

руема, то  $S_D = \int_{T_0}^{T_1} x(t) y'(t) dt$ . Объединяя эти две формулы, получаем следующую формулу:

$$S_D = \frac{1}{2} \int_{T_0}^{T_1} (x(t) y'(t) - y(t) x'(t)) dt.$$

Можно доказать, что все эти три формулы справедливы и в более общем случае, когда непрерывная замкнутая кривая  $\Gamma: x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $t \in [T_0; T_1]$ , проходится при изменении  $t$  от  $T_0$  до  $T_1$  таким образом, что ограничиваемая этой кривой область  $D$  остается слева. Какую из них удобнее применять, зависит от конкретного вида функций  $x = x(t)$  и  $y = y(t)$ .

Пример 3. Найдем площадь области, ограниченной петлей кривой

$$x = a(t^2 - 2t), \quad y = a(t^2 - 1)(t - 3), \quad a > 0.$$

Решение. Петля кривой проходится в положительном направлении при изменении  $t$  от  $-1$  до  $3$  (см. рис. 45). Для вычисления площади можно применить любую из трех формул, соответственно имеем

$$\begin{aligned} S &= - \int_{T_0}^{T_1} y(t) x'(t) dt = - \int_{-1}^3 a^2 (t^2 - 1) (t - 3) (2t - 2) dt = \\ &= -2a^2 \int_{-1}^3 (t^4 - 4t^3 + 2t^2 + 4t - 3) dt = \\ &= -2a^2 \left( \frac{t^5}{5} - t^4 + \frac{2}{3} t^3 + 2t^2 - 3t \right) \Big|_{-1}^3 = 17 \frac{1}{15} a^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S &= \int_{T_0}^{T_1} x(t) y'(t) dt = \int_{-1}^3 a^2 (t^2 - 2t) (3t^2 - 6t - 1) dt = \\ &= a^2 \left( \frac{3}{5} t^5 - 3t^4 + \frac{11}{3} t^3 + t^2 \right) \Big|_{-1}^3 = 17 \frac{1}{15} a^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_{T_0}^{T_1} (x(t) y'(t) - y(t) x'(t)) dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^3 a^2 (t^4 - 4t^3 + 7t^2 - 6t + 6) dt = \\ &= \frac{a^2}{2} \left( \frac{1}{5} t^5 - t^4 + \frac{7}{3} t^3 - 3t^2 + 6t \right) \Big|_{-1}^3 = 17 \frac{1}{15} a^2. \end{aligned}$$

**Пример 4.** Найдем площадь области, ограниченной кривой  $x = at^2/(1+t^4)$ ,  $y = at^3/(1+t^4)$ ,  $a > 0$ .

**Решение.** Кривая образует две симметричные петли (см. рис. 46). Верхняя из них проходится в положительном направлении.

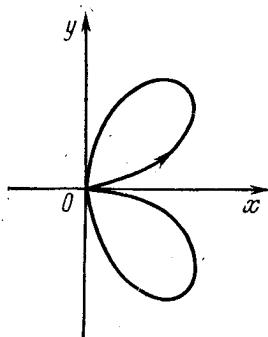


Рис. 46

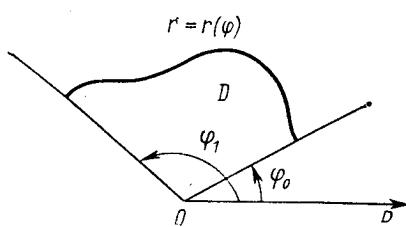


Рис. 47

нии при изменении  $t$  от 0 до  $+\infty$ . Найдем площадь области, ею ограниченной. В данном случае удобно применить для вычисления симметричную формулу

$$S_D = \frac{1}{2} \int_{T_0}^{T_1} [x(t)y'(t) - y(t)x'(t)] dt.$$

Так как  $y = tx$ , то  $xy' - yx' = x(x + tx') - tx \cdot x' = x^2$ , откуда

$$S_D = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{a^2 t^4}{(1+t^4)^2} dt = \frac{-a^2 t}{8(1+t^4)} \Big|_0^{+\infty} + \frac{a^2}{8} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^4} = \frac{a^2 \pi}{16\sqrt{2}}.$$

Следовательно, площадь всей области равна  $\pi a^2 / 8\sqrt{2}$ . Отметим, что рассматриваемая часть кривой есть образ луча  $t \geq 0$ , поэтому площадь можно вычислить с помощью несобственного интеграла:

$$\int_0^{+\infty} \Phi(t) dt. \text{ Об интегралах такого вида см. стр. 246.}$$

Рассмотрим на плоскости полярную систему координат. В этом случае аналогом криволинейной трапеции будет *криволинейный сектор*: множество точек

$$M(r, φ) : φ_0 \leq φ \leq φ_1, (φ_1 - φ_0 \leq 2π), 0 \leq r \leq r(φ),$$

где  $r(φ)$  — непрерывная функция на  $[φ_0, φ_1]$  (см. рис. 47).

Площадь  $S_D$  криволинейного сектора  $D = \{(r, \varphi) : \varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_1, 0 \leq r \leq r(\varphi)\}$  вычисляется по формуле

$$S_D = \frac{1}{2} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} r^2(\varphi) d\varphi.$$

Пример 5. Найдем площадь области, ограниченной кривой  $r = a \sin 3\varphi$ ,  $a > 0$ .

Решение. Кривая образует три симметричные петли, каждая из которых ограничивает криволинейный сектор (см. рис. 48).

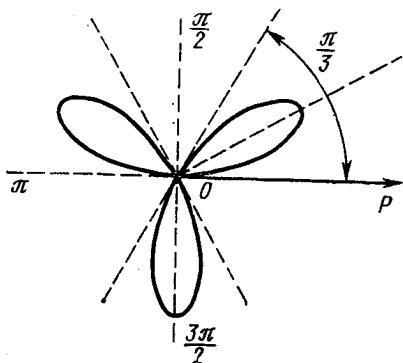


Рис. 48

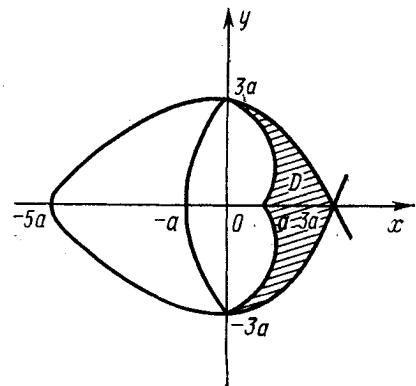


Рис. 49

Рассмотрим первый из них:

$$D_1 = \{(r, \varphi) : 0 \leq \varphi \leq \pi/3, 0 \leq r \leq a \sin 3\varphi\}.$$

Площадь его равна  $1/3$  площади всей области, ограниченной данной кривой. Следовательно,

$$S_D = 3S_{D_1} = \frac{3}{2} \int_0^{\pi/3} a^2 \sin^2 3\varphi d\varphi = \frac{\pi a^3}{4}.$$

Пример 6. Найдем площадь области, лежащей внутри петли кривой  $x = a(t^2 - 2t)$ ,  $y = a(t^2 - 1)(t - 3)$  и вне кривой  $r = a(3 - 2 \cos \varphi)$ ,  $a > 0$  (системы координат совмещены).

Решение. Чтобы выяснить взаимное расположение этих кривых, сравним их с окружностью

$$S = \{(x, y) : x^2 + 2ax + y^2 - 9a^2 = 0\}.$$

Для точек первой кривой имеем

$$\begin{aligned} x^2 + 2ax + y^2 - 9a^2 &= a^2 t \cdot (t-2) [(t^2 - 2t - 2)^2 + 1] = \\ &= a^2 x [(t^2 - 2t - 2)^2 + 1]. \end{aligned}$$

Следовательно, часть этой кривой, находящаяся слева от оси  $OY$  ( $x < 0$ ), лежит внутри окружности  $S$ , а часть кривой, находящаяся справа от оси  $OY$  ( $x > 0$ ), — вне этой окружности. Для точек второй кривой, лежащих слева от оси  $OY$ , имеем  $\pi/2 < \varphi < 3\pi/2$ , следовательно,  $r > 3a$  и  $r^2 = 3ar - 2ar \cos \varphi > 9a^2 - 2ar \cos \varphi$ . Переходя к декартовой системе координат, получим, что для всех точек второй кривой, лежащих слева от оси  $OY$ , имеем  $x^2 + y^2 + 2ax - 9a^2 > 0$ , т. е. слева от оси  $OY$  часть этой кривой лежит вне окружности  $S$ . Если же  $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$ , то  $r < 3a$  и  $r^2 = 3ar - 2ar \cos \varphi < 9a^2 - 2ar \cos \varphi$ , т. е.  $x^2 + y^2 + 2ax - 9a^2 < 0$ , значит, справа от оси  $OY$  часть этой кривой лежит внутри окружности. Итак, данная область лежит справа от оси  $OX$  (см. рис. 49). Так как она симметрична относительно оси  $OX$ , то ее площадь  $S_D$  равна удвоенной разности площади криволинейной трапеции  $D_1 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 3a, 0 \leq y \leq y(t(x)), -1 \leq t \leq 0\}$  и площади криволинейного сектора

$$D_2 = \{(r, \varphi) : 0 \leq \varphi \leq \pi/2, 0 \leq r \leq a(3 - 2 \cos \varphi)\}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} S_D = 2 & \left[ \int_{-1}^0 a^2 (3t^4 - 12t^3 + 11t^2 + 2t) dt - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} a^2 (3 - 2 \cos \varphi)^2 d\varphi \right] = 2a^2 \left( \frac{3}{5} t^5 - 3t^4 + \frac{11}{3} t^3 + t^2 \right) \Big|_{-1}^0 - \\ & - a^2 \int_0^{\pi/2} (9 - 12 \cos \varphi + 4 \cos^2 \varphi) d\varphi = a^2 \left( 24 \frac{8}{15} - \frac{11}{2} \pi \right). \end{aligned}$$

### § 3. ОБЪЕМ ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

Пусть  $D$  — криволинейная трапеция:

$$D = \{(x, y) : 0 \leq a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq y(x), y \in C[a, b]\};$$

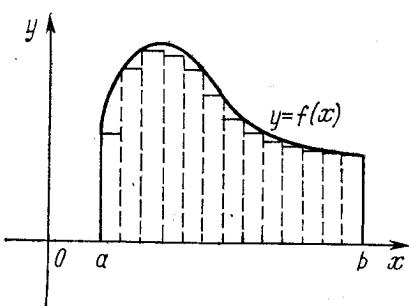


Рис. 50

$V_{Ox}$  — тело, полученное вращением  $D$  вокруг оси  $OX$ . Для разбиения  $T : a = x_0 < x_1 < \dots < x_k < x_{k+1} < \dots < x_n = b$  отрезка  $[a, b]$  обозначим через  $D_T$  фигуру, составленную из прямоугольников, основаниями которых являются отрезки  $[x_k, x_{k+1}]$ , а высотами — наименьшие значения  $y$  на  $[x_k, x_{k+1}]$ . Фигура  $D_T$  содержится в криволинейной трапеции  $D$  (см. рис. 50).

При вращении  $D_T$  вокруг оси  $OX$  получим тело  $V_{T^{OX}}$ , содержащееся внутри тела  $V^{OX}$ . Тело  $V_{T^{OX}}$  составлено из прямых круговых цилиндров, образованных вращением прямоугольников, составляющих фигуру  $D_T$ . Высота каждого такого цилиндра есть  $(x_{k+1} - x_k)$ , радиус основания —  $m_k = \min_{[x_k, x_{k+1}]} y(x)$ , поэтому  $|V_{T^{OX}}| =$

объем тела  $V_{T^{OX}}$  — равен  $\sum_{k=0}^{n-1} \pi m_k^2 (x_{k+1} - x_k)$ . Объемом  $|V^{OX}|$  тела  $V^{OX}$  назовем  $\sup_T |V_{T^{OX}}|$ . Так как  $|V_{T^{OX}}|$  есть нижняя сумма Дарбу непрерывной функции  $2\pi y^2(x)$ , то

$$|V^{OX}| = \sup_T |V_{T^{OX}}| = \pi \int_a^b y^2(x) dx. \quad (1)$$

При вращении  $D_T$  вокруг оси  $OY$  каждый из прямоугольников, составляющих  $D_T$ , образует цилиндрическое кольцо, высота которого есть  $m_k$ , а основанием является кольцо с внешним радиусом  $x_{k+1}$  и внутренним  $x_k$ . Объем такого цилиндрического кольца равен  $\pi m_k (x_{k+1}^2 - x_k^2)$ .

Тело  $V_{T^{OY}}$ , полученное вращением  $D_T$  вокруг оси  $OY$ , есть объединение этих цилиндрических колец, поэтому его объем  $|V_{T^{OY}}|$  равен

$$\sum_{k=0}^{n-1} \pi m_k (x_{k+1}^2 - x_k^2).$$

Представим разность  $x_{k+1}^2 - x_k^2$  в виде

$$2x_k(x_{k+1} - x_k) + (x_{k+1} - x_k)^2.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \pi m_k (x_{k+1}^2 - x_k^2) &= \sum_{k=0}^{n-1} 2\pi m_k x_k (x_{k+1} - x_k) + \\ &+ \sum_{k=0}^{n-1} \pi m_k (x_{k+1} - x_k)^2 = \sum_{k=0}^{n-1} 2\pi m_k x_k \Delta x_k + \sum_{k=0}^{n-1} \pi m_k \Delta x_k^2. \end{aligned}$$

Первая сумма есть нижняя сумма Дарбу для непрерывной функции  $2\pi xy(x)$ .

Если параметр разбиения  $T$  есть  $\lambda(T)$ , то для второй суммы имеем

$$\sum_{k=0}^{n-1} \pi m_k \Delta x_k^2 < \lambda(T) \sum_{k=0}^{n-1} \pi m_k \Delta x_k.$$

Следовательно, при  $\lambda(T) \rightarrow 0$  первая сумма стремится к  $2\pi \int_a^b xy(x) dx$ , а вторая стремится к нулю, так как

$$\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \pi m_k \Delta x_k = \int_a^b \pi y(x) dx.$$

Объемом  $|V^{OY}|$  тела  $V^{OY}$  будем называть  $\sup_T |V_T^{OY}|$ . Из предыдущего следует, что

$$|V^{OY}| = 2\pi \int_a^b xy(x) dx.$$

Пусть функция  $y(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ . Рассмотрим области

$$D_1 = \{(x, y) : a < x < b < 0, 0 < y < y(x)\};$$

$$D_2 = \{(x, y) : 0 < a < x < b, y(x) < y < 0\};$$

$$D_3 = \{(x, y) : a < x < b < 0, y(x) < y < 0\}$$

и тела  $V_1^{OX}$ ,  $V_2^{OX}$ ,  $V_3^{OX}$ ,  $V_1^{OY}$ ,  $V_2^{OY}$ ,  $V_3^{OY}$ , полученные вращением областей  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $D_3$  вокруг осей  $OX$  и  $OY$  соответственно. Повторяя вышеприведенные рассуждения, получаем, что объемы этих тел соответственно равны:

$$|V_i^{OX}| = \pi \int_a^b y^2(x) dx, \quad i = 1, 2, 3;$$

$$|V_i^{OY}| = 2\pi \int_a^b |xy(x)| dx, \quad i = 1, 2, 3.$$

Пусть  $D$  — стандартная относительно оси  $OX$  область:

$$D = \{(x, y) : a < x < b, y_1(x) < y < y_2(x), y_1(x) \in C[a, b], \\ y_2(x) \in C[a, b]\}.$$

Если ось  $OX$  не пересекает  $D$ , то через  $V^{OY}$  обозначим тело, образованное вращением  $D$  вокруг оси  $OX$ ; если ось  $OY$  не пересекает  $D$ , то через  $V^{OY}$  обозначим тело, образованное вращением  $D$  вокруг оси  $OY$ . Объемы этих тел вычисляются как разность или сумма объемов тел, полученных при вращении соответствующих областей вида  $D_1$ ,  $D_2$  и  $D_3$ , рассмотренных выше, в зависимости от знаков чисел  $a$ ,  $b$  и знаков функций  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$ . Например, если  $a < b < 0$ ,  $y_1(x) < 0$  и  $y_2(x) > 0$  для  $x \in [a, b]$ , то  $|V^{OY}|$  есть сумма

объемов  $|V_1^{OY}|$  и  $|V_3^{OY}|$  тел  $V_1^{OY}$  и  $V_3^{OY}$ , полученных от вращения областей  $D_1=\{(x, y): a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq y_2(x)\}$  и  $D_3=\{(x, y): a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq 0\}$  вокруг оси  $OY$ .

Из этих соображений получаем, что

$$\begin{aligned} |V^{OX}| &= \pi \int_a^b |y_2^2(x) - y_1^2(x)| dx, \\ |V^{OY}| &= 2\pi \int_a^b |x| (y_2(x) - y_1(x)) dx. \end{aligned} \quad (1)$$

Пусть теперь  $D$  — область, ограниченная непрерывной замкнутой кривой

$$\Gamma: x=x(t), y=y(t), t \in [T_0, T_1], x(T_0)=x(T_1), y(T_0)=y(T_1),$$

причем при изменении  $t$  от  $T_0$  до  $T_1$  кривая  $\Gamma$  проходится так, что область  $D$  остается слева. Так же, как и при вычислении площадей, выводится, что если  $D$  не пересекается с соответствующей осью координат и функции  $x$  и  $y$  непрерывно дифференцируемы на  $[T_0, T_1]$ , то

$$\begin{aligned} |V^{OX}| &= -\pi \int_{T_0}^{T_1} y^2(t) x'(t) dt = 2\pi \int_{T_0}^{T_1} |x(t)y(t)| y'(t) dt, \\ |V^{OY}| &= -2\pi \int_{T_0}^{T_1} |x(t)y(t)| x'(t) dt = \pi \int_{T_0}^{T_1} x^2(t) y'(t) dt. \end{aligned}$$

Если кривая  $\Gamma: x=x(t), y=y(t), t \in [T_0, T_1]$ , не замкнута, но

$$y(t) \geq 0, t \in [T_0, T_1], y(T_0)=y(T_1)=0,$$

$$x(T_0)=b, x(T_1)=a, b>a,$$

и область  $D$  ограничена кривой  $\Gamma$  и отрезком  $[a, b]$  оси  $OX$ , то  $D$  можно рассматривать как область, ограниченную непрерывной замкнутой кривой  $\Gamma_1: x=x_1(t), y=y_1(t), t \in [T_0, T_2], T_2 > T_1$ , где

$$x_1(t) = \begin{cases} x(t), & t \in [T_0, T_1], \\ a + \frac{b-a}{T_2-T_1}(t-T_1), & t \in (T_1, T_2], \end{cases} \text{ и } y_1(t) = \begin{cases} y(t), & t \in [T_0, T_1], \\ 0, & t \in (T_1, T_2]. \end{cases}$$

Тогда при изменении  $t$  от  $T_0$  до  $T_1$  кривая  $\Gamma_1$  проходится так, что область  $D$  остается слева.

