$$+\left(\frac{u^2}{v^2}-u^2v-uv^2\right)\frac{v\,du-u\,dv}{v^2}+((u+v)^2-u^2)\,(du+dv)\Bigg]=$$

$$=3\left[\left(u^2v^3-2u^2+v^2+\frac{u^2}{v^3}\right)du+\left(-\frac{u^3}{v^4}+u^3v^2+2uv+v^2\right)dv\right].$$

Пример 2. Найдем первый дифференциал функции $f: G\to\to R$, область $G\subset R^3$, $G\subset E=\{(x, y, z): x>0, y>0\}$, если

$$f(x, y, z)=\varphi(x^{yz}, y^{xz}).$$

Решение. Имеем

$$df=\varphi_1' d(x^{yz})+\varphi_2' d(y^{xz})=\varphi_1'(yzx^{yz-1}\,dx+zx^{yz}\ln x\,dy+yx^{yz}\ln x\,dz)+$$

$$+\varphi_2'(zy^{xz}\ln y\,dx+xzy^{xz-1}\,dy+xy^{xz}\ln y\,dz)=(yzx^{yz-1}\varphi_1'+$$

$$+zy^{xz}\ln y\,\varphi_2')\,dx+(zx^{yz}\ln x\,\varphi_1'+xzy^{xz-1}\varphi_2')\,dy+$$

$$+(yx^{yz}\ln x\,\varphi_1'+xy^{xz}\ln y\,\varphi_2')\,dz.$$

Пример 3. Напишем матрицу Якоби отображения $f=h\circ g$, $f: (u, v)\to(\xi, \eta, \zeta)$, если

$$g: x=u\cos v,\quad y=u\sin v,\quad z=uv,$$

$$h: \xi=x^2-y^2,\quad \eta=xz,\quad \zeta=yz.$$

Решение. Находя соответствующие производные, имеем

$$(g')=\begin{pmatrix}\cos v & -u\sin v\\ \sin v & u\cos v\\ v & u\end{pmatrix};\quad (h')=\begin{pmatrix}2x & -2y & 0\\ z & 0 & x\\ 0 & z & y\end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$((h\circ g)')=(h')\cdot(g')=\begin{pmatrix}2x & -2y & 0\\ z & 0 & x\\ 0 & z & y\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos v & -u\sin v\\ \sin v & u\cos v\\ v & u\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2x\cos v-2y\sin v & -2xu\sin v-2yu\cos v\\ z\cos v+xv & -zu\sin v+xu\\ z\sin v+yv & zu\cos v+yu\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2u\cos(2v) & -2u^2\sin(2v)\\ 2uv\cos v & u^2\cos v-u^2v\sin v\\ 2uv\sin v & u^2\sin v+u^2v\cos v\end{pmatrix}.$$

Переформулируем общую теорему о дифференцировании композиции отображений на случай композиции функций.

Пусть $f: G \to R$, область $G \subset R^m$, $f = f(x_1, \ldots, x_m) \in C^1(G)$. Пусть далее $x_i: \Delta \to R$, область $\Delta \in R^k$, $x_i = x_i(t_1, \ldots, t_k) \in C^1(\Delta)$. Тогда сложная функция $f(t) = f(t_1, \ldots, t_k) = f(x_1(t), \ldots, x_m(t))$ дифференцируема в каждой точке $t_0 \in \Delta$ и

$$\frac{\partial f}{\partial t_j} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_m}\right) \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial t_j} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial t_j} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial x_m}{\partial t_j} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial t_j},$$

$$j = 1, 2, \ldots, k. \qquad (1)$$

Пример 4. Найдем $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$, если $u = f\left(x, \frac{x}{y}, \frac{xy}{z}\right)$.

Решение. Из формулы (1) получаем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f_1' + f_2' \cdot \frac{1}{y} + f_3' \cdot \frac{y}{z}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = f_2' \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) + f_3' \cdot \frac{x}{z};$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = f_3' \cdot \left(-\frac{xy}{z^2}\right).$$

Можно найти эти частные производные также через выражение первого дифференциала функции

$$du = f_1' dx + f_2' d\left(\frac{x}{y}\right) + f_3' d\left(\frac{xy}{z}\right) = f_1' dx + f_2' \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2} +$$

$$+ f_3' \cdot \frac{zy\,dx + zx\,dy - xy\,dz}{z^2} = \left(f_1' + \frac{1}{y} f_2' + \frac{y}{z} f_3'\right) dx +$$

$$+ \left(-\frac{x}{y^2} \cdot f_2' + \frac{x}{z} f_3'\right) dy - \frac{xy}{z^2} \cdot f_3' dz.$$

Так как частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ функции u есть соответствующие коэффициенты ее дифференциала, то

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f_1' + \frac{1}{y} \cdot f_2' + \frac{y}{z} \cdot f_3',$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left(-\frac{x}{y^2}\right) \cdot f_2' + \frac{x}{z} \cdot f_3',$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \left(-\frac{xy}{z^2}\right) \cdot f_3'.$$

На практике пользуются как одним, так и другим методами.

§ 4. ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ. ВТОРОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ

Если функция $f: G \to R$, определенная в некоторой области $G \subset R^m$, в каждой точке $x \in G$ имеет частную производную $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, то эта частная производная сама есть функция $\frac{\partial f}{\partial x_i}: G \to R$, частные производные которой можно рассматривать.

Определение. Если функция $\frac{\partial f}{\partial x_i}: G \to R$, $G \subset R^m$, имеет частную производную $\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$, то эта производная называется *второй частной производной от f по x_i и x_j* и обозначается $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ или $f''_{x_j x_i}$, или f''_{ji}.

Теорема. Если функция $f: G \to R$, $G \subset R^m$, имеет в области G частные производные $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, то в каждой точке $x \in G$, в которой обе эти производные непрерывны, их значения совпадают.

Пример функции $f(x, y)$, для которой $f''_{xy} \neq f''_{yx}$, приведен в теоретических задачах (см. с. 406).

Если определена частная производная функции f порядка $k: f^{(k)}_{i_1, i_2, \ldots i_k}$ по переменным $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$, то частная производная порядка $(k+1)$ по переменным $x_i, x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ определяется соотношением

$$f^{(k+1)}_{i, i_1, i_2 \ldots i_k} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(f^{(k)}_{i_1, i_2, \ldots, i_k}\right).$$

Из вышеприведенной теоремы следует, что если все частные производные порядка k функции f непрерывны в области G, то значение всех производных f до порядка k включительно не зависит от порядка дифференцирования. Класс функций, непрерывных в G вместе со своими производными до порядка k включительно, обозначается $C^k(G)$. Если при формулировке задачи не оговорено, что функция исследуется в особой точке, то всегда подразумевается, что рассматриваются точки такой области G, что $f \in C^k(G)$. То, что такая область непуста или вытекает из условия или оговаривается в нем.

Функции класса $C^k(G)$ называют гладкими функциями *до порядка k* в G.

Если $f \in C^k(G)$ для любого $k = 1, 2, \ldots$, то говорят, что $f \in C^\infty(G)$.

Пример 1. Пусть $f(x, y) = x \ln(x + y^2)$. Тогда областью G, для которой $f \in C^\infty(G)$, является любая область, входящая в множество $D: \{(x, y): y^2 > -x\}$. Найдем $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}$ и $\frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y}$ для произволь-

ной точки такой области. Пользуясь независимостью производных высшего порядка от порядка дифференцирования, получаем

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\ln(x+y^2)+\frac{x}{x+y^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{2y}{x+y^2}-\frac{2xy}{(x+y^2)^2}=\frac{2y^3}{(x+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y^2}=\frac{\partial^3 f}{\partial y\,\partial y\,\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}\right)=\frac{6y^2}{(x+y^2)^2}-\frac{8y^4}{(x+y^2)^3}=$$

$$=\frac{2y^2(3x-y^2)}{(x+y^2)^3},$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\,\partial y}=\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y\,\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}\right)=\frac{-4y^3}{(x+y^2)^3},$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^3\,\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\,\partial y}\right)=\frac{12y^3}{(x+y^2)^4}.$$

Для вычисления производных высших порядков сложных функций пользуются формулой (1) вычисления первой производной сложной функции, учитывая, что все частные производные сами есть сложные функции данных аргументов.

Пример 2. Найдем $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$, если $f=u\ln(u^2-v^2)$, $u=\operatorname{tg}(xy)$, $v=\sin(x-y)$.

Решение. Вычисляем частную производную первого порядка

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\,\frac{\partial v}{\partial x}=\left[\ln(u^2-v^2)+\frac{2u^2}{u^2-v^2}\right]\cdot\frac{y}{\cos^2 xy}-$$

$$-\frac{2uv}{u^2-v^2}\cdot\cos(x-y).$$

Не подставляя выражение u и v через x и y в эту производную, вычисляем частную производную второго порядка

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left\{\left[\ln(u^2-v^2)+\frac{2u^2}{u^2-v^2}\right]\cdot\frac{y}{\cos^2 xy}\right\}+$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left\{-\frac{2uv}{u^2-v^2}\cos(x-y)\right\}=\frac{\partial}{\partial y}\left[\ln(u^2-v^2)+\frac{2u^2}{u^2-v^2}\right]\times$$

$$\times\frac{y}{\cos^2 xy}+\left[\ln(u^2-v^2)+\frac{2u^2}{u^2-v^2}\right]\left(\frac{1}{\cos^2 xy}+\frac{2yx\sin xy}{\cos^3 xy}\right)-$$

$$-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2uv}{u^2-v^2}\right)\cos(x-y)-\frac{2uv}{u^2-v^2}\sin(x-y)=$$

$$=\frac{y}{\cos^2 xy}\left[\left(\frac{2u}{u^2-v^2}+\frac{4u}{u^2-v^2}-\frac{4u^3}{(u^2-v^2)^2}\right)\frac{x}{\cos^2 xy}+\right.$$

$$+\left(-\frac{2v}{u^2-v^2}+\frac{4u^2v}{(u^2-v^2)^2}\right)(-\cos(x-y))\Bigg]+$$

$$+\left[\ln(u^2-v^2)+\frac{2u^2}{u^2-v^2}\right]\cdot\left(\frac{1}{\cos^2 xy}+\frac{2xy\sin xy}{\cos^3 xy}\right)-$$

$$-\cos(x-y)\left[\left(\frac{2v}{u^2-v^2}-\frac{4u^2v}{(u^2-v^2)^2}\right)\frac{x}{\cos^2 xy}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{2u}{u^2-v^2}+\frac{4uv^2}{(u^2-v^2)^2}\right)\cdot(-\cos(x-y))\right]-\frac{2uv}{u^2-v^2}\sin(x-y).$$

Для наглядности ответы к задачам такого типа даются большей частью без подстановки в окончательный результат выражения u и v через x и y, а только указывается еще раз их зависимость. Ответ к предыдущему примеру:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=\frac{2xy}{\cos^4 xy}\cdot\frac{u^2-3uv^2}{(u^2-v^2)^2}+2\,\frac{u^2+v^2}{(u^2-v^2)^2}\times$$

$$\times\left(v\,\frac{(x-y)\cos(x-y)}{\cos^2 xy}+u\cos^2(x-y)\right)+\frac{\ln(u^2-v^2)}{\cos^2 xy}+$$

$$+\frac{2xy\sin xy}{\cos^3 xy}\ln(u^2-v^2)+\frac{2u^2}{u^2-v^2}\,\frac{1}{\cos^2 xy}+$$

$$+\frac{4xy\sin xy}{\cos^3 xy}\cdot\frac{u^2}{u^2-v^2}-\frac{2uv\sin(x-y)}{u^2-v^2},$$

где $u=\operatorname{tg} xy$, $v=\sin(x-y)$.

Пример 3. Найдем $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$ и $\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial z^2}$, если $u=f\left(\frac{x}{y},\ \frac{y}{z}\right)$.

Решение.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f_1'\cdot\frac{1}{y};\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y}\cdot f_1'\right)=-\frac{1}{y^2}f_1'+$$

$$+\frac{1}{y}\left(f_{11}''\left(-\frac{x}{y^2}\right)+f_{12}''\cdot\frac{1}{z}\right)=-\frac{1}{y^2}\cdot f_1'-\frac{x}{y^3}f_{11}''+\frac{1}{yz}f_{12}'',$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{y}f_1'\right)=\frac{1}{y}f_{12}''\left(-\frac{y}{z^2}\right)=-\frac{1}{z^2}\cdot f_{12}'',$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z^2}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x\,\partial z}\right)=\frac{2}{z^3}f_{12}''-\frac{1}{z^2}\left(f_{122}'''\left(-\frac{y}{z^2}\right)\right)=$$

$$=\frac{2}{z^3}f_{12}''+\frac{y}{z^4}f_{122}'''.$$

Определение. Если $f: G\to R$, область $G\subset R^m$, $f\in C^2(G)$, то *вторым дифференциалом функции* f (обозначаемым d^2f) называет-

ся квадратичная форма от приращений аргументов $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots$ $\ldots, \Delta x_m$:

$$d^2 f = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_j} \Delta x_i \, \Delta x_j.$$

В силу равенства $\Delta x_i = dx_i$ второй дифференциал функции обычно записывается в виде

$$d^2 f = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_j} dx_i \, dx_j.$$

Пусть $G \subset R^m$, $f: G \to R^n$, $f \in C^2(G)$, $x_0 \in G$. Значение первого дифференциала функции f в точке x_0 на векторе $h = (\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots$ $\ldots, \Delta x_m)$ дает линейное приближение приращения функции с погрешностью $o(\|h\|)$ при $\|h\| \to 0$.

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \Delta f(x_0) = df(x_0) h + o(\|h\|)$$

при $\|h\| \to 0$.

