Задачи

Найти частные производные указанного порядка от следующих функций:

1. $u=\cos(x+y)$; $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.
2. $u=\frac{1}{ax+by}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.
3. $u=\sin\frac{x}{y}$; $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$, $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}$.
4. $u=\ln(1+2x+3y)$; $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}$.
5. $u=e^{x^2+y^2+z^2}$; $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}$, $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$.
6. $u=x^y+y^x$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

Найти якобиан отображений $h: R^m \to R^m$, если:

7. $h: x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi;\quad h:(r,\ \varphi)\to(x,\ y)$.
8. $h:\ u=\frac{z}{y^2},\ v=\frac{z}{x},\ w=z;\quad h:(x,\ y,\ z)\to(u,\ v,\ w)$.
9. $h: u=\frac{z}{x^2+y^2},\ v=xy,\ w=\frac{y}{x};\quad h:(x,\ y,\ z)\to(u,\ v,\ w)$.
10. $h: x=\xi\eta\zeta,\ y=\xi\eta-\xi\eta\zeta,\ z=\eta-\xi\eta;\ h:(\xi,\ \eta,\ \zeta)\to(x,\ y,\ z)$.
11. $h: x=r\cos\varphi\cos\psi,\ y=r\sin\varphi\cos\psi,\ y=r\sin\psi;\quad h:(r,\ \varphi,\ \psi)\to$ $\to(x,\ y,\ z)$.
12. $h: u=xy,\ v=\frac{y}{x};\ h:(u,\ v)\to(x,\ y)$.
13. $h: u=x^2+z^2,\ v=y^2+z^2,\ w=x^2+y^2;\quad h:(u,v,w)\to(x,\ y,\ z)$.
14. $h: u=x+y+z,\ uv=y+z,\ uvw=z;\quad h:(u,\ v,\ w)\to(x,\ y,\ z)$.
15. $h: x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi,\ z=u^2;\quad h:(x,\ y,\ z)\to(r,\ \varphi,\ u)$.

Написать матрицу производной отображения φ в каноническом базисе, если:

16. $\varphi:(u,\ v)\to(x,\ y,\ z);\quad x=uv,\ y=u^2+v^2,\ z=u^2-v^2$.
17. $\varphi:(u,\ v)\to(x,\ y);\quad x=u\cos v,\ y=u\sin v$.
18. $\varphi:(u,\ v,\ w)\to(x,\ y);\quad x=u^2+v^2+w^2,\ y=u+v+w$.
19. $\varphi:(u,\ v)\to x;\quad x=\frac{u}{v}$.
20. $\varphi: u\to(x,\ y);\quad x=u\,\mathrm{tg}\,u,\ y=u\sin u$.
21. $\varphi:(u,\ v,\ w)\to(x,\ y,\ z);\quad x=u\ln\frac{v}{w},\ y=v\ln\frac{w}{u},\ z=w\ln\frac{u}{v}$.

Написать матрицу производной отображения $\varphi=h\circ g$ в каноническом базисе, если:

22. $g: x=u^2-w^2,\ y=u^2-v^2;\quad h: \xi=xy,\ \eta=\frac{x}{y},\ \zeta=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}.$

23. $g: x=u^2+v^2+w^2;\quad h: \xi=x^2,\ \eta=x^4.$

24. $g: x=u\cos v,\ y=u\sin v,\ z=w;\quad h: \xi=x^2-yz,\ \eta=z^2-xy.$

25. $g: x=\sin u,\ y=\cos u,\ z=e^u;\quad h: \zeta=\operatorname{arctg} xyz.$

26. $g: x=u^v;\quad h: \xi=\sin x,\ \eta=\cos x,\ \zeta=\operatorname{tg} x.$

27. $g: x=uv,\ y=u^2-v^2;\quad h: \xi=\operatorname{arctg}\frac{x}{y},\ \eta=\ln(x^2+y^2),\ \zeta=x-y.$

Написать матрицу производной отображения $\varphi=h\circ g$ в каноническом базисе в точке M_0, если:

28. $g: u=\operatorname{arctg}(y^2-2x)\quad =\operatorname{arc}\ \frac{y}{x};$

$h: \xi=u^2+v^2,\ \eta=u^2-\quad M_0: x_0=1,\ y_0=\sqrt{3}.$

29. $g: u=xyz,\ v=x^2+y^2+z^2;$

$h: \xi=uv,\ \eta=\frac{u}{v},\ \zeta=\frac{v}{u^2+v^2};\quad M_0: x_0=1,\ y_0=0,\ z_0=1.$

30. $g: u=x^2+y^2+z^2;$

$h: \xi=\arcsin\frac{1}{u};\quad M_0: x_0=1,\ y_0=2,\ z_0=3.$

31. $g: u=\ln x, v=x^2,\ w=x+\ln x;$

$h: \xi=\frac{u}{v},\ \eta=w+u;\quad M_0: x_0=1.$

32. Написать матрицы отображений $\frac{\partial\varphi}{\partial X}$ и $\frac{\partial\varphi}{\partial Y}$ в каноническом базисе, где

$$\varphi: X\times Y\to(u,\ v),\ X=(x_1,\ x_2),\ Y=(y_1,\ y_2,\ y_3),$$

если:

а) $u=x_1^2+x_2^2+y_1^2+y_2^2-y_3^2,$
$v=x_1+x_2-y_1y_2y_3;$

б) $u=y_1\sin x_1+y_2\sin x_2+y_3\cos(x_1-x_2),$
$v=y_2\cos(x_1x_2)+y_1\sin(x_1^2-x_2^2)+y_3\cos(x_1^2+x_2^2);$

в) $u=y_1\operatorname{arctg}\frac{x_1}{x_2}+(y_2-y_3)\ln(x_1^2+x_2^2),$

$v=y_2\left(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right)+y_1y_3\ln\frac{x_1}{x_2}.$

33. Проверить, что в точке $M(1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1)$ соотношения

$x_1^2+x_2^2+y_1^2+y_2^2+y_3^2-5=0,$

$x_1-x_2+y_1^3-y_2^3+y_3^3-1=0,$

$x_1^3+2x_2^3+y_2y_3-4=0.$

не удовлетворяют условиям теоремы существования отображения $\varphi: (y_3, y_2) \to (x_1, x_2, y_1)$, но удовлетворяют условиям существования отображения $\varphi: (x_1, x_2) \to (y_1, y_2, y_3)$.

34. Проверить, что данные соотношения однозначно определяют отображение $\varphi: X \to Y$ в окрестности точки M_0, если:

а) $x_1y_1 + x_2y_2 - y_3y_2 - 1 = 0,$
$(x_2 - x_1)(y_2 + y_1) - y_1y_2y_3 - 1 = 0,$
$(x_1^2 + x_2^2)(y_3^2 - y_1^2) + y_1y_2 = 0,$
$X: (x_1, x_2),\ Y: (y_1, y_2, y_3),$
$M_0(x_1^0, x_2^0, y_1^0, y_2^0, y_3^0),$
$x_1^0 = 1,\ x_2^0 = 2,\ y_1^0 = 1,\ y_2^0 = 0,\ y_3^0 = 1;$

б) $\sin(\pi x_1y_1) + \sin(\pi x_2y_2) + \sin(\pi x_3y_3) = 0,$
$\cos\frac{\pi}{2}(x_1 - y_2) + \cos\frac{\pi}{2}(x_2 - y_1) + \cos\frac{\pi}{2}(x_3 - y_1) - 2 = 0,$
$X: (x_1, x_2, x_3),\ Y: (y_1, y_2),$
$M_0(x_1^0, x_2^0, x_3^0, y_1^0, y_2^0),$
$x_1^0 = 0,\ x_2^0 = 1,\ x_3^0 = 0,\ y_1^0 = 1,\ y_2^0 = 0;$

в) $\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x_1y_1}{x_2y_2} - x_1x_2y_1y_2 = 0,$
$x_2^2y_1^2 - x_1^2y_2^2 - \frac{1}{x_1y_1} - \frac{4}{x_2y_2} = 0,$
$X: (x_1, x_2),\ Y: (y_1, y_2),$
$M_0(x_1^0, x_2^0, y_1^0, y_2^0),$
$x_1^0 = 1,\ x_2^0 = 3,\ y_1^0 = 1/2,\ y_2^0 = 1/16.$

Найти дифференциалы первого и второго порядков от следующих функций (x, y и z — независимые переменные):

35. $u = x^2y^2$.

36. $u = xy + yz + zx$.

37. $u = \cos(e^xy)$.

38. $u = x^y + y^x$.

39. $u = \ln xyz,\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0$.

40. $u = \operatorname{arctg}\frac{xy}{z}$.

41. Найти значение первого дифференциала функции u в точке M_0 на векторе смещения h, если:

а) $u = \arcsin xy,\ M_0(1/2, 1),\ h = (0,5;\ 0,1)$;

б) $u = x^3y - xy^3,\ M_0(1, 2),\ h = (-0,5;\ 0,8)$;

в) $u = x^{2y},\ M_0(4, 1),\ h = (0,1;\ 0,2)$;

г) $u = \sqrt[3]{4x^2 + y^2},\ M_0(1, 2),\ h = (-0,2;\ 0,3)$;

д) $u = x\sqrt{1+y^3}$, $M_0(2, 2)$, $h = (0;\ 0,5)$;

е) $u = \cos(x - y^2)$, $M_0\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$, $h = (0,1;\ 0)$.

Найти дифференциалы первых двух порядков сложной функции u, если φ — дважды дифференцируемая функция:

42. $u = \varphi(t)$, $t = x^2 - y^2$.

43. $u = \psi(t)$, $t = xyz$.

44. $u = \varphi(t)$, $t = xy + yz + zx$.

45. $u = \varphi(t)$, $t = x^2 + y^2 + z^2$.

46. $u = \varphi(\xi, \eta)$, $\xi = x^2 + y^2$, $\eta = x^2 - y^2$.

47. $u = \varphi(\xi, \eta)$, $\xi = xy$, $\eta = \frac{x}{y}$.

48. $u = \varphi(\xi, \eta)$, $\xi = x^2 + y^2$, $\eta = xy$.

49. $u = \varphi(\xi, \eta)$, $\xi = \frac{x}{y}$, $\eta = \frac{y}{x}$.

50. $u = \varphi(x + y,\ x^2 + y^2)$.

51. $u = \varphi(xy,\ yz)$.

52. $u = \varphi\left(\frac{x^2}{y}, \frac{y}{x^2}\right)$.

53. $u = \varphi(\xi, \eta, \zeta)$, $\xi = xy$, $\eta = x - y$, $\zeta = x + y$.

54. $u = \varphi(\xi, \eta, \zeta)$, $\xi = x^2$, $\eta = y^2$, $\zeta = z^2$.

55. $u = \varphi(2x,\ 3y,\ 4z)$.

56. $u = \varphi(x + y + z,\ x^2 + y^2 + z^2)$.

57. $u = \varphi(x + z^2,\ y + x^2,\ z + y^2)$.

58. $u = \varphi(\sin xz,\ \sin yz,\ \sin xy)$.

59. $u = \varphi(xe^z,\ ye^z,\ ze^{x-y})$.

60. $u = \varphi(x^2 + y^2,\ y^2 + z^2,\ x^2 + z^2)$.

Проверить, что данное уравнение однозначно определяет функцию $y(x)$ в окрестности точки $M(x_0, y_0)$:

61. $x^2 + yx + y^2 = 3$, $x_0 = y_0 = 1$.

62. $xy + \ln xy = 1$, $x_0 = 2$, $y_0 = 1/2$.

63. $e^{x+y} + y - x = 0$, $x_0 = \frac{1}{2}$, $y_0 = -1/2$.

Проверить, что данное уравнение однозначно определяет функцию $z(x, y)$ в окрестности точки $M(x_0, y_0, z_0)$:

64. $x + y + z = \sin xyz$, $x_0 = y_0 = z_0 = 0$.

65. $x^2z^3 + y^3z^2 + z^2x^3 = 8$, $x_0 = 1$, $y_0 = -1$, $z_0 = 2$.

66. $x^y + y^z + z^x = 3$, $x_0 = y_0 = z_0 = 1$.

Предполагая, что точка (x_0, y_0, z_0) такова, что в ее некоторой окрестности однозначно определена дважды непрерывно диффе-

ренцируемая функция $z(x, y)$, найти значения указанных производных в этой точке:

67. $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, если $x^2+y^2+z^2=R^2$.

68. $\frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, если $\operatorname{arctg}\frac{z}{x}=z+x+y$.

69. $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, если $x+y+z=\ln xyz$, $x>0$, $y>0$, $z>0$.

70. $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, если $\ln(xy+yz)=x^2+y^2+z^2-2$.

71. $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, если $x+y+z=\cos xyz$.

72. $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, если $x^y+y^z=3$.

73. $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, если $x=u^2-v^2$, $y=uv$, $z=u+2v$,

74. $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, если $x=\operatorname{arctg}\frac{u}{v}$, $y=\ln(u^2+v^2)$, $z=u-v$.

75. $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, если $x=e^u \sin v$, $y=e^u \cos v$, $z=uv$.

Найти частные производные первого порядка функции $z=z(x, y)$, заданной неявно, предварительно найдя ее первый дифференциал:

76. $z^4+zx^3+zy^3=a^4$.

77. $xyz=x^2+y^2+z^2$.

78. $\frac{z}{x^2+y^2}=\ln(x+y+z)$.

79. $z\cos x+y\cos z+x\cos y=3$.

80. $z(1+x^2)=y(1+z^4)$.

Найти $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{dz}{dx}$, если:

81. $x^2=z^2+y^2$, $az+by+cz=1$.

82. $x^3+y^2-3z+a=0$, $z^2-2y^2-x+6=0$.

83. $x^3+y^3+z^3-3xyz=0$, $x+y+z=a$.

84. $\cos x+\cos y+\cos z=a$, $x^3+y^3+z^3=b$.

85. $\sin^2 y-\cos x\sin z=0$, $2x-y\operatorname{tg} z=0$.

86. Найти $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \frac{du}{dx}$, если

$$u^2+x^2+y^2+z^2=a^2,$$

$$\ln xy+\frac{y}{x}=b^2,$$

$$\ln\frac{z}{x}+zx=c^2.$$

Найти первые и вторые производные функций $z(x, y)$ и $u(x, y)$, если:

87. $x+y+z+u=a$,
$x^3+y^3+z^3+u^3=b$.

88. $x+y+z+u=a$,
$xyzu=b$.

89. Найти $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$, если
$x(u^2+v^2)-uy=2, \quad xv-y(u^2+v^2)=1$.

90. Найти $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ в точке $x=-1, \ y=1$ ($u=2$, $v=-2$), если
$xuv+yxu+vxy+uvy=0$,
$x^2+y^2+u^2+v^2=10$.

91. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z=\frac{x+u}{y-u}$, а $u(x, y)$ находится из уравнения $ux-u^3+y^3=8$.

Найти первые и вторые производные функций $y(x)$ и $z(x)$ в точке x_0, если:

92. $x^2-y^2+z^2=1$,
$y^2-2x+z=0, \quad x_0=1 \ (y_0=1, \ z_0=1)$.

93. $7x^2+2y-3z^2=-9$,
$4x+2y^2-2z^3+4=0, \quad x_0=1 \ (y_0=-2, \ z_0=2)$.

94. Найти $\frac{dz}{dx}$, если $z=x^2+y^2$, где $y=y(x)$ есть решение уравнения $1+x+y^2=e^{x+y}$.

Найти первый и второй дифференциалы функции $z=z(x, y)$, заданной неявно:

95. $x^2+zx+z^2+y=0$.

96. $x^3+y^3-3xyz-z^3=1$.

97. $2\ln(xyz)=x^2+y^2-z^2-1, \quad x>0, \ y>0, \ z>0$.

98. $x^4+y^4+z^4=4xyz$.

99. $x=u\cos v, \ y=u\sin v, \ z=uv$.

100. $x=u+\ln v, \ y=v-\ln u, \ z=2u+v$.

101. $x=ue^{u+v}, \ y=ue^{u-v}, \ z=u^2+v^2$.

102. Найти первые и вторые дифференциалы функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$, если $xu+yv=1$, $x+y+u+v=0$.

Найти второй дифференциал в точке $M_0(x_0, y_0)$, $z(M_0)=z_0$ функции $z(x, y)$, заданной неявно, если:

103. $xz^5+y^3z-x^3=0, \quad M_0=(1, 0), \ z_0=1$.

104. $5x^2+5y^2+5z^2-2xy-2yz-2xz-72=0, \quad M_0=(1, 1), \ z_0=4$.

105. $2x^2+2y^2+z^2+8xz-z+8=0, \quad M_0=(-2, 0), \ z_0=1$.

106. $2x^2+2y^2+z^2+4xz-z-8=0, \quad M_0=(0,2), \; z_0=1.$

107. $x=\cos u \sin v, \; y=\cos u \cos v, \; z=\sin u,$

$M_0=(\sqrt{6}/4, \; 1/2\sqrt{2}), \; z_0=1/\sqrt{2}, \; u_0=\pi/4, \; v_0=\pi/3.$

Найти вторые дифференциалы функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$, если:

108. $xu+yv=0, \; uv-xy=5, \quad M_0=(-1,-1), \; u_0=2, \; v_0=2.$

109. $x\sin u+v\sin y=\frac{\pi}{4}, \; u\cos x+y\cos v=\frac{\pi}{6}+x,$

$M_0=(0, \pi/6), \quad u_0=\pi/6, \quad v_0=\pi/2.$

Найти указанные производные функции $z(x, y)$, заданной неявно:

110. $\frac{\partial z}{\partial x}, \; \frac{\partial z}{\partial y}$, если $F(xyz, \; x+y)=0.$

111. $\frac{\partial z}{\partial x}, \; \frac{\partial z}{\partial y}$, если $F(xy, yz, zx)=0.$

112. $\frac{\partial z}{\partial x}, \; \frac{\partial z}{\partial y}$, если $F(x^2-y^2, \; y^2-z^2, \; z^2-x^2)=0.$

113. $\frac{\partial z}{\partial x}, \; \frac{\partial z}{\partial y}$, если $F(y-zx, \; x-zy, \; z-xy)=0.$

Проверить, что функция $z(x, y)$, определяемая соотношением $F(u, v)=0$, является решением уравнения

114. $F\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{z}, \; \frac{1}{x-y}+\frac{1}{z}\right)=0, \; (x^2+y^2)\frac{\partial z}{\partial x}+2xy\frac{\partial z}{\partial y}+z^2=0.$

115. $F(z^2-y^2, \; x^2+(y-z)^2)=0, \; (z-y)^2\frac{\partial z}{\partial x}+xz\frac{\partial z}{\partial y}=xy.$

116. $F\left(\frac{z}{x}, \; 2x-4z-y^2\right)=0, \; xy\frac{\partial z}{\partial x}+(x-2z)\frac{\partial z}{\partial y}=yz.$

117. $F\left(x^2+y^2, \; \frac{z}{x}\right)=0, \quad xy\frac{\partial z}{\partial x}-x^2\frac{\partial z}{\partial y}=yz.$

118. $F((x-y)(z+1), \; (x+y)(z-1))=0, \; (xz+y)\frac{\partial z}{\partial x}+$

$+(x+zy)\frac{\partial z}{\partial y}=1-z^2.$

Показать, что функция u удовлетворяет данному уравнению:

119. $u=\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{z}{y}}, \; x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=0.$

120. $u=\ln(x^2+y^2), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$

121. $u=e^{-x}(x-y)^2, \; \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-2\frac{\partial u}{\partial y}=u.$

122. $u=e^{x+y}(x+y), \; \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$

123. $u = x\cos\frac{y}{x}$, $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

124. $u = \frac{\cos(x-y)+\cos(x+y)}{x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2}{x}\frac{\partial u}{\partial x}$.

