.

21. Найти множество предельных точек множества рациональных чисел.

22. Привести пример множества, не являющегося ни замкнутым, ни открытым.

23. Найти множество предельных точек множества иррациональных чисел, больших чем два.

24. Привести пример множества, являющегося одновременно открытым и замкнутым.

25. Доказать, что изолированная точка множества E является граничной.

26. Доказать, что если предельная точка не принадлежит множеству, то она является граничной.

27. Доказать, что $\partial(A\cup B)\subset\partial A\cup\partial B$.

28. Доказать, что $\partial(A\cap B)\subset\partial A\cup\partial B$.

29. Привести пример множества A такого, что A'' непусто, а A''' пусто, где $A''=(A')'$ и $A'''=(A'')'$.

30. Пусть f отображает отрезок $[0, 1]$ на множество $\{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6\}$.

Доказать, что по крайней мере для одного из чисел c_i $(1\leqslant i\leqslant 6)$ множество $f^{-1}(c_i)$ имеет предельную точку. Построить пример отображения f такого, чтобы только одно из таких множеств имело предельную точку; чтобы ровно три таких множества имели предельную точку.

31. Пусть $E=\bigcup\limits_{n=1}^{N} E_n$. Доказать, что $E'=\bigcup\limits_{n=1}^{N} E_n'$.

32. Привести пример последовательности множеств E_n таких, что для любого n $E_n'=\varnothing$, а $E'\neq\varnothing$, где $E=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$.

33. Доказать, что непустое пересечение любого семейства замкнутых множеств замкнуто.

34. Доказать, что сумма конечного числа замкнутых множеств замкнута.

35. Привести пример последовательности замкнутых множеств F_n такой, что множество $A=\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ не замкнуто; в частности, чтобы множество A было интервалом.

36. Доказать, что сумма любого семейства открытых множеств является открытым множеством.

37. Доказать, что непустое пересечение конечного числа открытых множеств является открытым множеством.

38. Привести пример последовательности открытых множеств G_n такой, что множество $A=\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ — не открытое; в частности, множество A — отрезок.

39. Найти замыкание множества $\{2^{p/q}\}$, где p и q натуральные.

40. Доказать, что множество граничных точек любого множества замкнуто.

41. Какова мощность множества всех квадратов на плоскости с рациональными координатами вершин?

42. Доказать, что множество непересекающихся интервалов на прямой не более чем счетно.

43. Доказать, что если расстояние между любыми двумя точками множества A больше единицы, то множество A не более чем счетно.

44. Доказать, что множество всех многочленов $P(x)=a_0+$ $+a_1x+\ldots+a_nx^n$ с рациональными коэффициентами счетно.

45. Известно, что множество предельных точек множества A счетно.

Доказать, что множество A счетно.

46. Пусть $E=\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ и каждое из E_n содержит только изолированные точки. Доказать, что E не более чем счетно.

47. Доказать, что для любого счетного множества $A=\{x_n\}$ существует число a такое, что множество $\{x_n+a\}\cap A$ пусто.

48. Представить множество натуральных чисел как счетное объединение непересекающихся счетных множеств.

49. Построить взаимно однозначное отображение отрезка $[0, 1]$ на интервал $(0, 1)$.

50. Построить взаимно однозначное отображение $[0, +\infty)$ на (a, b).

51. Доказать равномощность отрезка $[0, 1]$ и квадрата с вершинами $O(0; 0)$, $A(0; 1)$, $B(1; 0)$; $C(1; 1)$.

52. Доказать, что всякое несчетное множество содержит несчетное ограниченное подмножество.

53. Привести пример счетного множества, каждое ограниченное подмножество которого конечно.

54. Привести пример счетного множества, имеющего ровно три предельные точки.

55. Доказать, что все точки счетного множества граничные.

56. Привести пример последовательности вложенных интервалов, имеющих одну точку пересечения.

57. Привести пример последовательности вложенных интервалов, содержащих в пересечении отрезок.

58. Привести пример последовательности вложенных интервалов (a_n, b_n) такой, что $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n) = \varnothing$. При каком дополнительном условии можно утверждать, что последовательность вложенных интервалов имеет непустое пересечение?

59. Пусть $[a, b] = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$, где F_n — замкнутые множества. Доказать, что существуют отрезок $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ и число n_0 такие, что $F_{n_0} \cap [\alpha, \beta] = [\alpha, \beta]$.