Следовательно, объем  $|V^{OX}|$  тела  $V^{OX}$ , полученного при вращении такой области вокруг оси  $OX$ , вычисляется по формуле

$$|V^{OX}| = -\pi \int_{T_0}^{T_2} y_1^2(t) x'_1(t) dt = -\pi \int_{T_0}^{T_1} y^2(t) x'(t) dt$$

или по формуле

$$|V^{OX}| = 2\pi \int_{T_0}^{T_1} |x(t) y(t)| y'_t(t) dt.$$

Если область  $D$  не пересекается с осью  $OY$ , то объем  $|V^{OX}|$  тела  $V^{OX}$ , полученного при вращении  $D$  вокруг оси  $OY$ , вычисляется по формуле

$$|V^{OY}| = -2\pi \int_{T_0}^{T_1} |x_1(t) y_1(t)| x'(t) dt = -2\pi \int_{T_0}^{T_1} |x(t) y(t)| x'(t) dt$$

или по формуле

$$|V^{OY}| = \pi \int_{T_0}^{T_1} x^2(t) y'_t(t) dt.$$

Точно так же для области  $D$ , ограниченной кривой

$\Gamma: x = x(t), y = y(t), t \in [T_0, T_1], x(t) \geq 0, t \in [T_0, T_1], x(T_0) = x(T_1) = 0, y(T_0) = c, y(T_1) = d, d > c$ , и отрезком  $[c, d]$  оси  $OY$ , объемы  $|V^{OX}|$  и  $|V^{OY}|$  тел, полученных при вращении  $D$  относительно осей  $OX$  и  $OY$  соответственно, вычисляются по формулам

$$|V^{OX}| = -\pi \int_{T_0}^{T_1} y^2(t) x'(t) dt = 2\pi \int_{T_0}^{T_1} |x(t) y(t)| y'(t) dt,$$

$$|V^{OY}| = -2\pi \int_{T_0}^{T_1} |x(t) y(t)| x'(t) dt = \pi \int_{T_0}^{T_1} x^2(t) y'(t) dt.$$

Обращаем внимание, что приведенные формулы справедливы и для областей, не являющихся стандартными относительно любой из осей координат.

Если тело образовано вращением области  $D$  вокруг оси, не пересекающей область  $D$  и не являющейся одной из осей координат, то для вычисления объема полученного тела делают замену системы координат так, чтобы в новой системе одна из координатных осей совпала с осью вращения.

В частности:

а) если осью вращения является прямая  $y = l$ , не пересекающая область

$$D : \{a < x < b, y_1(x) < y < y_2(x)\},$$

то объем  $|V^l|$  тела  $V^l$ , полученного вращением  $D$  вокруг этой оси, вычисляется по формуле

$$|V^l| = \pi \int_a^b |(y_2 - l)^2 - (y_1 - l)^2| dx,$$

б) если осью вращения является прямая  $x=l$ , не пересекающая область

$$D : \{a < x < b, y_1(x) < y < y_2(x)\},$$

то объем  $|V^l|$  тела  $V^l$ , полученного вращением  $D$  вокруг этой оси, вычисляется по формуле

$$|V^l| = 2\pi \int_a^b (y_2 - y_1) |x - l| dx.$$

Обе эти формулы получаются переносом осей координат так, чтобы в первом случае ось  $l$  стала новой осью  $OX_1$ , а во втором — ось  $l$  стала новой осью  $OY_1$ .

Пример 1. Область  $D$  расположена в правой полуплоскости ( $x \geq 0$ ) и ограничена линиями  $y=x$  и  $y=2x-x^3$ . Найдем объемы тел, полученных при вращении области  $D$  (см. рис. 51) вокруг:

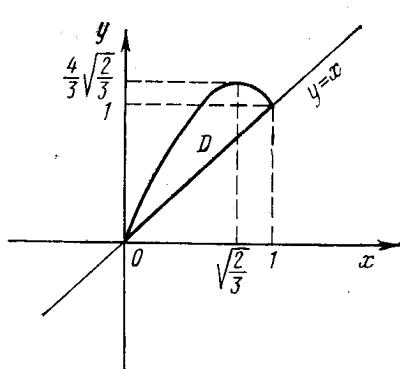


Рис. 51

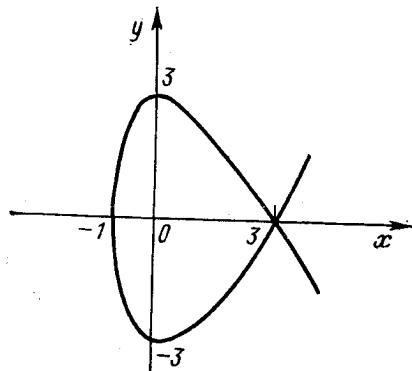


Рис. 52

а) оси  $OX$ ; б) оси  $OY$ ; в) горизонтальной касательной к верхней границе  $D$ ; г) прямой  $y=x$ .

Решение. Область  $D$  является стандартной относительно оси  $OX$ :

$$D = \{(x, y) : 0 < x < 1, x \leq y \leq 2x - x^3\},$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \text{а) } |V^{OX}| &= \pi \int_0^1 ((2x - x^3)^2 - x^2) dx = \pi \int_0^1 (x^6 - 4x^4 + 3x^2) dx = \\ &= \pi \left[ \frac{1}{7}x^7 - \frac{4}{5}x^5 + x^3 \right]_0^1 = \frac{12\pi}{35}, \end{aligned}$$

$$6) |V^{OY}| = 2\pi \int_0^1 x(2x - x^3 - x) dx = 2\pi \int_0^1 (x^2 - x^4) dx = \\ = 2\pi \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = \frac{4\pi}{15},$$

в) для функции  $y=2x-x^3$  горизонтальная касательная к ее графику проходит через точку  $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ , т. е. в этом случае осью вращения является прямая  $y=\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$ . Сделаем перенос осей координат, т. е. перейдем к координатам  $u, v$  так, что  $u=x, v=y-\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$ , тогда ось  $OU$  будет осью вращения, и в новой системе координат область  $D$  будет стандартной относительно оси  $OU$ :

$$D = \left\{ (u, v) : 0 \leq u \leq 1, u - \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} \leq v \leq 2u - u^3 - \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} \right\}.$$

Следовательно, объем  $|V^{OU}|$  искомого тела вычисляется по формуле

$$|V^{OU}| = \pi \int_0^1 \left[ \left( u - \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} \right)^2 - \left( 2u - u^3 - \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} \right)^2 \right] du = \\ = \pi \int_0^1 \left( -u^6 + 4u^4 - \frac{8}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}u^3 - 3u^2 + \frac{8}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}u \right) du = \\ = \pi \left( -\frac{1}{7} + \frac{4}{5} - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} - 1 + \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} \right) = \\ = \pi \left( \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{12}{35} \right),$$

г) сделаем поворот осей координат на  $\pi/4$ , т. е. перейдем от переменных  $x, y$  к переменным  $u, v$  по формулам

$$u = x \cos \pi/4 + y \sin \pi/4, \\ v = -x \sin \pi/4 + y \cos \pi/4. \quad (2)$$

Тогда  $u = \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}}, v = -\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}}$ , осью вращения станет ось  $OU$ .

Еще раз обратим внимание, что формула (1) имеет место для криволинейной трапеции. Поэтому если мы хотим ее использовать,

то необходимо показать, что область  $D$  и в новой системе координат является криволинейной трапецией. Покажем это для нашего случая.

Действительно, отрезок  $AB : A = (0, 0), B = (1, 1)$  прямой  $y=x$  перешел в отрезок  $[0, \sqrt{2}]$  оси  $OU$ .

Покажем теперь, что кривая  $\Gamma : 0 < x < 1, y = 2x - x^3$  является в новой системе координат графиком некоторой функции  $v = v(u)$  для  $0 < u < \sqrt{2}$ , т. е. что каждой точке  $M_0 = (u_0, 0), 0 < u_0 < \sqrt{2}$ , соответствует единственная точка  $M(u_0, v(u_0))$  на  $\Gamma$ , проекция которой на ось  $OU$  есть  $M_0$ . Действительно, в противном случае на кривой  $\Gamma$  нашлась бы по крайней мере одна пара точек  $M_1(x_1, y(x_1)), M_2(x_2, y(x_2))$  такая, что прямая  $M_1M_2$  была бы перпендикулярна к прямой  $y=x$  и, следовательно, выполнялось бы равенство

$$\frac{y(x_2) - y(x_1)}{x_2 - x_1} = -1, \quad 0 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant 1.$$

Но в силу теоремы Лагранжа имеем  $\frac{y(x_2) - y(x_1)}{x_2 - x_1} = y'(c)$ , где  $x_1 < c < x_2$ , и так как  $y'(x) = 2 - 3x^2 > -1$  для  $0 < x < 1$ , то такое равенство невозможно.

Поскольку

$$D = \{(u, v) : 0 < u < \sqrt{2}, 0 < v < v(u)\},$$

то объем  $|V^{OU}|$  тела, полученного при вращении области  $D$  относительно оси  $OU$ , равен

$$|V^{OU}| = \pi \int_0^{\sqrt{2}} v^2(u) du.$$

В данном примере для аналитического выражения функции  $v$  от  $u$  необходимо из соотношения (2) найти  $x(u, v), y(u, v)$ , подставить их в соотношение  $y = 2x - x^3$  и из полученного соотношения между  $u$  и  $v$  найти  $v(u)$ . Все это приводит к громоздким выкладкам, поэтому преобразуем этот интеграл к виду  $\int_a^b \varphi(x) dx$ .

Величина  $v(u)$  есть расстояние точки  $M(x, y)$  на кривой

$$\Gamma : \{(x, y), 0 < x < 1, y = 2x - x^3\}$$

от прямой  $y=x$ , таким образом,

$$|v(u)| = \left| \frac{-x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} \right| = \left| \frac{-x + y}{\sqrt{2}} \right| = \frac{|x - x^3|}{\sqrt{2}}.$$

Далее, на оси  $OU$ , т. е. на прямой  $y=x$ , имеем  $dy=dx$ , поэтому

$$du = \frac{1}{\sqrt{2}} (dx + dy) = \sqrt{2} dx.$$

Итак,

$$|V^{OU}| = \pi \int_0^{\sqrt{2}} v^2(u) du = \pi \int_0^1 \frac{(x-x^3)^2}{2} \sqrt{2} dx = \\ = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \int_0^1 (x^6 - 2x^4 + x^2) dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \left( \frac{1}{7} - \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \right) = \frac{4\pi \sqrt{2}}{105}.$$

Пример 2. Найдем объем тела, полученного при вращении области  $D$ , ограниченной петлей кривой

$$\Gamma: x=t^2-2t, y=(t^2-1)(t-3),$$

а) вокруг оси  $OX$ ; б) вокруг вертикальной касательной к  $\Gamma$ .

Решение. Петля кривой  $\Gamma$  проходится при изменении  $t$  от  $T_0=-1$  до  $T_1=3$  так, что область  $D$  остается слева и состоит из двух частей, симметричных относительно оси  $OX$ , соответствующих изменению  $t$  от  $T_0$  до  $T_2=1$  и от  $T_2$  до  $T_1$  (см. рис. 52).

Ранее специально оговаривалось, что ось вращения не пересекает область  $D$ , иначе не ясно, какое тело вращения рассматривается. Единственным исключением является тот случай, когда ось вращения есть ось симметрии области  $D$ . Тогда геометрически наглядно, что речь идет о теле, полученном при вращении вокруг оси симметрии области  $D$  одной из тех частей, на которые эта ось делит  $D$ .

а. Итак, надо вычислить объем  $|V^{Ox}|$  тела  $V^{Ox}$ , полученного при вращении вокруг оси  $OX$  области  $D$ , ограниченной кривой  $\Gamma_1: x=t^2-2t, y=(t^2-1)(t-3), t \in [-1, 1]$ , и отрезком  $[-1, 3]$  оси  $OX$ . Имеем

$$|V^{Ox}| = -\pi \int_{-1}^1 (t^2-1)^2 (t-3)^2 (2t-2) dt = \\ = -2\pi \int_{-1}^1 (t^7 - 7t^6 + 13t^5 + 5t^4 - 29t^3 + 11t^2 + 15t - 9) dt = \frac{64\pi}{3}.$$

б. Так как на кривой  $\Gamma$  имеем  $x'_y = \frac{2(t-1)}{3t^2-6t-1}$ , то  $x'_y=0$  при  $t=1$ . Следовательно, вертикальной касательной к  $\Gamma$  является прямая  $x=x(1)$ , т. е.  $x=-1$ . Поэтому

$$|V| = -2\pi \int_{-1}^3 y(t) (x(t)+1) x'(t) dt = \\ = -2\pi \int_{-1}^3 (t-1)^2 (t^2-1) (t-3) 2(t-1) dt =$$

$$\begin{aligned}
 &= -4\pi \int_{-1}^3 (t-1)^4 (t^2 - 2t - 3) dt = -4\pi \int_{-1}^3 [(t-1)^6 - 4(t-1)^4] dt = \\
 &= \frac{16}{5} \pi (t-1)^5 \Big|_{-1}^3 - \frac{4\pi}{7} (t-1)^7 \Big|_{-1}^3 = \frac{\pi \cdot 2^{10}}{35} = \frac{2048}{35} \pi.
 \end{aligned}$$

Пример 3. Эллипс  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  делится прямой  $Ax = By$  ( $AB \neq 0$ ) на две симметричные части. Найдем объем тела, полученного при вращении одной из этих частей вокруг прямой  $Ax = By$  (см. рис. 53).

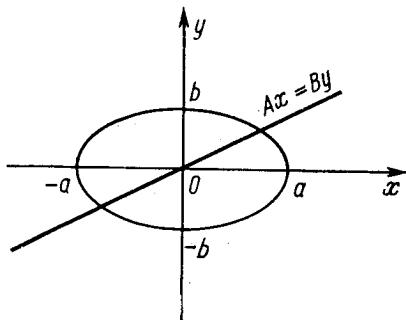


Рис. 53

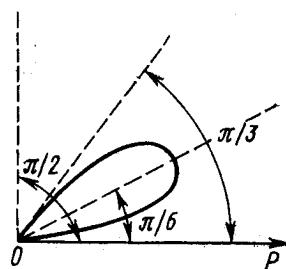


Рис. 54

Решение. Сделаем поворот осей координат, т. е. перейдем к координатам  $u, v$  так, чтобы ось  $OU$  стала осью вращения. Угол поворота равен  $\varphi = \arctg \frac{A}{B}$ , следовательно,

$$u = \frac{Bx}{\sqrt{A^2 + B^2}} + \frac{Ay}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

$$v = \frac{-Ax}{\sqrt{A^2 + B^2}} + \frac{By}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Рассматриваемая область  $D$  не является стандартной относительно оси  $OU$ , поэтому удобно рассматривать эллипс в параметрическом задании, поскольку тогда формула вычисления объема тела вращения не зависит от того, стандартна или нет область  $D$  относительно оси вращения.

Положим  $x = a \cos t$ ,  $y = b \sin t$ . Тогда область  $D$  ограничена кривой  $\Gamma$ :

$$u = \frac{aB \cos t + bA \sin t}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

$$v = \frac{-aA \cos t + bB \sin t}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad T_0 \leq t \leq T_1,$$

и отрезком оси  $OU$ . Значения  $T_0$  и  $T_1$  находятся из условия  $v(T_0) = v(T_1) = 0$ , откуда  $T_0 = \operatorname{arctg} \frac{aA}{bB}$ ,  $T_1 = T_0 + \pi$ . Следовательно,

$$\begin{aligned}
|V^{OU}| &= -\pi \int_{T_0}^{T_1} v^2(t) u'(t) dt = -\frac{\pi}{(A^2 + B^2)^{3/2}} \int_{T_0}^{T_1} (a^2 A^3 \cos^2 t + \\
&+ b^2 B^2 \sin^2 t - 2ab[AB \cos t \sin t] (bA \cos t - aB \sin t) dt = \\
&= -\frac{\pi}{(A^2 + B^2)^{3/2}} \int_{T_0}^{T_1} [a^2 b A^3 \cos t - ab^2 B^3 \sin t + \sin^2 t \cos t \times \\
&\times (b^3 AB^2 - a^2 b A^3 + 2a^2 b AB^2) - \cos^2 t \sin t \cdot (a^3 A^2 B - ab^2 B^3 + \\
&+ 2ab^2 A^2 B)] dt = \frac{2\pi}{(A^2 + B^2)^{3/2}} \left[ a^2 b A^3 \sin T_0 + ab^2 B^3 \cos T_0 + \right. \\
&+ \frac{\sin^3 T_0}{3} (b^3 AB^2 - a^2 b A^3 + 2a^2 b AB^2) + \\
&+ \left. \frac{\cos^3 T_0}{3} (a^3 A^2 B - ab^2 B^3 + 2ab^2 A^2 B) \right] = \\
&= \frac{2\pi}{(A^2 + B^2)^{3/2} \cdot 3 (A^2 a^2 + B^2 b^2)^{3/2}} [(3a^3 b A^4 + 3ab^3 B^4)(A^2 a^2 + B^2 b^2) + \\
&+ a^3 A^3 (b^3 AB^2 - a^2 b A^3 + 2a^2 b AB^2) + b^3 B^3 (a^3 A^2 B - ab^2 B^3 + 2ab^2 A^2 B)] = \\
&= \frac{4}{3} \frac{\pi}{(A^2 + B^2)^{3/2}} \frac{ab}{(A^2 a^2 + B^2 b^2)^{3/2}} [A^2 a^2 + B^2 b^2]^2 [A^2 + B^2] = \\
&= \frac{4\pi ab \sqrt{A^2 a^2 + B^2 b^2}}{3 \sqrt{A^2 + B^2}}.
\end{aligned}$$

Пример 4. Найдем объем тела, полученного при вращении области  $D$ , ограниченной кривой  $\Gamma: r = a \sin 3\varphi$ ,  $a > 0$ ,  $0 < \varphi < \pi/3$  вокруг:

а) полярной оси; б) оси  $\varphi = \pi/2$  (см. рис. 54).