Значение второго дифференциала функции f в точке x_0 на векторе h дает квадратичное приближение разности

$$\Delta f(x_0) - df(x_0) h$$

с погрешностью $o(\|h\|^2)$ при $\|h\| \to 0$, т. е.

$$\Delta f(x_0) - df(x_0) h = d^2 f(x_0) h + o(\|h\|^2) \quad (\|h\| \to 0).$$

В отличие от первого дифференциала форма второго дифференциала, вообще говоря, меняет вид при замене независимых аргументов x_i на функции $x_i: \Delta \to G$, $\Delta \subset R^q$, $i = 1, 2, \ldots, m$, а именно: пусть $G \subset R^m$, $f: G \to R$, $f \in C^2(G)$, $\Delta \subset R^q$, $x_i: \Delta \to G$, $x_i \in C^2(G)$, $i =$ $= 1, 2, \ldots, m$, $g: \Delta \to R$, $g(t_1, t_2, \ldots, t_q) = f(x_1(t_1, t_2, \ldots, t_q), \ldots$ $\ldots, x_m(t_1, \ldots, t_q)$, тогда $g \in C^2(\Delta)$, но выражение

$$d^2 g = \sum_{i,j=1}^{q} \frac{\partial^2 g}{\partial t_i \, \partial t_j} dt_i \, dt_j$$

не обязано совпадать с выражением

$$\sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_j} (x_1(t_1, \ldots t_q), \ldots x_m(t_1, \ldots t_q)) \, dx_i(t_1, \ldots t_q) \times$$
$$\times dx_j(t_1, \ldots t_m).$$

Пример 4. Пусть $f(x, y) = x \sin y + y \cos x$, где x и y — независимые переменные. Тогда

$$df = (\sin y - y \sin x) \, dx + (x \cos y + \cos x) \, dy$$

и

$$d^2f = -y\cos x dx^2 - x\sin y dy^2 + 2(\cos y - \sin x)\, dxdy.$$

Пусть теперь

$$g(u, v) = f(x(u, v),\ y(u, v)),$$

где $f(x, y)$ определена, как раньше, и $x = uv$, $y = u^2 - v^2$. Тогда

$$dx = udv + vdu,\ dy = 2udu - 2vdv$$

и

$$dg = [\sin(u^2 - v^2) - (u^2 - v^2)\sin uv](udv + vdu) +$$
$$+ [uv\cos(u^2 - v^2) + \cos uv](2udu - 2vdv) =$$
$$= (v\sin(u^2 - v^2) + 2u^2v\cos(u^2 - v^2) + 2u\cos uv -$$
$$- (u^2v - v^3)\sin uv)\, du + (u\sin(u^2 - v^2) - 2uv^2\cdot\cos(u^2 - v^2) -$$
$$- 2v\cos uv - (u^3 - uv^2)\sin uv)\, dv,$$

т. е.

$$\frac{\partial g}{\partial u} = v\sin(u^2 - v^2) + 2u^2v\cos(u^2 - v^2) + 2u\cos uv - (u^2v - v^3)\sin uv;$$

$$\frac{\partial g}{\partial v} = u\sin(u^2 - v^2) - 2uv^2\cos(u^2 - v^2) - 2v\cos uv - (u^3 - uv^2)\sin uv.$$

Тогда

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} = 6uv\cos(u^2 - v^2) - 4u^3v\sin(u^2 - v^2) -$$
$$- 4uv\sin uv + (2 + v^4 - u^2v^2)\cos uv;$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 2(u^2 - v^2)\cos(u^2 - v^2) + (4u^2v^2 + 1)\sin(u^2 - v^2) -$$
$$- 3(u^2 - v^2)\sin uv - uv(u^2 - v^2)\cos uv;$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial v^2} = -6uv\cos(u^2 - v^2) - 4uv^3\sin(u^2 - v^2) +$$
$$+ 4uv\sin uv + (u^2v^2 - 2 - u^4)\cos uv.$$

Следовательно,

$$d^2g = [6uv\cos(u^2 - v^2) - 4u^3v\sin(u^2 - v^2) -$$
$$- 4uv\sin uv + (2 + v^4 - u^2v^2)\cos uv]\, du^2 +$$
$$+ [-6uv\cos(u^2 - v^2) - 4uv^3\sin(u^2 - v^2) + 4uv\sin uv +$$
$$+ (u^2v^2 - 2 - u^4)\cos uv]\, dv^2 + 2[2(u^2 - v^2)\cos(u^2 - v^2) +$$

$$+(4u^2v^2+1)\sin(u^2-v^2)-3(u^2-v^2)\sin uv-$$
$$-uv(u^2-v^2)\cos uv]\,dudv.$$

Если же формально заменить x, y, dx, dy в выражении

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2$$

через u, v, du, dv, то получим

$$d^2f=-y\cos x dx^2-x\sin y dy^2+2(\cos y-\sin x)\,dxdy=$$
$$=(-(u^2-v^2)\cos uv)(vdu+udv)^2-uv\sin(u^2-v^2)(2udu-2vdv)^2+$$
$$+2(\cos(u^2-v^2)-\sin uv)(vdu+udv)(2udu-2vdv)=$$
$$=[4uv\cos(u^2-v^2)-4u^3v\sin(u^2-v^2)-4uv\sin uv+$$
$$+(v^4-u^2v^2)\cos uv]\,du^2+[-4uv\cos(u^2-v^2)-4uv^3\sin(u^2-v^2)+$$
$$+4uv\sin uv+(u^2v^2-u^4)\cos uv]\,dv^2+2[2(u^2-v^2)\cos(u^2-v^2)+$$
$$+4u^2v^2\sin(u^2-v^2)-2(u^2-v^2)\sin uv-2uv(u^2-v^2)\cos uv]\,dudv.$$

При $u=\pi/2$, $v=1$ и $dv=0$, $du\neq 0$ имеем

$$d^2g-d^2f=\pi\cos\left(\frac{\pi^2}{4}-1\right)du^2\neq 0,$$

т. е. $d^2g\neq d^2f$.

Пусть область $G\subset R^m$. Если функция $f: G\to R$, $f(x)=f(x_1,\ldots,x_m)$ линейно зависит от каждого x_i, $i=1, 2, \ldots, m$, то все ее вторые частные производные равны нулю, следовательно, в силу определения $d^2f\equiv 0$; в частности, для функции $\pi_i(x)=x_i$, имеем $d^2\pi_i=d^2x_i=0$.

Пользуясь теоремой о дифференцировании сложной функции, получаем следующую формулу. Если $f: G\to R$, $G\subset R^m$, $f\in C^2(G)$; $x=(x_1, x_2, \ldots, x_m): \Delta\to G$, $x_i: \Delta\to R$, $\Delta\subset R^q$, $x_i\in C^2(\Delta)$, $i=1, 2, \ldots, m$; $g: \Delta\to R$, $g(t)=g(t_1, t_2, \ldots, t_q)=f(x_1(t_1, t_2, \ldots, t_q); x_2(t_1, t_2, \ldots, t_q), \ldots, x_m(t_1, t_2, \ldots, t_q))$, то

$$d^2g=\sum_{i,j=1}^{m}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}dx_idx_j+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial x_i}d^2x_i.$$

Перепишем эту формулу в виде

$$d^2g=\sum_{i=1}^{m}\left(dx_id\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)+\frac{\partial f}{\partial x_i}d^2x_i\right).$$

Коротко это соотношение можно записать формальным равенством:

$$d^2g=\sum_{i=1}^{m} d\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\,dx_i\right)=d\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial x_i}\,dx_i\right)=d\,(dg),$$

которое удобно использовать при вычислениях.

Пример 5. Найдем первый и второй дифференциалы функции $z(x, y)=f(u, v, w)$, если $u=x^2+y^2$, $v=x^2-y^2$, $w=2xy$, x и y — независимые переменные и $f\in C^2(G)$, $G\in R^3$.

Решение. Так как

$$du=2xdx+2ydy;\ dv=2xdx-2ydy;$$

$$dw=2ydx+2xdy;\ d^2u=2dx^2+2dy^2;$$

$$d^2v=2dx^2-2dy^2;\ d^2w=4dxdy,$$

то

$$dz=f_1'du+f_2'dv+f_3'dw=f_1'(2xdx+2ydy)+$$

$$+f_2'(2xdx-2ydy)+f_3'(2ydx+2xdy)=(2xf_1'+2xf_2'+2yf_3')dx+$$

$$+(2yf_1'-2yf_2'+2xf_3')dy;$$

$$d^2z=f_{11}''(2xdx+2ydy)^2+f_{22}''(2xdx-2ydy)^2+f_{33}''(2ydx+2xdy)^2+$$

$$+2f_{12}''(2xdx+2ydy)(2xdx-2ydy)+2f_{13}''(2xdx+2ydy)\times$$

$$\times(2ydx+2xdy)+2f_{23}''(2xdx-2ydy)(2ydx+2xdy)+$$

$$+f_1'(2dx^2+2dy^2)+f_2'(2dx^2-2dy^2)+f_3'4dxdy=$$

$$=(4x^2f_{11}''+4x^2f_{22}''+4y^2f_{33}''+8x^2f_{12}''+8xyf_{13}''+8xyf_{23}''+2f_1'+2f_2')\,dx^2+$$

$$+(4y^2f_{11}''+4y^2f_{22}''+4x^2f_{33}''-8y^2f_{12}''+8xyf_{13}''-8xyf_{23}''+2f_1'-2f_2')\,dy^2+$$

$$+(8xyf_{11}''-8xyf_{22}''+8xyf_{33}''+8(x^2+y^2)f_{13}''+8(x^2-y^2)f_{23}''+4f_3')dxdy$$

или

$$d^2z=d\,[(2xf_1'+2xf_2'+2yf_3')\,dx+(2yf_1'-2yf_2'+2xf_3')\,dy]=$$

$$=[2f_1'dx+2xd(f_1')+2f_2'dx+2xd(f_2')+2f_3'dy+$$

$$+2ydf_3']\,dx+[2f_1'dy+2yd(f_1')-2f_2'dy-2yd(f_2')+$$

$$+2f_3'dx+2xd(f_3')]\,dy=2f_1'dx^2+2f_2'dx^2+4f_3'dxdy+$$

$$+(f_{11}''du+f_{12}''dv+f_{13}''dw)(2xdx+2ydy)+2f_1'dy^2-2f_2'dy^2+$$

$$+(f_{12}''du+f_{22}''dv+f_{23}''dw)(2xdx-2ydy)+$$

$$+ (f''_{13}du + f''_{23}dv + f''_{33}dw)(2ydx + 2xdy) =$$
$$= 2f'_1dx^2 + 2f'_2dx^2 + 4f'_3dxdy + (2xdx + 2ydy) \times$$
$$\times [f''_{11}(2xdx + 2ydy) + f''_{12}(2xdx - 2ydy) +$$
$$+ f''_{13}(2ydx + 2xdy)] + (2xdx - 2ydy) \cdot [f''_{12}(2xdx + 2ydy) +$$
$$+ f''_{22}(2xdx - 2ydy) + f''_{23}(2ydx + 2xdy)] +$$
$$+ (2ydx + 2xdy) \cdot [f''_{13}(2xdx + 2ydy) + f''_{23}(2xdx -$$
$$- 2ydy) + f''_{33}(2ydx + 2xdy)] + 2f'_1dy^2 - 2f'_2dy^2.$$

§ 5. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ НЕЯВНЫХ ФУНКЦИЙ

Теорема. Если отображение $F: U \to R^n$, определенное в окрестности U точки $(x_0, y_0) \in R^{m+n}$, $x_0 \in R^m$, $y_0 \in R^n$ таково, что

1) $F(x_0, y_0) = 0$;

2) $F \in C^k(U)$, $k \geqslant 1$;

3) $\left(\frac{\partial F}{\partial Y}\right)\Big|_{(x_0, y_0)}$ — обратимая матрица ($Y = \{y, (x_0, y) \in U)$,

то существуют $(m+n)$-мерная область $V = V_X^m \times V_Y^n \subset U$, где

$$V_X^m : \{x, x \in R^m, \|x - x_0\| < \alpha\},$$

$$V_Y^n : \{y, y \in R^n, \|y - y_0\| < \beta\},$$

и такое отображение

$$f: V_X^m \to V_Y^n, \ f \in C^k(V_X^m),$$

что для любой точки $(x, y) \in V$ соотношение $F(x, y) = 0$ эквивалетно соотношению $y = f(x)$, т. е. $F(x, f(x)) \equiv 0$, $x \in V_X{}^m$.

В координатной форме эта теорема выглядит так.

Пусть задана система уравнений

$$F_1(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0,$$
$$F_2(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$F_n(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0$$

и выполнены условия:

1) существует точка

$$(x_0, y_0), \ x_0 = (x_1^0, \ldots, x_m^0), \ y_0 = (y_1^0, \ldots, y_n^0)$$

такая, что $F_i(x_0, y_0) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$;

2) существует такая окрестность $U(x_0, y_0) \subset R^{m+n}$ точки (x_0, y_0), что

$$F_i \in C^k(U(x_0, y_0)), \ i = 1, 2, \ldots, n, \ k \geqslant 1;$$

3) якобиан

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}, & \ldots, & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial F_n}{\partial y_1}, & \ldots, & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}$$

в точке (x_0, y_0) отличен от нуля.

Тогда существует окрестность $V(x_0) \subset R^m$ точки x_0 и функции

$y_i : V(x_0) \to R, \quad y_i \in C^k(V(x_0)), \quad i=1, 2, \ldots, n,$ такие, что

$$F_j(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, y_n(x_1, \ldots, x_m)) \equiv 0,$$

$$j=1, 2, \ldots, n,$$

в области $V(x_0)$.

Функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ называют *неявно заданными данной системой уравнений* или *неявно определенными данной системой уравнений.*

При дифференцировании неявно заданных функций существенно используется независимость формы первого дифференциала от того, независимые или зависимые переменные являются формальными аргументами. Действительно, пусть в некоторой области $G \subset R^m$ функции $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x), \quad x=(x_1, \ldots, x_m)$, класса $C^1(G)$ обращают уравнения системы $F_j(x, y)=0, \quad j=1, 2, \ldots, n,$ $x=(x_1, \ldots, x_m), \quad y=(y_1, \ldots, y_n)$, в тождество, тогда в этой области справедливы равенства $dF_j(x, y(x))=0, \; j=1, 2, \ldots, n$. Таким образом, дифференциалы переменных $x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n$ в области G связаны системой линейных уравнений

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial F_j}{\partial x_i} dx_i + \sum_{q=1}^{n} \frac{\partial F_j}{\partial y_q} dy_q = 0, \; j=1, 2, \ldots, n.$$

Если якобиан

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}, & \ldots, & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial F_n}{\partial y_1}, & \ldots, & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}$$

отличен от нуля, то из этой системы однозначно выражаются дифференциалы $dy_1, dy_2, \ldots, dy_n$ как линейные формы относительно $dx_1, dx_2, \ldots, dx_m$. Коэффициенты полученных линейных форм являются соответствующими частными производными

$$\frac{\partial y_q}{\partial x_i}, \; q=1, 2, \ldots, n, \; i=1, 2, \ldots, m.$$

Пример 1. Функции $u(x, y, z)$ и $v(x, y, z)$ определяются системой

$$xy - z\cos u\cos v = 0,$$

$$yz - x\cos u\cdot\sin v = 0.$$

Найдем

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial z}.$$

Решение. Дифференцируя данные уравнения, получаем

$$ydx + xdy - dz\cos u\cos v + z\sin u\cos v du + z\cos u\sin v dv = 0,$$

$$ydz + zdy - dx\cos u\sin v + x\sin u\sin v du - x\cos u\cos v dv = 0.$$

Откуда

$$du = \frac{-1}{xz\sin u}\left[(xy\cos v - z\cos u\sin^2 v)\,dx + \right.$$

$$\left. + (x^2\cos v + z^2\sin v)dy + (yz\sin v - x\cos u\cos^2 v)\,dz\right],$$

$$dv = \frac{-1}{xz\cos u}\left[(z\cos u\sin v\cos v + xy\sin v)\,dx + \right.$$

$$\left. + (x^2\sin v - z^2\cos v)\,dy - (yz\cos v + x\cos u\sin v\cos v)\,dz\right]$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{z\cos u\sin^2 v - xy\cos v}{xz\sin u}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-(x^2\cos v + z^2\sin v)}{xz\sin u},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{x\cos u\cos^2 v - yz\sin v}{xz\sin u}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{-z\cos u\sin v\cos v - xy\sin v}{xz\cos u},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{z^2\cos v - x^2\sin v}{xz\cos u}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{yz\cos v + x\cos u\cos v\sin v}{xz\cos u}.$$

Данная система определяет функции $u(x, y, z)$ и $v(x, y, z)$ в некоторой окрестности точки (x_0, y_0, z_0) такой, что $x_0z_0\cos u_0\sin u_0 \neq 0$, где u_0, v_0 удовлетворяют уравнениям

$$x_0y_0 - z_0\cos u_0\cos v_0 = 0, \quad y_0z_0 - x_0\cos u_0\sin v_0 = 0.$$

Точно так же можно было бы взять в качестве независимых аргументов любые три из переменных x, y, z, u, v, а оставшиеся два переменных считать их функциями, например, рассматривать z и u как функции $z(x, y, v)$ и $u(x, y, v)$. При этом система, связывающая дифференциалы dx, dy, dz, du, dv, остается той же, только разрешается уже относительно dz и du.