60. Привести пример последовательности вложенных отрезков $[a_n, b_n]$ такой, что множество $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$ содержит не менее двух точек.

61. Доказать, что для последовательности вложенных отрезков $[a_n, b_n]$ множество $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$ есть или точка, или отрезок.

62. Дано множество $E = \left\{0;\ 1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{8},\ \ldots,\ \frac{1}{2^n};\ \ldots\right\}$ и система интервалов $(-\varepsilon, \varepsilon)$ и $((1-\varepsilon)/2^n, (1+\varepsilon)/2^n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, где $0 < \varepsilon < 1/2$. Выделить конечную подсистему, покрывающую E.

63. Дано множество $E = \left\{1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{4};\ \ldots,\ \frac{1}{2^n},\ \ldots\right\}$ и система интервалов $(-\varepsilon, \varepsilon)$ и $((1-\varepsilon)/2^n, (1+\varepsilon)/2^n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, $0 < \varepsilon < 1/2$. Можно ли выбрать конечное подпокрытие из этой системы интервалов?

64. Дано множество $E = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$ и система интервалов $(n-\varepsilon, n+\varepsilon)$, $n = 1, 2, \ldots$, $0 < \varepsilon < 1/2$. Можно ли выбрать конечное подпокрытие из этой системы интервалов?

65. Привести пример покрытия отрезка системой отрезков, из которых нельзя выбрать конечную систему покрытия.

66. Привести пример покрытия интервала системой интервалов, из которых нельзя выбрать конечную систему покрытия.

67. Привести пример покрытия интервала бесконечной системой отрезков, из которых нельзя выбрать конечного покрытия.

68. Привести пример покрытия числовой прямой интервалами, не допускающего конечного подпокрытия.

69. Доказать, что если из всякого покрытия множества системой интервалов можно выбрать конечное подпокрытие, то множество ограничено (т. е. содержится в некотором отрезке числовой прямой).

§ 2. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ИХ СВОЙСТВА

70. Какое свойство последовательности определяет следующее высказывание:

$\forall n \in N \ \exists A > 0$, такое, что $|a_n| \leqslant A$.

71. Доказать, что если некоторая подпоследовательность монотонной последовательности ограничена, то и сама последовательность ограничена.

72. Привести пример неограниченной последовательности, у которой есть ограниченная подпоследовательность.

73. Привести пример последовательности, у которой нет ограниченной подпоследовательности.

74. Доказать, что у любой последовательности есть монотонная подпоследовательность.

75. Доказать, что если у последовательности $\{a_n\}$ нет конечных частичных пределов, то последовательность $\{|a_n|\}$ стремится к $+\infty$.

76. Привести пример последовательности $\{a_n\}$ такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = A$, а предел последовательности $\{a_n\}$ не существует.

Пусть $\{a_n\}$ — некоторая последовательность и A — множество значений этой последовательности.

77. Показать, что предельная точка A является частичным пределом последовательности $\{a_n\}$.

78. Привести пример последовательности $\{a_n\}$ такой, что точка $a = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n$ не является предельной точкой множества A.

79. Привести пример последовательности $\{a_n\}$ такой, что ни один из ее частичных пределов не принадлежит A.

80. Показать, что если b есть частичный предел последовательности $\{a_n\}$, то b принадлежит $\bar{A}$.

81. Дана последовательность $\{a_n\}$. Построить последовательность $\{b_n\}$, для которой каждое из a_i является ее частичным пределом. Может ли последовательность $\{b_n\}$ иметь частичные пределы, отличные от a_i?

82. Пусть последовательность $\{a_n\}$ сходится. Является ли сходящейся последовательность $\{a_{n+1} - a_n\}$?

83. Построить пример сходящейся последовательности $\{a_n\}$, для которой последовательность $\left\{\frac{a_n}{a_{n+1}}\right\}$ расходится. При каком условии на $\{a_n\}$ последовательность $\left\{\frac{a_n}{a_{n+1}}\right\}$ обязательно сходится?

84. Привести пример последовательности $\{a_n\}$ такой, что $a_n \to +\infty$ и

а) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n) = 10$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n) = +\infty$;

в) последовательность $\{a_{n+1} - a_n\}$ не имеет предела ни конечного, ни бесконечного;

г) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$;

д) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 3$;

е) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty$;

ж) последовательность $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ не имеет предела.