Решение. Перейдем к декартовой системе координат, совмещенной с полярной. Кривая  $\Gamma$  в этой системе записывается в параметрическом виде:  $x = a \sin 3\varphi \cos \varphi$ ,  $y = a \sin 3\varphi \sin \varphi$ , и при изменении  $\varphi$  от 0 до  $\pi/3$  проходится так, что область  $D$  остается слева. Осями вращения являются соответственно оси  $OX$  и  $OY$ . Следовательно,

$$a) |V^{OX}| = -\pi \int_0^{\frac{\pi}{3}} y^2(\varphi) x'(\varphi) d\varphi =$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\pi a^3}{4} \int_0^{\pi/3} (\cos 2\varphi - \cos 4\varphi)^2 (2 \cos 4\varphi + \cos 2\varphi) d\varphi = \\
&= \frac{\pi a^3}{8} \int_0^{\pi/3} \left( \frac{3}{2} \cos 2\varphi - 3 \cos 4\varphi + \frac{3}{2} \cos 6\varphi + \frac{3}{2} \cos 10\varphi - \right. \\
&\quad \left. - \cos 12\varphi \right) d\varphi = \frac{\pi a^3}{8} \left[ \frac{3}{4} \sin 2\varphi - \frac{3}{4} \sin 4\varphi + \frac{3}{20} \sin 10\varphi \right] \Big|_0^{\pi/3} = \\
&= \frac{27\pi a^3 \sqrt{3}}{320};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
6) |V^{OY}| &= \pi \int_0^{\pi/3} x^2(\varphi) y'(\varphi) d\varphi = \frac{\pi a^3}{4} \int_0^{\pi/3} (\sin 2\varphi + \sin 4\varphi)^2 \times \\
&\times (2 \sin 4\varphi - \sin 2\varphi) d\varphi = \frac{\pi a^3}{8} \int_0^{\pi/3} \left( \frac{3}{2} \sin 2\varphi + 3 \sin 4\varphi + \right. \\
&\quad \left. + 2 \sin 6\varphi - \frac{3}{2} \sin 10\varphi - \sin 12\varphi \right) d\varphi = \\
&= \frac{\pi a^3}{8} \left[ -\frac{3}{4} \cos 2\varphi - \frac{3}{4} \cos 4\varphi + \frac{3}{20} \cos 10\varphi \right] \Big|_0^{\pi/3} = \frac{\pi a^3 81}{40}.
\end{aligned}$$

**Замечание.** Есть формула, выражающая объем тела, полученного вращением криволинейного сектора  $D: \{(r, \varphi), 0 < \varphi_0 < \varphi < \varphi_1 < \pi, 0 < r < r(\varphi)\}$  относительно полярной оси без перехода к декартовой системе координат. Эту формулу предлагаем вывести самостоятельно (задача № 90 этой главы).

#### § 4. ДЛИНА ДУГИ КРИВОЙ

**Определение.** Дугой кривой  $\Gamma$  назовем образ отрезка  $[T_0, T_1]$  при непрерывном биективном отображении  $x=x(t)$ ,  $y=y(t)$ ,  $z=z(t)$ ,  $t \in [T_0, T_1]$  и обозначим  $\Gamma: \{x(t), y(t), z(t), t \in [T_0, T_1]\}$ .

Пусть  $\tau: T_0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = T_1$  — разбиение отрезка  $[T_0, T_1]$ . Каждой точке разбиения  $\tau$  соответствует точка  $M_k = (x(t_k), y(t_k), z(t_k))$ ,  $0 < k < n$ , на кривой  $\Gamma$ . Через  $\Gamma_\tau$  обозначим ломаную с вершинами  $M_0, M_1, \dots, M_n$ , а ее длину обозначим через  $|\Gamma_\tau|$ .

**Определение.** Длиной дуги  $\Gamma$  называется число

$$|\Gamma| = \sup_{\tau} |\Gamma_\tau|.$$

Заметим, что одна и та же линия может быть образом разных отрезков при разных биективных отображениях, т. е. может быть разными способами параметризована. Так, например, возьмем на

декартовой плоскости  $XOY$  полуокружность с центром в начале координат радиусом 1, лежащую в верхней полуплоскости. Эту линию можно представить как отображение  $y = \sqrt{1-x^2}$ ,  $-1 \leq x \leq 1$ , или как отображение  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$ ,  $0 \leq t \leq \pi$ , или как отображение  $x = 1-t$ ,  $y = \sqrt{2t-t^2}$ ,  $0 \leq t \leq 2$ , и т. д. Вопрос о том, когда разные параметрические задания кривой определяют одну и ту же линию, здесь не рассматривается. Ограничивааясь наглядными соображениями, отметим только, что длина дуги кривой есть ее внутренняя геометрическая характеристика, не зависящая от способа ее параметризации.

Пусть задана дуга кривой  $\Gamma : \{x(t), y(t), z(t)\}, t \in [T_0, T_1]$  и функции  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  непрерывно дифференцируемы на  $[T_0, T_1]$ , тогда длина  $\Gamma$  вычисляется по формуле

$$|\Gamma| = \int_{T_0}^{T_1} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2 + (z'_t)^2} dt. \quad (3)$$

Если хотя бы одна из функций  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  не является непрерывно дифференцируемой на отрезке  $[T_0, T_1]$ , но все функции  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  непрерывно дифференцируемы на отрезке  $[T_0, T_1 - \varepsilon]$  при любом  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon < T_1 - T_0$ , функция  $\sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2 + (z'_t)^2}$  имеет непрерывную первообразную на отрезке  $[T_0, T_1]$ , тогда как и при рассмотрении определенного интеграла можно воспользоваться формулой (3) для вычисления длины дуги кривой  $\Gamma$ , понимая интеграл в этой формуле как

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{T_0}^{T_1 - \varepsilon} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2 + (z'_t)^2} dt.$$

Пример 1. Рассмотрим полуокружность  $\Gamma : x^2 + y^2 = 1$ ,  $y \geq 0$ . Введем ее параметризацию следующим образом:  $x = x$ ,  $y = \sqrt{1-x^2}$ . Тогда  $\Gamma$  есть биективный образ отрезка  $[-1, 1]$ . Функция  $y = \sqrt{1-x^2}$  не является дифференцируемой в точках  $x=1$  и  $x=-1$ , но на отрезке  $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$  эта функция непрерывно дифференцируема для любого  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon < 1$ . Так как  $y'_x = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$  на  $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$ ,

$$(x'_x)^2 + (y'_x)^2 = 1 + (y'_x)^2, \sqrt{1+(y'_x)^2} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

и первообразная функции  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  — функция  $\arcsin x$  — непрерывна на  $[-1, 1]$ , то длина данной кривой  $\Gamma$  вычисляется следующим образом:

$$|\Gamma| = \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \Big|_{-1}^1 = \pi.$$

Заметим, что можно рассмотреть такую параметризацию этой полукружности  $\Gamma: x(t), y(t), z(t), t \in [t_0, t_1]$ , что функции  $x(t)$  и  $y(t)$  будут непрерывно дифференцируемы на  $[t_0, t_1]$ , например  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$ ,  $t \in [0, \pi]$ .

Приведем некоторые частные случаи формулы (3).

1. Если кривая  $\Gamma$  лежит в плоскости  $XOY$ , т. е.  $z(t) \equiv 0$ , то

$$|\Gamma| = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt.$$

2. Если кривая  $\Gamma$  лежит в плоскости  $XOY$  и является графиком непрерывно дифференцируемой функции  $y = y(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , то

$$|\Gamma| = \int_a^b \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx.$$

3. Если плоская кривая  $\Gamma$  задана в полярной системе координат как график непрерывно дифференцируемой функции

$$r = r(\phi), \quad \phi \in [\phi_0, \phi_1], \quad \text{то} \quad |\Gamma| = \int_{\phi_0}^{\phi_1} \sqrt{r^2 + (r'_\phi)^2} d\phi.$$

Если кривая  $\Gamma$  замкнута, т. е.  $x(T_0) = x(T_1)$ ,  $y(T_0) = y(T_1)$ ,  $z(T_0) = z(T_1)$ , то  $\Gamma$  есть биективный образ не отрезка  $[T_0, T_1]$ , а промежутка  $(T_0, T_1)$ . Все рассуждения и формулы для вычисления длины данной этой замкнутой кривой остаются без изменения.

Пусть задана дуга кривой  $\Gamma: x(t), y(t), z(t), t \in [T_0, T_1]$ , и функции  $x(t), y(t), z(t)$  непрерывно дифференцируемы на  $[T_0, T_1]$ . Рассмотрим функцию

$$s(t) = \int_{T_0}^t \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2 + (z'_t)^2} dt -$$

длину части кривой  $\Gamma$  от начальной точки  $M_0 = (x(T_0), y(T_0), z(T_0))$  до точки  $M = (x(t), y(t), z(t))$ . Дифференциал функции  $s(t)$  называется *дифференциалом дуги кривой*  $\Gamma$  и обозначается  $ds$ .

Если задана дуга кривой

$$\Gamma: x(t), y(t), z(t), t \in [T_0, T_1],$$

где функции  $x(t)$ ,  $y(t)$  и  $z(t)$  непрерывно дифференцируемы на  $[T_0, T_1]$ , то

$$ds = \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2 + (z'_t)^2} dt, \quad t \in [T_0, T_1].$$

Если кривая  $\Gamma$  лежит в плоскости  $XOY$ , т. е.  $z(t) \equiv 0$ , то

$$ds = \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt.$$

Если кривая  $\Gamma$  лежит в плоскости  $XOY$  и является графиком непрерывно дифференцируемой функции  $y=y(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , то

$$ds = \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx, \quad x \in [a, b].$$

Если плоская кривая  $\Gamma$  задана в полярной системе координат как график непрерывно дифференцируемой функции  $r=r(\phi)$ ,  $\phi \in [\phi_0, \phi_1]$ , то

$$ds = [r^2 + (r'_\phi)^2] d\phi.$$

**Пример 2.** Найдем длину дуги кривой  $\Gamma: y=\operatorname{ch} x$  от точки  $A(0, 1)$  до точки  $B(b, \operatorname{ch} b)$ .

**Решение.** Так как  $y'_x = \operatorname{sh} x$ ,  $1 + (y'_x)^2 = 1 + \operatorname{sh}^2 x$  и дуга  $\Gamma$  является биективным отображением отрезка  $[a, b]$ , то

$$|\Gamma| = \int_0^b (1 + \operatorname{sh}^2 x)^{1/2} dx = \int_0^b \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x \Big|_0^b = \operatorname{sh} b.$$

**Пример 3.** Найдем длину дуги кривой

$$\Gamma: x = \frac{1}{4} y^2 - \frac{1}{2} \ln y, \quad 1 \leq y \leq e.$$

**Решение.** Возьмем в качестве параметра переменную  $y$ . Тогда

$$x'_y = \frac{y}{2} - \frac{1}{2y}; \quad 1 + (x'_y)^2 = 1 + \frac{1}{4} \left( y^2 - 2 + \frac{1}{y^2} \right) = \frac{1}{4} \left( y + \frac{1}{y} \right)^2.$$

Так как для  $y > 1$  имеем  $x'_y > 0$ , то отображение  $y=y$ ,  $x=x(y)$ ,  $1 \leq y \leq e$ , биективно, поэтому

$$|\Gamma| = \frac{1}{2} \int_1^e \left( y + \frac{1}{y} \right) dy = \frac{1}{2} \left( \frac{y^2}{2} + \ln y \right) \Big|_1^e = \frac{e^2 + 1}{4}.$$

**Пример 4.** Найдем длину дуги кривой  $\Gamma: x = a \cos^4 t$ ,  $y = a \sin^4 t$ ,  $a > 0$ .

**Решение.** Дуга  $\Gamma$  является биективным отображением отрезка  $[0, \pi/2]$ . Так как

$$x' = -4a \cos^3 t \sin t, \quad y' = 4a \sin^3 t \cos t,$$

$$(x')^2 + (y')^2 = 16a^2 \cos^6 t \sin^2 t + 16a^2 \sin^6 t \cos^2 t = \\ = 2a^2 \sin^2 2t (1 + \cos^2 2t),$$

то

$$|\Gamma| = a\sqrt{2} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + \cos^2 2t} \sin 2t dt = \frac{a}{\sqrt{2}} \int_{-1}^1 \sqrt{1+z^2} dz = \\ = \frac{a}{\sqrt{2}} (z\sqrt{1+z^2}) + \ln(z + \sqrt{1+z^2}) \Big|_0^1 = a + \frac{a \ln(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}}.$$

Пример 5. Найдем длину дуги кривой

$$\Gamma : x = t \sin t, \quad y = t \cos t, \quad z = \frac{2t \cdot \sqrt{2t}}{3}$$

от точки  $A(0, 0, 0)$  до точки  $B(0, 2\pi, 8\pi/\pi/3)$ .

Решение. Так как

$$x' = \sin t + t \cos t, \quad y' = \cos t - t \sin t, \quad z' = \sqrt{2t},$$

$$(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 = (t+1)^2$$

и дуга  $\Gamma$  является биективным образом отрезка  $[0, 2\pi]$ , то

$$|\Gamma| = \int_0^{2\pi} (t+1) dt = 2\pi^2 + 2\pi.$$

Пример 6. Найдем длину дуги кривой  $\Gamma : r = a(1 + \cos \varphi)$ ,  $a > 0$ .

Решение. Поскольку  $\Gamma$  — замкнутая кривая, она является биективным образом полуинтервала  $[0, 2\pi]$ . Так как

$$r'_\varphi = -a \sin \varphi, \quad r^2 + (r')^2 = a^2 (2 + 2 \cos \varphi) = 4a^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2},$$

то

$$|\Gamma| = \int_0^{2\pi} 2a \left| \cos \frac{\varphi}{2} \right| d\varphi = 4a \int_0^\pi \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi = 8a \sin \frac{\varphi}{2} \Big|_0^\pi = 8a.$$

Пример 7. Найдем длину дуги кривой

$$\Gamma : \varphi = \frac{1}{2} \left( r + \frac{1}{r} \right), \quad 1 \leq r \leq 5.$$

Решение. Здесь можно явно выразить зависимость  $r = r(\varphi)$ , однако в этом примере это приводит к громоздким вычислениям. Проще (в некоторых случаях единственно возможно) преобразовать подынтегральное выражение для вычисления  $|\Gamma|$  так, чтобы

оно непосредственно выражалось через функцию  $\varphi(r)$ , т. е. сделать замену  $\varphi = \varphi(r)$ . Тогда

$$\sqrt{r^2(\varphi) + (r'_\varphi)^2} d\varphi = \sqrt{r^2 + \frac{1}{(\varphi_r)^2}} \varphi'_r dr = \sqrt{r^2 \cdot (\varphi')^2 + 1} (\operatorname{sign} \varphi') dr.$$

Для данной дуги кривой имеем

$$\varphi'_r = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{r^2} \right) \geqslant 0, \quad r^2(\varphi')^2 + 1 = \frac{1}{4} \left( r + \frac{1}{r} \right)^2.$$

Следовательно,

$$|\Gamma| = \int_1^5 \frac{1}{2} \left( r + \frac{1}{r} \right) dr = \left( \frac{r^2}{4} + \frac{1}{2} \ln r \right) \Big|_1^5 = 6 + \frac{1}{2} \ln 5.$$

Пример 8. Найдем длину дуги кривой

$$\Gamma : r = ue^{2u}, \quad \varphi = u^2 + 2u, \quad 0 \leq u \leq 2.$$

Решение. В этом примере связь между полярными координатами  $r$  и  $\varphi$  точки  $M$  кривой  $\Gamma$  задана посредством параметра  $u$ . Преобразуем выражение  $\sqrt{r^2 + (r')^2} d\varphi$  так, чтобы оно непосредственно выражалось через функции  $r(u)$  и  $\varphi(u)$ , т. е. делаем замену  $\varphi = \varphi(u)$ . Тогда

$$\begin{aligned} \sqrt{r^2 + (r')^2} d\varphi &= \sqrt{r^2 + \left( \frac{r'_u}{\varphi'_u} \right)^2} \cdot \varphi'_u du = \\ &= \sqrt{r^2 \cdot (\varphi'_u)^2 + (r')^2} (\operatorname{sign} \varphi'_u) du. \end{aligned}$$

Для данной кривой имеем

$$\begin{aligned} r'_u &= e^{2u}(1+2u), \quad \varphi'_u = 2u+2, \\ r^2 \cdot (\varphi')^2 + (r')^2 &= e^{4u} \cdot [4u^2(u^2+2u+1) + (1+4u+4u^2)] = \\ &= e^{4u}(2u^2+2u+1)^2. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$|\Gamma| = \int_0^2 e^{2u}(2u^2+2u+1) du = \frac{1}{2} [e^{2u}(2u^2+1)] \Big|_0^2 = \frac{9e^4 - 1}{2};$$

### § 5. ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ

Поверхности вращения составляют один из простейших классов поверхностей. Для таких поверхностей общее, весьма сложное, определение площади поверхности можно заменить более простым.

Пусть даны кривая  $\Gamma : x = x(t), y = y(t), z = z(t); T_0 \leq t \leq T_1$ ,  $x \in C^1[T_0, T_1]$ ,  $y \in C^1[T_0, T_1]$ ,  $z \in C^1[T_0, T_1]$ , и прямая  $l$ , являющаяся осью вращения. Обозначим через  $S$  поверхность, полученную вращением  $\Gamma$  вокруг оси  $l$ . Пусть  $\tau : T_0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k < t_{k+1} < \dots < t_n = T_1$  — разбиение отрезка  $[T_0, T_1]$ ;  $\Gamma_\tau$  — ломаная, вписанная в  $\Gamma$ , соответствующая разбиению  $\tau$ ,  $S_\tau$  — поверхность, полученная вращением  $\Gamma_\tau$  вокруг  $l$ .

Обозначим через  $\rho = \rho(M)$  расстояние от точки  $M$  до оси  $l$ . Отрезок  $\gamma_k = [M_{k-1}, M_k]$  ломаной  $\Gamma_\tau$  при вращении вокруг оси  $l$  образует поверхность  $S_k$ . В зависимости от угла, образованного отрезком  $\gamma_k$  с осью  $l$ ,  $S_k$  является либо частью конической поверхности, либо частью цилиндрической поверхности, либо кольцом.