Если нужно найти производные $\frac{\partial y_q}{\partial x_i}$, $q = 1, 2, \ldots, n$, не для всех $i (i = 1, 2, \ldots, m)$, а только для некоторого i_0, то обычно рас-

сматривают систему $\frac{\partial F_j}{\partial x_{i_0}}+\sum_{q=1}^{n}\frac{\partial F_j}{\partial y_q}\frac{\partial y_q}{\partial x_{i_0}}=0$, $1\leqslant j\leqslant n$, полученную дифференцированием системы тождеств $F_j(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)=0$, $1\leqslant j\leqslant n$, по переменной x_{i_0}, считая y_l функциями от x_i.

Точно так же система уравнений для вторых производных $\frac{\partial^2 y_q}{\partial x_i \partial x_k}$, $1\leqslant q\leqslant n$, $1\leqslant i\leqslant m$, $1\leqslant k\leqslant m$, имеет вид

$$\frac{\partial^2 F_j(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1(x_1, \ldots, x_m), y_2(x_1, \ldots, x_m), \ldots, y_n(x_1, \ldots, x_m)}{\partial x_i \partial x_k}=0,$$

$$j=1, 2, \ldots, n,$$

или в форме вторых дифференциалов $d^2F_j=0$, $j=1, 2, \ldots, n$. При этом уже необходимо заранее распределить, какие из переменных являются независимыми, а какие зависимыми, поскольку, как было показано выше, форма второго дифференциала существенно зависит от того, независимыми или зависимыми являются формальные аргументы соответствующей функции.

Вернемся к уравнениям предыдущего примера. Выберем за независимые переменные x, y, z, тогда, как отмечалось выше, $d^2x=0$, $d^2y=0$, $d^2z=0$. Пользуясь формулой $d^2F_j=d(dF_j)$, получаем систему уравнений, связывающих переменные x, y, z, u, v и их первые и вторые дифференциалы:

$$2dxdy+2dz\sin u\cos v du+2dz\cos u\sin v dv+$$
$$+z\cos u\cos v du^2-2z\sin u\sin v du dv+z\sin u\cos v d^2u+$$
$$+z\cos u\sin v d^2v+z\cos u\cos v dv^2=0,$$
$$2dzdy+2dx\sin u\sin v du-2dx\cos u\cos v dv+x\cos u\sin v du^2+$$
$$+2x\sin u\cos v du dv+x\sin u\sin v d^2u-x\cos u\cos v d^2v+$$
$$+x\cos u\sin v dv^2.$$

Подставляя в полученные уравнения выражения du и dv в виде линейных форм от dx, dy, dz и разрешая систему относительно d^2u, d^2v, получим выражение этих дифференциалов в виде квадратичных форм от dx, dy, dz. Вторые производные $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ и т. д. выражаются через соответствующие коэффициенты этих квадратичных форм. Эти вычисления в силу их громоздкости здесь полностью не приводятся. Покажем, как найти одну из частных производных, например $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}$. Дифференцируя уравнения системы в предыдущем примере по y, получаем

$$x+z\sin u\cos v\frac{\partial u}{\partial y}+z\cos u\sin v\frac{\partial v}{\partial y}=0,$$

$$z + x \sin u \sin v \frac{\partial u}{\partial y} - x \cos u \cos v \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Дифференцируя эту систему по z, имеем

$$\sin u \cos v \frac{\partial u}{\partial y} + z \cos u \cos v \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} -$$

$$- z \sin u \sin v \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial y} + \cos u \sin v \frac{\partial v}{\partial y} -$$

$$- z \sin u \sin v \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + z \cos u \cos v \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} +$$

$$+ z \sin u \cos v \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + z \cos u \sin v \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} = 0,$$

$$1 + x \sin v \cos u \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + x \sin u \cos v \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} +$$

$$+ x \sin u \cos v \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + x \cos u \sin v \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} +$$

$$+ x \sin u \sin v \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} - x \cos u \cos v \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} = 0.$$

Подставляя в эти уравнения выражения для $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial z}$, получим систему, решая которую можно найти $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}$ и $\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z}$.

На практике удобнее для нахождения одной из вторых производных дифференцировать по соответствующей переменной соотношение, определяющее первую производную, учитывая, какие из переменных в этом соотношении независимы и какие зависимы. Так, в нашем случае

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{x^2 \cos v + z^2 \sin v}{xz \sin u}\right) =$$

$$= -\frac{\left(2z \sin v + z^2 \cos v \frac{\partial v}{\partial z} - x^2 \sin v \frac{\partial v}{\partial z}\right) xz \sin u}{x^2 z^2 \sin^2 u} +$$

$$+ \frac{(x^2 \cos v + z^2 \sin v)\left(x \sin u + xz \cos u \frac{\partial u}{\partial z}\right)}{x^2 z^2 \sin^2 u}.$$

Подставляя сюда выражения

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{x \cos u \cos^2 v - yz \sin v}{xz \sin u}$$

и

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{yz \cos v + x \sin v \cos v \cos u}{xz \cos u},$$

получаем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = \frac{1}{x^2 z^3 \sin^3 u} [x^4 z \cos u \cos v (2 \sin^2 u \sin^2 v +$$

$$+ \cos^2 v) + x^3 y z^2 \cos v \sin v (\sin^2 u - \cos^2 u) +$$

$$+ x^2 z^3 (\cos^2 u \cos^2 v - \sin^2 u - \sin^2 u \cos^2 v) -$$

$$- x y z^4 (\sin^2 u \cos^2 v + \cos^2 u \sin^2 v)].$$

Методом последовательного дифференцирования находятся производные высших порядков, но технические трудности при их нахождении все более возрастают.

Пример 2. Функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ независимых переменных x и y определены соотношениями

$$x e^{u+v} + 2uv = 1, \quad y e^{u-v} - \frac{u}{1+v} = 2x.$$

Найдем du, dv, d^2u, d^2v в точке $x_0 = 1$, $y_0 = 2$ при $u_0 = v_0 = 0$.

Решение. В тех точках, где выполнены условия теоремы о неявных функциях, переменные x, y, u, v, их первые и вторые дифференциалы связаны уравнениями

$$e^{u+v} dx + x e^{u+v} (du + dv) + 2 (u dv + v du) = 0,$$

$$e^{u-v} dy + y e^{u-v} (du - dv) - \frac{1}{1+v} du + \frac{u dv}{(1+v)^2} = 2dx,$$

$$2 e^{u+v} dx (du + dv) + x e^{u+v} (du + dv)^2 +$$

$$+ x e^{u+v} (d^2u + d^2v) + 4 du dv + 2u dv^2 + 2v du^2 = 0,$$

$$2 dy e^{u-v} (du - dv) + y e^{u-v} (du - dv)^2 +$$

$$+ y e^{u-v} (d^2u - d^2v) - \frac{d^2u}{1+v} + \frac{2 du dv}{(1+v)^2} + \frac{u d^2v}{(1+v)^2} - \frac{2u dv^2}{(1+v)^3} = 0.$$

Так как в точке (x_0, y_0, u_0, v_0) условия теоремы о неявных функциях выполнены, то $du(1, 2)$, $dv(1, 2)$, $d^2u(1, 2)$, $d^2v(1, 2)$ удовлетворяют уравнениям

$$dx + du + dv = 0, \quad dy + 2 (du - dv) - du = 2dx,$$

$$2 dx du + 2 dx dv + (du + dv)^2 + (d^2u + d^2v) + 4 du dv = 0,$$

$$2 dy du - 2 dy dv + 2 (du - dv)^2 + 2 (d^2u - d^2v) - d^2u + 2 du dv = 0,$$

откуда

$$du (1, 2) = -\frac{dy}{3}; \quad dv (1, 2) = -dx + \frac{dy}{3};$$

$$d^2u(1,2)=\frac{14}{27}dy^2-\frac{8}{9}dxdy,\ d^2v(1,2)=$$

$$=dx^2-\frac{2}{27}dy^2-\frac{4}{9}dxdy.$$

В частном случае, когда определяется неявно одна функция $y: G\to R$, $G\subset R^m$, т. е. задано одно уравнение $F(x_1, x_2, \ldots, x_m, y)=0$, формулы для первых частных производных функции y выписываются в общем виде:

$$\frac{\partial y}{\partial x_i}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}}{\frac{\partial F}{\partial y}},\ i=1,2,\ldots,m. \tag{2}$$

Пример 3. Найдем первые и вторые производные функции $z(x, y)$, если $z=\sqrt{x^2-y^2}\cdot\operatorname{tg}\frac{z}{\sqrt{x^2-y^2}}$.

Решение. Перепишем уравнение, неявно определяющее z, в виде

$$\frac{z}{\sqrt{x^2-y^2}}-\operatorname{tg}\frac{z}{\sqrt{x^2-y^2}}=0.$$

Способ 1. По формуле (2) получим

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{yz}{(\sqrt{x^2-y^2})^3}-\frac{yz}{(\sqrt{x^2-y^2})^3}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{z}{\sqrt{x^2-y^2}}}}{\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}-\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}\cdot\cos^2\frac{z}{\sqrt{x^2-y^2}}}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\frac{zx}{(x^2-y^2)^{3/2}}-\frac{xz}{(x^2-y^2)^{3/2}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{z}{\sqrt{x^2-y^2}}}}{\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}-\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}\cos^2\frac{z}{\sqrt{x^2-y^2}}}}.$$

Так как

$$\frac{1}{\cos^2\frac{z}{\sqrt{x^2-y^2}}}=1+\operatorname{tg}^2\frac{z}{\sqrt{x^2-y^2}}=1+\frac{z^2}{x^2-y^2},$$

то

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{xz}{x^2-y^2},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{yz}{x^2-y^2}.$$

Далее,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{xz}{x^2-y^2}\right)=\frac{z}{x^2-y^2}-\frac{2x^2z}{(x^2-y^2)^2}+$$

$$+\frac{x}{x^2-y^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y^2z}{(x^2-y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-yz}{x^2-y^2}\right)=-\frac{z}{x^2-y^2}-\frac{2y^2z}{(x^2-y^2)^2}-$$

$$-\frac{y}{x^2-y^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x^2z}{(x^2-y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{xz}{x^2-y^2}\right)=\frac{2xyz}{(x^2-y^2)^2}+\frac{x}{x^2-y^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xyz}{(x^2-y^2)^2}$$

Способ 2. Имеем

$$d\left(\frac{z}{\sqrt{x^2-y^2}}\right)-\frac{1}{\cos^2\frac{z}{\sqrt{x^2-y^2}}}\,d\left(\frac{z}{\sqrt{x^2-y^2}}\right)=0,$$

следовательно,

$$d\left(\frac{z}{\sqrt{x^2-y^2}}\right)=0$$

$\left(\text{если } \cos^2\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}=1, \text{ то также } d\left(\frac{z}{\sqrt{x^2-y^2}}\right)=0\right)$. Отсюда

$$\frac{dz}{\sqrt{x^2-y^2}}-\frac{(xdx-ydy)\,z}{(x^2-y^2)^{3/2}}=0$$

и

$$dz=\frac{z\,(xdx-ydy)}{x^2-y^2}.$$

Далее,

$$d^2z=dz\cdot\frac{xdx-ydy}{x^2-y^2}+z\,\frac{dx^2-dy^2}{x^2-y^2}-$$

$$-z\,(xdx-ydy)\frac{2xdx-2ydy}{(x^2-y^2)^2}=$$

$$=-\frac{y^2z}{(x^2-y^2)^2}\,dx^2-\frac{x^2z}{(x^2-y^2)^2}\,dy^2+\frac{2xyz}{(x^2-y^2)^2}\,dxdy.$$

Отсюда получаем

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{y^2z}{(x^2-y^2)^2};\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{x^2z}{(x^2-y^2)^2};\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{xyz}{(x^2-y^2)^2}.$$

Пусть задано отображение $f: G\to R^m$, $G\subset R^m$, где в координатной записи $f_1(x_1, x_2, \ldots, x_m)=y_1, \ldots, f_m(x_1, x_2, \ldots, x_m)=y_m$, $x=(x_1, x_2, \ldots, x_m)\in G$. Тогда переменные $x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_m$

связаны системой уравнений $y_i - f_i(x_1, \ldots, x_m) = 0$, $1 \leqslant i \leqslant m$. Эта система при соответствующих условиях представляет неявное задание обратных функций $x_i = x_i(y_1, \ldots, y_m)$, $1 \leqslant i \leqslant m$. Дифференцировать обратные функции по общему методу дифференцирования неявных функций проще, чем находить обратную матрицу к матрице Якоби отображения f.

Пример 4. Найдем условие существования обратных функций $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$ и их дифференциалы, если

$$x = uv\cos w, \quad y = uv\sin w, \quad z = u + v + w.$$

Решение. Как было вычислено в примере 7, на с. 298 якобиан отображения $f: (u, v, w) \to (x, y, z)$ равен $uv(u - v)$, следовательно, обратные функции определены в окрестности каждой точки (x_0, y_0, z_0), если $x_0 = u_0 v_0 \cos w_0$, $y_0 = u_0 v_0 \sin w_0$, $z_0 = u_0 + v_0 + w_0$ и $u_0 v_0 (u_0 - v_0) \neq 0$. При этом условии переменные x, y, z, u, v, w и их дифференциалы связаны уравнениями

$$dx = v\cos w du + u\cos w dv - uv\sin w dw,$$

$$dy = v\sin w du + u\sin w dv + uv\cos w dw,$$

$$dz = du + dv + dw.$$

Разрешая эту систему относительно du, dv, dw, получим

$$du = \frac{1}{v(u-v)}\left[(\sin w - v\cos w)\,dx - (\cos w + v\sin w)\,dy + uvdz\right],$$

$$dv = \frac{1}{u(u-v)}\left[(u\cos w - \sin w)\,dx + (\cos w + u\sin w)\,dy - uvdz\right],$$

$$dw = \frac{1}{uv}\left[-\sin w dx + \cos w dy\right].$$

Остановимся еще на одном частном случае неявного задания функции, а именно на *параметрическом задании* функции двух переменных. Такое задание функции имеет вид

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \tag{3}$$

$$x, y, z \in C^1(\Delta), \quad \Delta \subset R^2(u, v).$$

Для определенности считаем, что соотношения (3) определяют переменную z как функцию переменных x и y, тогда переменные $u(x, y)$ и $v(x, y)$ рассматриваются как промежуточные параметры в определении $z(x, y) = z(u(x, y), v(x, y))$. Из общей теоремы о существовании обратных функций следует, что в окрестности точки (x_0, y_0), в которой

$$\begin{vmatrix} x'_u(u_0, v_0) & x'_v(u_0, v_0) \\ y'_u(u_0, v_0) & y'_v(u_0, v_0) \end{vmatrix} \neq 0,$$

определены функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ — обратные к функциям

$x=x(u, v)$, $y=y(u, v)$, где x_0, y_0, u_0, v_0 связаны равенствами $x_0=$ $=x(u_0, v_0)$, $y_0=y(u_0, v_0)$. Следовательно, в этой окрестности определена функция $z(x, y)=z(u(x, y), v(x, y))$.

Разумеется, данные соотношения (3) можно рассматривать и как параметрическое задание функции $x=x(y, z)$ или функции $y=y(x, z)$ при выполнении условий существования соответствующих обратных функций.