Предполагая, что произвольные функции φ и ψ дифференцируемы достаточное число раз, проверить следующее равенство:

125. $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$, если $z = y\varphi(x^2 - y^2)$.

126. $\cos y\frac{\partial z}{\partial x} + \cos x\frac{\partial z}{\partial y} = \cos x\cos y$, если $z = \sin y + \varphi(\sin x - \sin y)$.

127. $xz\frac{\partial z}{\partial x} + yz\frac{\partial z}{\partial y} = x$, если $z^2 = xy + \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

128. $(y^2 + z^2 - x^2)\frac{\partial z}{\partial x} - 2xy\frac{\partial z}{\partial y} + 2xz = 0$, если $x^2 + y^2 + z^2 = y\varphi\left(\frac{z}{y}\right)$.

129. $xy\frac{\partial z}{\partial x} - y^2\frac{\partial z}{\partial y} + x(1 + x^2) = 0$, если $4xyz = -x^4 - 2x^2 + \varphi(x, y)$.

130. $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = xy + z$, если $z = xy + x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

131. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, если $z = \varphi(x + y)$.

132. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2\frac{\partial z}{\partial y} = z$, если $z = e^{-x}\cdot\varphi(x - y)$.

133. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2\varphi''$, если $z = \varphi(y - x) - x\varphi'(y - x)$.

134. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - a^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, если $z = \varphi(x - at) + \psi(x - at)$.

135. $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, если $z = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

136. $(x - y)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} - \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$, если $z = \frac{\varphi(x-y)+\psi(x+y)}{x}$.

137. $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, если $z = \sqrt{\frac{x}{y}}\varphi(xy) + \psi\left(\frac{y}{x}\right)$.

138. $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, если $z = \varphi(xy)\ln y + \psi(xy)$.

139. $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} + xyz = 0$, если $z = e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}(\varphi(x) + \psi(y))$.

140. $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, если $z = \varphi(x + \sqrt{t}, y + \sqrt{t}) + \psi(x - \sqrt{t}, y - \sqrt{t})$.

141. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$, если $z=\frac{\varphi(x-y)+\varphi(x+y)}{2}+\frac{1}{2}\int\limits_{x-y}^{x+y}\psi(t)\,dt$.

142. $\frac{\partial^2 z}{dt^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial z}{\partial r}\right)$, если $z=\frac{\varphi(r-at)+\psi(r+at)}{r}$.

Приняв y за новое независимое переменное, а x за функцию от y, преобразовать следующие уравнения:

143. $y'y'''-3(y'')^2=0$.

144. $y''+(e^y-x)(y')^3=0$.

145. $[y'''+yy'](y')^2-(y'')^2[3y'+x^2]=0$.

146. $y''-y'-(y')^3x^3=0$.

Вводя новые переменные, преобразовать следующие обыкновенные уравнения:

147. $y^2+(x^2-xy)y'=0$, $y=tx$, $y=y(t)$.

148. $y'+2xy=2x^3y^3$, $\mu=\frac{1}{y^2}$, $u=u(x)$.

149. $(xy+x^2y^3)^{-1}y'=1$, $u=\frac{1}{y^2}$, $u=u(x)$.

150. $xy''-y'+xy=0$, $t=\frac{x^2}{4}$, $y=y(t)$.

151. $x^2y''+3xy'+y=0$, $x=e^t$, $y=y(t)$.

152. $x^3y'''+2x^2y''-xy'+y=0$, $t=\ln x$, $y=y(t)$.

153. $xy''+2y'-xy=e^x$, $y=\frac{u}{x}$, $u=u(x)$.

154. $y''+\frac{2}{x}y'-a^2y=2$, $y=\frac{u}{x}$, $u=u(x)$.

155. $x^4y''-c^2y=0$, $y=\frac{u}{t}$, $x=\frac{1}{t}$, $u=u(t)$.

156. $y''=\frac{y}{(x-1)^2(x-2)^2}$, $u=\frac{y}{x-2}$, $t=\ln\frac{x-1}{x+2}$, $u=u(t)$.

157. $(y''-1)(1-x^2)^2+y=0$, $x=\operatorname{th}t$, $y=\frac{u}{\operatorname{ch}t}$, $u=u(t)$.

158. $xyy''-x(y')^2+y\cdot y'=0$, $u=\ln\frac{y}{x}$, $u=u(y)$.

159. $2y''+(x+y)(1-y')^3=0$, $x-y=u$, $x+y=v$, $v=v(u)$.

Приняв v за новую функцию $v(x, y)$, преобразовать следующие уравнения:

160. $\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\frac{\partial u}{\partial x}\right)-x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, $v=xu$.

161. $(x-y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0$, $v=(x-y)u$.

162. $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{2}{x-y} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{3}{x-y} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{3u}{(x-y)^2} = 0, \quad u = \frac{v}{x-y}.$

163. $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = -u, \quad u = ve^{-x-y}.$

Приняв u и v за новые независимые переменные, преобразовать следующие уравнения:

164. $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} - xy \frac{\partial z}{\partial y} = 2, \quad u = xy, \quad v = \frac{y}{x}.$

165. $2y \frac{\partial z}{\partial x} + e^x \frac{\partial z}{\partial y} = 4ye^x, \quad u = y^2 + e^x, \quad v = y^2 - e^x.$

166. $y \frac{\partial z}{\partial y} + x \frac{\partial z}{\partial x} + xy = 0, \quad u = \frac{y}{x}, \quad v = yx^3.$

167. $2y \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} + 2y = 0, \quad y = v, \quad x = \frac{4 + v^2}{2}.$

168. $y \frac{\partial z}{\partial y} + 4 \frac{\partial z}{\partial x} = \sqrt{xy}, \quad x = v^2, \quad y = (u - v)^2.$

169. $(x + z) \frac{\partial z}{\partial x} + (y + z) \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \quad u = x, \quad v = \frac{y + z}{x + z}.$

Приняв u и v за новые независимые переменные, а w за новую функцию от u и v, преобразовать к новым переменным следующие уравнения:

170. $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} + x + y = 0,$

$u = y + x, \quad v = y - x, \quad w = xy - z.$

171. $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 4x,$

$u = x, \quad v = x - y, \quad w = x - y + z.$

172. $x\left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\right) + z + x + y = 0,$

$u = x + y, \quad v = x - y, \quad w = zx.$

173. $y \frac{\partial z}{\partial y} + x \frac{\partial z}{\partial x} = 0,$

$u = \frac{y}{x}, \quad v = y, \quad w = yz - x.$

174. $\frac{\partial z}{\partial x} \sin^2 x + \operatorname{ctg} x \frac{\partial z}{\partial y} = \cos^2 z,$

$u = 2y + \operatorname{tg} z \cdot \operatorname{ctg} x, \quad v = \operatorname{ctg} x (\operatorname{tg} z + \operatorname{ctg} x), \quad w = \operatorname{tg} z + \operatorname{ctg} x.$

175. $yz \frac{\partial z}{\partial x} - xz \frac{\partial z}{\partial y} = e^z, \quad u = x^2 + y^2, \quad v = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}, \quad w = (x^2 + y^2) e^{-z}.$

176. $(xy + z) \frac{\partial z}{\partial x} + (1 - y^2) \frac{\partial z}{\partial y} = x + yz, \quad u = yz - x, \quad v = xz - y,$

$w = xy - z.$

Приняв ξ, η и τ за новые независимые переменные, а w за новую функцию от ξ, η и τ, преобразовать к новым переменным следующие уравнения:

177. $(y+z)\dfrac{\partial u}{\partial x}+(z+x)\dfrac{\partial u}{\partial y}+(x+y)\dfrac{\partial u}{\partial z}=u,$

$$x-y=\frac{\xi}{u},\quad y-z=\frac{\eta}{u},\quad x+y+z=\tau,\quad w=u^2.$$

178. $2\cos z\dfrac{\partial u}{\partial z}=u\sin z\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}-1\right),$

$$u\cos z=\xi,\quad u\sin z=\eta,\quad x+y+u=\tau,\quad w=u^2.$$

179. Преобразовать уравнение

$$(y+z)\frac{\partial z}{\partial x}+(y-z)\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

приняв y за функцию, а x и z за независимые переменные.

180. Преобразовать уравнение

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

приняв x за функцию, а y и z за независимые переменные.

181. Преобразовать уравнение

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=1,$$

приняв y за функцию, а $u=x+z$, $v=y-z$ за независимые переменные.

182. Преобразовать уравнение

$$z\left(y\frac{\partial z}{\partial y}+x\frac{\partial z}{\partial x}+z\right)=y\frac{\partial z}{\partial x},$$

приняв x за функцию, а $u=yz+x$, $v=xz+y$ за независимые переменные.

Приняв u и v за новые независимые переменные, преобразовать следующие уравнения:

183. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,\quad u=x-y,\ v=x+y.$

184. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+y\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial z}{\partial y}=0\quad (y>0),\ u=x,\ v=2\sqrt{y}.$

185. $(1+x^2)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+(1+y^2)\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}+x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=0,$

$$u=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right),\ v=\ln\left(y+\sqrt{1+y^2}\right).$$

186. $2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+5\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\dfrac{\partial z}{\partial x}=0,$

$$u=\frac{1}{3}(x-y),\ v=\frac{1}{3}(2x+y).$$

187. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}-3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2\frac{\partial z}{\partial x}+6\frac{\partial z}{\partial y}=0,\ u=x+y,$
$v=3x-y.$

188. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+4\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+5\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\frac{\partial z}{\partial x}+2\frac{\partial z}{\partial y}=0,\ u=2x-y,\ v=x.$

189. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-4\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,\ y=\frac{u+v}{2},\ x=\frac{u-v}{4}.$

190. $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-2y\frac{\partial z}{\partial y}=0,\ u=xy,\ v=\frac{y}{x}.$

191. $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2x\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,\ u=xe^y,\ v=y.$

192. $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}-3y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,\ u=\frac{y}{x},\ v=yx^3.$

193. $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,\ u=\frac{y}{x},\ v=y.$

194. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\sin x\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+(2-\cos^2 x)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,\ u=x,\ v=y-\cos x.$

195. $\operatorname{tg}^2 x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2y\operatorname{tg}x\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\operatorname{tg}^3 x\frac{\partial z}{\partial x}=0,\ u=y\sin x,$
$v=y.$

196. $x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\sqrt{xy}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial y}=0,\ u=\sqrt{x}+\sqrt{y},$
$v=\sqrt{x}.$

197. $y^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2y\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,\ y=v,\ x=\frac{u+v^2}{2}.$

198. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,\ y>0,\ x=\frac{u+v}{2},\ y=\frac{(v-u)^2}{16}.$

199. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+m^2 z=0,\ 2x=u^2-v^2,\ y=uv.$

Приняв u, v и w за новые независимые переменные, преобразовать следующие уравнения:

200. $2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}-2\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial t}+3\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}=0,$
$u=x+y+t,\ v=-y-t,\ w=-t.$

201. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial t}-2\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial t}+\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial z}{\partial t}=0,$
$x=2u-v-w,\ y=2v-u-w,\ t=u+v+w.$

Приняв u и v за новые независимые переменные, а w за новую функцию от u и v, преобразовать к новым переменным следующие уравнения:

202. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,\ u=x,\ v=x-y,\ w=x-y+z.$

203. $x^2\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=0,\ u=xy,\ v=y,\ w=z-y.$

204. $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0,\ u=y+x,\ v=y-x,\ w=xy-z.$

205. $x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2x\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}-x\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=4,\ u=x+y,$
$v=x-y,\ w=zx.$

206. $(1-x^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+(1-y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y},\ x=\cos u,\ y=\cos v,$
$z=e^w.$

207. $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{2}x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{1}{y},\ u=\frac{y}{x},\ v=y,\ w=yz-x.$

208. $(1-x)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\frac{\partial z}{\partial x}=0,\ u=\frac{y}{2}+\sqrt{1-x},$
$v=\frac{y}{2}-\sqrt{1-x},\ w=\sqrt{2}\,z\left(\sqrt[4]{1-x}\right).$

209. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,\ u=x+y,\ v=\frac{y}{x},\ w=\frac{z}{x}.$

210. $2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+4\frac{\partial z}{\partial x}+4\frac{\partial z}{\partial y}+z=0,\ u=2y-x,$
$v=x,\ z=we^{-x-y}.$

211. $(1-x^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-2x\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{1}{4}z=0,\ u=\frac{y+\alpha}{2},\ v=\frac{y-\alpha}{2},$
$z=\frac{w}{\sqrt{\sin\alpha}},\ x=\cos\alpha.$

Преобразовать к полярным координатам r и φ, полагая $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, следующие выражения:

212. $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}.$

213. $y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}.$

214. $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2.$

215. $\Delta z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$

216. $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$

217. $y^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+x^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial x}\right).$

218. Найти производную функции $f=x^3-x^2y+y^3-1$ в точке $A(2,\ 1)$ по направлению, образующему угол $\pi/6$ с осью OX.

219. Найти производную функции $f=x-x^2y+y^4$ в точке $A(1,\ 1)$ по направлению вектора AB, где $B(4,\ -2)$.

220. Найти производную функции $z=f(x,\ y)$ в точке $A(x_0,\ y_0)$:

а) по направлению касательной к кривой $\varphi(x,\ y)=C$ в точке $(x_1,\ y_1)$;

б) по направлению нормали к кривой $\varphi(x, y)=C$ в точке (x_1, y_1).

221. Найти производную функции $f=x^2-xy+y^2+2z$ в точке $M(1, 2, 3)$ по направлению вектора $\bar{a}(1, 1, 1)$.

222. Найти производную функции $f=x^2-xy+y^2+2$ в точке $M(1, 2, 3)$ по направлению вектора $\bar{a}(1, 1, 1)$.

223. Найти производную функции $z=\ln(x^2+y^2)$ в точке $M(a/8, a3\sqrt{3}/8)$ к кривой $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ по направлению внутренней нормали этой кривой.

224. Дана функция $z=z(x, y)$ из класса $C^1(D)$ и гладкая кривая $C: x=x(t), y=y(t), t\in[T_0, T_1]$, лежащая в области D. Обозначим через $\bar{n}(t)$ непрерывно меняющийся вектор нормали к C на $[T_0, T_1]$. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial n}$.

225. Найти производную функции $u=xy+\dfrac{z}{y}$ в точке $M(2, 1, 2)$ по направлению градиента функции $V=xyz$ в этой точке.

Написать уравнения касательных прямых и нормальных плоскостей к следующим кривым в заданной точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$:

226. $4x=t^4,\ 3y=t^3,\ 2z=t^2,\ M_0=\left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}\right)$.

227. $x=t-\sin t,\ y=1-\cos t,\ z=4\sin\dfrac{t}{2},\ M_0=(\pi/2-1,\ 1,\ 2\sqrt{2})$.

228. $x=\dfrac{3t^2}{1+t^3},\ y=\dfrac{(1+t^3)^2-9t^4}{(1+t^3)^2},\ z=\dfrac{3t}{1+t^3}$,
$M_0=\left(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{5}{4}, \dfrac{3}{2}\right)$.

229. $y=e^x,\ z=x^2,\ M_0=(0, 1, 0)$.

230. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\ \dfrac{z}{c}=\operatorname{arctg}\dfrac{bx}{ay},\ M_0=\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}, \dfrac{b}{\sqrt{2}}, \dfrac{c\pi}{4}\right)$.

231. $x^2+y^2+z^2=r^2,\ 2x^2+y^2-z^2=0,\ M_0=\left(\dfrac{r}{2}, \dfrac{r}{2\sqrt{2}}, \dfrac{r\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\right)$.

232. $2x^2+3y^2+z^2-47=0,\ x^2+2y^2-z=0,\ M_0=(-2, 1, 6)$.

233. $y^2+z^2=25,\ x^2+y^2=10,\ M_0=(1, 3, 4)$.

234. $x=u\cos v,\ y=u\sin v,\ z=av,\ x^2+y^2=4ax$,
$M_0=\left(a, -a\sqrt{3}, \dfrac{2\pi a}{3}\right)$.

235. $x=u^2+v^2,\ y=2uv,\ z=u^2v,\ -v^2u,\ z^2=2x-y-2$,
$M_0=(5, 4, -2)\ (u_0=1,\ v_0=2)$.

Написать уравнения касательных плоскостей и нормалей к следующим поверхностям в заданной точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$:

236. $z=xy,\ M_0=(5, 1, 5)$.

237. $x^2y^3-xy^2=z+\dfrac{3}{8},\ M_0=(2;\ 1/2;\ -3/8)$.