Если  $|\gamma_k|$  — длина  $\gamma_k$ , а  $|S_k|$  — площадь  $S_k$ , то

$$\begin{aligned} |S_k| &= 2\pi |\gamma_k| \rho(\tilde{M}_k) = \\ &= 2\pi \sqrt{(x_k(t) - x_{k-1}(t))^2 + (y_k(t) - y_{k-1}(t))^2 + (z_k(t) - z_{k-1}(t))^2} \times \\ &\quad \times \rho(\tilde{M}_k), \end{aligned}$$

где  $\tilde{M}_k$  — некоторая точка, лежащая на  $\gamma_k$ . Можно показать, что

$$\begin{aligned} |S_k| &= 2\pi \sqrt{[x'_t(t_k)]^2 + [y'_t(t_k)]^2 + [z'_t(t_k)]^2} \cdot \rho(M_k) \cdot (t_k - t_{k-1}) + \\ &+ o(t_k - t_{k-1}). \end{aligned}$$

Тогда для площади поверхности  $S_\tau$  имеем

$$\begin{aligned} |S_\tau| &= \sum_{k=1}^n |S_k| = 2\pi \sum_{k=1}^n \sqrt{[x'(t_k)]^2 + [y'(t_k)]^2 + [z'(t_k)]^2} \times \\ &\quad \times \rho(M_k) \cdot (t_k - t_{k-1}) + o(1). \end{aligned}$$

**Определение.** Площадью поверхности  $S$  называется число

$$|S| = \sup_\tau |S_\tau|.$$

В наших предположениях о гладкости функций  $x(t), y(t), z(t)$  имеем формулу

$$|S| = 2\pi \int_{T_0}^{T_1} \rho(t) ds,$$

где  $\rho(t)$  есть расстояние от точки  $M(x(t), y(t), z(t))$ , лежащей на  $\Gamma$ , до оси вращения  $l$ , а  $ds$  — дифференциал дуги  $\Gamma$ .

**Пример 1.** Найдем площадь поверхности, полученной вращением кривой  $\Gamma : y = \sin x$ ,  $0 \leq x \leq \pi$ , вокруг оси  $OX$ .

**Решение.** Введем в качестве параметра переменную  $x$ . Тогда для точек кривой  $\Gamma$  получаем

$$\rho(t) = \rho(x) = y(x) = \sin x,$$

$$ds = \sqrt{1 + [y'_x]^2} dx = \sqrt{1 + \cos^2 x} dx.$$

Следовательно,

$$|S| = 2\pi \int_0^\pi \sin x \sqrt{1 + \cos^2 x} dx = 2\pi \left( -\frac{\cos x}{2} \sqrt{1 + \cos^2 x} - \frac{1}{2} \ln \left| \cos x + \sqrt{1 + \cos^2 x} \right| \right) \Big|_0^\pi = 2\pi (\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})).$$

**Пример 2.** Найдем площадь поверхности, полученной вращением ломаной  $ABC$ , где  $A = (1; 5)$ ,  $B = (1; 2)$ ,  $C = (6; 2)$  вокруг оси  $OX$ .

**Решение.** Запишем отрезки  $AB$  и  $BC$  в параметрическом виде:

$$AB : x = 1, \quad y = t, \quad 2 \leq t \leq 5,$$

$$BC : x = t, \quad y = 2, \quad 1 \leq t \leq 6.$$

Для отрезка  $AB$  имеем  $\rho(t) = y(t) = t$ ,

$$ds = \sqrt{0 + 1^2} dt = dt.$$

Для отрезка  $BC$  имеем  $\rho(t) = y(t) = 2$ ,

$$ds = \sqrt{1^2 + 0} dt = dt.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} |S| &= |S_1| + |S_2| = 2\pi \int_2^5 t dt + 2\pi \int_1^6 2 dt = \\ &= 2\pi \left( \frac{25}{2} - 2 \right) + 2\pi \cdot 2 \cdot (6 - 1) = 41\pi. \end{aligned}$$

**Пример 3.** Хорда  $AB$  окружности  $\Gamma$  радиусом  $a$  находится на расстоянии  $b$  ( $b < a$ ) от центра окружности. Найдем площадь поверхности, полученной вращением вокруг этой хорды каждой из частей  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ , на которые хорда делит окружность.

**Решение.** Введем декартову систему координат так, что ее начало совпадает с центром окружности, ось  $OX$  параллельна хорде  $AB$  (см. рис. 55) и пусть хорда лежит в верхней полуплоскости. Запишем уравнение окружности в параметрическом виде:

$x=a \cos t$ ,  $y=a \sin t$ ,  $0 \leq t < 2\pi$ . Тогда точка  $B$  соответствует значению  $T_0 = \arcsin \frac{b}{a}$ , точка  $A$  — значению  $T_1 = \pi - T_0$ . Имеем

$$\Gamma_1 : x=a \cos t, \quad y=a \sin t, \quad t \in [T_0, T_1],$$

$$\Gamma_2 : x=a \cos t, \quad y=a \sin t, \quad t \in [T_1; 2\pi + T_0].$$

Для  $\Gamma_1$  имеем

$$\rho(t) = y - b = a \sin t - b,$$

$$ds = \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t} dt = adt.$$

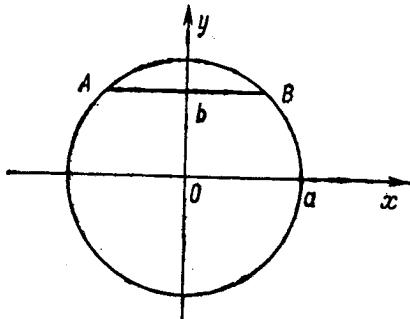


Рис. 55

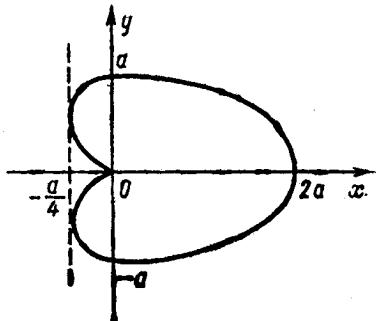


Рис. 56

Следовательно,

$$\begin{aligned} |S| &= 2\pi \int_{T_0}^{\pi-T_0} (a \sin t - b) adt = -2\pi a^2 \cos t \Big|_{T_0}^{\pi-T_0} - 2ab\pi(\pi - 2T_0) = \\ &= 4a^2\pi \left( \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \right) - 2ab\pi^2 + 4ab\pi \arcsin \frac{b}{a} = \\ &= 4a\pi \sqrt{a^2 - b^2} - 2ab\pi^2 + 4ab\pi \arcsin \frac{b}{a}. \end{aligned}$$

Для  $\Gamma_2$  имеем  $\rho(t) = b - y$ ;  $ds = adt$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} |S| &= 2\pi \int_{\pi-T_0}^{2\pi+T_0} (b - a \sin t) adt = 2\pi ab(\pi + 2T_0) + 2a^2\pi \cos t \Big|_{\pi-T_0}^{2\pi+T_0} = \\ &= 2\pi^2 ab + 4ab\pi \arcsin \frac{b}{a} + 4\pi a \sqrt{a^2 - b^2}. \end{aligned}$$

Пример 4. Найдем площадь поверхности, полученной вращением кривой  $\Gamma: r=a(1+\cos \varphi)$ ,  $a>0$ , относительно левой вертикальной касательной к этой кривой.

**Решение.** В декартовой системе координат, совмещенной с полярной,  $x$  и  $y$  записутся как функции параметра  $\varphi$ :

$$x = r(\varphi) \cos \varphi, \quad y = r(\varphi) \sin \varphi,$$

т. е.

$$x(\varphi) = a(1 + \cos \varphi) \cos \varphi, \quad y(\varphi) = a(1 + \cos \varphi) \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Для дифференциала дуги  $\Gamma$  имеем выражение

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{r^2(\varphi) + [r'_\varphi(\varphi)]^2} d\varphi = a \sqrt{(1 + \cos \varphi)^2 + \sin^2 \varphi} d\varphi = \\ &= 2a \left| \cos \frac{\varphi}{2} \right| d\varphi. \end{aligned}$$

Левая вертикальная касательная к кривой  $\Gamma$  проходит через точку  $M(x(\varphi_0), y(\varphi_0))$ , где  $x(\varphi_0)$  — наименьшее из значений  $x(\varphi_k)$  таких, что  $x'_{\varphi}(\varphi_k) = 0$ . Производная  $x'_{\varphi}$  равна  $a(-\sin \varphi - 2\sin \varphi \cos \varphi)$ , следовательно,  $x'_{\varphi}$  обращается в нуль в точках

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = \frac{2\pi}{3}, \quad \varphi_3 = \pi, \quad \varphi_4 = \frac{4\pi}{3}, \quad \varphi_5 = 2\pi.$$

Наименьшее значение  $x(\varphi_k)$  принимает при  $k=2$  и  $k=4$ . Итак, левая вертикальная касательная имеет уравнение  $x = -\frac{a}{4}$  (см. рис. 56). Расстояние  $\rho(\varphi)$  от точки  $x=x(\varphi)$ ,  $y=y(\varphi)$  до оси вращения (прямой  $x = -\frac{a}{4}$ ) равно  $x(\varphi) + \frac{a}{4}$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} |S| &= 2\pi \int_0^{2\pi} \left[ a(1 + \cos \varphi) \cos \varphi + \frac{a}{4} \right] 2a \left| \cos \frac{\varphi}{2} \right| d\varphi = \\ &= 4\pi a^2 \int_0^\pi \left( \frac{5}{2} \cos \frac{\varphi}{2} + \frac{3}{2} \cos \frac{3\varphi}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{5\varphi}{2} \right) d\varphi = \\ &= 4\pi a^2 \left( 5 \sin \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{3\varphi}{2} + \frac{1}{5} \sin \frac{5\varphi}{2} \right) \Big|_0^\pi = \frac{84}{5} \pi a^2. \end{aligned}$$

**Пример 5.** Пусть  $\Gamma$  — часть кривой  $y=3x-x^3$ , лежащая в правой полуплоскости ( $x \geq 0$ ) выше прямой  $y=x$ . Найдем площадь поверхности, полученной вращением  $\Gamma$  вокруг прямой  $y=x$ .

**Решение.** Из условия задачи следует, что

$$\Gamma : y = 3x - x^3, \quad 0 \leq x \leq \sqrt{2}.$$

Тогда

$$ds = \sqrt{1 + 9(1-x^2)^2} dx,$$

$$\rho(x) = \frac{|3x - x^3 - x|}{\sqrt{2}} = \frac{2x - x^3}{\sqrt{2}}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
 |S| &= \pi \sqrt{2} \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + 9(1-x^2)^2} (2-x^2) dx = \\
 &= \frac{\pi \sqrt{2}}{2} \int_{-1}^1 \sqrt{1+9t^2} (1-t) dt = \frac{\pi \sqrt{2}}{2} \left( \frac{t}{2} \sqrt{1+9t^2} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{6} \ln |3t + \sqrt{1+9t^2}| \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{\pi \sqrt{2}}{6} (2\sqrt{10} + \ln(3 + \sqrt{10})).
 \end{aligned}$$

Пример 6. Область, ограниченная частью спирали  $r=e^\varphi$ ,  $\pi/6 \leq \varphi \leq 7\pi/6$ , и прямой, проходящей через концевые точки спирали, вращается вокруг этой прямой. Найти объем и площадь поверхности полученного тела (см. рис. 57).

Решение. Выберем декартову систему координат так, чтобы начало координат совпало с полюсом, положительная полуось  $OX$  с лучом  $\varphi=\pi/6$ . Тогда

$$x = r \left( \varphi - \frac{\pi}{6} \right) \cos(\varphi - \pi/6) = e^{\varphi-\pi/6} \cos \left( \varphi - \frac{\pi}{6} \right),$$

$$y = r \left( \varphi - \frac{\pi}{6} \right) \sin(\varphi - \pi/6) = e^{\varphi-\pi/6} \sin \left( \varphi - \frac{\pi}{6} \right).$$

Найдем  $ds$  по формуле

$$ds = \sqrt{r^2(\varphi) + (r'_\varphi)^2} d\varphi = e^\varphi \cdot \sqrt{2} d\varphi.$$

Так как осью вращения является ось  $OX$ , то

$$\rho(\varphi) = |y(\varphi)| = e^{\varphi-\pi/6} \sin \left( \varphi - \frac{\pi}{6} \right),$$

следовательно,

$$\begin{aligned}
 |S| &= 2\pi \int_{\pi/6}^{7\pi/6} \sqrt{2} e^{2\varphi+\pi/6} \sin \left( \varphi - \frac{\pi}{6} \right) d\varphi = 2\pi \sqrt{2} \int_0^\pi e^{2t+\pi/6} \sin t dt = \\
 &= 2\pi \sqrt{2} \cdot \frac{2 \sin t - \cos t}{5} \Big|_0^\pi = e^{\pi/6} \cdot 2\pi \sqrt{2} \cdot \frac{1}{5} (e^{2\pi} + 1).
 \end{aligned}$$

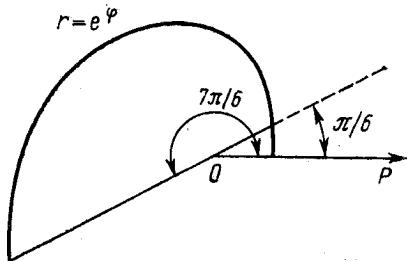


Рис. 57

Объем тела вычисляется по формуле

$$\begin{aligned}
 |V^{ox}| &= -\pi \int_{\pi/6}^{7\pi/6} y^2(\varphi) x'_\varphi d\varphi = \\
 &= -\pi \int_{\pi/6}^{7\pi/6} e^{2\varphi-\pi/3} \sin^2 \left( \varphi - \frac{\pi}{6} \right) e^{\varphi-\frac{\pi}{6}} \left( \cos \left( \varphi - \frac{\pi}{6} \right) - \sin \left( \varphi - \frac{\pi}{6} \right) \right) d\varphi = \\
 &= \pi \int_0^\pi e^{3t} (\sin^3 t - \sin^2 t \cos t) dt = \pi \int_0^\pi e^{3t} \left( \frac{3}{4} \sin t - \frac{1}{4} \cos t - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{4} \sin 3t + \frac{1}{4} \cos 3t \right) dt = \left( \pi e^{3t} \frac{\frac{9}{4} \sin t - \frac{3}{4} \cos t - \frac{1}{4} \cos t - \frac{3}{4} \sin t}{10} + \right. \\
 &\quad \left. + \pi e^{3t} \frac{-\frac{3}{4} \sin 3t + \frac{3}{4} \cos 3t + \frac{3}{4} \cos 3t + \frac{3}{4} \sin 3t}{18} \right) \Big|_0^\pi = \\
 &= \pi \left( \frac{1}{10} (e^{3\pi} + 1) - \frac{1}{12} (e^{3\pi} + 1) \right).
 \end{aligned}$$

### Задачи

Вычислить:

$$1. \int_0^{2\pi} \sin^4 x dx.$$

$$2. \int_{-2\sqrt{3}}^2 \frac{dx}{(4+x^2)^2}.$$

$$3. \int_2^{8/3} \frac{x dx}{(x-3)^2 \sqrt{89-60x+10x^2}}.$$

$$4. \int_2^{5/2} \frac{dx}{(x^2-8x+15) \sqrt{6x-x^2-5}}.$$

$$5. \int_{-\pi/3}^{\pi/4} \frac{\sin^2 x}{\cos^5 x} dx.$$

$$6. \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos^2 x}{\sin^6 x} dx.$$

$$7. \int_{-2a}^{-a} \frac{dx}{x(\sqrt{3}a + \sqrt{x^2+a^2})}.$$

$$8. \int_0^{2\pi} \frac{dx}{2-\sin x}.$$

$$9. \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin^4 x \cdot \cos^4 x}{\sin^{10} x + 6\cos^{10} x} dx.$$

$$10. \int_0^{2\pi} \frac{dx}{4+\cos^2 x}.$$

$$11. \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sin^6 x + \cos^6 x}.$$

$$12. \int_0^3 \frac{x^2+1}{x^4+1} dx.$$

$$13. \int_0^1 x \operatorname{arctg}^2 x dx.$$

$$14. \int_0^1 \cos^2(\ln x) dx.$$

$$15. \int_{-1}^1 \arcsin^2 x dx.$$

$$16. \int_{-1}^1 \cos x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx.$$

$$17. \int_{0,1}^{10} \frac{\ln x}{1+x^2} dx.$$

$$18. \int_{1/2}^2 \frac{x^3-1}{\sqrt[3]{1+x^6}} dx.$$

Найти площадь области, ограниченной кривыми, заданными в прямоугольных координатах \*:

$$19. y = x^2 e^{-x}, \quad y=0, \quad x=2.$$

$$20. y=a \sin x, \quad y=a \cos x.$$

$$21. y=x \ln^2 x, \quad y=x \ln x.$$

$$22. y=\frac{2a}{3} \cos x, \quad y=a \operatorname{tg} x, \quad x=0.$$

$$23. y=x^4 - 4x^3 + 4x^2, \quad y=\cos \pi x - 1.$$

$$24. y=\frac{2a^3}{a^2+x^2}, \quad y=\frac{4a}{\pi} \operatorname{arctg} \left| \frac{x}{a} \right|.$$

$$25. y^3=x^3-x^4.$$

$$26. x^3=x^2-y^2.$$

$$27. a^2 y^4 = x^4 (a^2 - x^2).$$

$$28. y=x, \quad y=-x, \quad -y^2+2x^2=1.$$

$$29. x^3=(x-y)^2 \cdot a, \quad y=0.$$

$$30. x^2+4y^2=8a^2, \quad x^2-3y^2=a^2 \quad (x \geqslant a).$$

$$31. y^3-y=x, \quad y=-(1+x)^2, \quad y=0.$$

$$32. y^3-y=x, \quad y=-(4+x)^2, \quad y=0, \quad y=-1.$$

$$33. x=\cos \pi y, \quad 4y^2=3(x+3).$$

34. Найти площадь каждой из частей, на которые парабола  $y^2=a(a-x)$  разбивает круг  $x^2+y^2=a^2$ .

35. Найти площадь области, заключенной между параболой  $y=x^2-2x+3$ , касательной к ней в точке  $M(2, 3)$ , и осью  $OY$ .