Пример 5. Найдем первый и второй дифференциалы функции $z=z(x, y)$, если

$$x=u\cos v,\ y=u\sin v,\ z=au+bv.$$

Решение. В данном примере кажется возможным аналитически выразить $u(x, y)$ и $v(x, y)$, а именно $u=\pm\sqrt{x^2+y^2}$ $v=$ $=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$. Но в таком представлении, во-первых, функция $v(x, y)$ не определена для $x=0$ и, во-вторых, функция v принимает значения только в интервале $(-\pi/2, \pi/2)$, в то время как в соотношениях $x=u\cos v$, $y=u\sin v$ как u, так и v могут принимать любые значения на всей числовой оси и для $v=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$, имеем $x=0$. Кроме того, часто функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ вообще не выписываются в аналитическом виде. Найдем дифференциалы обратных функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ из системы

$$\begin{cases} dx=\cos v du-u\sin v dv, \\ dy=\sin v du+u\cos v dv. \end{cases}$$

Имеем

$$du=\cos v dx+\sin v dy,\ dv=\frac{\cos v}{u}dy-\frac{\sin v}{u}dx.$$

Подставив выражения du и dv в dz, получаем

$$dz=adu+bdv=\left(a\cos v-\frac{b\sin v}{u}\right)dx+\left(a\sin v+\frac{b\cos v}{u}\right)dy.$$

Далее,

$$d^2z=\left(-a\sin v dv-\frac{b\cos v}{u}dv+\frac{b\sin v}{u^2}du\right)dx+$$

$$+\left(a\cos v dv-\frac{b\sin v}{u}dv-\frac{b\cos v}{u^2}du\right)dy=$$

$$=\left[\left(-a\sin v-\frac{b\cos v}{u}\right)\left(\frac{\cos v}{u}dy-\frac{\sin v}{u}dx\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{b\sin v}{u^2}(\cos v dx+\sin v dy)\right]dx+$$

$$+\left[\left(a\cos v-\frac{b\sin v}{u}\right)\left(\frac{\cos v}{u}dy-\frac{\sin v}{u}\right)dx-\right.$$

$$\left.-\frac{b\cos v}{u^2}(\cos v dx+\sin v dy)\right]dy=\left(\frac{a}{u}\sin^2 v+\frac{b}{u}\sin 2v\right)dx^2+$$

$$+\left(\frac{a}{u}\cos^2 u-\frac{b}{u^2}\sin 2v\right)dy^2-\left(\frac{a}{u}\sin 2v+\frac{2b}{u^2}\cos 2v\right)dxdy.$$

§ 6. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ

Методы дифференцирования сложных и неявно заданных функций используются для замены переменных в дифференциальных выражениях. Эта задача для функции одного переменного была рассмотрена в разделе «Дифференциальное исчисление функции одного переменного». Здесь будут рассматриваться функции многих переменных, и для простоты изложения ограничимся случаем функции двух переменных.

Постановка задачи. Пусть задано некоторое выражение A, в которое входят переменные x, y, функция z и ее частные производные по x и y до некоторого порядка k. Пусть далее переменные x и y выражаются через новые независимые аргументы $x=x(u, v)$, $y=y(u, v)$. Требуется преобразовать данное дифференциальное выражение A так, чтобы в него входили переменные u, v, функция z и частные производные соответствующих порядков функции z по переменным u и v. Предполагается, что все преобразования делаются в таких областях изменения x, y, u, v, что существуют обратные функции $u=u(x, y)$, $v=v(x, y)$ и все рассматриваемые функции достаточно гладкие.
Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Чтобы выразить вторые производные функции z по x, y через производные z по u, v и производные u и v по x, y, дифференцируем выражения первых производных. Например,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=$$

$$=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+$$

$$+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}.$$

Аналогично находятся производные любого порядка.

Обратим внимание на то, что в приведенных формулах фигурируют не производные функций $x(u, v)$, $y(u, v)$, а производные обратных функций $u(x, y)$, $v(x, y)$. На практике связь между переменными x, y, u, v задается как соотношениями вида $x=x(u, v)$, $y=y(u, v)$, так и соотношениями вида $u=u(x, y)$, $v=v(x, y)$ или $\varphi_1(x, y, u, v)=0$, $\varphi_2(x, y, u, v)=0$. При любом задании этой связи удобнее пользоваться при замене переменных именно производными $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$.

Пример 1. Приняв u и v за новые независимые переменные, преобразуем уравнение

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

если $u = xy$, $v = \frac{x}{y}$.

Решение.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial v}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{x}{y^2} \frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(y \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial v}\right) = y\left(y \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\right) +$$

$$+ \frac{1}{y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \cdot y + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \cdot \frac{1}{y}\right) = y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{1}{y^2} \frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{x}{y^2} \frac{\partial z}{\partial v}\right) = x\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} x - \frac{x}{y^2} \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\right) -$$

$$- \frac{x}{y^2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} x - \frac{x}{y^2} \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right) + \frac{2x}{y^3} \cdot \frac{\partial z}{\partial v}.$$

Подставляя выражения $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ в исходное уравнение, получаем

$$4x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} - \frac{2x}{y} \frac{\partial z}{\partial v} = 0 \text{ или } 2u \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = \frac{\partial z}{\partial v}.$$

Пример 2. Приняв u и v за новые независимые переменные, преобразуем уравнение

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + m^2 z = 0,$$

если

$$x = e^u \cos v, \qquad y = e^u \sin v.$$

Решение. Вначале необходимо найти $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$.

Запишем соотношение между дифференциалами dx, dy, du, dv:

$$dx = e^u \cos v du - e^u \sin v dv,$$
$$dy = e^u \sin v du + e^u \cos v dv.$$

Следовательно,

$$du = e^{-u} \cos v dx + e^{-u} \sin v dy; \quad dv = -e^{-u} \sin v dx + e^{-u} \cos v dy$$

и

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{-u} \cos v, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = e^{-u} \sin v,$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = -e^{-u} \sin v, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = e^{-u} \cos v.$$

Теперь имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} e^{-u} \cos v - \frac{\partial z}{\partial v} e^{-u} \sin v;$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} e^{-u} \sin v + \frac{\partial z}{\partial v} e^{-u} \cos v,$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^{-u} \cos v \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} e^{-u} \cos v - \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} e^{-u} \sin v \right) +$$
$$+ \frac{\partial z}{\partial u} \left(-e^{-u} \cos v \frac{\partial u}{\partial x} - e^{-u} \sin v \frac{\partial v}{\partial x} \right) -$$
$$- e^{-u} \sin v \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} e^{-u} \cos v - \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} e^{-u} \sin v \right) -$$
$$- \frac{\partial z}{\partial v} \left(-e^{-u} \sin v \frac{\partial u}{\partial x} + e^{-u} \cos v \frac{\partial v}{\partial x} \right) =$$
$$= \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} e^{-2u} \cos^2 v + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} e^{-2u} \sin^2 v - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} e^{-2u} \cos v \sin v +$$
$$+ \frac{\partial z}{\partial u} (e^{-2u} \sin^2 v - e^{-2u} \cos^2 v) + 2 \frac{\partial z}{\partial v} e^{-2u} \cos v \sin v,$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^{-u} \sin v \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} e^{-u} \sin v + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} e^{-u} \cos v \right) +$$
$$+ \frac{\partial z}{\partial u} \left(-e^{-u} \sin v \frac{\partial u}{\partial y} + e^{-u} \cos v \frac{\partial v}{\partial y} \right) +$$
$$+ e^{-u} \cos v \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} e^{-u} \sin v + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} e^{-u} \cos v \right) +$$
$$+ \frac{\partial z}{\partial v} \left(-e^{-u} \cos v \frac{\partial u}{\partial y} - e^{-u} \sin v \frac{\partial v}{\partial y} \right) =$$

$$=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}e^{-2u}\sin^2 v+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}e^{-2u}\cos^2 v+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}e^{-2u}\sin v\cos v+$$

$$+\frac{\partial z}{\partial u}(e^{-2u}\cos^2 v-e^{-2u}\sin^2 v)-2\frac{\partial z}{\partial v}e^{-2u}\cos v\sin v,$$

и данное уравнение преобразуется в уравнение

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}+e^{2u}m^2 z=0.$$

Более общий случай замены представляет собой переход от функции $z(x, y)$ к функции $w=w(u, v)$ при условиях связи переменных x, y, z, u, v, w вида $f_1(x, y, z, u, v, w)=0$, $f_2(x, y, z, u, v, w)=0$, $f_3(x, y, z, u, v, w)=0$. Кроме того, между переменными x, y, z есть зависимость $z-z(x, y)=0$. Итак, имеем систему четырех уравнений с шестью неизвестными:

$$\begin{cases} f_1(x,y,z,u,v,w)=0,\\ f_2(x,y,z,u,v,w)=0,\\ f_3(x,y,z,u,v,w)=0,\\ z-z(x,y)=0.\end{cases}$$

Предполагая опять, что преобразования делаются в соответствующей области, считаем эту систему определяющей четыре функции двух аргументов:

$$u=u(x, y),\quad v=v(x, y),\quad w=w(x, y),\quad z=z(x, y).$$

Решая соответствующую линейную систему, связывающую дифференциалы dx, dy, dz, du, dv, dw, относительно du, dv, dw, dz, получаем выражения для частных производных функции u, v, w по x, y. Подставляя эти выражения в равенства

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x},\quad \frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y},$$

получаем уравнения, связывающие $\frac{\partial w}{\partial u}, \frac{\partial w}{\partial v}$ с $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$, из которых находим выражения $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ через $\frac{\partial w}{\partial u}$ и $\frac{\partial w}{\partial v}$. Чтобы выразить вторые производные функции z по x, y через u, v, w и производные w по u и v, либо дифференцируют выражения $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$ по переменным x и y, например,

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\cdot\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+$$

$$+\frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x^2},$$

либо дифференцируют по x и y найденные выражения $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ в зависимости от конкретной ситуации (см. приведенные ниже примеры).

Пример 3. Приняв u и v за новые независимые переменные, преобразуем уравнение

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{z},$$

если

$$u=2x-z^2, \quad v=\frac{y}{z}.$$

Решение. В данном примере замена функции z не осуществляется, но, поскольку z входит формальным аргументом в выражения переменных u и v, применяем общий метод. Учитывая зависимость z от x и y, получаем

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2-2z\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-2z\frac{\partial z}{\partial y},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{y}{z^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{z-y\frac{\partial z}{\partial y}}{z^2}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\left(2-2z\frac{\partial z}{\partial x}\right)+\frac{\partial z}{\partial v}\left(-\frac{y}{z^2}\frac{\partial z}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\left(-2z\frac{\partial z}{\partial y}\right)+\frac{\partial z}{\partial v}\left(\frac{1}{z}-\frac{y}{z^2}\frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

откуда

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2\frac{\partial z}{\partial u}}{1+2z\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{y}{z^2}\frac{\partial z}{\partial v}}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial v}}{1+2z\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{y}{z^2}\frac{\partial z}{\partial v}}.$$

Подставляя эти выражения производных и выражения

$$x=\frac{u+z^2}{2} \quad \text{и} \quad y=vz$$

в исходное уравнение, получаем

$$v\frac{\partial z}{\partial v}(z^2-u^2)=z(u^2+z^2).$$

Пример 4. Приняв u и v за новые независимые переменные, а w за новую функцию от u и v, преобразуем к новым переменным уравнение

$$(xy+z)\frac{\partial z}{\partial x}+(1-y^2)\frac{\partial z}{\partial y}=x+yz,$$

если

$$u=yz-x,\quad v=xz-y,\quad w=xy-z.$$

Решение. Дифференцируя w как непосредственно заданную функцию $w=w(x,\ y,\ z(x,\ y))$, получаем $\frac{\partial w}{\partial x}=y-\frac{\partial z}{\partial x}$. Запишем теперь выражение $\frac{\partial w}{\partial x}$, дифференцируя функцию w как композицию $w=w(u(x,\ y,\ z(x,\ y)),\ v(x,\ y,\ z(x,\ y)))$: $\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+$ $+\frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$. Подставляя сюда выражения производных $\frac{\partial u}{\partial x}=$ $=y\frac{\partial z}{\partial x}-1$ и $\frac{\partial v}{\partial x}=z+x\frac{\partial z}{\partial x}$, получаем, что

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial u}\left(y\frac{\partial z}{\partial x}-1\right)+\frac{\partial w}{\partial v}\left(z+x\frac{\partial z}{\partial x}\right).$$

Приравнивая найденные выражения $\frac{\partial w}{\partial x}$, получаем уравнение

$$y-\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial u}\left(y\frac{\partial z}{\partial x}-1\right)+\frac{\partial w}{\partial v}\left(z+x\frac{\partial z}{\partial x}\right),$$

из которого находим, что

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y+\frac{\partial w}{\partial u}-z\frac{\partial w}{\partial v}}{1+y\frac{\partial w}{\partial u}+x\frac{\partial w}{\partial v}}.$$

Таким же методом получаем уравнение

$$x-\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial u}\left(z+y\frac{\partial z}{\partial y}\right)+\frac{\partial w}{\partial v}\left(x\frac{\partial z}{\partial y}-1\right),$$

из которого находим, что

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x-z\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}}{1+y\frac{\partial w}{\partial u}+x\frac{\partial w}{\partial v}}.$$

Подставляя эти выражения производных в исходное уравнение, получаем

$$\frac{\partial w}{\partial v}(-2xyz-z^2+1-y^2-x^2)=0,\ \text{т. е.}\quad \frac{\partial w}{\partial v}=0.$$

Пример 5. Приняв u и v за новые независимые переменные, а w за новую функцию от u и v, преобразуем к новым переменным уравнение

$$x^2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+y^2\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=z^2\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y},$$

если

$$x=ue^w,\quad y=ve^w,\quad z=we^w.$$

Решение. Выразим сначала du, dv и dw через dx и dy. Из системы

$$dx=e^w du+ue^w dw,$$

$$dy=e^w dv+ve^w dw,$$

$$dz=e^w dw+we^w dw$$

находим выражения du, dv и dw как функции dx, dy и dz. Заменяя в этих выражениях dz на

$$\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy,$$

получаем

$$du=\frac{1}{e^w(1+w)}\left[\left(1+w-u\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx-u\frac{\partial z}{\partial y}dy\right],$$

$$dv=\frac{1}{e^w(1+w)}\left[-v\frac{\partial z}{\partial x}dx+\left(1+w-v\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy\right],$$

$$dw=\frac{1}{e^w(1+w)}\left[\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\right].$$

Следовательно,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1+w-u\dfrac{\partial z}{\partial x}}{e^w(1+w)},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-u\dfrac{\partial z}{\partial y}}{e^w(1+w)},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{v\dfrac{\partial z}{\partial x}}{e^w(1+w)},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1+w-v\dfrac{\partial z}{\partial y}}{e^w(1+w)},$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\dfrac{\partial z}{\partial x}}{e^w(1+w)},\quad \frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\dfrac{\partial z}{\partial y}}{e^w(1+w)}.$$

Приравнивая выражения $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$, полученные дифференциро-

ванием функции w, заданной непосредственно как $w=w(x, y, z(x, y))$ и как композиция $w=w(u(x, y, z(x, y)), v(x, y, z(x, y)))$, получаем уравнения

$$\frac{1}{e^w(1+w)}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{1+w-u\dfrac{\partial z}{\partial x}}{e^w(1+w)}-\frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{v\dfrac{\partial z}{\partial x}}{e^w(1+w)},$$

$$\frac{1}{e^w(1+w)}\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{u\dfrac{\partial z}{\partial y}}{e^w(1+w)}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{1+w-v\dfrac{\partial z}{\partial y}}{e^w(1+w)},$$

из которых находим, что

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\dfrac{\partial w}{\partial u}(1+w)}{1+u\dfrac{\partial w}{\partial u}+v\dfrac{\partial w}{\partial v}};\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{(1+w)\dfrac{\partial w}{\partial v}}{1+u\dfrac{\partial w}{\partial u}+v\dfrac{\partial w}{\partial v}}.$$

Подставляя эти выражения производных и выражения $x=ue^w$, $y=ve^w$, $z=we^w$ в исходное уравнение, получаем

$$u^2\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2+v^2\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2=w^2\frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\partial w}{\partial v}.$$

Пример 6. Преобразуем уравнение $(x-z)\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$, приняв x за функцию, а y и z за независимые переменные.