238. $x^8+y^{13}+5z=7,\ M_0=(1,\ 1,\ 1).$

239. $x^3+z^3-3xz=3,\ M_0=(1,\ 4,\ 2).$

240. $xy+xz+yz=x^3+y^3+z^3,\ M_0=(1,\ 1,\ 1).$

241. $x^3+y^3+z^3=-xyz,\ M_0=(1,\ -1,\ -1).$

242. $x=u+v,\ y=u^2+v^2,\ z=u^3+v^3,$
$M_0=(x(u_0,\ v_0),\ y(u_0,\ v_0),\ z(u_0,\ v_0)),\ u_0=1,\ v_0=2.$

243. $x=\sin u\sqrt{1-m^2\sin^2 v},\ y=\cos u\cdot\cos v,$
$z=\sin v\cdot\sqrt{1-m^2\sin^2 v},\ |m|\leqslant 1,$
$M_0=(x(u_0,\ v_0),\ y(u_0,\ v_0),\ z(u_0,\ v_0)),\ u_0=\frac{\pi}{4},\ v_0=\pi/4.$

244. $x=u\cos v,\ y=u\sin v,\ z=v,$
$M_0=(x(u_0,\ v_0),\ y(u_0,\ v_0),\ z(u_0,\ v_0)),\ u_0=1,\ v_0=\pi/4.$

245. $x=e^u+u\sin v,\ y=e^u-u\cos v,\ z=uv,$
$M_0=(x(u_0,\ v_0),\ y(u_0,\ v_0),\ z(u_0,\ v_0)),\ u_0=1,\ v_0=\pi.$

Исследовать на экстремумы следующие функции:

246. $f=-x^2-xy-y^2+x+y.$

247. $f=(2ax-x^2)(2by-y^2).$

248. $f=x^2+xy+y^2+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}.$

249. $f=x^3+y^3-3axy.$

250. $f=x^4+y^4-36xy.$

251. $f=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2.$

252. $f=x^2-2xy^2+y^4-y^5.$

253. $f=e^{2x}(x+y^2+2y).$

254. $f=x^2+3xy-8\ln|x|-6\ln|y|.$

255. $f=3x^2y+y^3-18x-30y.$

256. $f=x^2-2xy+4y^2+6z^2+6yz-6z.$

257. $f=xy+yz+zx.$

258. $f=yx^3z^2(2-y-2z-3x).$

259. $f=x+y+8\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2},\ 0\leqslant x\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant y\leqslant 2\pi.$

260. $f=\ln xy-z(x-y)-x^2-y^2+2xy-y.$

261. $f=(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}.$

262. $f=z\ln z-z-z\ln xy+xy+x^2+2y^2-4x-2y.$

263. $f=4-(x^2+y^2)^{2/3}.$

264. $f=\frac{x^2-y^2}{1+x^4+y^4-2x^2y^2}.$

Исследовать на экстремумы в заданной точке следующие функции:

265. $f=x^3+y^3+z^2+3xy-2z-9x-9y,$
а) $M_1=(2,\ -1,\ 1)$; б) $M_2=(-1,\ 2,\ 1).$

266. $f=x^5+3x^3y+3y^3x+y^5$, $M_0=(-12/5,\ -12/5)$.

267. $f=x\cos y+z\cos x$, а) $M_1=(\pi/2,\ 0,\ 1)$; б) $M_2=(\pi/2,\ \pi,\ -1)$.

Найти те точки кривой, в которых ордината или абсцисса имеют локальный экстремум:

268. $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$, $x^2+y^2\neq 0$, $a>0$.

269. $x^3+y^3=3axy$, $xy\neq 0$, $a>0$.

270. $x^4+y^4=8xy^2$, $xy\neq 0$.

271. $x^4+y^4+4x^2y-2y^3=0$ (исследовать только ординату).

272. $(x^2+y^2-4x)^2=16(x^2+y^2)$, $x^2+y^2\neq 0$.

273. $r=a\sqrt{\sin 2\varphi}$, $a>0$.

Найти экстремальные значения заданной неявно функции y от переменной x:

274. $y^2-ay-\sin x=0$, $0\leqslant x\leqslant 2\pi$.

275. $(y-x)^3+x+6=0$.

276. $(y-x^2)^2=x^5$, $x^2+y^2\neq 0$.

277. $x^2+xy+y^2=27$.

Найти экстремальные значения заданной неявно функции z от переменных x и y:

278. $2x^2+2y^2+z^2+8yz-z+8=0$.

279. $5z^2+4zy+y^2-2y+3x^2-6x+4=0$.

280. $5x^2+5y^2+5z^2-2xy-2xz-2yz-72=0$.

281. $x^4+y^4+z^4=2(x^2+y^2+z^2)$.

282. $z^2+xyz-xy^2-x^3=0$.

Проверить существование экстремума у функции $z(x,\ y)$ в точке M_0, если

283. $21\ln(x^2+y^2+z^2)=12x-18y-13z$, $M_0=(2/7,\ -3/7,\ 6/7)$.

284. $\pi x\sin\pi y-\pi^2y^2\sin\pi z+\pi^2z\sin\pi x=\dfrac{\pi^2}{6}(7-9y)$,

$M_0=(1/2,\ 1,\ 1/6)$.

Найти точки условных экстремумов следующих функций:

285. $f=2x+y-z+1$, $x^2+y^2+2z^2=22$.

286. $f=x-y$, $\operatorname{tg}x-3\operatorname{tg}y=0$, $|x|<\pi/2$, $|y|<\pi/2$.

287. $f=xy$, $x^3+y^3-axy=0$, $a>0$.

288. $f=xyz$, $x^2+y^2+z^2=a^2$, $a>0$.

289. $f=xyz$, $xy+xz+yz=a^2$, $x>0$, $y>0$, $z>0$, $a>0$.

290. $f=xyz$, $x+y+z=5$, $xy+yz+zx=8$.

291. $f=xy+yz$, $x^2+y^2=2$, $y+z=2$, $x>0$, $y>0$, $z>0$.

292. $f=xy^2z^3$, $x+my^2+nz^3=1$, $m>0$, $n>0$, $x>0$, $y>0$, $z>0$.

293. $f=x_1^m+x_2^m+\ldots+x_n^m,\ (m>1),\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i=a.$

294. $f=\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i,\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2=k^2.$

Найти наибольшее и наименьшее значения функции в заданной области:

295. $f=xy-x^2y-\frac{xy^2}{2},\ 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 2.$

296. $f=x^2+3y^2-x+18y-4,\ 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1.$

297. $f=x^3+3y^2-3xy,\ 0\leqslant x\leqslant 2,\ 0\leqslant y\leqslant 1.$

298. $f=\frac{xy}{2}-\frac{x^2y}{6}-\frac{xy^2}{8},\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ \frac{x}{3}+\frac{y}{4}\leqslant 1.$

299. $f=x^6+y^6-3x^2+6xy-3y^2,\ 0\leqslant y\leqslant x\leqslant 2.$

300. $f=\cos x\cos y\cos(x+y),\ 0\leqslant x\leqslant \pi,\ 0\leqslant y\leqslant \pi.$

301. $f=(x-y^2)\sqrt[3]{(1-x)^2},\ y^2\leqslant x\leqslant 2.$

302. $f=x^3+y^3-9xy+27,\ 0\leqslant x\leqslant a,\ 0\leqslant y\leqslant a,\ 3<a<9.$

303. $f=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2,\ 0\leqslant y\leqslant a,\ 0\leqslant y\leqslant a,\ a>1.$

304. $f=xy+yz+zx,\ x^2+y^2+z^2\leqslant a^2.$

305. $f=x+y+z,\ x^2+y^2\leqslant z\leqslant 1.$

306. $f=2\sin x+2\sin y+\sin(x+y),\ 0\leqslant x\leqslant \pi/2,\ 0\leqslant y\leqslant \pi/2.$

307. Представить положительное число a в виде суммы пяти положительных слагаемых так, чтобы их произведение имело наибольшее значение.

308. Представить положительное число a в виде суммы n положительных слагаемых так, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.

309. Представить положительное число a в виде суммы n положительных слагаемых $x_1, x_2, \ldots, x_n$ так, чтобы произведение $z=x_1^{\alpha_1}, \ldots, x_n^{\alpha_n}$ (α_i — заданные положительные числа) было наибольшим.

310. Определить наибольшее значение корня n-й степени из произведения положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ при условии, что их сумма равна заданному числу a. Используя эту задачу, доказать, что среднее геометрическое нескольких положительных чисел не больше их среднего арифметического.

311. Через точку $A(a, b, c)$, $a>0$, $b>0$, $c>0$, провести плоскость, отсекающую от первого октанта ($x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$) тетраэдр наименьшего объема.

312. Определить размеры прямоугольного параллелепипеда с заданной суммой длин его ребер a, имеющего наибольший объем.

313. Определить размеры прямоугольного параллелепипеда данного объема V, имеющего наименьшую площадь поверхности.

314. Определить размеры прямоугольного параллелепипеда, вписанного в эллипсоид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, при которых параллелепипед имеет наибольшую полную поверхность.

315. Доказать, что из всех четырехугольников, описанных вокруг круга радиуса R, наименьшую площадь имеет квадрат.

316. Найти треугольник, периметр которого равен $2p$ и который при вращении относительно одной из своих сторон образует тело наибольшего объема.

317. Через точку M, лежащую внутри данного угла, провести прямую так, чтобы она отсекала от угла треугольник наименьшей площади.

318. Внутри данного угла B поместить отрезок DE длины b, концы которого — точки D и E — находятся на сторонах угла, так чтобы площадь треугольника DBE была наибольшей.

319. В данный круг вписать треугольник так, чтобы сумма квадратов длин его сторон была наибольшей.

320. Определить положение точки относительно вершин остроугольного треугольника ABC, чтобы сумма расстояний от этой точки до вершин треугольника была наименьшей.

321. Определить положение точки относительно вершин треугольника, чтобы сумма квадратов расстояний от этой точки до вершин треугольника была наименьшей.

322. На плоскости XOY даны две различные точки $P_1(a_1, b_1)$ и $P_2(a_2, b_2)$, $a_1 \geqslant a_2 > 0$, $b_2 \geqslant b_1 > 0$. Найти точку Q_1 на оси OX и точку Q_2 на оси OY, чтобы длина ломаной $P_1Q_1Q_2P_2$ была наименьшей.

323. Из всех конусов с данной боковой поверхностью найти конус с наибольшим объемом.

324. Среди всех четырехугольников с заданными сторонами найти такой, площадь которого наибольшая.

325. В данный круг радиуса R вписать четырехугольник $ABCD$ наибольшей площади, если величина угла BAD равна α.

326. Доказать, что в треугольнике радиус вписанной окружности не может быть больше половины радиуса описанной окружности.

327. Найти кратчайшее расстояние от точки $A(p, 4p)$ до точек параболы $y^2=2px$ $(p>0)$.

328. Найти длины осей эллипса, полученного в сечении цилиндра $x^2+2y^2=1$ плоскостью $x+y+z=0$.

329. Найти кратчайшее расстояние между прямыми

$$\frac{x-a}{l}=\frac{y-b}{m}=\frac{z-c}{n}, \quad \frac{x-a_1}{l_1}=\frac{y-b_1}{m_1}=\frac{z-c_1}{n_1}.$$

330. На плоскости заданы n точек $P_i(a_i, b_i)$. Найти координаты точки $P(x, y)$ такой, что

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\left[(x-a_i)^2+(y-b_i)^2\right]$$

(m_i — заданные положительные числа) будет наименьшей. Дать механическое истолкование полученных формул.

Ответы

1. $\frac{\partial u}{\partial x} = -\sin(x+y)$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\sin(x+y)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\cos(x+y)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\cos(x+y)$. **2.** $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2a^2}{(ax+by)^3}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2b^2}{(ax+by)^3}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{2ab}{(ax+by)^3}$. **3.** $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = -\frac{1}{y^3}\cos\frac{x}{y}$, $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = -\frac{x^2}{y^5}\cos\frac{x}{y} - \frac{4x}{y^4}\sin\frac{x}{y} + \frac{2}{y^3}\cos\frac{x}{y}$. **4.** $-\frac{216}{(1+2x+3y)^4}$. **5.** $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = 4ye^{x^2+y^2+z^2} + 8x^2ye^{x^2+y^2+z^2}$, $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = 8xyze^{x^2+y^2+z^2}$. **6.** $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = y(y-1)x^{y-2} + y^x \ln^2 y$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^y \ln^2 x + x(x-1)y^{x-2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = yx^{y-1}\ln x + x^{y-1} + y^{x-1} + xy^{x-1}\ln y$. **7.** r. **8.** $-\frac{2z^2}{x^2y^3}$. **9.** $\frac{2y}{x(x^2+y^2)}$. **10.** $\eta^2\xi$. **11.** $r^2\cos\psi$. **12.** $\frac{1}{2v}$. **13.** $\frac{-1}{4\sqrt{2}\sqrt{(u+v-w)(u+w-v)(v+w-u)}}$.

14. u^2v. **15.** $\frac{1}{2\sqrt{z(x^2+y^2)}}$. **16.** $\begin{pmatrix} v & u \\ 2u & 2v \\ 2u & -2v \end{pmatrix}$. **17.** $\begin{pmatrix} \cos v & -u\sin v \\ \sin v & u\cos v \end{pmatrix}$.

18. $\begin{pmatrix} 2u & 2v & 2w \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. **19.** $\left(\frac{1}{v}, -\frac{u}{v^2}\right)$. **20.** $\begin{pmatrix} \operatorname{tg} u + \frac{u}{\cos^2 u} \\ \sin u + u\cos u \end{pmatrix}$.

21. $\begin{pmatrix} \ln\frac{v}{w} & \frac{u}{v} & -\frac{u}{w} \\ -\frac{v}{u} & \ln\frac{w}{u} & \frac{v}{w} \\ \frac{w}{u} & -\frac{w}{v} & \ln\frac{u}{v} \end{pmatrix}$. **22.** $\begin{pmatrix} 2u(x+y) & -2xv & -2wy \\ 2u\left(\frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}\right) & \frac{2xv}{y^2} & -\frac{2w}{y} \\ 2u\left(\frac{y-x}{x^2+y^2}\right) & \frac{2vx}{x^2+y^2} & -\frac{2wy}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$.

23. $\begin{pmatrix} 4xu & 4xv & 4xw \\ 8x^3u & 8x^3v & 8x^3w \end{pmatrix}$. **24.** $\begin{pmatrix} 2x\cos v - z\sin v & -2xu\sin v - zu\cos v & -y \\ -y\cos v - x\sin v & yu\sin v - xu\cos v & 2z \end{pmatrix}$.

25. $\frac{yz\cos u - xz\sin u + e^u xy}{1 + x^2y^2z^2}$. **26.** $\begin{pmatrix} vu^{v-1}\cos x & u^v\ln u\cos x \\ -vu^{v-1}\sin x & -u^v\ln u\sin x \\ \frac{vu^{v-1}}{\cos^2 x} & \frac{u^v\ln u}{\cos^2 x} \end{pmatrix}$.

27. $\begin{pmatrix} \frac{yv-2xu}{x^2+y^2} & \frac{yu+2xv}{x^2+y^2} \\ \frac{2xv+4uy}{x^2+y^2} & \frac{2xu-4yv}{x^2+y^2} \\ v-2u & u+2v \end{pmatrix}$. **28.** $\begin{pmatrix} -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\sqrt{3}} & \frac{\pi\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6} \\ -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2\sqrt{3}} & \frac{\pi\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} \end{pmatrix}$.

29. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. **30.** $\left(-\frac{1}{7\sqrt{195}}, -\frac{2}{7\sqrt{195}}, -\frac{3}{7\sqrt{195}}\right)$.

31. $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. **32.** а) $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) = \begin{pmatrix} 2y_1 & 2y_2 & -2y_3 \\ -y_2y_3 & -y_1y_3 & -y_1y_2 \end{pmatrix}$;

б) $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix}$, где $Y_{11} = y_1\cos x_1 - y_3\sin(x_1 - x_2)$, $Y_{12} = y_2\cos x_2 + y_3\sin(x_1 - x_2)$, $Y_{21} = -y_2x_2\sin(x_1x_2) - 2y_1x_1\cos(x_1^2 + x_2^2) - 2y_3x_1\sin(x_1^2 + x_2^2)$, $Y_{22} = -y_2x_1\sin(x_1x_2) - 2y_1y_2\cos(x_1^2 - x_2^2) - 2y_3x_2\sin(x_1^2 + x_2^2)$; $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) = \begin{pmatrix} \sin x_1 & \sin x_2 & \cos(x_1 - x_2) \\ \sin(x_1^2 - x_2^2) & \cos x_1x_2 & \cos(x_1^2 - x_2^2) \end{pmatrix}$;

в) $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) = \begin{pmatrix} \frac{y_1x_2 + 2x_1y_2 - 2x_1y_3}{x_1^2 + x_2^2} & \frac{2x_2y_2 - 2x_2y_3 - y_1x_1}{x_1^2 + x_2^2} \\ \frac{y_1y_3x_1 - y_2}{x_1^2} & \frac{y_2 - y_1y_3x_2}{x_2^2} \end{pmatrix}$, $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) = \begin{pmatrix} \operatorname{arctg}\frac{x_1}{x_2} & \ln(x_1^2 + x_2^2) & -\ln(x_1^2 + x_2^2) \\ y_3\ln\frac{x_1}{x_2} & \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} & y_1\ln\frac{x_1}{x_2} \end{pmatrix}$. **35.** $du = 2xy^2dx + 2yx^2dy$, $d^2u = 2y^2dx^2 + 8xydxdy + 2x^2dy^2$. **36.** $du = (y + z)\,dx + (x + z)\,dy + (y + x)\,dz$, $d^2u = 2(dxdy + dxdz + dzdy)$. **37.** $du = -\sin(e^xy)(ye^xdx + e^xdy)$, $d^2u = [-\cos(e^xy)\,e^{2x}y^2 - \sin(e^xy)\cdot e^xy]\,dx^2 + 2[-\cos(e^xy)\,e^{2x}y - \sin(e^xy)\,e^x]\,dxdy + [-\cos(e^xy)\,e^{2x}]\,dy^2$. **38.** $du = (yx^{y-1} + y^x\ln y)\,dx + (x^y\ln x + xy^{x-1})\,dy$, $d^2u = [y(y-1)\,x^{y-2} + y^x\ln^2 y]\,dx^2 + 2[x^{y-1} + x^{y-1}y\ln x + x\ln y\cdot y^{x-1} + y^{x-1}]\,dxdy + [x^y\ln^2 x + x(x-1)\,y^{x-2}]\,dy^2$. **39.** $du = \frac{1}{x}dx + \frac{1}{y}dy + \frac{1}{z}dz$, $d^2u = -\frac{1}{x^2}dx^2 - \frac{1}{y^2}dy^2 - \frac{1}{z^2}dz^2$. **40.** $du = \frac{z^2}{z^2 + x^2y^2}\left(\frac{y}{z}dx + \frac{x}{z}dy - \frac{xy}{z^2}dz\right)$, $d^2u = \frac{-2xzy^3}{(z^2 + x^2y^2)^2}dx^2 + 2\frac{z^3 - zy^2x^2}{(z^2 + x^2y^2)^2}dxdy + 2\cdot\frac{x^2y^3 - z^2y}{(z^2 + x^2y^2)^2}dxdz - \frac{2x^3zy}{(z^2 + x^2y^2)^2}dy^2 + 2\frac{x^3y^2 - xz^2}{(z^2 + x^2y^2)^2}dydz + \frac{2zxy}{(z^2 + x^2y^2)^2}dz^2$. **41.** а) $\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot 0{,}55$; б) $-12{,}6$; в) $0{,}8(1 + \ln 4)$; г) $-\frac{1}{30}$; д) 2; е) $-\frac{\sqrt{2}}{20}$. **42.** $du = 2\varphi'xdx - 2\varphi'ydy$, $d^2u = (2\varphi' + 4\varphi''x^2)\,dx^2 - 8xy\varphi''dxdy + (-2\varphi' +$