Найти площадь области, ограниченной кривой, заданной параметрически \*\*.

$$36. x=3t^2, \quad y=3t-t^3.$$

$$37. x=\frac{t}{3}(6-t), \quad y=\frac{t^2}{8}(6-t).$$

$$38. x=a \cos t, \quad y=b \sin t \quad (\text{эллипс}).$$

$$39. x=a \cos^3 t, \quad y=a \sin^3 t \quad (\text{астроида}).$$

\* Замечание. Всюду в этом разделе значения буквенных параметров считаются положительными.

\*\* Замечание. Если  $y=tx$ , то  $y'_x=x-y'_t y=x^2(t)$ .

$$40. \begin{aligned} x &= a \sin t, \\ y &= a \sin 2t \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{(кривые Лиссажу).}$$

$$41. \begin{aligned} x &= a \cos 3t, \\ y &= a \sin t \end{aligned}$$

$$42. \begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{t}}{(1+t^2)^2}, \\ y &= \frac{t \sqrt{t}}{(1+t^2)^2}. \end{aligned}$$

$$43. \begin{aligned} x &= a \cos t, \\ y &= \frac{a \sin^2 t}{2 + \sin t}. \end{aligned}$$

Привести уравнение к параметрическому виду и найти площадь области, ограниченной петлей кривой:

$$44. x^3 + y^3 = a x y.$$

$$45. (x+y)^3 = a x y.$$

$$46. x^4 = a x y^2 + a y^3.$$

$$47. x^5 + y^5 = a x^2 y^2.$$

Найти площадь области, ограниченной кривыми, заданными в полярных координатах:

$$48. r = a \cos 5\varphi.$$

$$49. r = a \sin 4\varphi.$$

$$50. r = a(1 - \sin \varphi).$$

$$51. r = a \operatorname{tg} \varphi, \varphi = \pi/4. \quad 52. r = a(2 - \cos \varphi). \quad 53. r^2 = a^2 \cos 4\varphi.$$

$$54. r = 2\varphi, (0 \leq \varphi \leq 2\pi), \quad 55. r = \frac{a \cos 2\varphi}{\cos \varphi}. \quad 56. r = (1 + \sin^2 2\varphi)a.$$

$$\varphi = 0.$$

57. Найти площадь области, ограниченной кривой  $r = a \sqrt{\cos 2\varphi}$  и находящейся внутри круга  $r = a/\sqrt{2}$ .

58. Найти площадь области, ограниченной кривой  $r = a(1 + \cos \varphi)$  и лежащей вне кривой  $r = 3a \cos \varphi$ .

59. Найти сумму площадей областей, ограниченных кривой  $r = a = \cos 3\varphi$  и лежащих вне круга  $r = a/2$ .

Перейти к полярным координатам и найти площадь области, ограниченной кривой:

$$60. x^4 + y^4 = a^2 x y.$$

$$61. x^2 + y^2 = 2ax, \quad x^2 + y^2 = 2ay,$$

$$M(a/2, a/2) \in S,$$

$$62. x^4 + y^4 = a^2 x^2.$$

$$63. x^2 + y^2 = a^2, \quad x^2 + y^2 = 2ay,$$

$$M(0, 3a/2) \in S.$$

$$64. (x^2 + y^2)^3 = a x^4 y.$$

$$65. (x^2 + y^2)^3 = a^2 x^2 y^2.$$

$$66. (x^6 + y^6) = a^2 (x^4 + y^4).$$

$$67. x^6 + y^6 = a^2 x^4.$$

68. Найти площадь области, являющейся пересечением областей, ограниченных кривыми  $(x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2)$  и

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2 x y.$$

69. Найти площадь области, лежащей между кривыми

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2) \text{ и } (x^2 + y^2)^2 = 4a^2 (x^2 - y^2).$$

70. Найти площадь области, расположенной в первом квадранте, ограниченной кривой  $r^2 = \frac{8}{3} \sin^2 2\varphi$  и лежащей вне кривой  $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$  (полярная и декартова системы совмещены).

71. Найти площадь области, лежащей между кривыми

$$x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2) \text{ и } x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}.$$

Найти объемы тел, образованных вращением фигуры, ограниченной линиями:

72.  $y = \cos x, y = 2\cos x, x = \pm\pi/2$

а) вокруг оси  $OX$ ; б) вокруг оси  $OY$ .

73.  $y = e^x - 1, y = 2, x = 0$ .

а) вокруг оси  $OY$ ; б) вокруг прямой  $y = 2$ .

74.  $y = \frac{1}{1+x^2}, y = 0, x = \pm 1$

а) вокруг оси  $OX$ ; б) вокруг оси симметрии; в) относительно прямой  $y = 1$ .

75.  $y = \sin x, x = 0, x = \pi, y = 0$

а) вокруг прямой  $y = -1$ ; б) вокруг прямой  $y = 1$ ; в) вокруг прямой  $x = -1$ .

76. Найти объем тела, полученного при вращении круга радиусом  $a$  относительно прямой, лежащей в плоскости круга и отстоящей от его центра на расстоянии  $b$  ( $b > a$ ).

77. Дан круг радиусом  $a$  и прямая, лежащая в плоскости круга на расстоянии  $b$  от центра ( $0 < b < a$ ). Найти объем тела, полученного при вращении вокруг этой прямой каждой из частей круга, на которые его делит данная прямая.

78. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями  $y^3 = y - x, x = 0$  а) вокруг оси  $OX$ ; б) вокруг оси  $OY$ .

79. Найти объем тела, полученного при вращении параболического сектора с основанием  $2a$  и высотой  $H$  а) вокруг основания; б) вокруг оси симметрии; в) вокруг касательной, проведенной через вершину сектора.

80. Найти объем тела, полученного при вращении фигуры, ограниченной линиями  $y = x(3 - x), y = x$ : а) вокруг оси  $OX$ ; б) вокруг оси  $OY$ ; в) вокруг прямой  $y = x$ .

81. Найти объем тела, полученного при вращении части эллипса  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , лежащего между прямыми  $y = h$  и  $y = -h$  ( $0 < h < b$ ) вокруг вертикальной оси симметрии.

82. Найти объем тела, полученного при вращении фигуры, ограниченной линиями  $x^3 = y^2, x = 0, y = -1/27, y = 8$  вокруг оси  $OY$ .

83. Найти объем тела, полученного при вращении фигуры, являющейся общей частью кругов  $x^2 + y^2 = 2ax$  и  $x^2 + y^2 = 2ay$ :

а) вокруг оси  $OX$ , б) вокруг прямой  $y = x$ .

Найти объем тела, образованного при вращении области ограниченной линиями:

84.  $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$

а) вокруг оси  $OX$ ; б) вокруг прямой  $x = a$ .

85.  $x = a \sin t, y = a \sin 2t$

а) вокруг оси  $OX$ ; б) вокруг оси  $OY$ ; в) вокруг прямой  $x = a$ ;

г) вокруг прямой  $y = a$ .

86.  $x = a(t + \sin t)$ ,  $y = a(1 - \cos t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ ,  $y = 0$

а) вокруг оси  $OX$ ; б) вокруг оси симметрии; в) вокруг прямой,  $y = 2a$ .

87. Найти объем тела, полученного при вращении области, ограниченной кривой

$$x = 2a \sin 2t, y = 2a \cos t$$

а) вокруг оси  $OX$ ; б) вокруг оси  $OY$ .

88. Найти объем тела, полученного при вращении области, ограниченной петлей кривой

$$x = a \cos 2t, y = a \cos 3t$$

а) вокруг прямой  $x = a$ ; б) вокруг оси  $OX$ ;

в) вокруг прямой  $x = -a$ .

89. Найти объем тела, полученного при вращении области, ограниченной кривой  $r = a(1 + \cos \varphi)$  вокруг левой вертикальной касательной к этой кривой.

90. Доказать, что объем тела, образованного вращением вокруг полярной оси области  $0 \leq a \leq \varphi \leq \beta \leq \pi$ ,  $0 \leq r \leq r(\varphi)$  ( $\varphi$  и  $r$  — полярные координаты), равен

$$V = \frac{2}{3} \pi \int_a^{\beta} r^3(\varphi) \sin \varphi d\varphi.$$

Найти объем тела, образованного вращением области, ограниченной кривой, заданной в полярных координатах:

91.  $r = a(1 + \sin^2 \varphi)$  вокруг полярной оси.

92.  $r = a \cos^2 \varphi$  вокруг полярной оси.

93.  $r = a|\sin 2\varphi|$  вокруг полярной оси.

94.  $r = ae^{2\varphi}$ ,  $0 \leq \varphi \leq \pi$ ,  $\varphi = 0$ ,  $\varphi = \pi$  вокруг полярной оси.

Найти длины дуг следующих кривых:

95.  $y = \ln x$ ,  $3/4 \leq x \leq 12/5$ .

96.  $y = 1 - \ln \cos x$ ,  $0 \leq x \leq \pi/3$ .

97.  $y = \ln(1 - x^2)$ ,  $0 \leq x \leq 1/2$ .

98.  $y = \arccos e^{-x}$ ,  $0 \leq x \leq 1$ .

99.  $y = \sqrt{1-x^2} + \arcsin x$ ,  $0 \leq x \leq 7/9$ .

100.  $y = \sqrt{1-x^2} + \arccos x$ ,  $0 \leq x \leq 8/9$ .

101.  $y = \sqrt{x-x^2} + \frac{1}{2} \arcsin(2x-1)$ .

102.  $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1$ .

103.  $\left(\frac{x}{2}\right)^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ .

104.  $x = \frac{2}{3}y \sqrt{\frac{y}{a} - \frac{1}{2} \sqrt{ay}}$  от точки  $A(0, 0)$  до точки  $B(a/6, a)$ .

105.  $x = \frac{1}{3}a + \frac{a^2}{2y} + \frac{y^3}{6a^2}$  от точки  $A(a, a)$  до точки  $B(5a, 3a)$ .

106. Найти длину полукубической параболы  $y^2 = \frac{2}{3}(x - 1)^3$ , заключенной внутри параболы  $y^2 = \frac{x}{3}$ .

107. Найти длину границы области, ограниченной линиями

$$y = e^x, \quad y = 2\sqrt[3]{x}, \quad x = 0, \quad y = 1.$$

108. Найти длину границы области, ограниченной линиями  
 $y = 2\sqrt[3]{x}$ ,  $y = 2\sqrt[3]{x^2}$ .

109. Найти длину линии

$$y(x) = \int_1^x \sqrt{t^4 - 1} dt, \quad 1 \leq x \leq 2.$$

110. Найти длину линии

$$y(x) = \int_0^x \sqrt{\cos 2t} dt, \quad 0 \leq x \leq \pi/4.$$

111. Найти длину линии

$$y(x) = \int_0^x \sqrt{\sin 2t} dt, \quad 0 \leq x \leq \pi/4.$$

Найти длины дуг следующих кривых, заданных параметрически:

112.  $x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t$ .

113.  $x = a \cos^5 t, \quad y = a \sin^5 t, \quad 0 \leq t \leq \pi/2$ .

114.  $x = 2a \sin^2 t, \quad y = 2a \cos t$ .

115.  $x = \ln(1+t^2), \quad y = 2 \operatorname{arctg} t - 2t + 8$  от точки  $A(0, 8)$  до точки  $B(\ln 2, \pi/2 + 6)$ .

116.  $x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, \quad y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t, \quad 0 \leq t \leq 1$ .

117.  $x = 6at^5, \quad y = 5at(1-t^8)$  от точки  $A(0, 0)$  до точки  $B(6a, 0)$ .

118.  $x = 2a \operatorname{sh}^3 t, \quad y = 3a \operatorname{ch} t$  от точки  $A(0, 3a)$  до точки  $B(x_0, y_0)$ .

119.  $x = a \cos t, \quad y = -2a \ln \sin t$  от точки  $A(0, 0)$  до точки  $B(x_0, y_0)$ .

120.  $x = \frac{a}{2} \sin t (1 + 2 \cos^2 t), \quad y = a \cos^3 t$  от точки  $A(0, a)$  до точки  $B(a/2, 0)$ .

121.  $x = a \left( \cos t + \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right), \quad y = a \sin t$  от точки  $A(0, a)$  до точки  $B(x_0, y_0)$ .

122.  $x = 2a \cos t, \quad y = 2a \sin t, \quad z = at, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$ .

123.  $x = \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2, \quad y = -\frac{4}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2, \quad z = \frac{1}{3}t^3 + t^2, \quad 0 \leq t \leq 1$ .

124.  $x = e^t (\cos t + \sin t), \quad y = e^t (\cos t - \sin t), \quad z = ht, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$ .

125.  $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t, z = a \cos 2t.$

126.  $x = a(t \cos t - \sin t), y = a(t \sin t + \cos t), z = ht, 0 \leq t \leq t_0.$

Найти длины дуг кривых, заданных в полярных координатах:

127.  $r = \cos^3 \frac{\varphi}{3}, 0 \leq \varphi \leq \pi/2.$

128.  $r = a \cos^4 (\varphi/4).$

129.  $r = \varphi^2, 0 \leq \varphi \leq \pi.$

130.  $\varphi = \frac{r}{2} \sqrt{r^2 + 2} + \ln|r| + \sqrt{r^2 + 2}|, 0 \leq r \leq 2.$

131.  $\varphi = \ln r + r, 1 \leq r \leq 5.$

132. Найти длину дуги спирали Архимеда  $r = a\varphi$ , находящейся внутри круга радиусом  $2a\pi$ .

133. Найти длину дуги гиперболической спирали  $r = \frac{\pi a}{\varphi}, \varphi > 0$ , находящейся внутри кольца  $a/4 \leq r \leq 2a$ .

134. Найти длину границы областей, ограниченных кривыми

$$r = \frac{a}{4 \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \text{ и } r = a(1 + \cos \varphi).$$

Найти длину дуги кривой, заданной в полярной системе координат:

135.  $r = a \cos^2 u, \varphi = 2(u - \operatorname{tg} u)$  от точки  $A(a, 0)$  до точки  $B(a/2, \pi/2 - 2)$ .

136.  $r = a(1 + \operatorname{tg} u), \varphi = \operatorname{tg} u - \ln(1 + \operatorname{tg} u)$  от точки  $A(a, 0)$  до точки  $B(r_0, \varphi_0)$ .

Найти площади поверхностей, образованных вращением следующих кривых:

137.  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a \geq b),$

а) вокруг оси  $OX$ ; б) вокруг оси  $OY$ .

138.  $y = \frac{1}{x}, 0 < a \leq x \leq b$  вокруг оси  $OX$ .

139.  $y^2 + 4x = 2 \ln y, 1 \leq y \leq 2$  вокруг оси  $OX$ .

140. Найти площадь поверхности тела, полученного вращением окружности радиусом  $a$  относительно прямой, лежащей в ее плоскости и отстоящей от центра на расстояние  $b$  ( $b > a$ ).

141. Найти площадь поверхности тела, полученного вращением вокруг оси  $OX$  петли кривой  $3ay^2 = x(a - x)^2$ .

142. Найти полную площадь поверхности тела, полученного вращением вокруг оси  $OX$  области, ограниченной линиями  $y^2 = 2x$  и  $2x = 3$ .

Найти площади поверхностей тел, образованных вращением кривой, заданной параметрически:

143.  $x = e^t \sin t, y = e^t \cos t, 0 \leq t \leq \pi/2$ ,  
вокруг оси  $OX$ .

- 144.**  $x = a(t + \sin t)$ ,  $y = a(1 + \cos t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ ,  
 а) вокруг оси  $OX$ ; б) вокруг оси  $OY$ ; в) вокруг оси симметрии;  
 г) вокруг прямой  $y = 2a$ .

- 145.**  $x = a \left( \cos t + \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right)$ ,  $y = a \sin t$ ,  $\pi/2 \leq t \leq 3\pi/4$ , вокруг оси  $OX$ .

**146.**  $x = 2a \sin^2 t$ ,  $y = 2a \cos t$  вокруг оси  $OX$ .

**147.**  $x = a(2 \cos t - \cos 2t)$ ,  $y = a(2 \sin t - \sin 2t)$  вокруг оси  $OX$ .

Найти площади поверхностей, образованных вращением дуги  $AB$  кривой:

**148.**  $x = at^2$ ,  $y = \frac{1}{3}at(3-t^2)$ ,  $A(0, 0)$ ,  $B(3a, 0)$ ,

- а) вокруг оси  $OX$ ; б) вокруг оси  $OY$ .

**149.**  $x = \frac{9}{5}at^4$ ,  $y = \frac{6}{25}a(5t^3 - 3t^5)$ ,  $A(0, 0)$ ,  $B(5a, 0)$ ;

- а) вокруг оси  $OX$ ; б) вокруг оси  $OY$ .

**150.**  $x = 2at^3$ ,  $y = \frac{3}{4}a(2t^2 - t^4)$ ,

$A(0, 0)$ ,  $B(4a\sqrt{2}, 0)$ ,

- а) вокруг оси  $OX$ ; б) вокруг оси  $OY$ .

**151.** Найти площадь поверхности тела, полученного при вращении области, лежащей внутри окружности  $r = 2a \sin \varphi$  и вне окружности  $r = a$ , относительно осей координат.

**152.** Найти площадь поверхности тела, образованного вращением области, ограниченной кривой

$$r^2 = a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi \quad (a > b),$$

- а) вокруг оси  $OX$ ; б) вокруг оси  $OY$ .

### Ответы

1.  $\frac{3\pi}{4}$ . 2.  $\frac{7}{192}\pi$ . 3.  $6 - \arcsin \frac{3}{\sqrt{10}} + \arcsin \frac{1}{\sqrt{10}}$ . 4.  $\frac{1}{4} \ln \frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{15}+4} - \frac{1}{4} \left( \sqrt{\frac{3}{5}} - \sqrt{\frac{1}{3}} \right)$ . 5.  $\frac{3}{8}\sqrt{2} + \frac{7}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{8} \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{24}}{\operatorname{tg} \frac{3\pi}{8}}$ .
6.  $\frac{14}{5}\sqrt{3}$ . 7.  $-\frac{\pi}{12a} - \frac{\sqrt{3}}{4a} \ln 3$ . 8.  $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ . 9.  $\frac{\pi}{5\sqrt{6}}$ . 10.  $\frac{\pi}{4\sqrt{5}}$ .
11.  $4\pi$ . 12.  $\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{4\sqrt{2}}{3}$ . 13.  $-\frac{\pi}{16}(4 - \pi) + \frac{1}{2} \ln 2$ . 14.  $\frac{3}{5}$ .
15.  $\frac{\pi^2}{2} - 4$ . 16. 0. 17. 0. 18. 0. 19.  $2 - \frac{10}{e^2}$ . 20.  $2a\sqrt{2}$ . 21. 1.
22.  $a \left( \frac{1}{3} + \ln \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$ . 23.  $\frac{46}{15}$ . 24.  $a^3 \left( \pi - 2 + \frac{4}{\pi} \ln 2 \right)$ . 25.  $\frac{\pi}{8}$ .