Решение. Чтобы было удобно пользоваться общим методом, введем переменные u, v, w так: $w=x$, $u=y$, $v=z$. Приравнивая выражения $\dfrac{\partial w}{\partial x}$, $\dfrac{\partial w}{\partial y}$, полученные дифференцированием функции w, заданной непосредственно как $w=w(x, y, z(x, y))$ и как композиция $w=w(u(x, y, z(x, y)), v(x, y, z(x, y))$, получаем уравнения

$$1=\frac{\partial w}{\partial u}\cdot 0+\frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial z}{\partial x},$$

$$0=\frac{\partial w}{\partial u}\cdot 1+\frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial z}{\partial y},$$

откуда

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\dfrac{\partial w}{\partial v}}=\frac{1}{\dfrac{\partial x}{\partial z}};\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-\dfrac{\partial w}{\partial u}}{\dfrac{\partial w}{\partial v}}=-\frac{\dfrac{\partial x}{\partial y}}{\dfrac{\partial x}{\partial z}}.$$

Подставляя эти выражения производных в исходное уравнение, получаем

$$y\frac{\partial x}{\partial y}=x-z.$$

Пример 7. Приняв u и v за новые независимые переменные, а w за новую функцию от u и v, преобразуем к новым переменным уравнение

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,$$

если

$$u=x+y,\quad v=\frac{y}{x},\quad w=\frac{z}{x}.$$

Решение. Приравнивая выражения $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$, полученные дифференцированием функции w, заданной непосредственно как $w=w(x, y, z(x, y))$ и как композиция $w=w(u(x, y, z(x, y)), v(x, y, z(x, y))$, получаем уравнения

$$-\frac{z}{x^2}+\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{y}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v},$$

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{1}{x}\frac{\partial w}{\partial v},$$

откуда

$$\frac{\partial z}{\partial x}=x\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{y}{x}\frac{\partial w}{\partial v}+\frac{z}{x};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=x\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}.$$

Далее,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{y}{x}\frac{\partial w}{\partial v}+\frac{z}{x}\right)=\frac{\partial w}{\partial u}+x\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}-\frac{y}{x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}\right)+$$
$$+\frac{y}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v}-\frac{y}{x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}-\frac{y}{x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\right)-\frac{z}{x^2}+\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}=$$
$$=x\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}-\frac{2y}{x}\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}+\frac{y^2}{x^3}\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}+2\frac{\partial w}{\partial u};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(x\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}\right)=x\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\frac{1}{x}\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}\right)+$$
$$+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}+\frac{1}{x}\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\right)=x\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}+\frac{1}{x}\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(x\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{y}{x}\frac{\partial w}{\partial v}+\frac{z}{x}\right)=x\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\frac{1}{x}\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}\right)-$$
$$-\frac{1}{x}\frac{\partial w}{\partial v}-\frac{y}{x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}+\frac{1}{x}\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\right)+\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial y}=$$
$$=x\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\left(1-\frac{y}{x}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}-\frac{y}{x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}+\frac{\partial w}{\partial u}.$$

Подставляя эти выражения производных в исходное уравнение, получаем

$$\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\left(\frac{y^2}{x^3}+\frac{1}{x}+\frac{2y}{x^2}\right)=0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}=0.$$

§ 7. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Определение. Пусть поверхность S задана в R^3 непрерывной функцией $z=f(x, y)$, т. е. $S:\{(x, y, f(x, y)), (x, y)\in D\}$ и точка $s_0=(x_0, y_0, z_0)\in S$. Плоскость $P: A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$, проходящая через точку s_0, называется *касательной плоскостью к S в точке s_0*, если

$$|f(x, y)-z|=o(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)}),\ \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\to 0,$$

где точка $(x, y, f(x, y))\in S$ и точка $(x, y, z)\in P$.

Аналогично определяется касательная плоскость, если поверхность задана непрерывной функцией $x=x(y, z)$ или $y=y(x, z)$.

Поверхность в данной точке может иметь только одну касательную плоскость.

Определение касательной плоскости, вообще говоря, не должно зависеть от выбора системы координат, так как существование в данной точке поверхности касательной плоскости к ней есть внутреннее свойство поверхности. Но поскольку мы занимаемся не внутренней геометрией поверхностей, а геометрическими приложениями методов анализа, то наши рассмотрения ограничиваются такими поверхностями, к которым эти методы применимы, т. е. поверхностями, аналитически представимыми в некоторой системе координат.

Если поверхность S задана функцией $z=f(x, y)$, $f\in C^1(D)$, область D принадлежит R^2, то касательная плоскость к S существует в каждой точке $S_0=(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ и имеет уравнение

$$z-f(x_0, y_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y-y_0).$$

Если поверхность S задана уравнением $F(x, y, z)=0$, причем $F\in C^1(G)$, область G принадлежит R^3, $M_0=(x_0, y_0, z_0)\in G$, $F(x_0, y_0, z_0)=0$ и хотя бы одна из производных $F_x'(M_0)$, $F_y'(M_0)$, $F_z'(M_0)$ отлична от нуля, то касательная плоскость к S существует в точке M_0 и имеет уравнение

$$F_x'(M_0)(x-x_0)+F_y'(M_0)(y-y_0)+F_z'(M_0)(z-z_0)=0.$$

Если поверхность S задана соотношениями $x=x(u, v)$, $y=y(u, v)$, $z=z(u, v)$, причем $x, y, z\in C^1(\Delta)$, область Δ принадлежит $R^2(u, v)$, $M_0=(u_0, v_0)\in\Delta$, $x_0=x(u_0, v_0)$, $y_0=y(u_0, v_0)$, $z_0=z(u_0, v_0)$ и векторы

$$(x_u'(M_0), y_u'(M_0), z_u'(M_0)) \text{ и } (x_v'(M_0), y_v'(M_0), z_v'(M_0))$$

неколлинеарны, то касательная плоскость к S в точке $s_0=(x_0, y_0, z_0)$ существует и имеет уравнение

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_u'(M_0) & y_u'(M_0) & z_u'(M_0) \\ x_v'(M_0) & y_v'(M_0) & z_v'(M_0) \end{vmatrix}=0.$$

При выполнении сформулированных выше условий параметрического и неявного задания поверхности S в полученном уравнении касательной плоскости хотя бы один из коэффициентов при переменных отличен от нуля, т. е. этому уравнению действительно отвечает некоторая плоскость в R^3. Равенство нулю коэффициента при какой-нибудь переменной в уравнении касательной плоскости в точке M_0 геометрически означает, что эта плоскость параллельна соответствующей оси координат. Аналитически это значит, что в окрестности точки M_0 не выполнены условия теоремы существования для этой координаты как функции остальных двух.

Пример 1. Напишем уравнение касательной плоскости к сфере $x^2+y^2+z^2=a^2$ в некоторой ее точке $s_0=(x_0, y_0, z_0)$, $a\neq 0$.

Решение. Пусть сначала $z_0>0$. Тогда в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) сфера задается функцией $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$. Так как $x_0^2+y_0^2=a^2-z_0^2<a^2$, то можно считать эту окрестность такой, что производные

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \quad \text{и} \quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

непрерывны в ней. Итак, условия существования касательной плоскости в точке $s_0=(x_0, y_0, z_0)$, $z_0>0$, выполнены и ее уравнение имеет вид

$$z-z_0=-\frac{x_0}{z_0}(x-x_0)-\frac{y_0}{z_0}(y-y_0).$$

Точно так же проводятся рассуждения для точки $s_0=(x_0, y_0, z_0)$, если $z_0<0$. Если же $z_0=0$, то z уже не является однозначной гладкой функцией переменных x и y ни в какой окрестности точки (x_0, y_0). Так как при $z_0=0$ $x_0^2+y_0^2=a^2$, то x_0 и y_0 одновременно в нуль не обращаются. Если $x_0\neq 0$, то в окрестности точки $(y_0, 0)$ x определяется как однозначная гладкая функция y и z; если $y_0\neq 0$, то в окрестности точки $(x_0, 0)$ y определяется как однозначная гладкая функция x и z. В каждом из этих случаев уравнение касательной находится тем же методом, как и в случае $z_0>0$, и имеет вид

$$x-x_0=-\frac{y_0}{x_0}(y-y_0)$$

при $x_0\neq 0$ и $y-y_0=-\frac{x_0}{y_0}(x-x_0)$ при $y_0\neq 0$.

Все эти случаи объединяются, если использовать формулу уравнения касательной плоскости для неявного задания поверхности.

Обозначим $F(x, y, z)=x^2+y^2+z^2-a^2$, тогда $F_x'=2x$, $F_y'=2y$, $F_z'=2z$, и так как ни в какой точке сферы $x^2+y^2+z^2=a^2$ все три координаты одновременно не обращаются в нуль, то уравнение касательной к этой сфере в точке $s_0=(x_0, y_0, z_0)$ имеет вид

$$x_0(x-x_0)+y_0(y-y_0)+z_0(z-z_0)=0.$$

Очевидно, что при соответствующих условиях это уравнение касательной плоскости совпадает с найденным выше.

Определение. Если поверхность S имеет в точке $s_0 \in S$ касательную плоскость P, то прямая, проходящая через точку s_0 перпендикулярно P, называется *нормалью к S* в точке s_0, а вектор, перпендикулярный к P, называется *нормальным вектором к поверхности S* в точке s_0.

Заметим, что если N_1 — нормальный вектор к поверхности S в точке s_0, то и любой вектор $N=\lambda N_1$ $(\lambda \neq 0)$, будет тоже нормальным вектором к поверхности S в точке s_0.

Пример 2. Напишем уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности S, заданной уравнением $2^{\frac{y}{z}}+2^{\frac{z}{x}}=6$ в точке $M_0=(1;\ 2;\ 2)$.

Решение. Если $F(x,y,z)=2^{\frac{y}{z}}+2^{\frac{z}{x}}-6$,

то $F'_x=-\frac{z}{x^2}\cdot 2^{\frac{z}{x}}\ln 2$,

$$F'_y=\frac{1}{z}\,2^{\frac{y}{z}}\ln 2,$$

$$F'_z=\frac{1}{x}\,2^{\frac{z}{x}}\ln 2-\frac{y}{z^2}\,2^{\frac{y}{z}}\ln 2.$$

Следовательно, уравнение касательной плоскости есть

$$-4\ln 2\cdot(x-1)+\frac{1}{2}\ln 2\,(y-2)+\frac{7}{2}\ln 2\,(z-2)=0,$$

или

$$8x-y-7z+8=0.$$

Уравнение нормали в параметрическом виде есть

$$x=1+8t,\quad y=2-t,\quad z=2-7t$$

или в каноническом

$$\frac{x-1}{8}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-2}{-7}.$$

Пример 3. Напишем уравнение касательной плоскости и нормали к цилиндру $y^2=2px$ в произвольной точке $s_0=(x_0,\ y_0,\ z_0)$ этого цилиндра.

Решение. Цилиндрическая поверхность с образующими, параллельными оси OZ, не может быть задана функцией $z=z(x,\ y)$. В данном случае можно рассматривать эту поверхность как определенную функцией $x=\frac{y^2}{2p}$. Тогда $\frac{\partial x}{\partial y}=\frac{y}{p}$, $\frac{\partial x}{\partial z}=0$ и уравнение касательной плоскости в точке s_0 имеет вид $x-x_0=\frac{y_0}{p}(y-y_0)$,

или $p(x-x_0)-y_0(y-y_0)=0$. Можно было бы рассматривать цилиндр и как поверхность, определенную неявным соотношением $y^2-2px=0$.

Уравнение нормали к цилиндру в точке s_0 имеет вид

$$x=x_0+pt, \quad y=y_0-y_0t, \quad z=z_0.$$

В любой точке цилиндра касательная плоскость вертикальна (параллельна оси OZ), а нормаль горизонтальна (перпендикулярна оси OZ).

Пример 4. Напишем уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности S, заданной соотношениями $x=u+v^2$, $y=u^2-v^3$, $z=2uv$ в точке $s_0=(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0))$, если $u_0=2$, $v_0=1$.

Решение. Имеем

$$x'_u=1, \ x'_v=2v; \qquad y'_u=2u, \ y'_v=-3v^2;$$
$$z'_u=2v, \ z'_v=2u; \qquad x_0=x(u_0, v_0)=3,$$
$$y_0=y(u_0, v_0)=3, \qquad z_0=z(u_0, v_0)=4;$$
$$x'_u(u_0, v_0)=1, \qquad x'_v(u_0, v_0)=2; \ y'_u(u_0, v_0)=4,$$
$$y'_v(u_0, v_0)=-3; \qquad z'_u(u_0, v_0)=2, \ z'_v(u_0, v_0)=4.$$

Следовательно, уравнение касательной плоскости в точке s_0 имеет вид

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-3 & z-4 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix}=0,$$

т. е. $2x-z-2=0$, а уравнение нормали в точке s_0 имеет вид

$$x=3+2t, \quad y=3, \quad z=4-t.$$

Определение. Пусть кривая Γ в пространстве R^3 задана соотношениями

$$x=x(\tau), \quad y=y(\tau), \quad z=z(\tau), \quad \tau\in[\alpha, \beta].$$

Возьмем $\tau_0\in(\alpha, \beta)$ и $\tau\in(\tau_0, \beta)$. Полупрямую

$$x=x(\tau_0)+t[x(\tau)-x(\tau_0)],$$
$$y=y(\tau_0)+t[y(\tau)-y(\tau_0)],$$
$$z=z(\tau_0)+t[z(\tau)-z(\tau_0)],$$
$$t\geqslant 0,$$

проходящую через точки $\gamma_0=(x(\tau_0), y(\tau_0), z(\tau_0))$ и $\gamma=(x(\tau), y(\tau), z(\tau))$ кривой Γ, назовем правой секущей. Полупрямую, являющуюся предельным положением правой секущей при $\tau\to\tau_0$, если такая существует, назовем *правой полукасательной к кривой* Γ *в точке* γ_0. Аналогично определяется левая полукасательная к Γ в точке γ_0.

Определение. Если угол между правой и левой полукасательными к Γ в точке γ_0 равен π, т. е. объединение этих полукасательных является прямой, то эта прямая называется *касательной к кривой* Γ *в точке* γ_0.

Определение. Если кривая Γ имеет в точке γ_0 касательную, то плоскость, проходящая через точку γ_0 перпендикулярно касательной, называется *нормальной плоскостью к кривой* Γ *в точке* γ_0.