$+ 4\varphi'' y^2)\, dy^2$. **43.** $du = \varphi' yzdx + \varphi' xzdy + \varphi' xydz$, $d^2u = (\varphi'' y^2 z^2)\, dx^2 + \varphi'' x^2 z^2 dy^2 + \varphi'' x^2 y^2 dz^2 + (2\varphi' z + 2\varphi'' xyz^2)\, dxdy + (2\varphi' y + 2\varphi'' xzy^2)\, dxdz + (2\varphi' x + 2\varphi'' yzx^2) dydz$. **44.** $du = \varphi'(y+z)\, dx + \varphi'(x+z)\, dy + \varphi'(y+x) dz$, $d^2u = \varphi''(y+z)^2\, dx^2 + \varphi''(x+z)^2\, dy^2 + \varphi''(y+x)\, dz^2 + 2(\varphi' + \varphi''(y+z) \times (x+z))\, dxdy + 2(\varphi' + \varphi''(y+z)(y+x)) \cdot dxdz + 2(\varphi' + \varphi''(x+z)(y+x)) \times dydz$. **45.** $du = 2x\varphi' dx + 2y\varphi' dy + 2z\varphi' dz$, $d^2u = (2\varphi' + 4x^2\varphi'') \times dx^2 + (2\varphi' + 4y^2\varphi'')\, dy^2 + (2\varphi' + 4z^2\varphi'')\, dz^2 + 8xy\varphi'' dxdy + 8xz\varphi' dxdz + 8zy\varphi' dydz$. **46.** $du = (\varphi_1' 2x + \varphi_2' 2x)\, dx + (\varphi_1' 2y - \varphi_2' 2y)\, dy$, $d^2u = (\varphi_{11}'' 4x^2 + 8\varphi_{12}'' x^2 + \varphi_{22}'' 4x^2 + 2\varphi_1' + 2\varphi_2')\, dx^2 + 2(\varphi_{11}'' 4xy - \varphi_{22}'' 4xy)\, dxdy + (\varphi_{11}'' 4y^2 - 8\varphi_{12}'' y^2 + \varphi_{22}'' 4y^2 + 2\varphi_1' - 2\varphi_2')\, dy^2$. **47.** $du = \left(\varphi_1' y + \varphi_2' \cdot \frac{1}{y}\right) dx + \left(\varphi_1' x - \varphi_2' \cdot \frac{x}{y^2}\right) dy$, $d^2u = \left(\varphi_{11}'' y^2 + 2\varphi_{12}'' + \varphi_{22}'' \cdot \frac{1}{y^2}\right) dx^2 + 2\left(\varphi_{11}'' xy - \varphi_{22}'' \frac{x}{y^3} + \varphi_1' - \varphi_2' \cdot \frac{1}{y^2}\right) dxdy + \left(\varphi_{11}'' x^2 - 2\varphi_{12}'' \frac{x^2}{y^2} + \varphi_{22}'' \frac{x^2}{y^4} + \varphi_2' \frac{2x}{y^3}\right) dy^2$. **48.** $du = (\varphi_1' 2x + \varphi_2' y)\, dx + (\varphi_1' 2y + \varphi_2' x)\, dy$, $d^2u = (\varphi_{11}'' 4x^2 + 4\varphi_{12}'' xy + \varphi_{22}'' y^2 + 2\varphi_1')\, dx^2 + 2(\varphi_{11}'' 4xy + \varphi_{12}''(2x^2 + 2y^2) + \varphi_{22}'' xy)\, dxdy + (\varphi_{11}'' 4y^2 + 4xy\varphi_{12}'' + \varphi_{22}'' x^2)\, dy^2$. **49.** $du = \left(\varphi_1' \cdot \frac{1}{y} - \varphi_2' \cdot \frac{y}{x^2}\right) dx + \left(-\varphi_1' \cdot \frac{x}{y^2} + \varphi_2' \cdot \frac{1}{x}\right) dy$, $d^2u = \left(\varphi_{11}'' \cdot \frac{1}{y^2} - 2\varphi_{12}'' \cdot \frac{1}{x^2} + \varphi_{22}'' \cdot \frac{y^2}{x^4} + \varphi_2' \cdot \frac{2y}{x^3}\right) dx^2 + 2\left(-\varphi_{11}'' \cdot \frac{x}{y^3} + 2\varphi_{12}'' \cdot \frac{1}{xy} - \varphi_{22}'' \cdot \frac{y}{x^5} - \varphi_1' \cdot \frac{1}{y^2} - \varphi_2' \cdot \frac{1}{x^2}\right) dxdy + \left(\varphi_{11}'' \frac{x^2}{y^4} - 2\varphi_{12}'' \cdot \frac{1}{y^2} + \varphi_{22}'' \cdot \frac{1}{x^2}\right) dy^2$. **50.** $du = (\varphi_1' + 2x\varphi_2')\, dx + (\varphi_1' + 2y\varphi_2')\, dy$, $d^2u = (\varphi_{11}'' + 4x\varphi_{12}'' + 4x^2\varphi_{22}'' + 2\varphi_2')\, dx^2 + 2(\varphi_{11}'' + 2y\varphi_{12}'' + 2x\varphi_{12}'' + 4xy\varphi_{22}'')\, dxdy + (\varphi_{11}'' + 4y\varphi_{12}'' + 4y^2\varphi_{22}'')\, dy^2$. **51.** $du = \varphi_1' ydx + (\varphi_1' x + \varphi_2' z)\, dy + \varphi_2' ydz$, $d^2u = \varphi_{11}'' y^2 dx^2 + (\varphi_{11}'' x^2 + 2\varphi_{12}' xz + \varphi_{22}'' z^2)\, dy^2 + \varphi_{22}'' y^2 dz^2 + 2(\varphi_{11}'' xy + \varphi_{12}'' yz + \varphi_1')\, dxdy + 2\varphi_{12}'' y^2 dxdz + 2(\varphi_{12}'' xy + \varphi_{22}'' zy + \varphi_2')\, dydz$. **52.** $du = \left(\varphi_1' \frac{2x}{y} - \varphi_2' \frac{2y}{x^3}\right) dx + \left(-\varphi_1' \frac{x^2}{y^2} + \varphi_2' \cdot \frac{1}{x^2}\right) dy$, $d^2u = \left(\varphi_{11}'' \frac{4x^2}{y^2} - \varphi_{12}'' \cdot \frac{8}{x^2} + \varphi_{22}'' \frac{4y^2}{x^6}\right) dx^2 + 2\left(-\varphi_{11}'' \frac{2x^3}{y^3} + \varphi_{12}'' \frac{4}{xy} - \varphi_{22}'' \frac{2y}{x^5} - \varphi_1' \frac{2x}{y^2} - \varphi_2' \frac{2}{x^3}\right) dxdy + \left(\varphi_{11}'' \frac{x^4}{y^4} - 2\varphi_{12}'' \frac{1}{y^2} + \varphi_{22}'' \frac{1}{x^4}\right) dy^2$. **53.** $du = (\varphi_1' y + \varphi_2' + \varphi_3')\, dx + (\varphi_1' x - \varphi_2' + \varphi_3')\, dy$, $d^2u = (\varphi_{11}'' y^2 + 2\varphi_{12}'' y + 2\varphi_{13}'' y + \varphi_{22}'' + 2\varphi_{23}'' + \varphi_{33}'')\, dx^2 + 2(\varphi_{11}'' xy - \varphi_{12}'' y + \varphi_{13}'' y + \varphi_{12}'' x + \varphi_{13}'' x - \varphi_{22}'' + \varphi_1' + \varphi_{33}'')\, dxdy + (\varphi_{11}'' x^2 + 2\varphi_{13}'' x - 2\varphi_{12}'' x + \varphi_{22}'' - 2\varphi_{23}'' + \varphi_{33}'')\, dy^2$. **54.** $du = \varphi_1' 2xdx + \varphi_2' 2ydy + \varphi_3' 2zdz$, $d^2u = (\varphi_{11}'' \cdot 4x^2)\, dx^2 + \varphi_{22}'' 4y^2 dy^2 + \varphi_{33}'' 4z^2 dz^2 +$

$+ \varphi''_{12} 8xydxdy + \varphi''_{13} 8xzdxdz + \varphi''_{32} \cdot 8zydzdy$. **55.** $du = 2\varphi'_1 dx + 3\varphi'_2 dy + 4\varphi'_3 dz$, $d^2u = 4\varphi''_{11}dx^2 + 9\varphi''_{22}dy^2 + 16\varphi''_{33}dz^2 + 12\varphi''_{12}dxdy + 16\varphi''_{13}dxdz + 24\varphi''_{23}dydz$. **56.** $du = (\varphi'_1 + 2x\varphi'_2)\,dx + (\varphi'_1 + 2y\varphi'_2)\,dy + (\varphi'_1 + 2z\varphi'_2)\,dz$, $d^2u = (\varphi''_{11} + 4x\varphi''_{12} + 4x^2\varphi''_{22} + 2\varphi'_2)\,dx^2 + (\varphi''_{12} + 4y\varphi''_{12} + 4y^2\varphi''_{22} + 2\varphi'_2)\,dy^2 + (\varphi''_{11} + 4z\varphi''_{12} + 4z^2\varphi''_{22} + 2\varphi'_2)\,dz^2 + 2\,(\varphi''_{11} + \varphi''_{12}2y + 2x\varphi''_{12} + 4xy\varphi''_{22})\,dxdy + 2\,(\varphi''_{11} + \varphi''_{12}2z + \varphi''_{12}2x + 4xz\varphi''_{22})\,dxdz + 2\,(\varphi''_{11} + \varphi''_{12}2z + 2y\varphi''_{12} + 4yz\varphi''_{22})\,dydz$. **57.** $du = (\varphi'_1 + 2x\varphi'_2)\,dx + (\varphi'_2 + 2y\varphi'_3)\,dy + (\varphi'_1 2z + \varphi'_3)\,dz$, $d^2u = (\varphi''_{11} + \varphi''_{12}4x + \varphi''_{22}4x^2 + 2\varphi'_2)\,dx^2 + (\varphi''_{22} + \varphi''_{23}4y + 4y^2\varphi''_{33} + 2\varphi'_3)\,dy^2 + (\varphi''_{11}4z^2 + \varphi''_{13}4z + \varphi''_{33} + 2\varphi'_1)\,dz^2 + 2\,(\varphi''_{12} + \varphi''_{13}2y + 2x\varphi''_{22} + 4xy\varphi''_{23})\,dxdy + 2\,(\varphi''_{11}2z + \varphi''_{13} + \varphi''_{12}4xz + \varphi''_{23}2x)\,dxdz + 2\,(\varphi''_{12}2z + \varphi''_{23} + 4yz\varphi''_{13} + 2y\varphi''_{33})\,dydz$. **58.** $du = (\varphi'_1 z\cos xz + \varphi'_3 y\cos xy)\,dx + (\varphi'_2 z\cos yz + \varphi'_3 x\cos xy)\,dy + (\varphi'_1 x\cos xz + \varphi'_2 y\cos yz)\,dz$, $d^2u = (\varphi''_{11}z^2\cos^2 xz + 2\varphi''_{13}zy\cos xz\cos xy + \varphi''_{33}y^2\cos^2 xy)dx^2 + (\varphi''_{22}z^2\cos^2 yz + 2\varphi''_{23}xz\cos xy\cos yz + \varphi''_{33}x^2\cos^2 xy)\,dy^2 + (\varphi''_{11}x^2\cos^2 xz + 2\varphi''_{12}xy\cos xz\cos yz + \varphi''_{22}y^2\cos^2 yz)\,dz^2 + 2\,(\varphi''_{12}z^2\cos xz\cos yz + \varphi''_{13}xz\cos xz\cos xy + \varphi''_{32}yz\cos xy\cos yz + \varphi''_{33}yx\cos^2 xy + \varphi'_3\cos xy - xy\varphi'_3\sin xy)\,dxdy + 2\,(\varphi''_{11}xz\cos^2 xz + \varphi''_{12}zy\cos^2 xz + \varphi''_{13}xy\cos xz\cos xy + \varphi''_{23}y^2\cos yz\cos xy + \varphi'_1\cos xz - xz\varphi'_1\sin xz)dxdz + 2(\varphi''_{12}xz\cos xz\cos yz + \varphi''_{22}yz\cos^2 yz + \varphi''_{13}x^2\cos xz\cos xy + \varphi''_{23}xy\cos xy\cos yz + \varphi'_2\cos yz - \varphi'_2 zy\sin yz)\,dydz$. **59.** $du = (\varphi'_1 e^z + \varphi'_3 ze^{x-y})\,dx + (\varphi'_2 e^z - \varphi'_3 ze^{x-y})\,dy + (\varphi'_1 xe^z + \varphi'_2 ye^z + \varphi'_3 e^{x-y})\,dz$; $d^2u = (\varphi''_{11}e^{2z} + 2\varphi''_{13}ze^{z+x-y} + \varphi''_{33}z^2e^{2x-2y} + \varphi'_3 ze^{x-y})\,dx^2 + (\varphi''_{22}e^{2z} - 2\varphi''_{23}ze^{z+x-y} + \varphi''_{33}z^2e^{2x-2y} + \varphi'_3 ze^{x-y})\,dy^2 + (\varphi''_{11}x^2e^{2z} + 2\varphi''_{12}xye^{2z} + 2\varphi''_{13}xe^{z+x-y} + \varphi''_{22}y^2e^{2z} + 2\varphi''_{23}ye^{z+x-y} + \varphi''_{33}e^{2x-2y})\,dz^2 + 2\,(\varphi''_{12}e^{2z} - \varphi''_{13}ze^{z+x-y} + \varphi''_{23}ze^{z+x-y} - \varphi''_{33}z^2e^{2x-2y} - \varphi'_3 ze^{x-y})\,dxdy + 2\,(\varphi''_{11}xe^{2z} + \varphi''_{12}ye^{2z} + \varphi''_{13}e^{z+x-y} + \varphi''_{13}xze^{z+x-y} + \varphi''_{23}zye^{z+x-y} + \varphi''_{33}ze^{z+x-y} + \varphi'_1 e^z + \varphi'_3 e^{x-y})\,dxdz + 2(\varphi''_{12}xe^{2z} + \varphi''_{22}ye^{2z} + \varphi''_{23}e^{z+x-y} - \varphi''_{13}zxe^{z+x-y} - \varphi''_{23}zye^{z+x-y} - \varphi''_{33}ze^{z+x-y} + \varphi'_1 e^z + \varphi'_3 e^{x-y})dxdz + 2(\varphi''_{12}xe^{2z} + \varphi''_{22}ye^{2z} + \varphi''_{23}e^{z+x-y} - \varphi''_{13}zxe^{z+x-y} - \varphi''_{23}zye^{z+x-y} - \varphi''_{33}ze^{2x-2y} - \varphi'_3 e^{x-y} + \varphi'_2 e^z)dydz$. **60.** $du = 2x\,(\varphi'_1 + \varphi'_3)dx + 2y\,(\varphi'_1 + \varphi'_2)\,dy + 2z\,(\varphi'_2 + \varphi'_3)\,dz$, $d^2u = [(\varphi''_{11} + 2\varphi''_{13} + \varphi''_{33})\,4x^2 + 2\,(\varphi'_1 + \varphi'_3)]\,dx^2 + [(\varphi''_{11} + 2\varphi''_{12} + \varphi''_{22})\,4y^2 + 2\,(\varphi'_1 + \varphi'_2)]\,dy^2 + [(\varphi''_{22} + 2\varphi''_{23} + \varphi''_{33})\,4z^2 + 2(\varphi'_2 + \varphi'_3)]\,dz^2$.

67. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{x}{z}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{y}{z}$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\dfrac{xy}{z^3}$. **68.** $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{x^2 + z^2}{x - x^2 - z^2}$;

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x^2 + z^2 + z}{x - x^2 - z^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{(x^2 - z^2 - z + 2xz) + \dfrac{\partial z}{\partial x}(x - x^2 + z^2 + 2zx)}{(x - x^2 - z^2)^2}.$$

69. $\dfrac{\partial z}{\partial x} =$

$$= \frac{z}{x} \cdot \frac{x-1}{1-z}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y} \cdot \frac{y-1}{1-z}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{z}{xy} \cdot \frac{(x-1)(y-1)}{(1-z)^3}.$$

70. $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{(1-2y^2)(x+z)}{y(2zx+2z^2-1)}$, $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1-2x^2-2xz}{2zx+2z^2-1}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{(2xz+2z^2-1)^2} \times$

$$\times \left[4x - 4z^3 - 4zx^2 - 8xz^2 + \frac{\partial z}{\partial x}(4x^3 - 4z + 4xz^2 - 8x^2 z) \right], \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$$

$$= \frac{4x^3 + 8x^2 z + 4xz^3 - 4z}{(2xz+2z^2-1)^2}.$$

71. $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1+yz\sin xyz}{1+xy\sin xyz}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1+xz\sin xyz}{1+xy\sin xyz}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$

$$= \frac{-\cos xyz \left(yz + xy\frac{\partial z}{\partial x} \right)\left(xz + yx\frac{\partial z}{\partial y} \right) - \left(z + y\frac{\partial z}{\partial y} + x\frac{\partial z}{\partial x} \right)\sin xyz}{1+\sin(xyz)\cdot xy}.$$

72. $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{yx^{y-1}}{y^z \ln y}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x^y \ln x + zy^{z-1}}{y^z \ln y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$

$$= \frac{x^{y-1} - x^{y-1}\ln y - x^{2y-1}y^{1-z}\ln x \ln y - x^{y-1}y\ln x \ln y}{y^z \ln^2 y}.$$

73. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{u-2v}{2(u^2+v^2)}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{v+2u}{u^2+v^2}$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{2\left(\frac{\partial u}{\partial y} - 2\frac{\partial v}{\partial y}\right)(u^2+v^2) - 4(u-2v)\left(u\frac{\partial u}{\partial y} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right)}{4(u^2+v^2)^2},$$

где $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{v}{u^2+v^2}$, $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{u}{u^2+v^2}$. **74.** $\frac{\partial z}{\partial x} = u + v$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{u-v}{2}$,

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{u+v}{2}$. **75.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{u\cos v + v\sin v}{e^u}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-u\sin v + v\cos v}{e^u}$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos v - u\sin v\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}\sin v + v\cos v\frac{\partial v}{\partial x}\right)}{e^u} - \frac{\frac{\partial u}{\partial x}(u\cos v + v\sin v)}{e^u},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cos v - u\sin v\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}\sin v + v\cos v\frac{\partial v}{\partial y}\right)}{e^u} - \frac{\frac{\partial u}{\partial y}(u\cos v + v\sin v)}{e^u},$$

где $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\sin v}{e^u}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\cos v}{e^u}$, $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\cos v}{e^u}$, $\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\sin v}{e^u}$.

76. $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{3zx^2}{4z^3+x^3+y^3}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{3y^2 z}{4z^3+x^3+y^3}$. **77.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x-yz}{xy-2z}$,

$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y-xz}{xy-2z}$. **78.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{(x^2+y^2)^2 + 2xz(x+y+z)}{(x^2+y^2)(x+y+z-x^2-y^2)}$, $\frac{\partial z}{\partial y} =$

$= \frac{(x^2+y^2)^2 + 2yz(x+y+z)}{(x^2+y^2)(x+y+z-x^2-y^2)}$. **79.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z\sin x - \cos y}{\cos x - y\sin z}$, $\frac{\partial z}{\partial y} =$

$= \frac{x\sin y - \cos z}{\cos x - y\sin z}$. **80.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-2xz}{1+x^2-4yz^3}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1+z^4}{1+x^2-4yz^3}$.

81. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{xb+yc}{zb-ay}$, $\frac{dy}{dx} = \frac{-zc-xa}{zb-ay}$. **82.** $\frac{dz}{dx} = \frac{2y-12yx^2}{zy-3y}$, $\frac{dy}{dx} =$

$= \frac{3-6zx^2}{zy-3y}$. **83.** $\frac{dy}{dx} = \frac{xy-z^2-yz+x^2}{z^2-xy-y^2+xz}$, $\frac{dz}{dx} = \frac{yz-x^2+y^2-xz}{z^2-xy-y^2+xz}$.

84. $\frac{dy}{dx}=\frac{-x^2\sin z+z^2\sin x}{y^2\sin z-z^2\sin y}$, $\frac{dz}{\partial x}=\frac{-x^2\sin x+x^2\sin y}{y^2\sin z-z^2\sin y}$. **85.** $\frac{dy}{dx}=$ $=\frac{-y\sin x\sin z+2\cos x\cos^3 z}{y\sin 2y+\sin z\cos x\cos^2 z}$, $\frac{dz}{dx}=\frac{2\sin 2y\cos^2 z+\sin^2 z\sin x\cos z}{y\sin 2y+\sin z\cos x\cos^2 z}$.

86. $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}\cdot\frac{y-x}{x+y}$; $\frac{dz}{dx}=\frac{1-xz}{1+xz}\cdot\frac{z}{x}$, $\frac{du}{dx}=\frac{1}{u}\left[\frac{y^2}{x}\cdot\frac{x-y}{x+y}+\right.$ $\left.+\frac{z^2}{x}\cdot\frac{xz-1}{xz+1}-x\right]$. **87.** $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{u^2-x^2}{u^2-z^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{u^2-y^2}{u^2-z^2}$, $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{z^2-x^2}{u^2-z^2}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{z^2-y^2}{u^2-z^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2\frac{u(x^2-z^2)^2+}{(u^2-z^2)^3}$ $\frac{+x(u^2-z^2)^2+z(u^2-x^2)^2}{(u^2-z^2)^3}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=2\frac{u(y^2-z^2)(x^2-z^2)}{(u^2-z^2)^3}+$ $+\frac{z(u^2-x^2)(u^2-y^2)}{(u^2-z^2)^3}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2\frac{y(u^2-z^2)^2+z(y^2-u^2)^2+u(z^2-y^2)^2}{(u^2-z^2)^3}$.

88. $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{z(u-x)}{x(u-z)}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{z(u-y)}{y(u-z)}$, $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{u(z-x)}{u(z-u)}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=$ $=-\frac{u(z-y)}{y(z-u)}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=zu\frac{(u-z)^2+(u-x)^2+(z-x)^2}{x^2(u-z)^3}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=zu\frac{(u-x)(u-y)+(z-x)(z-y)}{xy(u-z)^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=$ $=zu\frac{(u-z)^2+(u-y)^2+(z-y)^2}{y^2(u-z)^3}$. **89.** $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2xv^2-(x-2vy)(u^2+v^2)}{2x^2u-xy+2vy^2}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{u(x-2vy)-2xv(u^2+v^2)}{2x^2u-xy+2vy^2}$, $\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{yv-2xuv-2u^2y(u^2+v^2)}{2x^2u-xy+2vy^2}$, $\frac{\partial v}{\partial y}=$ $=\frac{(u^2+v^2)(2xu-y)+2u^3y}{2x^2u-xy+2vy^2}$. **90.** $\frac{\partial u}{\partial x}=-7/4$; $\frac{\partial u}{\partial y}=-9/4$; $\frac{\partial v}{\partial x}=$ $=-9/4$; $\frac{\partial v}{\partial y}=-7/4$. **91.** $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)(y-u)+(x+u)\frac{\partial u}{\partial x}}{(y-u)^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{(y-u)\frac{\partial u}{\partial y}-(x+u)\left(1-\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{(y-u)^2}$, где $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{-u}{x-3u^2}$; $\frac{\partial u}{\partial y}=$ $=\frac{-3y^2}{x-3u^2}$. **92.** $y'=1$; $y''=-\frac{2}{3}$, $z'=0$, $z''=-\frac{2}{3}$. **93.** $y'=\frac{5}{2}$, $y''=-\frac{379}{125}$, $z'=\frac{6}{5}$, $z''=\frac{4}{5}$. **94.** $\frac{dz}{dx}=2xy^2+2x^2y\cdot\frac{1-e^{x+y}}{e^{x+y}-2y}$.

95. $dz=\frac{-(2x+z)}{x+2z}dx-\frac{1}{x+2z}dy$, $d^2z=\frac{-6x^2-6z^2-6xz}{(x+2z)^3}dx^2-$ $-\frac{6x}{(x+2z)^3}dxdy-\frac{2}{(x+2z)^2}dy^2$. **96.** $dz=\frac{x^2-y^2}{xy+z^2}dx+\frac{y^2-xz}{xy+z^2}dy$, $d^2z=\frac{6x^2z^2y+2xzy^3+2xz^4-2zx^4}{(xy+z^2)^3}dx^2+\frac{8xz^2y^2+4x^3zy+4yz^4}{(xy+z^2)^3}dxdy+$ $+\frac{6xz^2y^2+2yzx^3+2yz^4-2y^4z}{(xy+z^2)^3}dy^2$. **97.** $dz=\frac{x^2-1}{z^2+1}\cdot\frac{z}{x}dx+\frac{y^2-1}{z^2+1}\cdot\frac{z}{y}dy$,

$$d^2z=\frac{1}{\left(z+\frac{1}{z}\right)^3}\left\{\left[\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\left(z+\frac{1}{z}\right)^2-\left(1-\frac{1}{z^2}\right)\left(x-\frac{1}{x}\right)^2\right]dx^2-\right.$$

$$-2\left[\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(y-\frac{1}{y}\right)\left(1-\frac{1}{z^2}\right)\right]dxdy+\left[\left(1+\frac{1}{y^2}\right)\left(z+\frac{1}{z}\right)^2-\right.$$

$$\left.\left.-\left(y-\frac{1}{y}\right)^2\left(1-\frac{1}{z^2}\right)\right]dy^2\right\}.$$ **98.** $dz=\frac{x^3-zy}{xy-z^3}\,dx+\frac{y^3-zx}{xy-z^3}\,dy,$

$$d^2z=\frac{x^4y^2-10x^3z^3y+2zxy^3+3x^6z^2+z^4y^2+3z^6x^2}{(xy-z^3)^3}\,dx^2+2\,\frac{3z^4xy-xy^5-z^7}{(xy-z^3)^3}-$$

$$-\frac{2y^4z^3-2x^4z^3-x^5y+3z^2y^3x^3+x^2y^2z}{(xy-z^3)^3}\,dxdy+\frac{x^2y^4-10z^3y^3x+2zx^3y+z^4x^2}{(xy-z^3)^3}+$$

$$+\frac{3z^2y^6+3z^6y^2}{(xy-z^3)^3}\,dy^2.$$ **99.** $dz=(v\cos v-\sin v)\,dx+(\cos v+v\sin v)\,dy,$

$d^2z=\frac{v}{u}\sin^2 v dx^2-2\,\frac{v}{u}\sin v\cos v dxdy+\frac{v}{u}\cos^2 v dy^2.$ **100.** $dz=$

$=\frac{2uv+v}{1+uv}\,dx+\frac{uv-2u}{1+uv}\,dy,$ $d^2z=\frac{2uv+2uv^2-uv^3+v}{(1+uv)^3}\,dx^2+$

$+\frac{4u^2v-2uv+2uv^2}{(1+uv)^3}\,dxdy+\frac{u^2v+2u^3v-uv+2u}{(1+uv)^3}\,dy^2.$ **101.** $dz=\frac{2}{1+u}\times$

$\times\,[e^{-u-v}(1+u+v)\,dx+e^{v-u}(v-u-1)\,dy],$ $d^2z=\frac{2e^{-2u}}{u^2(1+u)^3}\,[e^{-2v}(1+$

$+3u+3u^2-2u^3-2u^4-v-3uv-3u^2v-u^3v)\,dx^2-(u^2+3u+1)\,dxdy+$

$+e^{2v}(1+3u+3u^2-2u^3-2u^4+v+3uv+3u^2v+u^3v)\,dy^2].$ **102.** $du=$

$=\frac{y-u}{x-y}\,dx+\frac{y-v}{x-y}\,dy,$ $dv=\frac{x-u}{y-x}\,dx+\frac{x-v}{y-x}\,dy,$ $-d^2u=d^2v=$

$=\frac{2(y-u)}{(x-y)^2}\,dx^2+\frac{2(y-v+u-x)}{(x-y)^2}\,dx\,dy+\frac{2(v-x)}{(x-y)^2}\,dy^2.$ **103.** $-\frac{6}{25}\,dx^2.$

104. $-\frac{5}{18}\,dx^2+\frac{1}{9}\,dx\,dy-\frac{5}{18}\,dy^2.$ **105.** $\frac{4}{15}\,dx^2+\frac{4}{15}\,dy^2.$ **106.** $-4dx^2-$

$-64dx\,dy-132dy^2.$ **107.** $-\sqrt{2}\,dx^2-\frac{\sqrt{3}}{2}\,dx\,dy-\sqrt{2}\,dy^2.$ **108.** $d^2u=$

$=\frac{55}{32}\,dx^2+\frac{25}{16}\,dx\,dy+\frac{25}{32}\,dy^2,$ $d^2v=-\frac{25}{32}\,dx^2+\frac{25}{16}\,dx\,dy+\frac{55}{32}\,dy^2.$

109. $d^2u=\left[\frac{\pi}{6}(\sqrt{3}-1)-\sqrt{3}\right]dx^2+\left(\sqrt{3}-\frac{\pi^2}{4}(2\sqrt{3}-1)\right)dx\,dy+$

$+(2\pi-\pi\sqrt{3})\,dy^2,$ $d^2v=\left(\frac{\pi}{2\sqrt{3}}-\sqrt{3}\right)dx^2+\left(\frac{\pi^2}{4}+\sqrt{3}\right)dx\,dy+$

$+2\pi\,dy^2.$ **110.** $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_2'+zyF_1'}{xyF_1'},$ $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_2'+zxF_1'}{xyF_1'}.$ **111.** $\frac{\partial z}{\partial x}=$

$=-\frac{yF_1'+zF_3'}{yF_2'+xF_3'},$ $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{xF_1'+zF_2'}{yF_2'+xF_3'}.$ **112.** $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2xF_1'-2xF_3'}{zF_2'-zF_3'},$ $\frac{\partial z}{\partial y}=$

$= \frac{yF_2' - yF_1'}{zF_2' - zF_3'}$. **113.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-zF_1' + F_2' - yF_3'}{xF_1' + yF_2' - F_3'}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{F_1' - zF_2' - xF_3'}{xF_1' + yF_2' - F_3'}$.

143. $x''' = 0$. **144.** $x'' + x = e^y$. **145.** $x''' + x^2 (x'')^2 - y (x')^3 = 0$. **146.** $x'' + (x')^2 + x^3 = 0$. **147.** $y' = y$. **148.** $u' - 4xu + 4x^3 = 0$. **149.** $-u' = 2x (u + x)$. **150.** $ty'' + y = 0$. **151.** $y'' + 2y' + y = 0$. **152.** $y''' - y'' - y' + y = 0$. **153.** $u'' - u = e^x$. **154.** $u'' - a^2 u = 2x$. **155.** $u'' - c^2 u = 0$. **156.** $u'' - u' + u = 0$. **157.** $u'' \operatorname{ch}^3 t = 1$. **158.** $yu'' + u' = 0$. **159.** $v'' + v = 0$. **160.** $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$. **161.** $\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0$. **162.** $(x - y) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0$. **163.** $\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0$. **164.** $\frac{\partial z}{\partial v} = -1$. **165.** $\frac{\partial z}{\partial u} = 1$. **166.** $4 \sqrt{\frac{v}{u}} \frac{\partial z}{\partial v} + 1 = 0$. **167.** $\frac{\partial z}{\partial v} + 2v = 0$. **168.** $\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = v$. **169.** $\frac{\partial z}{\partial u} = 0$. **170.** $\frac{\partial w}{\partial u} = 0$. **171.** $\frac{\partial w}{\partial u} = 2u$. **172.** $2 \frac{\partial w}{\partial u} + u = 0$. **173.** $\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{w}{v}$. **174.** $\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v} = 0$. **175.** $\frac{\partial w}{\partial v} \ln \frac{w}{u} = u$. **176.** $\frac{\partial w}{\partial v} = 0$. **177.** $\frac{\partial w}{\partial \tau} \cdot \tau = w$. **178.** $\frac{\partial w}{\partial \eta} = 2\eta$. **179.** $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{y - z}{y + z}$. **180.** $\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{x}{y}$. **181.** $\frac{1}{2} = \frac{\partial w}{\partial v}\left(1 + \frac{\partial w}{\partial u}\right)$. **182.** $\frac{\partial x}{\partial u} = 1$. **183.** $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$. **184.** $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0$. **185.** $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0$. **186.** $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} - \frac{1}{3} \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{2}{3} \frac{\partial z}{\partial v} = 0$. **187.** $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{1}{2} \frac{\partial z}{\partial u} = 0$. **188.** $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + \frac{\partial z}{\partial v} = 0$. **189.** $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$. **190.** $2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{1}{v} \frac{\partial z}{\partial u} = 0$. **191.** $\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} - u \frac{\partial z}{\partial u} = 0$. **192.** $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} - \frac{1}{4v} \frac{\partial z}{\partial u} = 0$. **193.** $\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0$. **194.** $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + \cos u \frac{\partial z}{\partial v} = 0$. **195.** $\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} - 2 \frac{u}{v^2} \frac{\partial z}{\partial u} = 0$. **196.** $\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} - \frac{1}{v}\left(\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}\right) = 0$. **197.** $\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} - 2 \frac{\partial z}{\partial u} = 0$. **198.** $2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{1}{u - v}\left(\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v}\right) = 0$. **199.** $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + m^2 (u^2 + v^2) z = 0$. **200.** $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial w^2} + 2 \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = 0$. **201.** $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = \frac{1}{3} \frac{\partial z}{\partial w}$. **202.** $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} = 0$. **203.** $v^2 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} - 2u \frac{\partial w}{\partial u} = 0$. **204.** $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} = \frac{1}{2}$. **205.** $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} - \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} - \frac{2}{u + v} \frac{\partial w}{\partial u} + \frac{2w}{(u + v)^2} = 2$. **206.** $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} + \left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2 = 0$. **207.** $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} = 0$. **208.** $\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = \frac{1}{4} \cdot \frac{w}{(u - v)^2}$. **209.** $\frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 0$.

210. $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}+\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{\partial w}{\partial v}-w=0$. **211.** $\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}+\frac{w}{4\sin^2\left(\frac{u-v}{2}\right)}=0$.

Указание. Вначале перейти к переменным α и y и функции $z(\alpha, y)$, а затем к переменным u и v и функции $w(u, v)$. **212.** $r\frac{\partial z}{\partial r}$.

213. $-\frac{\partial z}{\partial \varphi}$. **214.** $\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2\cos 2\varphi-\frac{\cos 2\varphi}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2-2\frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial z}{\partial \varphi}\cdot\frac{\sin 2\varphi}{r}$.

215. $\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2}$. **216.** $r^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}$. **217.** $\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$. **218.** $4\sqrt{3}-$ $-\frac{1}{2}$. **219.** $-\frac{4}{\sqrt{2}}$. **220.** а) $\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\left(-\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_1, y_1)\right)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_1, y_1)}{\pm\sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_1, y_1)\right)^2+\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_1, y_1)\right)^2}}$,

б) $\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_1, y_1)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_1, y_1)}{\pm\sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_1, y_1)\right)^2+\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_1, y_1)\right)^2}}$. **221.** $\frac{5}{\sqrt{3}}$. **222.** $\sqrt{3}$.