26.  $\frac{8}{15}$ . 27.  $\frac{8}{5} a^2$ . 28.  $\sqrt{2} \ln(1 + \sqrt{2})$ . 29.  $\frac{a^2}{10}$ . 30.  $a^2 \left( \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \ln(2 + \sqrt{3}) \right)$ . 31.  $\frac{7}{12}$ . 32.  $\frac{43}{12}$ . 33.  $6 - \frac{2}{\pi}$ . 34.  $S_1 = S_2 = \frac{\pi a^2}{4} - \frac{2}{3} a^2$ ,  $S_3 = \frac{\pi a^2}{2} + \frac{4}{3} a^2$ . 35.  $\frac{8}{3}$ . 36.  $\frac{72}{5} \sqrt{3}$ . 37.  $\frac{27}{5}$ .  
 38.  $\pi ab$ . 39.  $\frac{8}{3} \pi a^2$ . 40.  $\frac{8}{3} a^2$ . 41.  $\frac{3\sqrt{3}}{2} a^2$ . 42.  $\frac{1}{12}$ . 43.  $\frac{\pi a^2}{\sqrt{3}} (16 - 9\sqrt{3})$ . 44.  $\frac{a^2}{6}$ . 45.  $\frac{a^2}{60}$ . 46.  $\frac{a^2}{210}$ . 47.  $\frac{a^2}{10}$ . 48.  $\frac{\pi a^2}{4}$ . 49.  $\frac{\pi a^2}{4}$ .  
 50.  $\frac{3\pi a^2}{2}$ . 51.  $\frac{a^2}{8} (4 - \pi)$ . 52.  $\frac{9\pi a^2}{2}$ . 53.  $a^2$ . 54.  $\frac{16}{3} \pi^3$ . 55.  $\frac{a^2}{2} (4 - \pi)$ .  
 56.  $\frac{19}{8} \pi a^2$ . 57.  $\frac{a^2}{6} (\pi + 6 - 3\sqrt{3})$ . 58.  $\frac{\pi a^2}{4}$ . 59.  $\frac{\pi a^2}{12} + \frac{a^2 \sqrt{3}}{8}$ . 60.  $\frac{\pi a^2}{2}$ .  
 61.  $\frac{a^2}{2} (\pi - 2)$ . 62.  $\frac{\pi a^2}{\sqrt{2}}$ . 63.  $\frac{\pi a^2}{3} + \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$ . 64.  $\frac{7\pi a^2}{512}$ . 65.  $\frac{a^2 \pi}{8}$ .  
 66.  $\frac{2}{3} \pi a^2$ . 67.  $\frac{\pi a^2}{2}$ . 68.  $a^2 \left( 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ . 69.  $3a^2$ . 70.  $\frac{\pi}{6} + \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \sqrt{2}$ . 71.  $\pi a^2 \left( \sqrt{2} - \frac{3}{8} \right)$ . 72. а)  $\frac{3\pi^2}{2}$ ; б)  $\pi^2 - 2\pi$ .  
 73. а)  $\pi (3 \ln^2 3 - 6 \ln 3 + 4)$ ; б)  $\pi (9 \ln 3 - 8)$ . 74. а)  $\frac{\pi}{4} (2 + \pi)$ ; б)  $\pi \ln 2$ ;  
 в)  $\frac{3\pi^2}{4} - \frac{\pi}{2}$ . 75. а)  $\frac{\pi^2}{2} + 4\pi$ ; б)  $4\pi - \pi^2$ ; в)  $2\pi^2 + 4\pi$ . 76.  $2\pi^2 a^2 b$ .  
 77.  $\frac{2\pi}{3} \sqrt{a^2 - b^2} (2a^2 + b^2) - 2\pi a^2 b \arcsin \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ ;  $\frac{2\pi}{3} \sqrt{a^2 - b^2} (2a^2 + b^2) + \pi^2 a^2 b + 2\pi a^2 b \arcsin \frac{b}{a}$ . 78. а)  $\frac{8\pi}{15}$ ; б)  $\frac{16\pi}{105}$ . 79. а)  $\frac{16}{15} \pi a H^2$ ;  
 б)  $\frac{\pi a^2 H}{2}$ ; в)  $\frac{8}{5} \pi a H^2$ . 80. а)  $\frac{56\pi}{15}$ ; б)  $\frac{8\pi}{3}$ ; в)  $\frac{8\pi \sqrt{2}}{15}$ . 81.  $\frac{2\pi a^2 h (3b^2 - h^2)}{3b^2}$ .  
 82.  $\frac{3\pi}{7} \left( 2^7 - \frac{1}{3^7} \right)$ . 83. а)  $\frac{\pi a^3}{2} (\pi - 2)$ ; б)  $\pi a^3 \sqrt{2} \left( \frac{5}{6} - \frac{\pi}{4} \right)$ .  
 84. а)  $\frac{32\pi a^3}{105}$ ; б)  $\frac{3\pi^2 a^3}{4}$ . 85. а)  $\frac{16}{15} \pi a^3$ ; б)  $\frac{\pi^2 a^3}{2}$ ; в)  $\frac{16\pi a^3}{3}$ ; г)  $\frac{16}{3} \pi a^3$ .  
 86. а)  $\pi^2 a^3$ ; б)  $2\pi a^3 \left( \frac{\pi^2}{4} - \frac{4}{3} \right)$ ; в)  $3\pi^2 a^3$ . 87. а)  $4a^3 \pi^2$ ; б)  $\frac{128}{15} a^3 \pi$ .  
 88.  $V_{Ox} = \frac{11\pi a^3}{32}$ ,  $V_{x=a} = \frac{\pi a^3 \sqrt{3} \cdot 118}{35}$ ,  $V_{x=-a} = \frac{22\pi a^3 \sqrt{3}}{7}$ . 89.  $\frac{13\pi^2 a^3}{4}$ .

Указание. Левая вертикальная касательная имеет уравнение  $x = \varphi(x_0)$ , где  $x(\varphi_0) = \min x(\varphi)$  на  $[0, \pi]$ . 91.  $\frac{236}{35} \pi a^3$ . 92.  $\frac{4}{21} \pi a^3$ . 93.  $\frac{64}{105} \pi a^3$ .

94.  $\frac{2}{111} \pi a^3 (e^{6\pi} + 1)$ . 95.  $\frac{27}{20} + \ln 2$ . 96.  $\ln(2 + \sqrt{3})$ . 97.  $\ln 3 - \frac{1}{2}$ .  
 98.  $\ln(e + \sqrt{e^2 - 1})$ . 99.  $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ . 100.  $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ . 101. 2. 102.  $\frac{a^3 + b^3}{a^2 + b^2} +$   
 $+ \frac{a^2 b^2}{(a^2 + b^2)^{2/3}} + \ln \frac{b(\sqrt{a^2 + b^2} + b)}{a(\sqrt{a^2 + b^2} - a)}$ . Указание. Перейти к параметрическому заданию кривой. 103.  $\frac{28}{3} a$ . Указание. Перейти к параметрическому заданию кривой. 104.  $\frac{7a}{6}$ . 105.  $\frac{14}{3} a$ . 106.  $\frac{\sqrt{2}}{9} (5^{3/2} - 2^{3/2})$ . 107.  $\sqrt{1 + e^2} + e - 2 + 2 \ln(1 + \sqrt{2}) + \ln(\sqrt{1 + e^2} - 1)$ .  
 108.  $\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}) + \frac{2}{27} (10^{3/2} - 1)$ . 109.  $\frac{7}{3}$ . 110. 1. 111. 1.  
 112.  $6a$ . 113.  $\frac{5}{8} a \left( 2 - \frac{\ln(2 - \sqrt{3})}{\sqrt{3}} \right)$ . 114.  $2a \sqrt{5} + a \ln(2 + \sqrt{5})$ .  
 115.  $2\sqrt{2} - 2$ . 116.  $1/3$ . 117. 10a. 118.  $2a \cosh t_0 - 3a \sinh t_0 + a$ ,  $x(t_0) = x_0$ ,  $y(t_0) = y_0$ . 119.  $a \cos t_0 + a \ln \left| \frac{\cos t_0 - 1}{\cos t_0 + 1} \right|$ ,  $x(t_0) = x_0$ ,  $y(t_0) = y_0$ .  
 122.  $2a \sqrt{5} \pi$ . 123.  $\frac{1}{21} (27\sqrt{3} - 2\sqrt{6})$ . 124.  $\sqrt{h^2 + 4e^{4\pi}} - \sqrt{h^2 + 4} +$   
 $+ h \ln \left( \frac{\sqrt{4e^{4\pi} + h^2} - h}{\sqrt{4 + h^2} - h} \right) - 2\pi$ . 125. 10a. 126.  $\frac{t_0}{2} \sqrt{a^2 t_0^2 + h^2} + \frac{h^2}{2a} \ln |at_0 +$   
 $+ \sqrt{a^2 t_0^2 + h^2}| - \frac{h^2}{2a} \ln h$ . 127.  $\frac{a}{8} (2\pi + 3\sqrt{3})$ . 128.  $\frac{16a}{3}$ . 129.  $\frac{1}{3} \times$   
 $\times [(\pi^2 + 4)^{3/2} - 8]$ . 130.  $\frac{14}{3}$ . 131.  $3\sqrt{37} - \sqrt{5} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{6 + \sqrt{37}}{2 + \sqrt{5}} \right|$ .  
 132.  $a(\pi \sqrt{4\pi^2 + 1} + \frac{1}{2} \ln(2\pi + \sqrt{4\pi^2 + 1}))$ . 133.  $\pi a \times$   
 $\times \ln \left( \frac{8\pi + 2\sqrt{16\pi^2 + 1}}{\pi + \sqrt{\pi^2 + 4}} \right) + \frac{a}{4} (\sqrt{16\pi^2 + 64} - \sqrt{1 + 16\pi^2})$ . 134.  $L_1 = 2(l_2 + l_3 + l_4)$ ;  $L_2 = l_1 + l_3$ ;  $L_3 = 2(l_4 + l_5)$ ,  $l_1 = 4\sqrt{2} a \sin \frac{\pi}{8}$ ,  $l_2 = 4a \sin \frac{\pi}{8}$ ,  $l_3 = \frac{a}{2} \left( -\frac{\cos \frac{3\pi}{8}}{2 \sin^2 \frac{3\pi}{8}} + \frac{1}{2} \ln \left| \tan \frac{3\pi}{16} \right| + \frac{\cos \frac{\pi}{8}}{2 \sin^2 \frac{\pi}{8}} - \right.$   
 $- \frac{1}{2} \ln \left| \tan \frac{\pi}{16} \right| \left. \right)$ ,  $l_4 = 4a \left( 1 - \sin \frac{3\pi}{8} \right)$ ,  $l_5 = \frac{a}{2} \left( -\frac{\cos \frac{3\pi}{8}}{2 \sin^2 \frac{3\pi}{8}} - \right.$

- $$-\frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{3\pi}{16} \right| \right). \quad 135. \quad 2a \left( 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right). \quad 136. \quad a \left( \frac{\sin \varphi_0}{2 \cos^2 \varphi_0} + \frac{1}{2} \right) \times$$
- $$\times \ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{\varphi_0}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|. \quad 137. \quad \text{a)} \quad 2\pi b^2 + 2\pi ab \frac{\arcsin e}{e}, \quad \text{б)} \quad 2\pi a^2 +$$
- $$+ \frac{2\pi b^2}{e} \ln \left[ \frac{a}{b} (1+e) \right], \quad e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}. \quad 138. \quad 2\pi \ln \left( \frac{b^2 + \sqrt{1+b^2}}{a^2 + \sqrt{1+a^2}} \right) +$$
- $$+ 2\pi \left( \sqrt{1 + \frac{1}{a^2}} - \sqrt{1 + \frac{1}{b^2}} \right). \quad 139. \quad \frac{3\pi}{16} [9 - 8 \ln 2]. \quad 140. \quad 4\pi^2 ab.$$
- $$141. \quad \frac{\pi a^2}{3}. \quad 142. \quad 3\pi + \frac{4\sqrt{2}}{3} \pi \left[ \left( \frac{7}{2} \right)^{3/2} - 2^{3/2} \right]. \quad 143. \quad \frac{2\sqrt{2}\pi}{5} (e^\pi - 2).$$
- $$144. \quad \text{а)} \quad \frac{32}{3} \pi a^2; \quad \text{б)} \quad 16\pi a^2; \quad \text{в)} \quad \frac{32}{3} \pi a^2; \quad \text{г)} \quad \frac{32\pi a^2}{3}. \quad 145. \quad 2\pi a^2 \left( 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$
- $$146. \quad \frac{2\pi a^2}{3} (5^{3/2} - 1). \quad 147. \quad \frac{128\pi a^2}{5}. \quad 148. \quad \text{а)} \quad 3\pi a^2; \quad \text{б)} \quad \frac{28\pi a^2 \sqrt{3}}{5}.$$
- $$149. \quad \text{а)} \quad \frac{10}{3} \pi a^2; \quad \text{б)} \quad \frac{1240}{63} \sqrt{\frac{5}{3}} \cdot \pi a^2. \quad 150. \quad \text{а)} \quad 6\pi a^2; \quad \text{б)} \quad \frac{816}{35} \sqrt{2} \pi a^2.$$
- $$151. \quad \text{а)} \quad \pi a^2 \left( \frac{8}{3} \pi + 4\sqrt{3} \right); \quad \text{б)} \quad 4\pi a^2. \quad 152. \quad \text{а)} \quad 2\pi \left( a^2 + \frac{b^4}{\sqrt{a^4 - b^4}} \right) \times$$
- $$\times \ln \frac{\sqrt{a^4 - b^4} + a^2}{b^2}; \quad \text{б)} \quad 2\pi \left( b^2 + \frac{a^4}{\sqrt{a^4 - b^4}} \arcsin \frac{\sqrt{a^4 - b^4}}{a^2} \right).$$

### Глава III ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

#### § 1. ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ

Точкой  $x$  в пространстве  $R^m$  называется упорядоченный набор чисел  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ . Величина  $\sqrt{\sum_{i=1}^m x_i^2}$  называется *нормой*  $x \in R^m$  и обозначается  $\|x\|$ ; если нужно уточнить, в каком пространстве находится  $x$ , пишут  $\|x\|_{R^m}$ , но обычно индекс опускается, так как из контекста ясно, о каком пространстве идет речь. Так как

$$\max_{1 \leq i \leq m} |x_i| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^m x_i^2} \leqslant \sqrt{m} \max_{1 \leq i \leq m} |x_i|,$$

то условие  $\|x\| \rightarrow 0$  эквивалентно условию  $\max_{1 \leq i \leq m} |x_i| \rightarrow 0$ .

Норма в пространстве  $R^m$  играет ту же роль, что и абсолютная величина для точек числовой прямой. Расстояние от  $x$  до нуля —  $d(x, 0)$  — равно норме  $x : d(x, 0) = \|x\|$ ; расстояние между точками  $x$  и  $y$  равно норме  $(x - y) : d(x, y) = \|x - y\|$ . В дальнейшем расстояние между точками  $x$  и  $y$  записываем в виде  $\|x - y\|$ .

Отображение  $f: E \rightarrow R^n$ ,  $E \subset R^m$ , записывается в координатной форме  $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ , где  $f_i: E \rightarrow R^1$ ,  $i=1, 2, \dots, n^*$ . Отображение  $f: E \rightarrow R$ ,  $E \subset R^m$ , назовем функцией (действительнозначной функцией) точки  $x \in R^m$ :  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$  или функцией  $t$  переменных  $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ . Исследование многих свойств отображения  $f: E \rightarrow R^n$ ,  $E \subset R^m$ , сводится к исследованию этих свойств его координатных функций  $f_1, f_2, \dots, f_n$ ,  $f_i: E \rightarrow R^1$ . Поэтому в настоящей главе более подробно анализируются функции

$$f: E \rightarrow R, E \subset R^m.$$

**Определение.** Пусть  $f: E \rightarrow R^n$ ,  $E \subset R^m$ , и  $M_0$  — предельная точка  $E$ . Точка  $A \in R^n$  называется пределом отображения  $f(x)$  при  $x \rightarrow M_0$ :  $\lim_{x \rightarrow M_0} f(x) = A$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$  такое, что для любого  $x \in E$ , удовлетворяющего условию  $0 < \|x - M_0\|_{R^m} < \delta$ , выполняется  $\|f(x) - A\|_{R^n} < \varepsilon$ . Запишем это определение с использованием символики:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in E, 0 < \|x - M_0\|_{R^m} < \delta \Rightarrow \|f(x) - A\|_{R^n} < \varepsilon.$$

В терминах покоординатной сходимости утверждение  $\lim_{x \rightarrow M_0} f(x) = A$ ,  $M_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)''$ , записывается так:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x = (x_1, x_2, \dots, x_m), x \in E,$$

$$0 < |x_i - x_i^0| < \delta \quad (i = 1, 2, \dots, m) \Rightarrow \|f(x) - A\|_{R^n} < \varepsilon.$$

Отображение  $f: E \rightarrow R^n$ ,  $E \subset R^m$ , где в координатной записи  $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ ,  $f_i: E \rightarrow R$  имеет точку  $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  пределом при  $x \rightarrow M_0$  тогда и только тогда, когда  $\lim_{x \rightarrow M_0} f_i(x) = a_i$  для любого  $i = 1, 2, \dots, n$ .

**Критерий Коши.** Пусть  $f: E \rightarrow R^n$ ,  $E \subset R^m$ , и  $M_0$  — предельная точка  $E$ . Предел  $\lim_{x \rightarrow M_0} f(x)$  существует тогда и только тогда, когда для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$  такое, что для любых  $x_1 \in E$  и  $x_2 \in E$  из неравенств  $0 < \|M_0 - x_1\|_{R^m} < \delta$ ,  $0 < \|M_0 - x_2\|_{R^m} < \delta$  следует неравенство

$$\|f(x_1) - f(x_2)\| < \varepsilon.$$

---

\* В дальнейшем пространство  $R^1$  будем обозначать просто  $R$ .