Если функции $x=x(\tau)$, $y=y(\tau)$, $z=z(\tau)$, определяющие кривую Γ, дифференцируемы в точке $\tau_0\in(\alpha, \beta)$ и вектор $(x'(\tau_0), y'(\tau_0), z'(\tau_0))$ не нулевой, то касательная к Γ в точке $\gamma_0=(x(\tau_0), y(\tau_0), z(\tau_0))$ существует и параллельна вектору $(x'(\tau_0), y'(\tau_0), z'(\tau_0))$, т. е. ее уравнение имеет вид

$$x=x(\tau_0)+tx'(\tau_0), \quad y=y(\tau_0)+ty'(\tau_0), \quad z=z(\tau_0)+tz'(\tau_0).$$

Пример 5. Напишем уравнение касательной прямой и нормальной плоскости к кривой $\Gamma: x^2+y^2=2ax$, $x^2+y^2+z^2=4a^2$ в точке $M_0\left(\frac{3a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}, a\right)$.

Решение. Кривая Γ задана как пересечение двух поверхностей. Возьмем в качестве параметра кривой Γ переменную z. Дифференциалы dx, dy и dz связаны уравнениями

$$2xdx+2ydy=2adx,$$

$$2xdx+2ydy+2zdz=0.$$

Разрешая эту систему относительно dx и dy, получим

$$dx=\frac{-z}{a}dz, \quad dy=\frac{-z(a-x)}{ay}dz.$$

Следовательно, $x_z'(M_0)=-1$, $y_z'(M_0)=\frac{1}{\sqrt{3}}$ и уравнение касательной к Γ в точке M_0 имеет вид

$$x=\frac{3a}{2}-t, \quad y=\frac{a\sqrt{3}}{2}+\frac{t}{\sqrt{3}} \quad z=a+t,$$

а уравнение нормальной плоскости

$$\left(x-\frac{3a}{2}\right)-\frac{1}{\sqrt{3}}\left(y-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-(z-a)=0.$$

Определение. Если $f: G\to R$, область $G\subset R^m$, $f\in C^1(G)$, $x_0\in G$, то вектор с координатами $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(x_0)\right)$ называется *градиентом функции* f *в точке* x_0 и обозначается $\operatorname{grad} f(x_0)$.

Градиент функции f в точке x_0 является нормальным вектором поверхности уровня функции f, проходящей через точку M_0, т. е. поверхности $f(x, y, z)=f(M_0)$ (если $\operatorname{grad} f$ не нулевой вектор).

Пример 6. Пусть

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^3 x_2 + x_2^3 x_3 + x_3^3 x_4 + x_4^3 x_1 - x_1 x_2 x_3 x_4.$$

Найдем градиент функции f в точке $x_0 = (1; -1; 2; -3)$.

Решение. Найдем частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}$, $\frac{\partial f}{\partial x_3}$, $\frac{\partial f}{\partial x_4}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 3x_1^2 x_2 + x_4^3 - x_2 x_3 x_4;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1^3 + 3x_2^2 x_3 - x_1 x_3 x_4;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = x_2^3 + 3x_3^2 x_4 - x_1 x_2 x_4;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_4} = x_3^3 + 3x_4^2 x_1 - x_1 x_2 x_3.$$

Значения производных в точке $x_0 = (1, -1, 2, -3)$ являются координатами вектора $\operatorname{grad} f(x_0)$, т. е. $\operatorname{grad} f(x_0) = (-36, 13, -40, 32)$.

Определение. Пусть $f: G \to R$, область G принадлежит R^m, $x_0 \in G$ и вектор $l = (l_1, l_2, \ldots, l_m)$. Если существует предел

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tl) - f(x_0)}{t \|l\|},$$

то его значение называется *производной функции f по направлению l в точке x_0* и обозначается $\frac{\partial f}{\partial l}(x_0)$.

Если $f: G \to R$, область G принадлежит R_m и f дифференцируема в точке $x_0 \in G$, то $\frac{\partial f}{\partial l}(x_0)$ по любому направлению l существует и вычисляется по формуле

$$\frac{\partial f}{\partial l}(x_0) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \cdot \frac{l_i}{\|l\|} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \cos \alpha_i,$$

где α_i — угол между l и осью OX_i. Так как вектор $l_0 = (\cos \alpha_1, \cos \alpha_2, \ldots, \cos \alpha_m) = \frac{l}{\|l\|}$ есть единичный вектор, совпадающий по направлению с вектором l, то удобно направление, по которому вычисляется производная, обозначать сразу единичным вектором.

Если $f: G \to R$, область $G \subset R^m$ и $f \in C^1(G)$, то для $x_0 \in G$

$$\frac{\partial f}{\partial l}(x_0) = \frac{(\operatorname{grad} f(x_0) \cdot l)}{\|l\|} = \operatorname{пр}_l \operatorname{grad} f(x_0),$$

следовательно, производная $\frac{\partial f}{\partial l}(x_0)$, т. е. скорость изменения функции f по направлению l в точке x_0, достигает наибольшего

значения, если направление l совпадает с направлением $\operatorname{grad} f(x_0)$, и этот максимум равен $\|\operatorname{grad} f(x_0)\|$.

Пример 7. Найдем производную функции

$$f = \operatorname{arctg} \frac{xz}{y} + \ln (x^2z^2 + y^2)$$

в точке $M_0 = (1, 1, -1)$ по направлению градиента функции $\varphi(x, y, z) = xyz - x^2 - y^2 - z^2$ в этой точке.

Решение. Имеем

$$\operatorname{grad} \varphi(M_0) = (yz - 2x,\ xz - 2y,\ xy - 2z)\,|_{M_0} = (-3,\ -3,\ 3),$$

$$l_0 = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M_0) = \left.\frac{zy + 2xz^2}{y^2 + x^2z^2}\right|_{M_0} = \frac{1}{2};\quad \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) = \left.\frac{2y - xz}{y^2 + x^2z^2}\right|_{M_0} = \frac{3}{2};$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(M_0) = \left.\frac{xy + 2x^2z}{y^2 + x^2z^2}\right|_{M_0} = -\frac{1}{2};\quad \frac{\partial f}{\partial l}(M_0) =$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{3}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{2\sqrt{3}} = -\frac{5}{2\sqrt{3}}.$$

Пример 8. Найдем производную функции $u(x, y, z) = xyz$ в точке (x_0, y_0, z_0), лежащей на эллипсоиде $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, по направлению внутренней нормали к эллипсоиду в этой точке.

Решение. Один из нормальных векторов к поверхности $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ в точке (x_0, y_0, z_0) имеет координаты $\left(\frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2}, \frac{z_0}{c^2}\right)$. Геометрические соображения показывают, что единичный вектор внутренней нормали должен иметь координаты, противоположные по знаку координатам точки, в которой он определяется. Следовательно, обозначая этот вектор через n, имеем

$$n = -\frac{1}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4} + \frac{z_0^2}{c^4}}}\left(\frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2}, \frac{z_0}{c^2}\right)$$

и

$$\frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{x_0y_0z_0\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4} + \frac{z_0^2}{c^4}}} = -\frac{x_0y_0z_0\,(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)}{\sqrt{x_0^2b^4c^4 + y_0^2a^4c^4 + z_0^2a^4b^4}}.$$

§ 8. ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Определение. Функция $f: E \to R$, $E \subset R^m$, имеет *локальный максимум* (*локальный минимум*) во внутренней точке x_0 множества E, если существует окрестность $U(x_0) \subset E$ точки x_0 такая, что $f(x) \leqslant f(x_0)$ $(f(x) \geqslant f(x_0))$ для всех $x \in U(x_0)$. Если при $x \in U(x_0) \setminus x_0$ имеет место строгое неравенство $f(x) < f(x_0)$ $(f(x) > f(x_0))$, то локальный максимум (минимум) называется строгим, в противном случае — нестрогим.

Определение. Локальные максимумы и минимумы функции называются ее *локальными экстремумами.*

Точки, в которых функция имеет локальный экстремум, называются экстремальными точками.

Определение. Пусть $f: G \to R$, область $G \subset R^m$. Точка $x_0 \in G$ называется *критической* точкой функции f, если каждая из частных производных $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $1 \leqslant i \leqslant m$, в этой точке или не существует или равна нулю.

Обратим внимание на то, что критическая точка функции обязательно есть внутренняя точка множества ее определения.

Необходимое условие экстремума: если область G принадлежит R^m и в точке $x_0 \in G$ функция $f: G \to R$ имеет локальный экстремум, то x_0 — критическая точка функции.

Другими словами, всякая экстремальная точка функции есть ее критическая точка.

Достаточное условие экстремума: пусть область G принадлежит R^m, $f: G \to R$, $f \in C^2(G)$ и $x_0 \in G$ — критическая точка f:

а) если квадратичная форма $d^2f(x_0)$ положительно определена, то в точке x_0 функция f имеет строгий локальный минимум;

б) если квадратичная форма $d^2f(x_0)$ отрицательно определена, то в точке x_0 функция f имеет строгий локальный максимум;

в) если квадратичная форма $d^2f(x_0)$ знакопеременная, то в точке x_0 функция f не имеет экстремума; точка x_0 в этом случае называется *седловой* точкой функции f.

Исследование определенности квадратичной формы $d^2f(x_0)$ может быть проведено с помощью критерия Сильвестра: квадратичная форма $\sum\limits_{i,j=1}^{m} a_{ij}x_ix_j$ положительно определена тогда и только тогда, когда положительны все главные миноры матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix},$$

и отрицательно определена тогда и только тогда, когда $a_{11} < 0$ и при переходе от любого главного минора к главному минору следующего порядка знак минора меняется.

Для функции двух переменных $z=f(x, y)$ критерий Сильвестра состоит в следующем. Пусть область G принадлежит R^2, f; $G\to R$, $f\in C^2(G)$ и $x_0\in G$ — критическая точка функции f. Обозначим

$$A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0),\quad B=\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x_0),\quad C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0).$$

Тогда:

а) если $\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}>0$ и $A>0$, то в точке x_0 функция f имеет строгий локальный минимум;

б) если $\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}>0$ и $A<0$, то в точке x_0 функция f имеет строгий локальный минимум;

в) если $\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}<0$, то точка x_0 — седловая точка функции f (т. е. не есть точка максимума или минимума).

Пример 1. Исследуем на экстремум функцию

$$u=2x^3yz-x^2-y^2-z^2.$$

Решение. Координаты x, y, z критической точки гладкой функции u должны удовлетворять системе

$$\begin{cases} 6x^2yz-2x=0, \\ 2x^3z-2y=0, \\ 2x^3y-2z=0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 3x^2yz=x, \\ x^3z=y, \\ x^3y=z. \end{cases}$$

Отсюда получаем пять критических точек:

$$M_0=(0,\ 0,\ 0),\ M_1=\left(1,\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right),\ M_2=\left(1,\ -\frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

$$M_3=\left(-1,\ -\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right),\ M_4=\left(-1,\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Так как $u\in C^2(G)$ для любой области $G\subset R^3$, то возможно дальнейшее исследование поведения функции u в стационарных точках с помощью достаточного условия экстремума:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=12xyz-2;\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-2;\ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-2;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=6x^2z;\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}=6x^2y;\ \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}=2x^3.$$

Отсюда получаем $d^2u(M_0)=-2dx^2-2dy^2-2dz^2$. Так как $d^2u(M_0)$ является отрицательно определенной квадратичной формой, то в точке M_0 функция u имеет строгий локальный максимум.

Для анализа квадратичной формы

$$d^2u(M_1) = 2dx^2 - 2dy^2 - 2dz^2 + 4\sqrt{3}\,dx\,dy + 4\sqrt{3}\,dx\,dz + $$
$$+ 4dy\,dz$$

применим критерий Сильвестра. Матрица этой формы есть

$$\begin{pmatrix} 2 & 2\sqrt{3} & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & -2 & 2 \\ 2\sqrt{3} & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ее главные миноры есть

$$2 > 0; \quad \begin{vmatrix} 2 & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & -2 \end{vmatrix} < 0; \quad \begin{vmatrix} 2 & 2\sqrt{3} & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & -2 & 2 \\ 2\sqrt{3} & 2 & -2 \end{vmatrix} > 0.$$

Распределение знаков этих миноров показывает, что данная квадратичная форма знакопеременная, следовательно, в точке M_1 функция u не имеет экстремума: точка M_1 есть седловая точка функции u.

Точно так же устанавливается, что точки M_2, M_3 и M_4 также седловые точки функции u.

Пусть $f: G \to R$, область G принадлежит R^m и $x_0 \in G$ — критическая точка функции f. Если f не принадлежит классу $C^2(u(x_0))$ или квадратичная форма $d^2f(x_0)$ полуопределена, т. е. неположительна или неотрицательна, то приходится непосредственно сравнивать значение $f(x_0)$ со значениями $f(x)$ в некоторой окрестности точки x_0, ибо сформулированное достаточное условие неприменимо.

Пример 2. Исследуем на экстремум функцию

$$z = (1 - x^2)\sqrt[3]{y^2}\,(1 - y).$$

Решение. Имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -2x\sqrt[3]{y^2}\,(1 - y); \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{(1 - x^2)(2 - 5y)}{3\sqrt[3]{y}} \quad (y \neq 0).$$

Пусть $M_0 = (x_0, 0)$ и $M = (x_0, \Delta y)$, $|x_0| \neq 1$, тогда

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{z(M) - z(M_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{(1 - x_0^2)\sqrt[3]{\Delta y^2}\,(1 - \Delta y)}{\Delta y} = \infty.$$

Если же $M_1 = (1, 0)$ и $M = (1, \Delta y)$, то $z(M) - z(M_1) = 0$, следовательно, $\frac{\partial z}{\partial y}(M_1) = 0$. Точно так же $\frac{\partial z}{\partial y}(M_2) = 0$, где $M_2 = (-1, 0)$. Таким образом, все точки оси OX, кроме точек M_1 и M_2 являются такими критическими точками функции z, в которых $\frac{\partial z}{\partial y}$ не су-

ществует. В точках M_1 и M_2 $\frac{\partial z}{\partial x}=0$ и $\frac{\partial z}{\partial y}=0$, т. е. эти точки также критические, но в любой окрестности как точки M_1, так и точки M_2 имеются точки, в которых $\frac{\partial z}{\partial y}$ не существует. Итак, для любой окрестности $U(M)$ произвольной точки M оси OX **функция z не является функцией класса $C^2(U(M))$.** Рассмотрим точку $M_0=(x_0, 0)$, $|x_0|<1$, и такую окрестность $U(M_0)$, что для всех $(x, y)\in U(M_0)$ имеем $|x|<1$, $|y|<1$, тогда для всех $(x, y)\in \in U(M_0)$ имеем $z(x, y)\geqslant 0=z(x_0, 0)$. Итак, в точке M_0 функция z имеет локальный минимум (нестрогий). Точно так же проверяется, что во всех точках $M_1=(x_1, 0)$, $|x_1|>1$, функция z имеет нестрогий локальный максимум.

Рассмотрим теперь произвольную окрестность $U(M_2)$ точки $M_2=(1, 0)$. Если $(x, y)\in U(M_2)$, $x>1$, $0<|y|<1$, то $z(x, y)<0= =z(1, 0)=z(M_2)$. Если же $(x, y)\in U(M_2)$, $0<x<1$, $0<|y|<1$, то $z(x, y)>0=z(1, 0)=z(M_2)$,
т. е. в точке $M_2=(1, 0)$ функция z не имеет экстремума: M_2 — седловая точка функции z. Точно так же проверяется, что $M_3= =(-1, 0)$ — седловая точка функции z.