85. Привести пример сходящейся последовательности $\{a_n\}$, для которой $n(a_{n+1}-a_n)$ стремится к бесконечности.

86. Доказать, что если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, то $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |A|$.

87. Доказать, что если у последовательности $\{a_n\}$ есть две подпоследовательности $\{a_{n_k}\}$ и $\{a_{m_k}\}$, причем объединение индексов n_k и m_k есть все N и $a_{n_k} \to a$, $a_{m_k} \to a$, то и $a_n \to a$.

88. Доказать, что для сходимости последовательности $\{a_n\}$ необходимо и достаточно, чтобы сходилась любая ее подпоследовательность.

89. Доказать, что для сходимости монотонной последовательности достаточно сходимости некоторой ее подпоследовательности.

90. Дана последовательность $\{a_n\}$, у которой все подпоследовательности a_{2^i}, $a_{3\cdot 2^i}$, $a_{5\cdot 2^i}$, ..., $i = 1, 2, \ldots$ сходятся к одному и тому же числу b. Что можно сказать о сходимости последовательности $\{a_n\}$?

91. Привести примеры последовательностей, удовлетворяющих соотношениям:

а) $\inf a_n < \varliminf\limits_{n\to\infty} a_n$;

б) $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n = \sup a_n$;

в) $\inf a_n = \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n$.

92. Доказать, что для любой последовательности

$$\inf a_n \leqslant \varliminf_{n\to\infty} a_n \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} a_n \leqslant \sup a_n.$$

93. Доказать, что сходящаяся последовательность достигает либо своей нижней грани, либо своей верхней грани, либо той и другой.

Построить примеры последовательностей этих типов.

94. Доказать, что если $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n < \sup a_n$, то существует такое n_0, что $a_{n_0} = \sup a_n$.

95. Доказать, что

а) $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n + \varliminf\limits_{n\to\infty} b_n \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} a_n + \varlimsup\limits_{n\to\infty} b_n$;

б) $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \varliminf\limits_{n\to\infty} b_n \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \varlimsup\limits_{n\to\infty} b_n \quad (a_n \geqslant 0,\ b_n \geqslant 0)$;

в) $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n + \varlimsup\limits_{n\to\infty} b_n \leqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) \leqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n + \varlimsup\limits_{n\to\infty} b_n$;

г) $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \varlimsup\limits_{n\to\infty} b_n \leqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) \leqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \varlimsup\limits_{n\to\infty} b_n \quad (a_n \geqslant 0,\ b_n \geqslant 0)$.

96. Привести примеры последовательностей, для которых в соотношениях предыдущей задачи имеют место строгие неравенства.

97. Доказать, что если последовательность $\{a_n\}$ сходится, то для любой последовательности $\{b_n\}$ имеем

а) $\varlimsup\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \varlimsup\limits_{n\to\infty} b_n$;

б) $\varliminf\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \varliminf\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \varliminf\limits_{n\to\infty} b_n \quad (\lim\limits_{n\to\infty} a_n > 0)$.

98. Доказать, что если последовательность $\{a_n\}$ такова, что для любой последовательности $\{b_n\}$ или

а) $\varliminf\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \varliminf\limits_{n\to\infty} a_n + \varliminf\limits_{n\to\infty} b_n$,

или

б) $\varlimsup\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \varlimsup\limits_{n\to\infty} b_n \quad (a_n > 0)$,

то последовательность $\{a_n\}$ сходится.

99. Пусть дана последовательность положительных чисел $\{a_n\}$ и $\varliminf\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > q > 0$.

Доказать, что существуют числа C и N такие, что $a_n > Cq^n$ для любого $n > N$.

100. Пусть дана последовательность положительных чисел $\{a_n\}$ и $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < q$.

Доказать, что $a_n = o(q^n)$, $n \to \infty$.

101. Пусть последовательность $\{a_n\}$ сходится, а последовательность $\{b_n\}$ расходится. Что можно сказать о сходимости последовательностей $\{a_n + b_n\}$ и $\{a_n b_n\}$?

102. Привести примеры двух последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ таких, что последовательность $\{a_n\}$ расходится, а последовательности $\{b_n\}$ и $\{a_n b_n\}$ сходятся. При каком условии на предел $\{b_n\}$ последовательность $\{a_n b_n\}$ может сходиться, если последовательность $\{a_n\}$ расходится.

103. Доказать, что если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = A.$$