С использованием символов это записывается так:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall x_1 \in E, \forall x_2 \in E, 0 < \|M_0 - x_1\| < \delta, \\ 0 < \|M_0 - x_2\| < \delta \Rightarrow \|f(x_1) - f(x_2)\| < \varepsilon.$$

**Определение.** Пусть  $f: E \rightarrow R^n$ ,  $E \subset R^m$ , и множество  $U \subset R^m$ . Тогда колебанием отображения  $f$  на множестве  $U$  называется  $\sup_{x_1, x_2 \in U \cap E} \|f(x_1) - f(x_2)\|$  и обозначается  $\omega_U(f)$ . Используя понятие колебания отображения  $f: E \rightarrow R^n$ ,  $E \subset R^m$ , на множестве  $U \subset R^m$ , критерий Коши существования предела формулируется так: пусть  $f: E \rightarrow R^n$ ,  $E \subset R^m$ , и  $M_0$  — предельная точка  $E$ . Предел  $\lim_{x \rightarrow M_0} f(x)$  существует тогда и только тогда, когда для любого  $\varepsilon > 0$  существует окрестность  $U = U(M_0)$  точки  $M_0$  такая, что  $\omega_U(f) < \varepsilon$ , где  $U = U \setminus \{M_0\}$ .

Вычисление предела функции многих переменных часто сводится к вычислению предела функции одного переменного либо с помощью оценок, либо заменой переменных.

**Пример 1.** Найдем предел  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ .

**Решение.** Условие  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  эквивалентно условию  $\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0$ . Так как

$$|\sin xy| \leq |xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2),$$

то

$$0 \leq \left| \frac{\sin xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq \frac{x^2 + y^2}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2},$$

и, следовательно,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

**Пример 2.** Найдем предел  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln^2(x+y)}{\sqrt{x^2 + y^2 - 2x + 1}}$ .

**Решение.** Так как  $z = x + y \rightarrow 1$ , то  $\ln z \sim z - 1 = (x + y - 1)$ . Введем новые переменные  $r$  и  $t$ :  $x = 1 + r \cos t$ ,  $y = r \sin t$ , тогда условие  $(x, y) \rightarrow (1, 0)$  эквивалентно условию  $r \rightarrow 0$  и

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln^2(x+y)}{\sqrt{x^2 + y^2 - 2x + 1}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{(x+y-1)^2}{\sqrt{x^2 + y^2 - 2x + 1}} = \\ = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2(\cos t + \sin t)^2}{r} = 0.$$

Предел функции  $f(x) = f(x_1, \dots, x_m)$  при условии  $x_k \rightarrow \infty$  ( $x_k \rightarrow +\infty$ ;  $x_k \rightarrow -\infty$ ) и  $x_i \rightarrow x_i^0$ ,  $i=1, 2, \dots, m$ ,  $i \neq k$  рассматривается как предел функции  $f(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, \frac{1}{t}, x_{k+1}, \dots, x_m)$  при  $t \rightarrow 0$  ( $t \rightarrow 0+$ ,  $t \rightarrow 0-$ ) и  $x_i \rightarrow x_i^0$ ,  $i=1, 2, \dots, m$ ,  $i \neq k$ . Если бесконечно большой является не одна координата точки  $x$ , а несколько, то аналогично все эти координаты заменяются переменными  $\frac{1}{t_1}$ ,  $\frac{1}{t_2}$  и т. д.

**Пример 3.** Найдем предел  $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow 3}} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$ .

**Решение.** Обозначим  $x = 1/t$ , тогда условие  $x \rightarrow \infty$   $y \rightarrow 3$  эквивалентно условию  $(t, y) \rightarrow (0, 3)$ , следовательно,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow 3}} \frac{x^2}{x+y} \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{(t,y) \rightarrow (0,3)} \frac{\ln(1+t)}{t(1+ty)} = \lim_{(t,y) \rightarrow (0,3)} \frac{1}{1+ty} = 1$$

и

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow 3}} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x+y} \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)} = e.$$

**Определение.** Пусть  $M_0$  предельная точка  $E$  и  $M_0 \in E$ . Отображение  $f: E \rightarrow R^n$ ,  $E \subset R^m$ , непрерывно в точке  $M_0$ , если

$$\lim_{x \rightarrow M_0} f(x) = f(M_0).$$

Отображение  $f: E \rightarrow R^n$ ,  $E \subset R^m$ , где в координатной записи  $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ ,  $f_i: E \rightarrow R$ , непрерывно в точке  $M_0 \in E$  тогда и только тогда, когда каждая из функций  $f_i(x)$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ , непрерывна в этой точке.

Непрерывность функции многих переменных  $f$  в точке  $x$  обычно устанавливается по теореме о композиции непрерывных функций. Если же в данной точке функция  $f$  не является композицией непрерывных функций, то вопрос требует индивидуального исследования.

Приведем соответствующие примеры.

**Пример 4.** Непрерывность функции

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & x^2 + y^2 \neq 0; \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

в любой точке  $M = (x_0, y_0)$ , кроме точки  $M_0 = (0, 0)$ , следует из непрерывности многочлена, синуса, квадратного корня и условия  $x_0^2 + y_0^2 \neq 0$ ; непрерывность  $f$  в точке  $M_0$  следует из равенства

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0 \quad (\text{см. с. 288}).$$

Пример 5. Непрерывность функции

$$f(x, y, z) = \begin{cases} ax^2 + \frac{xyz}{y^2 + z^2}, & y^2 + z^2 \neq 0, \\ ax^2, & y^2 + z^2 = 0 \end{cases}$$

в любой точке  $M_1(x_0, y_0, z_0)$ , где  $y_0^2 + z_0^2 \neq 0$ , устанавливается так же, как и в предыдущем примере. Пусть  $M_2 = (x_0, 0, 0)$ ,  $x_0 \neq 0$ . Рассмотрим, как ведут себя значения  $f(M)$ , если точка  $M$  приближается к точке  $M_2$  по прямым  $x = x_0$ ,  $y = 0$  и  $x = x_0$ ,  $y = z$ . Для  $M(x_0, 0, z)$  имеем  $f(M) = ax_0^2$  и  $\lim_{M \rightarrow M_2} f(M) = ax_0^2 = f(M_2)$ ; для  $M(x_0, y, y)$ ,  $y \neq 0$ ,

имеем  $f(M) = ax_0^2 + \frac{x_0}{2}$  и  $\lim_{M \rightarrow M_2} f(M) = ax_0^2 + \frac{x_0}{2} \neq f(M_2)$ , так как  $x_0 \neq 0$ .

Итак,  $f$  разрывна в точке  $M_2$ , более того, так как в любой окрестности  $M_2$  функция  $f$  принимает как значение  $ax_0^2$ , так и значение  $ax_0^2 + \frac{x_0}{2}$ , то колебание  $f$  в этой окрестности не менее  $\left| \frac{x_0}{2} \right|$ . Следовательно, в силу критерия Коши, функция  $f$  не имеет предела при  $M \rightarrow M_2$ .

Исследуем непрерывность  $f$  в точке  $M_0 = (0, 0, 0)$ . Так как  $|yz| \leq \frac{1}{2}(y^2 + z^2)$ , то  $|f(x, y, z)| \leq |a|x^2 + \frac{1}{2}|x|$  при  $y^2 + z^2 \neq 0$ ;  $|f(x, y, z)| = |a|x^2|$  при  $y^2 + z^2 = 0$ . Если  $M(x, y, z) \rightarrow M_0(0, 0, 0)$ , то  $x \rightarrow 0$ , следовательно,  $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = 0 = f(M_0)$ , т. е.  $f$  непрерывна в  $M_0 = (0, 0, 0)$ .

Итак, множество  $M$  точек разрыва  $f$  является осью  $OX$  с выколотым началом координат.

Обратим внимание, что для доказательства того, что функция  $f$  разрывна в точке  $M_2$ , достаточно найти такие две линии, проходящие через точку  $M_2$ , что  $f$  имеет разные пределы, когда точка  $M$  стремится к точке  $M_2$ , оставаясь на одной из этих линий. Когда же проверяется непрерывность функции многих переменных в точке  $M_0$ , то необходимо рассматривать поведение этой функции не на отдельных линиях, проходящих через точку  $M_0$ , а во всех точках некоторой полной окрестности точки  $M_0$ , причем необходимо, чтобы при любом стремлении некоторой точки  $x$  к точке  $M_0$  было выполнено  $\lim_{x \rightarrow M_0} f(x) = f(M_0)$ .

Поскольку техника вычисления предела функции многих переменных аналогична технике вычисления предела функции одного переменного, то в этом разделе помещены только теоретические, а не вычислительные задачи, связанные с понятиями предела и непрерывности функций многих переменных.

## § 2. ПРОИЗВОДНАЯ, ПЕРВЫЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ, ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ

Пусть  $f: E \rightarrow R^n$ ,  $E \subset R^m$ , и  $x_0 \in E$  — внутренняя точка  $E$ . Рассмотрим линейное пространство векторов  $h$  размерности  $m$ , имеющих начало («приложенных») в точке  $x_0$ . Такие векторы назовем векторами смещения. Каноническим базисом в таком пространстве будет базис из «приложенных» в точке  $x_0$  ненулевых векторов, коллинеарных базисным векторам исходного пространства  $R^m$ . В этом базисе координаты вектора  $h$  обозначим  $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_m$ .

**Определение.** Отображение  $f: E \rightarrow R^n$ ,  $E \subset R^m$ , дифференцируемо в точке  $x_0 \in E$ , внутренней для  $E$ , если

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = L(x_0)h + o(h),$$

где  $h$  — вектор смещения,  $L(x_0): R^m \rightarrow R^n$  — линейное отображение и  $\|o(h)\|_{R^n} = o(\|h\|_{R^m})$  при

$$\|h\|_{R^m} \rightarrow 0, \text{ где } \|h\|_{R^m} = \left( \sum_{i=1}^m \Delta x_i^2 \right)^{1/2}.$$

Линейное отображение  $L(x_0)$  называется производным отображением  $f$  или производной отображения  $f$  в точке  $x_0$  и обозначается  $f'(x_0)$ .

**Пример 1.** Рассмотрим отображение  $f: R^2(x, y) \rightarrow R^2(u, v)$ , заданное формулами  $u = x^2 + y^2$ ,  $v = xy$ . Возьмем точку  $M_0 = (1, 1)$ . Покажем, что данное отображение  $f$  дифференцируемо в этой точке. Вектор смещения обозначим  $h$ . Его координаты в каноническом базисе обозначим  $\Delta x, \Delta y$  (см. рис. 20). Имеем

$$\begin{aligned} f(M_0 + h) &= f(1 + \Delta x, 1 + \Delta y) = \{(1 + \Delta x)^2 + (1 + \Delta y)^2; \\ &(1 + \Delta x)(1 + \Delta y)\} = \{2 + 2\Delta x + 2\Delta y + \Delta x^2 + \Delta y^2; 1 + \Delta x + \Delta y + \\ &+ \Delta x \cdot \Delta y\}. \end{aligned}$$

Разность  $f(M_0 + h) - f(M_0)$  представим в виде

$$\begin{aligned} &\{2 + 2\Delta x + 2\Delta y + \Delta x^2 + \Delta y^2; 1 + \Delta x + \Delta y + \Delta x \cdot \Delta y\} - \{2; 1\} = \\ &= \{2\Delta x + 2\Delta y; \Delta x + \Delta y\} + \{\Delta x^2 + \Delta y^2, \Delta x \cdot \Delta y\}. \end{aligned}$$

Отображение  $L(1; 1)h: h = \{\Delta x, \Delta y\} \rightarrow \{2\Delta x + 2\Delta y, \Delta x + \Delta y\}$  линейное. Действительно, если  $h_1 = (\Delta x_1, \Delta y_1)$ ,  $h_2 = (\Delta x_2, \Delta y_2)$ , то

$$L(1, 1)h_1 = \{2\Delta x_1 + 2\Delta y_1, \Delta x_1 + \Delta y_1\},$$

$$L(1, 1)h_2 = \{2\Delta x_2 + 2\Delta y_2, \Delta x_2 + \Delta y_2\}$$

и

$$L(1, 1)(h_1 + h_2) = L(1, 1)h_1 + L(1, 1)h_2,$$

$$L(1, 1)(\alpha h_1) = \alpha Lh_1 \text{ (проверьте).}$$

Норма вектора  $\alpha(M_0, h) = \{\Delta x^2 + \Delta y^2, \Delta x \cdot \Delta y\}$  равна  $\sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2)^2 + (\Delta x \cdot \Delta y)^2}$ . Так как  $(\Delta x \cdot \Delta y) \leq \frac{\Delta x^2 + \Delta y^2}{2}$ , то

$$\begin{aligned} \sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2)^2 + (\Delta x \cdot \Delta y)^2} &\leq \frac{\sqrt{5}}{2} (\Delta x^2 + \Delta y^2) = \\ &= \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \cdot \sqrt{5/4 (\Delta x^2 + \Delta y^2)} = o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}) = o(\|h\|) \end{aligned}$$

при  $\|h\| \rightarrow 0$ , т. е.  $\|\alpha(M_0, h)\| = o(\|h\|)$  при  $h \rightarrow 0$ .

Следовательно,  $L(1, 1)$  есть производное отображение отображения  $f$ . Всякое линейное отображение в определенном базисе характеризуется некоторой матрицей. Нашему отображению  $L(1, 1)$  в каноническом базисе отвечает матрица  $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

Отображение  $f: E \rightarrow R^n$ ,  $E \subset R^m$ , дифференцируемое в точке  $x_0$ , непрерывно в этой точке.

#### *Основные правила дифференцирования*

1. Линейность: если отображения  $f_1: E \rightarrow R^n$ ,  $f_2: E \rightarrow R^n$ ,  $E \subset R^m$ , дифференцируемы в точке  $x_0 \in E$ , то их линейная комбинация также дифференцируема в точке  $x_0$  и

$$(\alpha f_1 + \beta f_2)'(x_0) = \alpha f_1'(x_0) + \beta f_2'(x_0).$$

2. Дифференцирование композиции отображений: если отображение  $f: X \rightarrow Y$ ,  $X \subset R^m$ ,  $Y \subset R^n$ , дифференцируемо в точке  $x_0 \in X$ , а отображение  $g: Y \rightarrow R^q$  дифференцируемо в точке  $y_0 = f(x_0) \in Y$ , то композиция  $g \circ f: X \rightarrow R^q$  дифференцируема в точке  $x_0$  и производная  $(g \circ f)'(x_0)$  есть композиция производных  $g'(y_0) \circ f'(x_0)$ .

Отображение  $f: E \rightarrow R^n$ ,  $E \subset R^m$ , где в координатной записи  $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ ,  $f_i: E \rightarrow R$ , дифференцируемо тогда и только тогда в точке  $x_0 \in E$ , когда каждое из отображений  $f_i: E \rightarrow R$ ,  $E \subset R^m$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  (т. е. функций  $f_i$ ), дифференцируемо в точке  $x_0$ .

Производной функции  $f: E \rightarrow R$ ,  $E \subset R^m$ , в точке  $x_0$  является линейное отображение в  $R$ , определенное на пространстве приложенных в точке  $x_0$  векторов  $h$ . Такое линейное отображение вектора  $h(\Delta x_1, \dots, \Delta x_m)$  представляет собой линейную форму от  $\Delta x_1, \dots, \Delta x_m$ . Эта линейная форма коротко называется первым дифференциалом функции  $f$  в точке  $x_0$  и обозначается  $df(x_0)$ . Значение этой линейной формы называется значением первого дифференциала функции  $f$  в точке  $x_0$  на векторе  $h$  и обозначается  $df(x_0)h$ .

По этому определению для функции одного переменного  $f: (a, b) \rightarrow R$  ее производной в точке  $x_0 \in (a, b)$  является линейное отображение одномерного вектора  $h = \Delta x$  в  $R$ , т. е. умножение этого вектора на такое число  $a$ , что

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = a \Delta x + o(\Delta x).$$

Сравнивая это определение с ранее данным определением производной функции одного переменного, видим, что коэффициент  $a$  есть  $f'(x_0)$  в прежнем смысле:  $a = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ . Другими

словами, в прежнем определении не само линейное отображение вектора  $h = \Delta x$  называлось производной, а коэффициент этого линейного отображения, т. е. его числовая характеристика. Так как прямая пропорциональная зависимость взаимно однозначно определяется своим коэффициентом, то для функции одного переменного производную можно считать как числом, так и линейным преобразованием векторов смещения, характеризующимся этим числом. Значение дифференциала  $df(x_0)h = a \cdot \Delta x$  функции  $f$  одного переменного на векторе  $h = \Delta x$  полностью совпадает в обоих определениях.

Для аналогичной числовой характеристики производной функции  $f: E \rightarrow R$ ,  $E \subset R^m$ ,  $m \geq 2$ , вводится понятие частной производной  $f'_i$  по одному из переменных.

**Определение.** Пусть  $f: E \rightarrow R$ ,  $E \subset R^m$ ,  $m \geq 2$ , и  $x_0 \in E$  — внутренняя точка  $E$ . Частной производной функции  $f$  в точке  $x_0 = (x_1^0, \dots, x_m^0)$  по переменному  $x_i$  называется

$$\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_{i-1}^0, x_i^0 + \Delta x_i, x_{i+1}^0, \dots, x_m^0) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_{i-1}^0, x_i^0, x_{i+1}^0, \dots, x_m^0)}{\Delta x_i},$$

если этот предел существует. В этом случае говорят, что  $f$  имеет частную производную по  $x_i$  в точке  $x_0$  и эту производную обозначают  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$  или  $f'_{x_i}(x_0)$ , или  $f'_i(x_0)$ .

Частная производная  $f'_{x_i}(x_0)$ ,  $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_i^0, \dots, x_m^0)$ , вычисляется обычными методами дифференцирования функции одного переменного, считая все координаты точки  $x(x_1, x_2, \dots, x_m)$  (все аргументы функции) фиксированными, кроме той, по которой берется производная, т. е.  $x_j = x_j^0$  ( $j \neq i$ ).

Если обозначить

$$f_i^*(x_i) = f(x_1^0, \dots, x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, \dots, x_m^0),$$

то

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = (f_i^*(x_i^0))'.$$

**Пример 1.** Найдем частные производные  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial z}$  функции  $u(x, y, z) = \operatorname{arctg} \frac{xz + y}{1 - xy}$  в точке  $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ .

**Решение.** Дифференцируя функцию  $u_1^*(x) = \arctg \frac{xz_0 + y_0}{1 - xy_0}$  по  $x$ , получаем

$$\frac{\partial u}{\partial x} (M_0) = (u_1^*(x_0))' = \frac{z_0 + y_0^2}{1 - 2x_0y_0 + x_0^2y_0^2 + 2x_0y_0z_0 + y_0^2 + x_0^2z_0^2}.$$

Аналогично

$$\frac{\partial u}{\partial y} (M_0) = \frac{1 + x_0^2z_0}{1 - 2x_0y_0 + x_0^2y_0^2 + 2x_0y_0z_0 + y_0^2 + x_0^2z_0^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} (M_0) = \frac{x_0 - x_0^2y_0}{1 - 2x_0y_0 + x_0^2y_0^2 + 2x_0y_0z_0 + y_0^2 + x_0^2z_0^2}.$$

**Пример 2.** Найдем частные производные  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial z}$  функции

$$u = x^y + y^z + z^x \quad (x > 0, y > 0, z > 0).$$

**Решение.**

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yx^{y-1} + z^x \ln z, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^y \ln x + zy^{z-1}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = y^z \ln y + xz^{x-1}.$$

Как уже отмечалось в случае функции одного переменного, использовать формулы производных элементарных функций и правила дифференцирования можно только в тех точках, для которых значения функции в самой точке и в некоторой ее окрестности заданы одним и тем же аналитическим выражением. В противном случае приходится находить производную другим путем, например ее непосредственным вычислением через предел. Вычисление частных производных функции многих переменных в такой особой точке  $x_0 = (x_1^0, \dots, x_m^0)$  иногда упрощается тем, что для функции одного переменного

$$f_i^*(x_i) = f(x_1^0, \dots, x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, \dots, x_m^0)$$

точка  $x_i^0$  не будет особой.

**Пример 3.** Найдем  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial z}$  для функции

$$u(x, y, z) = \begin{cases} ax^2 + \frac{xyz}{y^2 + z^2}, & y^2 + z^2 \neq 0; \\ ax^2, & y^2 + z^2 = 0 \end{cases}$$

в точке  $M_0 = (1, 0, 0)$ .

**Решение.** Так как  $u_1^*(x) = u(x, 0, 0) = ax^2$ , то  $\frac{\partial u}{\partial x} (M_0) = ((u_1^*)'(1)) = 2a$ . Так как  $u_2^*(y) = u(1, y, 0) = a$  при любом  $y$ ,

то  $\frac{\partial u}{\partial y}(M_0) = ((u_2^*)'(0)) = 0$  и аналогично  $\frac{\partial u}{\partial z}(M_0) = ((u_3^*)'(0)) = 0$ , где  $u_3^*(z) \equiv a$ .

Итак, функция  $u$  имеет в точке  $M_0$  все три частные производные, но, как было показано в примере 5 § 1, разрывна в этой точке.

Внимание! Для функции  $f: E \rightarrow R$ ,  $E \subset R^m$ ,  $m \geq 2$ , существование частных производных в точке  $M_0$  не гарантирует непрерывности и тем более дифференцируемости  $f$  в точке  $M_0$ .

Если функция  $f: E \rightarrow R$ ,  $E \subset R^m$ ,  $m \geq 2$ , дифференцируема в точке  $x_0 \in E$ , то  $f$  имеет в этой точке частные производные по всем переменным, и эти производные являются коэффициентами линейной формы  $df(x_0)$ , т. е.

$$df(x_0)h = f'_1(x_0)\Delta x_1 + f'_2(x_0)\Delta x_2 + \dots + f'_m(x_0)\Delta x_m,$$

где  $h = (\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_m)$ .

Рассмотрим функцию  $\pi_i(x) = x_i$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ . Ее приращение  $\Delta \pi_i(x_0) = \pi_i(x_0 + h) - \pi_i(x_0) = \Delta x_i$  есть линейное отображение  $L$  вектора  $h = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_m)$ :  $Lh = \Delta x_i$ , следовательно,  $dx_i = d\pi_i(x_0) = \Delta \pi_i(x_0) = \Delta x_i$ . В силу этого равенства первый дифференциал функции  $f$  в точке  $x_0$  может быть записан в форме

$$df(x_0) = f'_1(x_0)dx_1 + f'_2(x_0)dx_2 + \dots + f'_m(x_0)dx_m = \sum_{k=1}^m f'_k(x_0)dx_k.$$

Именно эта форма записи первого дифференциала функции наиболее употребительна. Удобство ее в том, что в силу теоремы о дифференциировании композиции эта форма сохраняется и тогда, когда  $x_1, x_2, \dots, x_m$  являются не только независимыми переменными, но и функциями некоторых других независимых аргументов:  $x_i: E \rightarrow R^q$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ . В этом случае символ  $dx_i$  уже есть не приращение  $\Delta x_i$ , а дифференциал функции  $x_i$ .

Как уже было показано в примере, существование в точке  $M_0$  частных производных функции  $f: E \rightarrow R$ ,  $E \subset R^m$ ,  $m \geq 2$ , недостаточно для дифференцируемости  $f$  в точке  $M_0$ . Это только необходимое условие. Дифференцируемость функции многих переменных в точке  $x_0$  обычно устанавливается с помощью следующего достаточного условия: если  $G$  — область в  $R^m$  и функция  $f: G \rightarrow R$  имеет частные производные в некоторой окрестности точки  $x_0 \in G$  и эти производные непрерывны в точке  $x_0$ , то  $f$  дифференцируема в точке  $x_0$ .

Класс функций, имеющих непрерывные производные в некоторой области  $G \subset R^m$ , обозначается  $C^1(G)$ . Все функции  $f: G \rightarrow R$  класса  $C^1(G)$  непрерывны и дифференцируемы в каждой точке области  $G$ , но существуют непрерывные и даже дифференцируемые в каждой точке  $M_0 \in G$  функции, не входящие в класс  $C^1(G)$  (за счет того, что частные производные будут разрывны).

Пример 4. (Функция, дифференцируемая всюду в области  $G$ , но не принадлежащая классу  $C^1(G)$ .)

Пусть

$$G \subset \mathbb{R}^2, G = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$$

и

$$z(x, y) = \begin{cases} y^{4/3} \ln(y^2 + x^{4/3}), & x^2 + y^2 \neq 0; \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

В каждой точке  $M = (x, y)$ , кроме начала координат

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^{4/3} \frac{4x^{1/3}}{3(y^2 + x^{4/3})}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{4}{3} y^{1/3} \ln(y^2 + x^{4/3}) + \frac{2y^{7/3}}{y^2 + x^{4/3}},$$

откуда видно, что в этих точках частные производные  $\frac{\partial z}{\partial x}$  и  $\frac{\partial z}{\partial y}$  непрерывны и, следовательно, функция  $z$  дифференцируема в этих точках.

Рассмотрим точку  $M_0 = (0, 0)$ , имеем  $\Delta z(0, 0) = z(x, y) - z(0, 0) = y^{4/3} \ln(y^2 + x^{4/3})$ . Так как для  $|x| < 1/2, |y| < 1/2, y^2 + x^{4/3} < 1$ , то

$$|\ln(y^2 + x^{4/3})| \leqslant |\ln y^2| = 2|\ln|y||,$$

откуда

$$|\Delta z(0, 0)| \leqslant |y| \cdot |y|^{1/3} \cdot 2|\ln|y|| = o(|y|) = o(\sqrt{x^2 + y^2}),$$

$$x^2 + y^2 \rightarrow 0.$$

Следовательно, если  $L(0, 0)$  — линейное отображение, переводящее вектор  $h = (x, y)$  в нуль, то

$$\Delta z(0, 0) = L(0, 0)h + o(\sqrt{x^2 + y^2}), \quad x^2 + y^2 \rightarrow 0,$$

т. е. функция  $z(x, y)$  дифференцируема в начале координат и  $dz(0, 0) = 0 \cdot \Delta x + 0 \cdot \Delta y$ . Отсюда следует, что

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(0, 0) = 0.$$

Покажем теперь, что  $\frac{\partial z}{\partial x}$  разрывна в начале координат. Действительно, если  $y = x^{2/3} \neq 0$ , то

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = x^{8/9} \frac{4x^{1/3}}{3(x^{4/3} + x^{4/3})} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x^{1/9}},$$

и если точка  $M(x, y)$  приближается к точке  $M_0 = (0, 0)$ , оставаясь на кривой  $y = x^{2/3}$ , то

$$\lim_{M \rightarrow M_0} \frac{\partial z}{\partial x}(M) = \infty.$$

Итак,  $\frac{\partial z}{\partial x}$  разрывна в начале координат и даже не ограничена в любой окрестности начала координат.

Если в формулировке задачи, связанной с дифференцированием функции  $f: E \rightarrow R$ ,  $E \subset R^m$ , специально не оговорено, что функция рассматривается в особой точке, где непрерывность самой функции или ее частных производных не следует непосредственно из непрерывности композиции простейших элементарных функций, то всегда предполагаем, что речь идет об исследовании функции  $f$  в точках области  $G \subset R^m$  такой, что  $f \in C^1(G)$ . То, что такая область существует, можно усмотреть из самого задания функции  $f$ . Таким образом, дифференцируемость функции заранее предполагается.

Пример 5. Найдем первый дифференциал функции

$$f = \ln(4 - x^2 - y^2 + 2xz + 2yz - 2z^2).$$

Решение. Функция определена в области

$$G = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 - 2xz - 2yz + 2z^2 < 4\}.$$

Эта область представляет собой наклонный цилиндр, горизонтальным сечением которого на высоте  $z=h$  является открытый круг  $(x-h)^2 + (y-h)^2 < 4$ .

Так как

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2z - 2x}{4 - x^2 - y^2 + 2xz + 2yz - 2z^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2z - 2y}{4 - x^2 - y^2 + 2xz + 2yz - 2z^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{2x + 2y - 4z}{4 - x^2 - y^2 + 2xz + 2yz - 2z^2},$$

то  $f \in C^1(G)$ .

Таким образом, в каждой точке  $M_0 = (x_0, y_0, z_0) \in G$  функция  $f$  дифференцируема и

$$df = \frac{2(z-x)dx + 2(z-y)dy + 2(x+y-2z)dz}{4 - x^2 - y^2 + 2xz + 2yz - 2z^2}.$$

Пусть  $f \in C^1(G)$ , тогда линейное отображение  $f'$  в каноническом базисе имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{pmatrix}.$$

Эта матрица называется матрицей Якоби отображения  $f$  и обозначается  $(f')$ .

Если специально не оговорено противное, то в задачах предполагается, что данное отображение  $f$  рассматривается в точках области  $G$ , для которой  $f \in C^1(G)$ .

Пример 6. Напишем матрицу Якоби отображения

$$f: (u, v) \rightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4),$$

$$x_1 = \operatorname{arctg} \frac{u}{v}, \quad x_2 = \ln(u^2 + v^2), \quad x_3 = uv^2, \quad x_4 = u^2v,$$

в области  $G = \{(u, v), |u| < \infty, v > 0\}$ .

Решение. Находя соответствующие производные функций  $x_1, x_2, x_3, x_4$  по  $u$  и  $v$ , имеем

$$(f') = \begin{pmatrix} \frac{v}{u^2 + v^2} & -\frac{u}{u^2 + v^2} \\ \frac{2u}{u^2 + v^2} & \frac{2v}{u^2 + v^2} \\ v^2 & 2uv \\ 2uv & u^2 \end{pmatrix}.$$

Матрица Якоби отображения  $f: E \rightarrow R^m$ ,  $E \subset R^n$ , является квадратной. Определитель такой матрицы называется якобианом отображения  $f$  и обозначается  $|(f')|$ .

Пример 7. Найдем якобиан отображения  $f: (u, v, w) \rightarrow (x, y, z)$ ,  $x = uv \cos w$ ,  $y = uv \sin w$ ,  $z = u + v + w$ .

Решение. Находя соответствующие производные функций  $x, y, z$  по  $u, v$  и  $w$ , имеем

$$|(f')| = \begin{vmatrix} v \cos w & u \cos w & -uv \sin w \\ v \sin w & u \sin w & uv \cos w \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = uv(u - v).$$

*Теорема об обратном отображении*

Если область  $G \subset R^m$  и отображение  $f: G \rightarrow R^m$  удовлетворяют условиям:

- 1)  $f \in C^1(G)$ ;
- 2)  $f(x_0) = y_0$ ,  $x_0 \in G$ ;
- 3) матрица  $(f'(x_0))$  обратима,

то существует окрестность точки  $x_0$   $U(x_0) \subset G$  и окрестность точки  $y_0 = f(x_0)$  такие, что отображение  $f: U(x_0) \rightarrow U(y_0)$  биективно (взаимно однозначно),  $f^{-1} \in C^1(U(y_0))$ ; для любого  $x_1 \in U(x_0)$  и  $y_1 = f(x_1)$  выполняется соотношение  $((f^{-1})'(y_1)) = (f'(x_1))^{-1}$ .

Замечание. Условие 3 теоремы эквивалентно условию: якобиан отображения  $f$  в точке  $x_0$  отличен от нуля.

Пример 8. Найдем якобиан отображения  $f: (u, v) \rightarrow (x, y)$   $xu = x^2 + y^2$ ,  $xv = y$  ( $x \neq 0, y \neq 0$ ).

**Решение.** Так как здесь легче записать обратное отображение

$$(x, y) \rightarrow (u, v): u = \frac{x^2 + y^2}{x}, \quad v = \frac{y}{x},$$

то вычислим сначала его якобиан

$$|((f^{-1})')| = \begin{vmatrix} 1 - \frac{y^2}{x^2} & \frac{2y}{x} \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = \frac{1}{x} \left( 1 + \frac{y^2}{x^2} \right).$$

Так как  $\frac{y}{x} = v$  и  $x = \frac{u}{1+v^2}$ , то, используя соотношение между определителями взаимно обратных матриц, получаем

$$|(f')| = \frac{1}{|((f^{-1})')|} = \frac{x}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{u}{(1+v^2)^2}.$$

Если отображение  $y: X \rightarrow Y$ ,  $X \subset R^m$ ,  $Y \subset R^m$ , удовлетворяет условиям теоремы об обратном отображении, то, разумеется, можно найти и матрицу Якби обратного отображения  $x: Y \rightarrow X$ , а именно  $(x') = (y')^{-1}$ , и тем самым найти частные производные  $\frac{\partial x_i}{\partial y_j}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ . Но этот путь часто сложен. Другой метод нахождения частных производных обратного отображения будет разобран несколько позже.

Аналогично понятию частной производной функции  $f: E \rightarrow R$ ,  $E \subset R^m$ , вводится понятие частной производной отображения  $f: E \rightarrow R^n$ ,  $E \subset R^m$ , по подпространству. Пусть

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m, \quad 1 \leq i \leq m, \quad u = (u_1, u_2, \dots, u_q) \in R^q,$$

$$V = (v_1, v_2, \dots, v_{m-q}) \in R^{m-q}, \quad \text{где } u_i = x_i, \quad 1 \leq i \leq q, \quad \text{и } v_j = x_{q+j}, \quad 1 \leq j \leq m-q.$$

Возьмем  $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \in E$  и обозначим:

$$f^*(u) = f^*(u_1, u_2, \dots, u_q) = f(x_1, x_2, \dots, x_q, x_{q+1}^0, \dots, x_m^0),$$

$$f^*(v) = f^*(v_1, v_2, \dots, v_{m-q}) = f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_q^0, x_{q+1}, \dots, x_m).$$

Тогда  $\frac{\partial f}{\partial U}(x_0) = ((f^*)'(u_0))$  и  $\frac{\partial f}{\partial V}(x_0) = ((f^*)'(v_0))$ . Аналогично определяются частные производные  $\frac{\partial f}{\partial U}$  и  $\frac{\partial f}{\partial V}$ , если координаты точки  $x = (x_1, \dots, x_m) \in R^m$  распределяются в координаты точек  $u \in R^q$  и  $v \in R^{m-q}$  более сложным способом, а также если пространство  $R^m$  представляется в виде декартова произведения не двух, а более подпространств.

Пример 9. Налишем матрицы отображений  $\frac{\partial f}{\partial X}$  и  $\frac{\partial f}{\partial Y}$  в каноническом базисе, если

$$f: X \times Y \rightarrow (u, v), \quad X = \{(x_1, x_2, x_3)\}, \quad Y = \{(y_1, y_2)\}$$

и

$$u = x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 (y_1 + y_2),$$

$$v = x_1 x_2 x_3 + x_2 x_3 y_1 + x_3 y_1 y_2 + y_1 y_2 x_1.$$

Решение. Находя соответствующие частные производные, имеем

$$\frac{\partial f}{\partial X} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & -y_1 - y_2 \\ x_2 x_3 + y_1 y_2 & x_1 x_3 + y_1 x_3 & x_1 x_2 + x_2 y_1 + y_1 y_2 \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial f}{\partial Y} = \begin{pmatrix} x_1 - x_3 & x_2 - x_3 \\ x_2 x_3 + x_3 y_2 + y_2 x_1 & x_3 y_1 + y_1 x_1 \end{pmatrix}.$$

### § 3. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ СЛОЖНЫХ ФУНКЦИЙ

Если зависимость функций от аргументов задана через некоторые промежуточные переменные, т. е. мы имеем дело с композицией функций, то говорят, что *задана сложная функция*.

Пример 1. Найдем первый дифференциал функции  $f: G \rightarrow R$ , область  $G \subset E = \{(u, v) : v > 0\}$ , в произвольной точке  $(u, v) \in G$ , если

$$f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \text{ и } x = uv, \quad y = \frac{u}{v}, \quad z = u + v.$$

Решение. Разумеется, можно выписать зависимость

$$\begin{aligned} f^*(u, v) &= f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = \\ &= u^3 v^3 + \frac{u^3}{v^3} + (u + v)^3 - 3u^2(u + v) \end{aligned}$$

и находить дифференциал  $f^*(u, v)$ . Но при более сложных связях между переменными проще использовать независимость формы первого дифференциала от того, независимы или зависимы переменными являются формальные аргументы. Тогда в нашем примере дифференцирование выполняется следующим образом:

$$\begin{aligned} df &= (3x^2 - 3yz) dx + (3y^2 - 3xz) dy + (3z^2 - 3xy) dz = \\ &= 3 \left[ \left( u^2 v^2 - \frac{u^2}{v} - u \right) (v du + u dv) + \right. \end{aligned}$$