Кроме точек оси OX критическими точками функции z являются точки $M_4=(1, 1)$, $M_5=(-1, 1)$, $M_6=(0, 2/5)$. Для анализа поведения функции z в этих точках можно применить достаточное условие:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-2\sqrt[3]{y^2}(1-y),\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(1-x^2)\left(-\frac{2}{9}\right)y^{-\frac{4}{3}}(1+5y);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{2}{3}xy^{-\frac{1}{3}}(5y-2).$$

Отсюда

$$d^2z(M_6)=-\frac{6}{5}\sqrt[3]{\left(\frac{4}{5}\right)^2}dx^2-\frac{5}{3}\sqrt[3]{\frac{5}{2}}dy^2.$$

Так как квадратичная форма $d^2z(M_6)$ отрицательно определенная, то в точке $M_6=(0, 2/5)$ функция z имеет строгий локальный максимум. Так как $d^2z(M_4)=4dxdy$ есть знакопеременная квадратичная форма, то в точке $M_4(1, 1)$ функция z не имеет экстремума: M_4 — седловая точка функции z. Так же проверяется, что M_5 — седловая точка функции z.

Пример 3. Исследуем на экстремум функцию $z=(1+x^2)\sqrt[3]{y}$.
Решение. Имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x\sqrt[3]{y};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1+x^2}{3\sqrt[3]{y^2}}\quad (y\neq 0),$$

следовательно, ни одна точка вне оси OX не будет критической.

Пусть $P_0=(x_0, 0)$ и $P=(x_0, \Delta y)$, тогда

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{z(P)-z(P_0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{(1+x_0^2)\sqrt[3]{\Delta y}}{\Delta y}=\infty.$$

Таким образом, все точки оси OX являются критическими точками функции z, в которых $\frac{\partial z}{\partial y}$ не существует. Из определения $z(x, y)$ получаем, что если $y>0$, то $z(x_0, y)>0=z(x_0, 0)$, если $y<0$, то $z(x_0, y)<0=z(x_0, 0)$ для любого x_0. Итак, каждая точка оси OX является критической точкой функции z, в которой нарушены условия гладкости и каждая такая точка есть седловая точка функции z.

Из рассмотренных двух предыдущих примеров видно, что если в критической точке функция z не имеет хотя бы одной частной производной, то эта точка может быть как точкой локального минимума, так и точкой локального максимума и седловой точкой.

Пример 4. Исследуем на экстремум функцию

$$z=(x-y)^2+(y^3-1)^4-1.$$

Решение. Так как функция z гладкая, то координаты x и y ее критической точки должны удовлетворять системе

$$\begin{cases} 2(x-y)=0, \\ -2(x-y)+12y^2(y^3-1)^3=0. \end{cases}$$

Отсюда получаем две критические точки $M_0=(0, 0)$ и $M_1=(1, 1)$. Найдем

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2+24y(y^3-1)^3+108y^4(y^3-1)^2,\quad \frac{d^2 z}{\partial x\,\partial y}=-2.$$

Отсюда

$$d^2z(M_0)=d^2z(M_1)=2\,dx^2+2\,dy^2-4\,dx\,dy=2(dx-dy)^2,$$

откуда видно, что это полуопределенная квадратичная форма (неотрицательная). Так как $z(M_1)=-1$ и $z(M)>-1$ для любой точки $M\neq M_1$, то в точке $M_1=(1, 1)$ функция z имеет строгий локальный минимум (даже абсолютный).

Рассмотрим поведение функции z в произвольной окрестности $U(M_0)$ точки $M_0=(0, 0)$. Если $M=(x, 0)\in U(M_0)$, $x\neq 0$, то $z(M)=x^2>0=z(M_0)$; если же $M=(y, y)\in U(M_0)$, $0<y<1$, то $z(M)=(y^3-1)^4-1<0=z(M_0)$.

Следовательно, точка M_0 — седловая точка функции z.

Итак, если для некоторой окрестности $U(M_0)\subset R^m$ точки $M_0\in R^m$ функция $f\in C^2(U(M_0))$, точка M_0 — критическая точка функции f и $d^2f(M_0)$ — полуопределенная квадратичная форма, то точка M_0 может быть как точкой локального экстремума, так и седловой точкой функции f.

Заметим, что если для некоторой окрестности $U(M_0)\subset R^m$ точки $M_0\in R^m$ функция $f\in C^2(U(M_0))$ и в точке M_0 функция f имеет нестрогий экстремум, то квадратичная форма $d^2f(M_0)$ обязательно будет полуопределенной.

Пример 5. Исследуем на экстремум функцию

$$z=\frac{xy}{1+x^2y^2}.$$

Решение. Так как $\frac{\partial z}{\partial x}=y\cdot\frac{1-x^2y^2}{(1+x^2y^2)^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=x\cdot\frac{1-x^2y^2}{(1+x^2y^2)^2}$, то критическими точками функции z является точка $M_0=(0, 0)$ и все точки $M=(x, y): xy=\pm 1$. Из неравенства $|2xy|\leqslant 1+x^2y^2$ получаем, что $|z|\leqslant 1/2$. В каждой точке линии $xy=1$ имеем $z(x, y)=1/2$; в каждой точке линии $xy=-1$ имеем $z(x, y)=-1/2$. Следовательно, в каждой точке линии $xy=1$ функция z имеет нестрогий максимум, в каждой точке линии $xy=-1$ — нестрогий минимум. Найдем вторые частные производные функции z:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2xy^3\frac{x^2y^2-3}{(1+x^2y^2)^3},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2x^3y\frac{x^2y^2-3}{(1+x^2y^2)^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{1-6x^2y^2+x^4y^4}{(1+x^2y^2)^3}.$$

Если $M=(x, y)$, где $xy=1$ или $xy=-1$, то квадратичная форма $d^2z(M)=-\frac{\operatorname{sign}(xy)}{2}(y^2\,dx^2+x^2\,dy^2+2xy\,dx\,dy)$ полуопределена, как и должно быть в точках нестрогого экстремума.

Квадратичная форма $d^2z(M_0)=2dxdy$ — знакопеременная, следовательно, $M_0=(0, 0)$ — седловая точка функции z.

Определение. Пусть переменные $x_1, x_2, \ldots, x_m$ связаны системой уравнений

$$F_1(x_1, \ldots, x_m)=0,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$F_k(x_1, \ldots, x_m)=0, \qquad k<m,$$

$F_i\in C^1(G)$, $1\leqslant i\leqslant k$, область G принадлежит R^m и точка $x_0=(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)\in G$ такова, что $F_i(x_0)=0$, $1\leqslant i\leqslant k$. Функция $f: G\to R$ имеет *условный максимум* (*минимум*) в *точке* x_0, если существует окрестность $U(x_0)\in G$ точки x_0 такая, что $f(x_0)\geqslant f(x)$ ($f(x_0)\leqslant f(x)$) для всех $x\in U(x_0)$, для которых $F_i(x)=0$, $1\leqslant i\leqslant k$.

(Другими словами, сравниваются между собой значения функции, которые она принимает на множестве тех точек $x=(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, координаты которых удовлетворяют уравнениям связи $F_i(x_1, \ldots, x_m)=0$, $1\leqslant i\leqslant k<m$.)

В дальнейшем предполагаем, что функции f и F_i, $1 \leqslant i \leqslant k < m$, принадлежат классу $C^2(G)$ и ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial x_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_k}{\partial x_1} & \frac{\partial F_k}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_k}{\partial x_m} \end{pmatrix}$$

в каждой точке $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \in G$ равен k. Для определенности положим, что

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_k}(x_0) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_k}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial F_k}{\partial x_k}(x_0) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда в некоторой окрестности $U(M_0)$ точки $M_0 = (x^0_{k+1}, \dots, x^0_m)$ система уравнений $F_i(x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_m) = 0$, $1 \leqslant i \leqslant k < m$, определяет k функций класса $C^2(U(M_0))$ от $(m-k)$ независимых аргументов:

$$x_1 = x_1(x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_m),$$
$$x_2 = x_2(x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_m),$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$x_k = x_k(x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_m).$$

Таким образом, в некоторой окрестности $U(M_0)$ точки M_0 функция f с учетом условий связи $F_i(x) = 0$, $1 \leqslant i \leqslant k < m$, представляет функцию класса $C^2(U(M_0))$ от $(m-k)$ независимых аргументов: $f(x_1, x_2, \dots, x_m) = f(x_1(x_{k+1}, \dots, x_m), \dots, x_k(x_{k+1}, \dots, x_m), x_{k+1}, \dots, x_m) = f^*(x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_m)$. Если $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ есть точка локального условного экстремума функции f при условиях $F_i(x) = 0$, $1 \leqslant i \leqslant k < m$, то точка $(x^0_{k+1}, x^0_{k+2}, \dots, x^0_m)$ есть точка обычного локального экстремума функции $f^*(x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_m)$.

Итак, исследование условного локального экстремума функции f сводится к уже разобранному исследованию обычного локального экстремума некоторой функции меньшего числа переменных.

Дифференциал функции f^* имеет вид:

$$df^* = \sum_{q=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_q} dx_q = \sum_{q=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial x_q} dx_q + \sum_{q=k+1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_q} dx_q,$$

где $dx_1, dx_2, \dots, dx_k$ есть дифференциалы функций $x_1, x_2, \dots, x_k$, определенных системой уравнений $F_i(x) = 0$, $1 \leqslant i \leqslant k < m$. Выраже-

ние этих дифференциалов в виде линейных форм от дифференциалов независимых переменных $dx_{k+1}, dx_{k+2}, \ldots, dx_m$ находятся из системы линейных уравнений: $dF_i=0$, $1 \leqslant i \leqslant k < m$, т. е.

$$\sum_{q=1}^{m} \frac{\partial F_i}{\partial x_q} dx_q = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant k < m.$$

Подставив найденные из этой системы выражения $dx_1, dx_2, \ldots, dx_k$ в $df^* = \sum_{i=q}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_q} dx_q$ получим выражение df^* в виде линейной формы дифференциалов $dx_{k+1}, dx_{k+2}, \ldots, dx_m$. Координатами $(x^0_{k+1}, x^0_{k+2}, \ldots, x^0_m)$ стационарной точки M_0 функции f^* будут такие значения $x^0_{k+1}, x^0_{k+2}, \ldots, x^0_m$, что в точке $x_0=(x_1(x^0_{k+1}, \ldots, x^0_m), \ldots, x_k(x^0_{k+1}, \ldots, x^0_m)$ все коэффициенты этой линейной формы равны нулю.

Чтобы окончательно решить вопрос о поведении функции в окрестности точки M_0, нужно исследовать $d^2f^*(M_0)$. Второй дифференциал функции f^* имеет вид

$$d^2f^* = \sum_{q,p=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_p \partial x_q} dx_q dx_p + \sum_{q=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial x_q} d^2x_q,$$

где $d^2x_1, \ldots, d^2x_k$ есть вторые дифференциалы функций $x_1, x_2, \ldots, x_k$, определенных системой уравнений $F_i(x)=0$, $1 \leqslant i \leqslant k < m$. (Обратите внимание, что $d^2x_{k+1}=\ldots=d^2x_m=0$, так как $x_{k+1}, \ldots, x_m$ независимые переменные.) Выражение вторых дифференциалов $d^2x_1, d^2x_2, \ldots, d^2x_k$ в виде квадратичных форм дифференциалов $dx_{k+1}, \ldots, dx_m$ находятся из системы

$$\begin{cases} \sum_{q=1}^{m} \frac{\partial F_i}{\partial x_q} dx_q = 0, \\ \sum_{p,q=1}^{m} \frac{\partial^2 F_i}{\partial x_p \partial x_q} dx_p dx_q + \sum_{q=1}^{k} \frac{\partial F_i}{\partial x_q} d^2x_q = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant k < m. \end{cases}$$

Подставляя в выражение

$$d^2f^* = \sum_{q,p=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_p \partial x_q} dx_p dx_q + \sum_{q=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial x_q} d^2x_q$$

$dx_1, dx_2, \ldots, dx_k$ в виде линейных форм и $d^2x_1, d^2x_2, \ldots, d^2x_k$ в виде квадратичных форм от $dx_{k+1}, dx_{k+2}, \ldots, dx_m$, получим выражение d^2f^* в виде квадратичной формы от $dx_{k+1}, dx_{k+2}, \ldots, dx_m$. Если полученная форма знакоопределенная, то точка $M_0=(x^0_{k+1}, \ldots, x^0_m)$ есть точка локального экстремума функции f^*

и, следовательно, точка $x_0=(x_1(x_{k+1}^0, \ldots, x_m^0), \ldots, x_k(x_{k+1}^0, \ldots, x_m^0), x_{k+1}^0, \ldots, x_m^0)$ есть точка локального условного экстремума функции f при условиях $F_i(x)=0$, $1 \leqslant i \leqslant k < m$.

Пример 6. Найдем точки условного экстремума функции $z=4x-y$, если $x^2-y^2=15$.

Решение. В этом примере $F(x, y)=x^2-y^2-15$, матрица $\left(\frac{\partial F}{dx}; \frac{\partial F}{\partial y}\right)$ есть $(2x; -2y)$. Из условия $x^2-y^2=15$ следует, что в множестве точек, координаты которых удовлетворяют этому условию, не содержится точек с нулевой координатой x, следовательно, всюду на этом множестве минор $2x$ матрицы $(2x; -2y)$ отличен от нуля. Поэтому условие связи определяет всюду на этом множестве функцию $x=x(y)$. Анализируем теперь функцию z как функцию одного аргумента $y: z^*(y)=z(x(y), y)=4x(y)-y$. Из уравнения $x^2-y^2=15$ получаем, что $xdx-ydy=0$, откуда $dx=\frac{y}{x}dy$ и, следовательно, $dz^*=4dx-dy=\left(\frac{4y}{x}-1\right)dy$. Итак, для координат критической точки функции $z^*(y)$ имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{4y}{x}-1=0, \\ x^2-y^2=15. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим, что возможными точками локального условного экстремума функции $z=4x-y$ при условии $x^2-y^2=15$ являются точки $M_1(4, 1)$ и $M_2(-4, -1)$.

Теперь надо рассмотреть $d^2z^*(y)$ в точках $x=4$, $y=1$ и $x=-4$, $y=-1$. Так как $z^*(y)=4x(y)-y$, то $d^2z^*(y)=4d^2x$, а из условия связи $x^2-y^2=15$ получаем, что $xdx-ydy=0$ и $xd^2x+dx^2-dy^2=0$. Следовательно, в точке $x=4$, $y=1$ имеем

$$\begin{cases} 4dx-dy=0, \\ 4d^2x+dx^2-dy^2=0, \end{cases}$$

откуда $d^2z^*(y)=4d^2x=\frac{15}{16}dy^2$ и точка $M_1(4, 1)$ является точкой локального условного минимума функции $z=4x-y$ при условии $x^2-y^2=15$, причем $z(M_1)=15$.

Точно так же получим, что в точке $x=-4$, $y=-1$ $d^2z=-\frac{15}{16}dy^2$, т. е. точка $M_2(-4, -1)$ является точкой локального условного максимума функции $z=4x-y$ при условии $x^2-y^2=15$, причем $z(M_2)=-15$.

Замечание. В данном примере значение функции z в точке локального условного минимума больше, чем в точке локального

условного максимума; это объясняется тем, что множество, на котором рассматриваются значения функции z, не является связным.

На практике нахождение точек условного экстремума функции $f=f(x_1, \ldots, x_m)$ с условиями связи $F_i(x_1, \ldots, x_m)=0$, $1 \leqslant i \leqslant k < m$, методом дифференцирования сложных и неявных функций часто оказывается весьма громоздким. Более простые вычисления получаются, если применить следующий метод.

Метод множителей Лагранжа. Пусть область G принадлежит R^m, функции $f: G \to R$ и $F_i: G \to R$, $1 \leqslant i \leqslant k < m$, принадлежат классу $C^2(G)$ и ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_k}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_k}{\partial x_m} \end{pmatrix}$$

во всех точках $x_0 \in G$ равен k.