223. $-\frac{8\sqrt{3}}{7a}$. **224.** $\dfrac{\frac{\partial z}{\partial x}(x(t_0), y(t_0))\,y'_t(t_0)-\frac{\partial z}{\partial y}(x(t_0), y(t_0))\,x'_t(t_0)}{\pm\sqrt{(x'_t(t_0))^2+(y'_t(t_0))^2}}$.

225. $\sqrt{\frac{2}{3}}$. **226.** $x-\frac{1}{4}=y-\frac{1}{3}=z-\frac{1}{2}$, $x+y+z=\frac{13}{12}$. **227.** $x-$ $-\frac{\pi}{2}+1=y-1=\frac{z-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$, $x+y+\sqrt{2}\,z-\frac{\pi}{2}-4=0$. **228.** $x-\frac{3}{2}=$ $=\frac{y+\frac{5}{4}}{-3}=\frac{z-3/2}{-1}$, $x-3y-z-\frac{15}{4}=0$. **229.** $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{0}$, $x+$ $+y-1=0$. **230.** $\frac{x-\frac{a}{\sqrt{2}}}{a}=\frac{y-\frac{b}{\sqrt{2}}}{-b}=\frac{z-\frac{c\pi}{4}}{c\sqrt{2}}$, $ax-by+\sqrt{2}\,cz-$ $-\frac{a^2}{\sqrt{2}}+\frac{b^2}{\sqrt{2}}-\frac{c^2\pi\sqrt{2}}{4}=0$. **231.** $\frac{x-\frac{r}{2}}{\sqrt{10}}=\frac{y-\frac{r}{2\sqrt{2}}}{-3\sqrt{5}}=\frac{z-\frac{r\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}}{1}$, $\sqrt{10}\,x-3\sqrt{5}\,y+z=0$. **232.** $\frac{x+2}{27}=\frac{y-1}{28}=\frac{z-6}{4}$, $27x+28y+4z+2=$ $=0$. **233.** $\frac{x-1}{-3}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-4}{-3/4}$, $-3x+y-\frac{3}{4}z+3=0$. **234.** $\frac{x-a}{2\sqrt{3}}=$ $=\frac{y+\sqrt{3}\,a}{-2}=\frac{z-\frac{2\pi}{3}a}{1}$, $2\sqrt{3}\,x-2y+z-4a\sqrt{3}-\frac{2\pi}{3}a=0$. **235.** $\frac{x-5}{1}=$

$= \frac{y-4}{2} = \frac{z+2}{0}$, $x+2y-13=0$. **236.** $x+5y-z-5=0$, $\frac{x-5}{1} = \frac{y-1}{5} = \frac{z-5}{-1}$. **237.** $x+4y-4z-\frac{11}{2}=0$, $\frac{x-2}{1} = \frac{y-\frac{1}{2}}{4} = \frac{z+\frac{3}{8}}{-4}$. **238.** $8x+13y+5z-26=0$, $\frac{x-1}{8} = \frac{y-1}{13} = \frac{z-1}{5}$. **239.** $-x+3z-5=0$, $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-4}{0} = \frac{z-2}{3}$. **240.** $x+y+z-3=0$, $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1}$. **241.** $2x+y+z=0$, $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+1}{1}$. **242.** $12x-9y+2z-9=0$, $\frac{x-3}{12} = \frac{y-5}{-9} = \frac{z-9}{2}$. **243.** $\frac{x-\frac{\sqrt{2-m^2}}{2}}{\frac{m^2-1}{\sqrt{2-m^2}}} = \frac{y-\frac{1}{2}}{m^2-1} = \frac{z-\frac{\sqrt{2-m^2}}{2}}{-\frac{1}{\sqrt{2-m^2}}}$,

$$\left(x-\frac{\sqrt{2-m^2}}{2}\right)\cdot\frac{m^2-1}{\sqrt{2-m^2}} + \left(y-\frac{1}{2}\right)\cdot(m^2-1) - \left(z-\frac{\sqrt{2-m^2}}{2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2-m^2}} =$$

$=0$. **244.** $x-y+\sqrt{2}z-\frac{\pi\sqrt{2}}{4}=0$, $\frac{x-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1} = \frac{y-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-1} = \frac{z-\pi/4}{\sqrt{2}}$. **245.** $(e+1)x-(e+\pi)y+(e+1)z=0$, $\frac{x-e^2}{e+1} = \frac{y-e-1}{-e-\pi} = \frac{z-\pi}{e+1}$. **246.** $(1/3,\ 1/3)$ — точка максимума. **247.** $(a,\ b)$ — точка максимума; $(0,\ 2b)$, $(0,\ 0)$, $(2a,\ 0)$, $(2a,\ 2b)$ — седловые точки. **248.** $(1/\sqrt[3]{3},\ 1/\sqrt[3]{3})$ — точка минимума. **249.** $(a,\ a)$ при $a>0$ — точка минимума, при $a<0$ — точка максимума; $(0,\ 0)$ — седловая точка. **250.** $(3,\ 3)$, $(-3,\ -3)$ — точки минимума, $(0,\ 0)$ — седловая точка. **251.** $(\sqrt{2},\ -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2},\ \sqrt{2})$ — точки минимума, $(0,\ 0)$ — седловая точка. **252.** $(0,\ 0)$ — седловая точка. Указание. Рассмотреть $f(x,\ 0)$ и $f(y^2,\ y)$ в окрестности точки $(0,\ 0)$. **253.** $(1/2,\ -1)$ — точка минимума. **254.** $(1,\ 2)$, $(-1,\ -2)$ — точки минимума. **255.** $(1,\ 3)$ — точка минимума; $(-1,\ -3)$ — точка максимума; $(3,\ 1)$, $(-3,\ -1)$ — седловые точки. **256.** $(-1,\ -1,\ 1)$ — точка минимума. **257.** $(0,\ 0,\ 0)$ — седловая точка. **258.** $(2/7,\ 2/7,\ 2/7)$ — точка максимума; все точки плоскости $x=0$ и точки прямых $z=0$, $y+3x-2=0$ и $y=0$, $2-2z-3x=0$ — седловые; при $z=0$, $y\neq 0$, $x\neq 0$ и $y+3x\neq 2$ — нестрогий экстремум. **259.** $(\pi/6,\ \pi/6)$ — точка максимума. $(5\pi/6,\ 5\pi/6)$ — седловая точка. **260.** $(0,\ 0)$ — точка минимума; все точки окружности $x^2+y^2=1$ — точки нестрогого максимума. **262.** $(2,\ 1/2,\ 1)$ — точка минимума. **263.** $(0,\ 0)$ — точка максимума. **264.** $(0,\ 0)$ — седловая точка; все точки гиперболы $x^2-y^2=1$ — точки нестрогого максимума; все точки гиперболы $y^2-x^2=1$ — точки нестрогого минимума. **265.** а) Седловая точка, б) седловая точка. **266.** Точка максимума. **267.** а) Седловая точка, б) седловая точка.

268. $\left(\frac{1}{2}a\sqrt{3}, \frac{1}{2}a\right)$, $\left(-\frac{1}{2}a\sqrt{3}, \frac{1}{2}a\right)$ — точки максимума ординаты; $\left(\frac{1}{2}a\sqrt{3}, -\frac{1}{2}a\right)$, $\left(-\frac{1}{2}a\sqrt{3}, -\frac{1}{2}a\right)$ — точки минимума ординаты; $(a\sqrt{2}, 0)$ — точка максимума абсциссы; $(-a\sqrt{2}, 0)$ — точка минимума абсциссы. **269.** $(a\sqrt[3]{4}, a\sqrt[3]{2})$ — точка максимума абсциссы; $(a\sqrt[3]{2}, a\sqrt[3]{4})$ — точка максимума ординаты. **270.** $(4, 4)$, $(4, -4)$ — точки максимума абсциссы; $(2\sqrt{3}, -2\sqrt[4]{27})$ — точка минимума ординаты; $(2\sqrt{3}, 2\sqrt[4]{27})$ — точка максимума ординаты. **271.** $(0, 2)$ — точка максимума ординаты, $(\sqrt{2(\sqrt{5}-1)}, 1-\sqrt{5})$, $(-\sqrt{2(\sqrt{5}-1)}, 1-\sqrt{5})$ — точки минимума ординаты. **272.** $(-1, \sqrt{3})$, $(-1, -\sqrt{3})$ — точки минимума абсциссы; $(3, 3\sqrt{3})$ — точка максимума ординаты; $(3, -3\sqrt{3})$ — точка минимума ординаты; $(8, 0)$ — точка максимума абсциссы. **273.** $(\sqrt[4]{3}/2\sqrt{2}, \sqrt[4]{27}/2\sqrt{2})$ — точка максимума абсциссы; $(-\sqrt[4]{3}/2\sqrt{2}, -\sqrt[4]{27}/2\sqrt{2})$ — точка минимума абсциссы; $(\sqrt[4]{27}/2\sqrt{2}, \sqrt[4]{3}/2\sqrt{2})$ — точка максимума ординаты; $(-\sqrt[4]{27}/2\sqrt{2}, -\sqrt[4]{3}/2\sqrt{2})$ — точка минимума ординаты. **274.** $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{2}a+\frac{1}{2}\sqrt{a^2+4}\right)$ — точка максимума; $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{2}a-\frac{1}{2}\sqrt{a^2+4}\right)$ — точка минимума. **275.** $\left(-6-\frac{1}{3\sqrt{3}}, -6+\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)$ — точка максимума; $\left(-6+\frac{1}{3\sqrt{3}}, -6-\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)$ — точка минимума. **276.** $\left(\frac{16}{25}, \frac{256}{3125}\right)$ — точка максимума. **277.** $(-3, 6)$ — точка максимума; $(3, -6)$ — точка минимума. **278.** $(0, -2)$ — точка локального минимума, $z(0, -2)=1$, $(0, 16/7)$ — точка локального максимума, $z(0, 16/7)=-8/7$. **279.** $z_{\max}=0$ при $x=y=1$; $z_{\min}=-4$ при $x=1$, $y=9$. **280.** $z_{\max}=4$ при $x=y=1$, $z_{\min}=-4$ при $x=y=-1$. **281.** $z_{\min}^{(1)}=-\sqrt{2}$ при $x=0$, $y=0$; $z_{\max}^{(1)}=\sqrt{2}$ при $x=0$, $y=0$; $z_{\max}^{(2)}=\sqrt{1+\sqrt{3}}$ при $x=1$, $y=1$ и $x=-1$, $y=-1$; $z_{\min}^{(2)}=-\sqrt{1+\sqrt{3}}$ при $x=1$, $y=1$ и $x=-1$, $y=-1$. **282.** $z_{\min}=-12\sqrt{3}$ при $x=-6$, $y=-6\sqrt{3}$, $z_{\max}=12\sqrt{3}$ при $x=-6$, $y=6\sqrt{3}$. **285.** $(4,2,-1)$ — точка максимума, $f_{\max}=12$; $(-4, -2, 1)$ — точка минимума, $f_{\min}=-10$. **286.** $(\pi/3, \pi/6)$ — точка максимума, $f_{\max}=\pi/3$; $(-\pi/3, -\pi/6)$ — точка минимума, $f_{\min}=-\pi/3$. **287.** $(a/2, a/2)$ — точка максимума, $f_{\max}=a^2/4$. **288.** $(a/\sqrt{3}, -a/\sqrt{3}, -a/\sqrt{3})$.

$(-a/\sqrt{3},\ a/\sqrt{3},\ -a/\sqrt{3})$, $(-a/\sqrt{3},\ -a/\sqrt{3},\ a/\sqrt{3})$, $(a/\sqrt{3},\ a/\sqrt{3},\ a/\sqrt{3})$ — точки максимума, $f_{\max}=a^3/3\sqrt{3}$; $(-a/\sqrt{3},\ -a/\sqrt{3},\ -a/\sqrt{3})$, $(-a/\sqrt{3},\ a/\sqrt{3},\ a/\sqrt{3})$, $(a/\sqrt{3},\ -a/\sqrt{3},\ a/\sqrt{3})$, $(a/\sqrt{3},\ a/\sqrt{3},\ -a/\sqrt{3})$ — точки минимума, $f_{\min}=-a^3/3\sqrt{3}$. **289.** $(a/\sqrt{3},\ a/\sqrt{3},\ a/\sqrt{3})$ — точка максимума, $f_{\max}=a^3/3\sqrt{3}$. **290.** $(4/3,\ 4/3,\ 7/3)$, $(4/3,\ 7/3,\ 4/3)$, $(7/3,\ 4/3,\ 4/3)$ — точки максимума, $f_{\max}=4\frac{4}{27}$; $(2,\ 2,\ 1)$, $(2,\ 1,\ 2)$, $(1,\ 2,\ 2)$ — точки минимума, $f_{\min}=4$. **291.** $(1,\ 1,\ 1)$ — точка максимума, $f_{\max}=2$. **292.** $f_{\max}=1/27mn$ в точке $(1/3,\ 1/\sqrt{3m},\ 1/\sqrt[3]{3n})$. **293.** $f_{\min}=\frac{ma^m}{n^m}$ в точке $(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$, где $x_i=a/n$. Указание. Воспользоваться тем, что определитель матрицы квадратичной формы d^2f удовлетворяет соотношению $A_n=1+A_{n-1}$. **294.** $f_{\max}=k\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2}$ в точке $(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$, где $x_i=\alpha_i k\Big/\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2}$, $f_{\min}=-k\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2}$ в точке $(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$, где $x_i=-\alpha_i k\Big/\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2}$. **295.** $f_{\min}=-2$ при $x=1$, $y=2$; $f_{\max}=2/27$ при $x=1/3$, $y=2/3$. **296.** $f_{\max}=17$ при $x=0$, $y=1$ и $x=1$, $y=1$; $f_{\min}=-17/4$ при $x=-\frac{1}{2}$, $y=0$. **297.** $f_{\max}=8$ при $x=2$, $y=0$; $f_{\min}=-1/16$ при $x=\frac{1}{2}$, $y=1/4$. **298.** $f_{\max}=2/9$ при $x=1$, $y=4/3$; $f_{\min}=0$ на всей границе. **299.** $f_{\max}=2^7$ при $x=2$, $y=2$; $f_{\min}=-2$ при $x=1$, $y=0$. **300.** $f_{\max}=1$ при $x=\pi$, $y=0$ и $x=0$, $y=\pi$; $x=0$, $y=0$ и $x=\pi$, $y=\pi$; $f_{\min}=-1/8$ при $x=\pi/3$, $y=\pi/3$ и $x=2\pi/3$, $y=2\pi/3$. **301.** $f_{\max}=2$ при $x=2$, $y=0$; $f_{\min}=0$ во всех точках хорды $x=1$ и на параболе $y^2=x$, составляющей часть контура области. **302.** $f_{\max}=a^3+27$ при $x=0$, $y=a$ и $x=a$, $y=0$; $f_{\min}=0$ при $x=3$, $y=3$. **303.** $f_{\max}=2a^4$ при $x=a$, $y=a$; $f_{\min}=-1$ при $x=0$, $y=1$ и $x=1$, $y=0$. **304.** $f_{\max}=a^2$ при $x=y=z=a/\sqrt{3}$, $f_{\min}=-a^2/2$ на всей окружности $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x+y+z=0$. **305.** $f_{\max}=1+\sqrt{2}$ при $x=1/\sqrt{2}$, $y=1/\sqrt{2}$, $z=1$; $f_{\min}=-1/2$ при $x=-1/2$, $y=-1/2$, $z=1/2$. **306.** $f_{\min}=0$ при $x=0$, $y=0$; $f_{\max}=2\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}\cdot\frac{\sqrt{5}+3}{4}$ при $x=y$, $\cos x=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$. **307.** $a/5$, $a/5$, $a/5$, $a/5$, $a/5$. **308.** $\frac{a}{n}$, $\frac{a}{n}$, ..., $\frac{a}{n}$. **309.** $x_i=\frac{a\cdot\alpha_i}{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}$, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$. Указание. Рас-

смотреть $\ln z$. **310.** a/n. **311.** $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=3$. **312.** Куб со стороной $a/12$. **313.** Куб со стороной $\sqrt[3]{V}$. **314.** Длины сторон равны $\frac{2}{3}a$, $\frac{2}{3}b$, $\frac{2}{3}c$. **316.** Стороны треугольника равны $\frac{3p}{4}$, $\frac{3p}{4}$ и $\frac{p}{2}$. **317.** Если B и C — точки пересечения прямой со сторонами угла, то $|BM|=|MC|$. **318.** DBE — равнобедренный треугольник. **319.** Правильный. **320.** Точка O должна удовлетворять условиям $\widehat{AOB}=\widehat{BOC}=\widehat{AOC}=\frac{2\pi}{3}$. **321.** Центр тяжести треугольника. **322.** $|OO_1|=\frac{a_1b_2-a_2b_1}{b_1+b_2}$, $|OO_2|=\frac{a_1b_2-a_2b_1}{a_1+a_2}$. **323.** Квадраты радиуса основания, высоты и образующей конуса относятся, как $1:2:3$. **324.** Вписанный в окружность. **325.** AC — диаметр, точки B и D расположены на окружности по разные стороны диаметра $\widehat{CAB}=\widehat{CAD}=\frac{1}{2}\alpha$. **327.** $p\sqrt{5}$. **328.** $\sqrt{6+\sqrt{12}}$, $\sqrt{6-\sqrt{12}}$. **329.** $\frac{(a-a_1)L+(b-b_1)M+(c-c_1)N}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}}$, $L=mn_1-nm_1$, $M=nl_1-ln_1$, $N=lm_1-ml_1$. **330.** $x=\frac{\sum_{i=1}^{n} m_ix_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$, $y=\frac{\sum_{i=1}^{n} y_im_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$.

Глава IV

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

§ 1. ПЕРВООБРАЗНАЯ И ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ РИМАНА

1. Привести пример функции, определенной на $[a, b]$, непрерывной на (a, b), но не интегрируемой по Риману на $[a, b]$.

2. Привести пример дифференцируемой на всей прямой функции, производная которой не интегрируема по Риману $[-1, 1]$.