Составим функцию Лагранжа

$$L(x, \lambda) = L(x_1, x_2 \ldots x_m, \lambda_1, \ldots, \lambda_k) = f(x) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i F_i(x).$$

Точка $x_0 = (x_1^0, \ldots, x_m^0)$ может быть точкой условного экстремума функции f при условиях $F_i(x)=0$, $1 \leqslant i \leqslant k < m$, только тогда, когда существуют числа $\lambda_1^0, \lambda_2^0, \ldots, \lambda_k^0$ такие, что точка $M_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0, \lambda_1^0, \lambda_2^0, \ldots, \lambda_k^0)$ является критической точкой функции Лагранжа $L(x, \lambda)$. При этом числа $\lambda_1^0, \lambda_2^0, \ldots, \lambda_k^0$ называются множителями Лагранжа, соответствующими точке x_0. Дальнейшее исследование поведения функции f в выделенных точках возможного локального условного экстремума проводится анализом второго дифференциала функции $L(x, \lambda)$ с учетом условий связи. Если выражение $d^2L(x, \lambda)$ в точке M_0 есть знакоопределенная квадратичная форма, то и с учетом условий связи выражение для $d^2L(x, \lambda)$ останется таковым, т. е. экстремальной точке функции $L(x, \lambda)$ соответствует точка условного экстремума функции f при условиях $F_i(x)=0$, $1 \leqslant i \leqslant k < m$. Обратим внимание, что если выражение $d^2L(x, \lambda)$ есть знакопеременная квадратичная форма, то с учетом условий связи выражение d^2L уже может быть знакоопределенной квадратичной формой; т. е. не всегда точка локального экстремума функции f при условиях $F_i(x)=0$, $1 \leqslant i \leqslant k < m$ соответствует экстремальной точке функции Лагранжа $L(x, \lambda)$.

Пример 7. Найдем экстремальные значения функции $z = x^2 - y^2$ на прямой $2x - y - 3 = 0$.

Решение. Запишем функцию Лагранжа

$$L(x, y, \lambda) = x^2 - y^2 + \lambda(2x - y - 3).$$

Координаты критических точек функции $L(x, y, \lambda)$ находятся из системы

$$\begin{cases} 2x+2\lambda=0, \\ -2y-\lambda=0, \\ 2x-y-3=0, \end{cases}$$

отсюда получаем $x=2$, $y=1$, $\lambda=-2$. В точке $(2, 1, -2)$ выражение $d^2L(x, y, \lambda)$, равное $2dx^2-2dy^2+2dxd\lambda-dyd\lambda$, есть знакопеременная квадратичная форма, следовательно, точка $(2, 1, -2)$ не экстремальная точка функции $L(x, y, \lambda)$, но эта точка может быть экстремальной точкой функции $z=x^2-y^2$ при условии связи. В самом деле, из условия связи имеем $2dx=dy$. Учитывая это соотношение, для d^2L получаем выражение $2dx^2-8dx^2=-6dx^2$, которое есть отрицательно определенная квадратичная форма, и, следовательно, точка $(2, 1)$ является точкой локального максимума функции $z=x^2-y^2$ при условии связи $2x-y-3=0$.

Пример 8. Исследуем, имеет ли функция

$$u(x, y, z)=xy+xz+yz$$

условный экстремум в точке $M_0(1, 1, 1)$, если

$$2x^3y^2z+4x^2+5y^2+6z^2-17=0.$$

Решение. Напишем функцию Лагранжа

$$L(x, y, z, \lambda)=xy+xz+yz+\lambda(2x^3y^2z+4x^2+5y^2+6z^2-17).$$

Координаты x, y, z, λ критической точки функции $L(x, y, z, \lambda)$ должны удовлетворять системе

$$\begin{cases} y+z+6\lambda x^2y^2z+8\lambda x=0, \\ x+z+4\lambda x^3yz+10\lambda y=0, \\ x+y+2\lambda x^3y^2+12\lambda z=0, \\ 2x^3y^2z+4x^2+5y^2+6z^2-17=0. \end{cases}$$

Проверка показывает, что $x=1$, $y=1$, $z=1$, $\lambda=-1/7$ есть решение этой системы. Следовательно, в точке $M_0=(1, 1, 1)$ возможен условный экстремум функции $u(x, y, z)$ с условием $2x^3y^2z+4x^2+5y^2+6z^2-17=0$, причем соответствующий множитель Лагранжа λ равен $-1/7$. Находим второй дифференциал функции Лагранжа

$$d^2L(x, y, z, \lambda)=2dxdy+2dxdz+2dydz+d\lambda d(2x^3y^2z+4x^2+5y^2+6z^2-17).$$

В силу условий связи

$$d(2x^3y^2z+4x^2+5y^2+6z^2-17)=6x^2y^2zdx+4yx^3zdy+2x^3y^2dz+8xdx+10ydy+12zdz=0,$$

поэтому при $x=1$, $y=1$, $z=1$ имеем

$$6dx+4dy+2dz+8dz+10dy+12dz=0, \text{ откуда } dz=-dx-dy,$$

и, следовательно, в точке $(1, 1, 1, -1/7)$

$$d^2L=2dxdy-2dx^2-2dxdy+2dy^2-2dxdy=-2(dx^2+dxdy+dy^2).$$

Так как $d^2L(x, y, z, \lambda)$ в точке $(1; 1; 1; -1/7)$ является отрицательно определенной квадратичной формой, то функция $L(x, y, z, \lambda)$ имеет в точке $(1; 1; 1; -1/7)$ локальный максимум и, следовательно, точка $M_0(1, 1, 1)$ есть точка условного максимума функции $u=xy+yz+zx$ при условии $2x^3y^2+4x^2+5y^2+6z^2-17=0$.

Иногда можно выяснить характер точек, полученных методом Лагранжа, не прибегая к анализу второго дифференциала функции Лагранжа в этой точке.

Пример 9. Найдем точки условного экстремума функции

$$z=2x^3+3a^2x+2y^3+3a^2y,$$

если $x^2+y^2=a^2$ $(a>0)$.

Решение. Запишем функцию Лагранжа

$$L(x, y, \lambda)=2x^3+3a^2x+2y^3+3a^2y+\lambda(x^2+y^2-a^2).$$

Координаты x, y, λ критической точки функции $L(x, y, \lambda)$ должны удовлетворять системе

$$\begin{cases} 6x^2+3a^2+2\lambda x=0, \\ 6y^2+3a^2+2\lambda y=0, \\ x^2+y^2-a^2=0. \end{cases}$$

Отсюда получаем две критические точки $(a/\sqrt{2}, a/\sqrt{2}, -3\sqrt{2}a)$ и $(-a/\sqrt{2}, -a/\sqrt{2}, 3/\sqrt{2}a)$.

Множество $K\subset R^2$, $K=\{(x, y): x^2+y^2=a^2\}$ есть компактное связное множество. Следовательно, непрерывная функция z на этом множестве должна принимать максимальное и минимальное значения. Из предыдущего рассмотрения видно, что эти значения функция z принимает в одной из точек $(a/\sqrt{2}, a/\sqrt{2})$ и $(-a/\sqrt{2}, -a/\sqrt{2})$, так как в других точках множества K функция z заведомо не имеет экстремума. Так как $z(a/\sqrt{2}, a/\sqrt{2})=4a\sqrt[3]{2}$, $z(-a/\sqrt{2}, -a/\sqrt{2})=-4a\sqrt[3]{2}$ и K — связно, то точка $M_1=(a/\sqrt{2}, a/\sqrt{2})$ — точка условного максимума, а точка $M_2=(-a/\sqrt{2}, -a/\sqrt{2})$ — точка условного минимума функции $z=2x^3+3a^2x+2y^3+3a^2y$ при условии $x^2+y^2=a^2$.

Пример 10. На сфере $S=\{(x, y, z): x^2+y^2+z^2=a^2\}$ расположены три материальные точки $P_1=(x_1, y_1, z_1)$, $P_2=(x_2, y_2, z_2)$, $P_3=(x_3, y_3, z_3)$ с массами m_1, m_2, m_3. При таком положении точки

$P=(x, y, z)$ на сфере $x^2+y^2+z^2=a^2$ сумма $\sum_{i=1}^{3} \| P-P_i \|^2 \cdot m_i$ — момент инерции данной системы точек относительно точки P — будет минимальной?

Решение. Необходимо найти условный минимум функции

$$u(x, y, z)=\sum_{i=1}^{3} m_i [(x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2],$$

если $x^2+y^2+z^2=a^2$.

Запишем функцию Лагранжа

$$L(x, y, z, \lambda)=\sum_{i=1}^{3} m_i [(x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2]+$$
$$+\lambda(x^2+y^2+z^2-a^2).$$

Координаты x, y, z, λ критической точки функции $L(x, y, z, \lambda)$ должны удовлетворять системе

$$\begin{cases} 2m_1(x-x_1)+2m_2(x-x_2)+2m_3(x-x_3)+2\lambda x=0, \\ 2m_1(y-y_1)+2m_2(y-y_2)+2m_3(y-y_3)+2\lambda y=0, \\ 2m_1(z-z_1)+2m_2(z-z_2)+2m_3(z-z_3)+2\lambda z=0, \\ x^2+y^2+z^2=a^2. \end{cases}$$

Эта система имеет два решения:

$$\tilde{x}_{1,2}=\frac{m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3}{m_1+m_2+m_3+\lambda_{1,2}}, \quad \tilde{y}_{1,2}=\frac{m_1y_1+m_2y_2+m_3y_3}{m_1+m_2+m_3+\lambda_{1,2}}, \quad \tilde{z}_{1,2}=$$
$$=\frac{m_1z_1+m_2z_2+m_3z_3}{m_1+m_2+m_3+\lambda_{1,2}},$$

где

$$\lambda_{1,2}=\pm\sqrt{a^2\sum_{i=1}^{3} m_i^2+2\sum_{i,j=1,\ i\neq j}^{3} m_im_j(x_ix_j+y_iy_j+z_iz_j)}-$$
$$-(m_1+m_2+m_3).$$

Следовательно, точкой P может быть одна из двух точек: $P_0=(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1, \tilde{z}_1)$ и $(\tilde{x}_2, \tilde{y}_2, \tilde{z}_2)$, а именно та, для которой значение функции $u(P)$ меньше, в зависимости от конкретных чисел x_i, y_i, z_i, m_i, $1\leqslant i\leqslant 3$. В общем виде это сравнение здесь не проводим из-за громоздкости выкладок.

Выделение точек условного экстремума входит составной частью в решение задачи нахождения наибольшего и наименьшего значений функции $f: E\to R$, $E\subset R^m$, на множестве $E_1\subset E$. Действительно, если эти значения функция f принимает во внутренней

точке x_0 множества E_1, то точка x_0 есть точка обычного локального экстремума функции f; если наибольшее или наименьшее значение функция f принимает в граничной точке x_1 множества E_1, то точка x_1 есть точка условного локального экстремума функции f при условии, что рассматриваются только граничные точки множества E_1.

Пример 11. Найдем наибольшее и наименьшее значения функции

$$u = x^2 - 2ax + y^2 - 2ay + z^2 - 2az \quad (a > 0)$$

в полушаре

$$D = \{(x,\ y,\ z) : x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4a^2,\ z \geqslant 0\}.$$

Решение. Так как непрерывная функция u рассматривается на компакте, то существуют точки $M_0 = (x_0,\ y_0,\ z_0)$ и $\widetilde{M}_0 = (\widetilde{x}_0,\ \widetilde{y}_0,\ \widetilde{z}_0)$ такие, что

$$u(M_0) = \max_{M \in D} u(M), \quad u(\widetilde{M}_0) = \min_{M \in D} u(M).$$

Если эти точки лежат внутри полушара, то их координаты должны удовлетворять системе

$$\begin{cases} 2x - 2a = 0, \\ 2y - 2a = 0, \\ 2z - 2a = 0. \end{cases}$$

Отсюда видно, что внутри полушара есть только одна возможная экстремальная точка $M_1 = (a,\ a,\ a)$.

Возможную экстремальную точку на полусфере

$$S : \{(x,\ y,\ z) : x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2,\ z > 0\}.$$

Ищем как точку условного экстремума функции

$$u = x^2 - 2ax + y^2 - 2ay + z^2 - 2az$$

при условии

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2, \quad z > 0.$$

Запишем функцию Лагранжа

$$L(x,\ y,\ z,\ \lambda) = x^2 - 2ax + y^2 - 2ay + z^2 - 2az + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 4a^2).$$

Координаты критической точки функции $L(x,\ y,\ z,\ \lambda)$ должны удовлетворять системе

$$\begin{cases} 2x - 2a + 2\lambda x = 0, \\ 2y - 2a + 2\lambda z = 0, \\ 2z - 2a + 2\lambda z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 - 4a^2 = 0. \end{cases}$$

Отсюда получаем, что возможной экстремальной точкой на полусфере S является точка $M_2=(2a/\sqrt{3},\ 2a/\sqrt{3},\ 2a/\sqrt{3})$.

Далее ищем возможную экстремальную точку $M_3=(x,\ y,\ 0)$ на круге $x^2+y^2\leqslant 4a^2$, $z=0$. Так как в точках этого круга

$$u(x,\ y,\ z)=u(x,\ y,\ 0)=x^2-2ax+y^2-2ay,$$

то координаты экстремальной точки, лежащей внутри этого круга, должны удовлетворять системе

$$\begin{cases} 2x-2a=0, \\ 2y-2a=0, \\ z=0. \end{cases}$$

Отсюда получаем $M_3=(a,\ a,\ 0)$.

Наконец, осталось найти возможную экстремальную точку $M_4=(x,\ y,\ 0)$ на окружности $x^2+y^2=4a^2$, $z=0$.

Запишем функцию Лагранжа

$$L(x,\ y,\ \lambda)=x^2-2ax+y^2-2ay+\lambda(x^2+y^2-4a^2).$$

Координаты критической точки этой функции должны удовлетворять системе

$$\begin{cases} 2x-2a+2\lambda x=0, \\ 2y-2a+2\lambda y=0, \\ x^2+y^2=4a^2. \end{cases}$$

Отсюда получаем две возможные экстремальные точки на окружности:

$$x^2+y^2=4a^2,\ z=0:\ M_4=(\sqrt{2}\,a,\ \sqrt{2}\,a,\ 0)\ \text{и}\ M_5=(-\sqrt{2}\,a,\ -\sqrt{2},\ 0).$$

Итак, наибольшее и наименьшее значения в полушаре D функция u может достигать только в одной из пяти точек:

$$M_1=(a,\ a,\ a),\ M_2=\left(\frac{2a}{\sqrt{3}},\ \frac{2a}{\sqrt{3}},\ \frac{2a}{\sqrt{3}}\right),\ M_3=(a,\ a,\ 0),\ M_4=$$
$$=(\sqrt{2}\,a,\ \sqrt{2}\,a,\ 0),\ M_5=(-\sqrt{2}\,a,\ -\sqrt{2},\ 0).$$

Так как

$$u(M_1)=-3a^2,\ u(M_2)=-4(\sqrt{3}-1)a^2,\ u(M_3)=-2a^2,\ u(M_4)=$$
$$=-4(\sqrt{2}-1)a^2,\ u(M_5)=4a^2(\sqrt{2}+1),$$

то

$$\max_{M\in D} u(M)=u(M_5)=4a^2(\sqrt{2}+1),$$

$$\min_{M\in D} u(M)=u(M_1)=-3a^2.$$