3. Привести пример функции, интегрируемой по Риману на $[-1, 1]$, но не имеющей на этом отрезке первообразной.

4. Доказать, что функция Римана

$$R(x)=\begin{cases} 0\ , & x\text{ — иррациональное;} \\ \dfrac{1}{n}, & x=\dfrac{m}{n}, \text{ где } m\text{ — целое, } m\neq 0,\ n\text{ — натуральное} \\ & \text{число, } \dfrac{m}{n}\text{ — несократимая дробь} \end{cases}$$

интегрируема на $[0,\ 1]$ и найти $F(\alpha,\ \beta)=\int\limits_{\alpha}^{\beta} R(x)\,dx$, $(\alpha,\ \beta)\subset[0,\ 1]$.

5. Функция Дирихле

$$D(x)=\begin{cases} 1, & x\text{ — рациональное,} \\ 0, & x\text{ — иррациональное} \end{cases}$$

отличается от функции Римана только в рациональных точках. Функция Дирихле не интегрируема по Риману (почему?) на $[0,\ 1]$. Таким образом, изменение функции на счетном множестве точек может вывести ее из класса интегрируемых функций. Доказать, что изменение интегрируемой функции на конечном множестве точек не нарушает интегрируемости функции и не изменяет величины интеграла.

6. Привести пример неинтегрируемой по Риману на $[0,\ 1]$ функции, квадрат которой есть интегрируемая по Риману на $[0,\ 1]$ функция.

7. Функция $f(x)$ интегрируема по Риману на $[0,\ 1]$ и $\int\limits_0^1 f(x)\,dx>0$. Доказать, что существует отрезок $[\alpha,\ \beta]\subset[0,\ 1]$ такой, что $f(x)\geqslant 0$ для любого $x\in[\alpha,\ \beta]$.

8. Доказать, что для ограниченной и монотонной на $[0,\ 1]$ функции f существует постоянная C такая, что для любого $n\in N$

$$\left|\int\limits_0^1 f(x)\,dx-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right|<\frac{C}{n}.$$

9. Функция f имеет на $[0,\ 1]$ ограниченную производную. Доказать, что существует постоянная C такая, что для любого $n\in N$

$$\left|\int\limits_0^1 f(x)\,dx-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right|<\frac{C}{n}.$$

10. Пусть функция f непрерывна на $[a,\ b]$ и для любых x_1 и x_2 из $[a,\ b]$ справедливо неравенство

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\quad\text{(свойство выпуклости).}$$

Доказать, что тогда

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a).$$

11. Пусть функции f и g непрерывны и монотонно возрастают на $[0, 1]$. Доказать, что

$$\int_0^1 f(x)\,g(x)\,dx \geqslant \int_0^1 f(x)\,dx \cdot \int_0^1 g(x)\,dx.$$

12. Модулем непрерывности функции f на отрезке $[a, b]$ называется функция

$$w(\delta) = \sup |f(x_1) - f(x_2)|.$$

$$x_1,\ x_2,\ |x_1 - x_2| < \delta,\ x_1,\ x_2 \in [a, b].$$

Доказать, что для разбиения T_δ отрезка $[a, b]$ с параметром δ справедлива оценка

$$S(f, T_\delta) - s(f, T_\delta) \leqslant (b-a)\,w(\delta).$$

13. Функция f интегрируема по Риману на $[a, b]$. Доказать, что существует последовательность непрерывных на $[a, b]$ функций φ_n таких, что

$$\int_a^b |f(x) - \varphi_n(x)|\,dx \to 0, \quad n \to \infty.$$

14. Доказать, что интегрируемая по Риману на $[a, b]$ функция f обладает свойством интегральной непрерывности, т. е. для любого отрезка $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$

$$\lim_{h \to 0} \int_\alpha^\beta |f(x+h) - f(x)|\,dx = 0.$$

15. Привести пример непрерывной на $[a, b]$ и не равной тождественно нулю функции f, для которой, $\int_a^b f(x)\,dx = 0$.

16. Доказать, что если непрерывная на $[a, b]$ функция f не равна тождественно нулю, то найдется отрезок $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ такой, что $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx \neq 0$ (ср. с задачей № 4).

17. Доказать, что для непрерывной на $[a, b]$ функции f из равенства $\int_a^b f^2(x)\,dx = 0$ следует, что f есть тождественный нуль на $[a, b]$.

18. Функции f и g интегрируемы по Риману на $[a, b]$. Доказать неравенство

$$\left[\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx\right]^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\, dx \cdot \int_a^b g^2(x)\, dx.$$

19. Функции f и g непрерывны на $[a, b]$. Найти необходимое и достаточное условие справедливости равенства

$$\left[\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx\right]^2 = \int_a^b f^2(x)\, dx \cdot \int_a^b g^2(x)\, dx.$$

20. Доказать, что для непрерывной на всей числовой прямой функции f, периодической с периодом T, и любого числа a справедливо равенство

$$\int_a^{a+T} f(x)\, dx = \int_0^T f(x)\, dx.$$

21. Функция f непрерывна на всей числовой прямой, и для любого числа a справедливо равенство

$$\int_a^{a+T} f(x)\, dx = \int_0^T f(x)\, dx.$$

Доказать, что f — периодическая функция.

22. Функция f определена на всей числовой прямой, непрерывна и периодическая с периодом T. Найти необходимое и достаточное условие для того, чтобы функция

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$$

была периодической с периодом T.

23. Функция f непрерывна на $[-l, l]$. Доказать, что если f четная, то

$$\int_{-l}^{l} f(x)\, dx = 2\int_0^l f(x)\, dx,$$

а если f нечетная, то

$$\int_{-l}^{l} f(x)\, dx = 0.$$

24. Доказать, что любая первообразная нечетной функции является функцией четной, а среди первообразных четной функции есть, и притом только одна, нечетная функция.

25. Доказать, что для непрерывной на $[-1, 1]$ функции справедливо равенство:

$$\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx = 2\int_0^{\pi/2} f(\sin x)\,dx = 2\int_0^{\pi/2} f(\cos x)\,dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\cos x)\,dx.$$

26. Функция φ непрерывна на $[0, l]$, и для всех $x \in [0, l]$ имеем $\varphi(l-x) = \varphi(x)$. Функция f непрерывна на отрезке $\varphi([0, l])$.

Доказать, что:

а) $\int_0^{l} f(\varphi(x))\,dx = 2\int_0^{l/2} f(\varphi(x))\,dx;$

б) $\int_0^{l} xf(\varphi(x))\,dx = \frac{l}{2}\int_0^{l} f(\varphi(x))\,dx.$

27. Функция

$$g(x) = \frac{-20(x^4 - 32x^3 + 12x^2 + 8x - 64)}{16x^6 - 32x^5 + 169x^4 - 1056x^3 + 6784x^2 - 512x + 256}$$

всюду, кроме точки $x = 1$, равна $\frac{f'(x)}{1 + f^2(x)}$, где

$$f(x) = \frac{x(80 - 5x)}{4(1 - x)(x^2 + 4)}.$$

Найти:

а) $\int_{-4}^{0} g(x)\,dx$; б) $\int_0^{4} g(x)\,dx.$

28. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x \leqslant 1/2; \\ D(x), & 1/2 < x \leqslant 1. \end{cases}$$

Указать, какое из следующих соотношений неверно и почему:

а) $\int_0^{1/2} f(x)\,dx = \int_0^{\pi/6} f(\sin t)\cos t\,dt;$

б) $\int_0^{1/2} f(x)\,dx = \int_0^{\frac{5\pi}{6}} f(\sin t)\cos t\,dt.$

29. Привести пример непрерывных на $[0, 1]$ функций f и g таких, что g монотонна на $[0, 1]$, $g[0, 1] = [0, 1]$ и функция $f(g(x)) \times g'(x)$ не интегрируема по Риману на $[0, 1]$.

30. Найти:

а) $\frac{d}{da}\int\limits_a^b e^{-x^2}dx$; б) $\frac{d}{dx}\int\limits_a^b e^{-x^2}dx$;

в) $\frac{d}{db}\int\limits_a^b e^{-x^2}dx$; г) $\frac{d}{db}\int\limits_a^{b^2} \ln(1+x^2)\,dx$; д) $\frac{d}{da}\int\limits_{\sin a}^{\cos a} \ln(1+x^2)\,dx$.

31. Пусть

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

Доказать, что f интегрируема на $[-1, 1]$ и $F(x)=\int\limits_{-1}^{x} f(t)\,dt$ дифференцируема на $(-1, 1)$. Найти $F'(0)$.

32. Пусть интегрируемая на $[a, b]$ функция f имеет в точке $x_0\in$ $\in(a, b)$ неустранимый разрыв первого рода и $F(x)=\int\limits_a^x f(t)\,dt$. Доказать, что F не является дифференцируемой в точке x_0.

33. Пусть

$$g(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

Доказать, что существует постоянная C такая, что

$$\left|\int\limits_0^x g(t)\,dt\right|\leqslant Cx^2,\quad |x|\leqslant 1.$$

34. Привести пример функции, имеющей неустранимый разрыв в точке $x=0$, интегрируемой по Риману на $[-1, 1]$, такой, что функция $F(x)=\int\limits_{-1}^{x} f(t)\,dt$ дифференцируема во всех точках интервала $(-1, 1)$.

35. Функция f непрерывна и неотрицательна на $[0, +\infty)$ и $\int\limits_0^x f(t)\,dt\neq 0$ для любого $x>0$. Доказать, что функция

$$\varphi(x)=\frac{\int\limits_0^x tf(t)\,dt}{\int\limits_0^x f(t)\,dt}$$

возрастает на $(0, +\infty)$.

36. Доказать, что для любого $T>\pi/2$ справедливо неравенство

$$\int_{\pi/2}^{T} \frac{\cos x}{x}\, dx < 0.$$

37. Функция f непрерывна на $[0, +\infty)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$. Найти

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_{0}^{x} f(t)\, dt.$$

38. Функция f непрерывна и неотрицательна на $[a, b]$. Доказать, что

$$\lim_{n\to+\infty} \left[\int_{a}^{b} f^n(x)\, dx\right]^{1/n} = M,$$

где

$$M = \max_{x\in[a,b]} f(x),$$

39. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^n x\, dx = 0.$$

40. Сравнить числа $\int_{0}^{\pi} e^{\sin^2 x}\, dx$ и $3\pi/2$.

41. На отрезке $[-\pi/2, \pi/2]$ нет точки ξ такой, что

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x\sin x\, dx = \xi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin x\, dx,$$

так как $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin x\, dx = 0$, а $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x\sin x\, dx \neq 0$ (проверить). Какое условие теоремы о среднем нарушено?

42. Пусть

$$g(x) = \operatorname{sign} x + \frac{1}{2}.$$

На отрезке $[-3, 1]$ нет точки ξ такой, что

$$\int_{-3}^{1} g(x)\, dx = g(\xi)\,(1-(-3)),$$

так как $\int_{-3}^{1} g(x)\, dx = 0$, а функция $g(x)$ не принимает нулевого значения. Какое условие теоремы о среднем нарушено?

43. Функция f интегрируема по Риману на $[a, b]$. Доказать равенство

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon_1 \to 0+} \left(\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon_1} f(x)\,dx \right).$$

44. Функция g неотрицательна на $[a, b]$ и интегрируема по Риману на $[a, b]$, функция f непрерывна на (a, b) и произведение fg интегрируемо по Риману на $[a, b]$. Доказать, что в этих условиях справедлива теорема о среднем, т. е. найдется такая точка $\xi \in (a, b)$, что $\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(\xi) \int_a^b g(x)\,dx$.

45. Доказать, что

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx > 0.$$

46. Пусть φ — монотонно возрастающая, непрерывно дифференцируемая на $[0, +\infty)$ функция, отображающая $[0, +\infty)$ в $[a, b)$. Доказать, что для любой непрерывной на $[a, b]$ функции f имеем

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{T \to +\infty} \int_0^T f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt.$$

47. Функция f непрерывно дифференцируема на $[0, 1]$. Доказать, что

$$\int_0^1 |f(x)|\,dx \leqslant \max\left\{ \int_0^1 |f'(x)|\,dx,\ \left| \int_0^1 f(x)\,dx \right| \right\}.$$

48. Функция f непрерывно дифференцируема на $[0, 1]$ и $f(1) - f(0) = 1$. Доказать, что

$$\int_0^1 [f'(x)]^2\,dx \geqslant 1.$$

49. Найти дифференцируемую на $[0, +\infty)$ неотрицательную функцию f такую, что при замене независимого переменного $x = x(\xi)$, где $\xi = \int_0^x f(t)\,dt$, она переходит в функцию $e^{-\xi}$.

50. Функция f определена на $[0, 1]$ и убывает на нем. Доказать, что для любого $\alpha \in (0, 1)$ имеем

$$\int_0^\alpha f(x)\,dx \geqslant \alpha \int_0^1 f(x)\,dx.$$

51. Доказать, что

$$\int_0^{\sqrt{2\pi}} \sin x^2\, dx > 0.$$

52. Доказать, что для непрерывных функций $u(x)$ и $v(x)$ таких, что $u(x) \geqslant 0$ и $v(x) \geqslant 0$, удовлетворяющих условию

$$u(t) \leqslant C + \int_a^t u(x)\, v(x)\, dx, \quad C > 0, \ t > a,$$

справедливо неравенство

$$u(t) \leqslant C \exp\left(\int_a^t v(x)\, dx\right).$$

53. Доказать, что для непрерывных функций $u(x)$ и $v(x)$ таких, что $u(x) \geqslant 0$ и $v(x) \geqslant 0$, удовлетворяющих условию

$$u^m(t) \leqslant C + \int_a^t u(x)\, v(x)\, dx, \quad C > 0, \ m > 1, \ t > a,$$

справедливо

$$u(t) \leqslant C_1 \exp\left(\int_a^t v(x)\, dx\right).$$

54. Доказать, что если интегрируемая на $[a, b]$ функция f строго положительна, то $\int_a^b f(x)\, dx > 0$.

55. Для заданного отрезка $[a, b]$ и заданных чисел A, B, k_1 и k_2 обозначим через m и M соответственно числа

$$\min\left(k_1, k_2, \frac{B-A}{b-a}\right), \ \max\left(k_1, k_2, \frac{B-A}{b-a}\right).$$

Доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует функция $f \in C^1(-\infty, +\infty)$ со следующими свойствами:

а) $f(a) = A, \quad f(b) = B$;

б) $f'(a) = k_1, \quad f'(b) = k_2$;

в) $m - \varepsilon \leqslant f'(x) \leqslant M + \varepsilon, \quad x \in [a, b]$.

Следующее построение используется в задачах 56 и 57. Обозначим через $u_{1,1}$ интервал с центром в точке 1/2 и длиной 1/5. Множество $[0, 1] \setminus u_{1,1}$ состоит из двух отрезков $\rho_{1,1}$ и $\rho_{1,2}$. Интервалы $u_{2,1}$, $u_{2,2}$ имеют центры в центрах отрезков $\rho_{1,1}$, $\rho_{1,2}$ соответственно и длину $1/5^2$. Интервалы $u_{1,1}$, $u_{2,1}$, $u_{2,2}$ взаимно не пересекаются и множество $[0, 1] \setminus \bigcup_{i=1}^{2} \bigcup_{j=1}^{2} u_{i,j}$ состоит из четырех отрез-

ков $\rho_{2,1}$, $\rho_{2,2}$, $\rho_{2,3}$, $\rho_{2,4}$. Пусть построены взаимно непересекающиеся интервалы $u_{i,j}$ для $1 \leqslant i \leqslant k$, $1 \leqslant j \leqslant 2^{i-1}$. Множество $[0,1] \setminus \bigcup_{i=1}^{k} \bigcup_{j=1}^{2^{i-1}} u_{i,j}$ состоит из 2^k отрезков $\rho_{k,1}$; $\rho_{k,2}$; ...; $\rho_{k,2^k}$. Тогда интервалы

$$u_{k+1,1},\ u_{k+1,2},\ \ldots,\ u_{k+1,2^k}$$

имеют центры в центрах отрезков $\rho_{k,1}$, $\rho_{k,2}$, ..., $\rho_{k,2^k}$ соответственно и длину $1/5^{k+1}$. Таким образом, по индукции определяется бесконечная система интервалов

$$u_{i,j},\ 1 \leqslant i < \infty,\ 1 \leqslant j \leqslant 2^{i-1}.$$

56. Доказать, что множество

$$P = [0,\ 1] \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{2^{i-1}} u_{i,j}$$

есть замкнутое множество не меры нуль.

57. Обозначим через $\varphi(\lambda,\ (a,\ b),\ x)$ $(\lambda < 1)$ функцию, равную нулю на промежутках

$$\left(a,\ \frac{a+b}{2} - \lambda\,\frac{b-a}{2}\right),\ \left(\frac{a+b}{2} + \lambda\,\frac{b-a}{2},\ b\right)$$

и равную $\lambda(b-a)\cos^2 \dfrac{\pi\left(x - \frac{a+b}{2}\right)}{\lambda(b-a)}$ на отрезках

$$\left[\frac{a+b}{2} - \lambda\,\frac{b-a}{2},\ \frac{a+b}{2} + \lambda\,\frac{b-a}{2}\right].$$

Положим

$$F(x) = \begin{cases} \varphi\left(\frac{1}{i},\ u_{i,j},\ x\right), & x \in u_{i,j}; \\ 0, & x \in P \cup (-\infty,\ 0) \cup (1,\ +\infty), \end{cases}$$

где интервалы $u_{i,j}$, $1 \leqslant i \leqslant \infty$, $1 \leqslant j \leqslant 2^{i-1}$, определены перед задачей № 56 и $P = [0,\ 1] \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{2^{i-1}} u_{i,j}$. Пользуясь критерием Лебега, доказать, что функция F дифференцируема на всей прямой и функция F' ограничена, но не интегрируема по Риману на $[0,\ 1]$.

58. Привести пример функций $f:[0,\ 1] \to R$ и $G:[0,\ 1] \to R$ таких, что f непрерывно дифференцируема на $[0,\ 1]$, G строго монотонна и всюду дифференцируема на $[0,\ 1]$ и равенство

$$\int_0^1 f'(x)\,G(x)\,dx = f(x)\,G(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 f(x)\,G'(x)\,dx$$

не имеет места из-за того, что интеграл в правой части этого равенства не существует.

59. Привести пример функций $f:[0, 1]\to R$ и $\varphi:[0, 1]\to[0, 1]$ таких, что f непрерывно дифференцируема на $[0, 1]$, φ строго монотонна и всюду дифференцируема на $[0, 1]$, а равенство

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx$$

не имеет места из-за того, что интеграл в правой части этого равенства не существует.

Ответы и указания

1. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(x-a)(x-b)}, & x \in (a, b); \\ 0, & x = a,\ x = b. \end{cases}$

2. $F(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

3. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^n}\operatorname{sign} x, & |x| \in \left(\dfrac{1}{2^n}, \dfrac{1}{2^{n-1}}\right], n \in N; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

Функция f интегрируема по Риману на $[-1, 1]$, так как она ограничена и монотонна на $[-1, 1]$. Предположим, что существует непрерывная на $[-1, 1]$ функция $F(x)$ такая, что $F'(x) = f(x)$ для всех $x \in [-1, 1] \setminus K_p$, где K_p — конечное множество точек из $[-1, 1]$. Тогда найдется такое n_0, что на отрезке $[3/2^{n_0-2}, 1/2^{n_0-1}]$ нет точек из K_p, т. е. $F' = f$ всюду на этом отрезке. Тогда функция f должна на этом отрезке принимать все значения между $f\left(\dfrac{3}{2^{n-2}}\right) = \dfrac{1}{2^{n+1}}$ и $f\left(\dfrac{1}{2^{n-1}}\right) = \dfrac{1}{2^n}$ (см. № 220 ч. I, гл. IV). Но других значений, кроме чисел вида $1/2^p$, функция $f(x)$ не принимает. Следовательно, предположение о существовании первообразной неверно. 4. $F(\alpha, \beta) = 0$ для любого $[\alpha, \beta] \subset [0, 1]$. 5. Указание. Пусть $\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x = x_0; \\ 0, & x \neq x_0. \end{cases}$ Доказать, что $\int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx = 0$ для любых α и β. Если $f(x) = g(x)$ всюду, кроме точки $x = x_0$, то $\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \int_a^b [f(x_0) - g(x_0)]\,dx =$

$=k\int\limits_a \varphi(x)\,dx=0$. 6. $f(x)=\begin{cases}1, & x\text{ — рациональное;}\\ -1, & x\text{ — иррациональное.}\end{cases}$ 7. Указание. Предположим противное, т. е. что для любого отрезка $[\alpha, \beta]\subset[0, 1]$ существует $x_{\alpha\beta}\subset[\alpha, \beta]$ такое, что $f(x_{\alpha\beta})<0$. Следовательно, $\inf\limits_{x\in[\alpha,\beta]} f(x)\leqslant 0$. Тогда для любого разбиения T отрезка $[0, 1]$ имеем $s(f, T)\leqslant 0$ и $\int\limits_0^1 f(x)\,dx=\sup\limits_T s(f, T)\leqslant 0$, что противоречит условию $\int\limits_0^1 f(x)\,dx>0$. 8. $\int\limits_0^1 f(x)\,dx-\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\int\limits_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\,dx-\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$.

Пусть $f(x)$ невозрастающая, тогда $f\left(\frac{k}{n}\right)\leqslant f(x)\leqslant f\left(\frac{k-1}{n}\right)$ для $x\in$ $\in\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$. Следовательно, $\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\leqslant\int\limits_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\,dx\leqslant\frac{1}{n} f\left(\frac{k-1}{n}\right)$,

отсюда получаем, что $0\leqslant\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\int\limits_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\,dx-\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\leqslant$

$\leqslant\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left[f\left(\frac{k-1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right]=\frac{1}{n}[f(0)-f(1)]$. Аналогично рассматривается случай неубывающей функции $f(x)$. 9. Указание. Для оценки $\int\limits_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\,dx$ применить теорему о среднем. 10. Из непрерывности и выпуклости $f(x)$ следует, что $f(x)\leqslant\frac{f(a)(b-x)+f(b)(x-a)}{b-a}$ при $x\in[a, b]$. Отсюда следует правое неравенство. Для доказательства левого неравенства сделать замену переменного $x=\frac{a+b}{2}+t$. 11. Обозначим $\int\limits_0^1 f(x)\,dx=A$. В силу теоремы о среднем существует точка $c\in[0, 1]$ такая, что $f(c)=A$, а в силу возрастания f справедливы неравенства $A-f(x)\geqslant 0$ для $0\leqslant x\leqslant c$, $f(x)-A\geqslant 0$ для $c\leqslant x\leqslant 1$. Применяя теорему о сред-

нем, получаем, что $\int_0^c g(x)(A-f(x))\,dx = g(\xi_1)\int_0^c (A-f(x))\,dx$, $\xi_1 \in$ $\in [0, c]$, и $\int_c^1 g(x)(f(x)-A)\,dx = g(\xi_2)\int_c^1 (f(x)-A)\,dx$, $\xi_2 \in [c, 1]$. Так как $0 \leqslant \int_0^c (A-f(x))\,dx = Ac - \int_0^c f(x)\,dx = Ac - \left(A - \int_c^1 f(x)\,dx\right) =$ $= \int_c^1 (f(x)-A)\,dx$ и $g(\xi_1) \leqslant g(\xi_2)$, то $\int_0^c g(x)(A-f(x))\,dx \leqslant$ $\leqslant \int_c^1 g(x)(f(x)-A)\,dx$, откуда следует, что $A\int_0^1 g(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx \times$ $\times \int_0^1 g(x)\,dx \leqslant \int_0^1 g(x) f(x)\,dx$. **13.** Так как f интегрируема на $[a, b]$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такое разбиение T отрезка $[a, b]$, что $I \leqslant S(f, T) < I + \varepsilon$, т. е. $I \leqslant \sum_{k=1}^{n} M_k (x_k - x_{k-1}) < I + \varepsilon$, где $M_k =$ $= \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$. Пусть $\varphi_\varepsilon(x) = \begin{cases} M_k, & x \in [x_k, x_{k-1}]; \\ M_n, & x = b. \end{cases}$ Тогда $\varphi_\varepsilon(x)$ интегрируема на $[a, b]$ и $\int_a^b \varphi_\varepsilon(x)\,dx = S(f, T)$. Функция $\varphi_\varepsilon(x)$ разрывна в точках $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ из отрезка $[a, b]$ и $\inf_{x \in [a,b]} f = m \leqslant \varphi_\varepsilon(x) \leqslant M =$ $= \sup_{x \in [a,b]} f$. Возьмем отрезки $[x_k - \delta, x_k + \delta]$, где $\delta < \frac{1}{2} \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k - x_{k-1}|$ и $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Отрезки $[x_k - \delta, x_k + \delta]$ не пересекаются. Пусть $\varphi_{\varepsilon,\delta} = M_1$ для $x \in [a, x_1 - \delta]$, $\varphi_{\varepsilon,\delta} = M_n$ для $x \in [x_{n-1} + \delta, b)$, $\varphi_{\varepsilon,\delta} = M_k$ для $x \in [x_k + \delta, x_{k+1} - \delta]$, $k = 1, 2, \ldots, n-2$, и линейна на отрезках $[x_k - \delta, x_k + \delta]$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$; $\varphi_{\varepsilon,\delta}$ определена однозначно, так как значения на концах отрезка уже определены. Тогда функция $\varphi_{\varepsilon,\delta}(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и $\left|\int_a^b [f(x) - \varphi_{\varepsilon,\delta}(x)]\,dx\right| \leqslant \left|\int_a^b (f(x) -\right.$ $\left.- \varphi_{\varepsilon,\delta}(x))\,dx\right| + \left|\int_a^b (\varphi_\varepsilon(x) - \varphi_{\varepsilon,\delta}(x))\,dx\right| = \left|\int_a^b f(x)\,dx - S(f, T)\right| +$ $+ \left|\int_a^b (\varphi_\varepsilon(x) - \varphi_{\varepsilon,\delta}(x))\,dx\right| \leqslant \varepsilon + (n-1)(|M| + |m|)\delta$. Отсюда следует утверждение. **14.** Указание. Если f непрерывна на $[a, b]$, то $w(\delta) \to 0$

при $\delta \to 0$ (см. задачу № 12). Если f не является непрерывной, то воспользоваться результатом задачи № 13. **15.** $f(x) = \sin\left(\frac{2\pi\left(x - \frac{b+a}{2}\right)}{b-a}\right)$. **18.** Указание. Рассмотреть квадратный трехчлен относительно λ: $\int\limits_a^b (f(x) - \lambda g(x))^2\,dx$. **19.** Функции $f(x)$ и $g(x)$ линейно зависимы на $[a, b]$. **21.** Пусть $\Phi(a) = \int\limits_a^{a+T} f(x)\,dx - \int\limits_0^T f(x)\,dx$. Тогда по условию $\Phi(a) \equiv 0$ и, следовательно, $\Phi'(a) = f(a+T) - f(a) \equiv 0$. **22.** $\int\limits_0^T f(t)\,dt = 0$. **25.** Указание. В интеграле $\int\limits_0^{\pi/2} f(\sin x)\,dx$ сделать замену: а) $\pi - x = t$; б) $\frac{\pi}{2} - x = t$. **26.** Указание. В интегралах $\int\limits_0^{\frac{l}{2}} f(\varphi(x))\,dx$ и $\int\limits_0^{\frac{l}{2}} xf(\varphi(x))\,dx$ сделать замену $l - x = t$. **27.** а) $\pi/4$; б) $\frac{3\pi}{4}$. Обратить внимание на то, что функция $\operatorname{arctg} f(x)$ на отрезке $[0, 4]$ не является первообразной для $g(x)$. **28.** а) Верно; б) Неверно, так как образ отрезка $[0, 5\pi/6]$ при отображении $t = \sin x$ есть отрезок $[0, 1]$, на котором f не интегрируема. **29.** Рассмотрим функции $f(x) \equiv 1$ и

$$g(x) = \begin{cases} 0, \ x \leqslant 0; \\ \frac{1}{3^{n+1}}, \ x \in \left[\frac{1}{2^{n+1}}, \ \frac{1}{2^n} - \frac{1}{(n+1)\,3^{n+1}}\right], \ n = 0, 1, \ldots; \\ \frac{1}{3^{n+1}} + \frac{2}{3^{n+1}} \cos^2 \frac{\pi(n+1)\,3^{n+1}\left(x - \frac{1}{2^n}\right)}{2}, \\ x \in \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{(n+1)\,3^n}, \ \frac{1}{2^n}\right); \ n = 0, 1, \ldots \\ 1, \ x \geqslant 1. \end{cases}$$

Покажем, что справедливы следующие утверждения: а) g непрерывна на $(0, 1]$; б) g дифференцируема на $(0, 1]$; $g'(x)$ неотрицательна и не ограничена на $(0, 1]$; в) $\lim\limits_{x \to 0+} g(x) = 0$; г) производная функции g в нуле существует и равна нулю. Действительно. а) Обозначим $x_n = \frac{1}{2^n}$, $\tilde{x}_n = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{(n+1)\,3^n}$, $n = 0, 1, \ldots$. Из определения функции g

видно, что она непрерывна на каждом из интервалов $(x_{n+1}, \tilde{x}_n)$, $(\tilde{x}_n, x_n)$, $n=0, 1, \ldots$, и интервале $(1, \infty)$. Так как $\lim\limits_{x\to x_n-} g(x) = \frac{1}{3^{n+1}} + \frac{2}{3^{n+1}} = \frac{1}{3^n} = g(x_n) = \lim\limits_{x\to x_n+} g(x)$ и $\lim\limits_{x\to \tilde{x}_n+} g(x) = \frac{1}{3^{n+1}} + \frac{2}{3^{n+1}} \cos^2 \frac{\pi}{2} = \frac{1}{3^{n+1}} = g(\tilde{x}_n) = \lim\limits_{x\to \tilde{x}_n-} g(x)$, то функция g непрерывна в каждой из точек $x_n, \tilde{x}_n$, $n=0, 1, \ldots$. Итак, g непрерывна на $(0, 1]$. б) Из определения функции g видно, что она дифференцируема на интервале $(1, \infty)$ и на каждом из интервалов $(x_{n+1}, \tilde{x}_n)$, $(\tilde{x}_n, x_n)$, $n=0, 1, \ldots$, причем $g'(x)=0$, $x \in (x_{n+1}, \tilde{x}_n)$, $n=0, 1, \ldots$; $g'(x) = -\frac{\pi}{2}(n+1) \times \sin \pi (n+1)\, 3^{n+1}\left(x - \frac{1}{2^n}\right)$, $x \in (\tilde{x}_n, x_n)$, $n=0, 1, \ldots$; $g'(x)=0$, $x>1$. Остается проверить дифференцируемость g в каждой из точек x_n, x_n, $n=0, 1, \ldots$. Так как g непрерывна в этих точках, то достаточно показать, что $\lim\limits_{x\to x_n+} g'(x) = \lim\limits_{x\to x_n-} g'(x)$ $\lim\limits_{x\to \tilde{x}_n+} g'(x) = \lim\limits_{x\to \tilde{x}_n-} g'(x)$. Действительно, $\lim\limits_{x\to x_n+} g'(x) = 0$ и $\lim\limits_{x\to x_n-} g'(x) = -\frac{\pi}{2}(n+1)\sin 0 = 0$, $\lim\limits_{x\to \tilde{x}_n-} g'(x) = 0$ и $\lim\limits_{x\to \tilde{x}_n+} g'(x) = -\frac{\pi}{2}(n+1)\sin \frac{3^{n+1}(n+1)\pi}{3^{n+1}} = 0$. Если $x \in (\tilde{x}_n, x_n)$, то $\frac{-1}{3^{n+1}(n+1)} < x - \frac{1}{2^n} < 0$, поэтому $g'(x) > 0$ для $x \in (\tilde{x}_n, x_n)$, следовательно, $g'(x) \geqslant 0$ для $x \in (0, 1]$. Наконец, если $x_0 = \frac{\tilde{x}_n + x_n}{2}$, то $g'(x_0) = \frac{\pi}{2}(n+1)$, т. е. g' не ограничена на $(0, 1]$. в) Так как $g'(x) \geqslant 0$ для $x \in (0, 1]$, то функция g монотонна, следовательно, предел $g(x)$ при $x \to 0+$ существует, и так как $x_n \to 0+$ $(n \to \infty)$, то $\lim\limits_{x\to 0+} g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} g\left(\frac{1}{2^n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{3^n} = 0$. г) Если $x \in \left[\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}\right]$, $n=0, 1, \ldots$, то в силу монотонности имеем, что $0 \leqslant \frac{g(x) - g(0)}{x} \leqslant 2^{n+1} g\left(\frac{1}{2^n}\right) = \frac{2^{n+1}}{3^n}$. Так как условие $x \to 0+$ эквивалентно условию $n \to +\infty$, то $g'_+(0) = \lim\limits_{x\to 0+} \frac{g(x) - g(0)}{x} = 0$. Поскольку g непрерывна в нуле и $g'_-(0) = 0$, то g дифференцируема в нуле и $g'(0) = 0$. Из условий а) — г) следует, что функции $f(x) \equiv 1$ и $g(x)$ удовлетворяют требованиям задачи. 30. а) $-e^{-a^2}$; б) 0; в) e^{-b^2}

г) $2b\ln(1+b^2)$; д) $-\sin\alpha\ln(1+\cos^2\alpha)-\cos\alpha\ln(1+\sin^2\alpha)$.

31. $\widetilde{F}'(0)=1.33$. Так как $g(-x)=-g(x)$, то $\left|\int\limits_0^{-x} g(t)\,dt\right|=\left|\int\limits_0^{x} g(t)\,dt\right|$, т. е. при доказательстве можно считать, что $0<x\leqslant 1$. Так как $|g(t)|\leqslant 1$, то $\left|\int\limits_0^{x^2} g(t)\,dt\right|\leqslant x^2$ для любого $x\in[0,\ 1]$. Далее, $\int\limits_{x^2}^{x}\sin\frac{1}{t}\,dt=\int\limits_{x^2}^{x} t^2 d\left(\cos\frac{1}{t}\right)=t^2\cos\frac{1}{t}\Big|_{x^2}^{x}-2\int\limits_{x^2}^{x} t\cos\frac{1}{t}\,dt$. Итак, $\left|\int\limits_{x^2}^{x}\sin\frac{1}{t}\,dt\right|\leqslant 2x^2+2\int\limits_0^x t\,dt=3x^2$; $\left|\int\limits_0^x g(t)\,dt\right|\leqslant 4x^2$. **34.** $f(x)=$ $=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$ **36.** Пусть $\Phi(T)=\int\limits_{\pi/2}^{T}\frac{\cos x}{x}\,dx$. Тогда $\Phi'(T)=$ $=\frac{\cos T}{T}$ и точками локального максимума $\Phi(T)$ на $[\pi/2,\ +\infty)$ будут точки T_k, в которых $\cos T$ меняет знак с $+$ на $-$, т. е. точки

$$T_k=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in N,\ \Phi(T_k)=\sum_{n=0}^{k}\int\limits_{\frac{\pi}{2}+2\pi n}^{\frac{5\pi}{2}+2\pi n}\frac{\cos x}{x}\,dx.$$

Используя теорему о среднем, докажем, что для любого

$$k\in N\quad\int\limits_{\frac{\pi}{2}+2k\pi}^{\frac{5\pi}{2}+2k\pi}\frac{\cos x}{x}\,dx=\int\limits_{\frac{\pi}{2}+2k\pi}^{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}\frac{\cos x}{x}\,dx+\int\limits_{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}^{\frac{5\pi}{2}+2k\pi}\frac{\cos x}{x}\,dx<0.$$

Следовательно, $\Phi(T)\leqslant\sup\limits_k\Phi(T_k)<0$. **37.** *А*. **38.** Пусть $f(x_0)=M$. Тогда для любого $\varepsilon>0$ существует такое $h>0$, что на отрезке $\delta_n\subset[a,b]$ длины h, содержащем x_0, имеем $f(x)>M-\varepsilon$. Тогда

$$\{(b-a)M^n\}^{1/n}\geqslant\left[\int\limits_a^b f^n(x)\,dx\right]^{1/n}\geqslant\left\{\int\limits_{\delta_n} f^n(x)\,dx\right\}^{\frac{1}{n}}\geqslant\{h(M-\varepsilon)^n\}^{1/n},$$

и в силу произвольности ε отсюда получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\int\limits_a^b f^n(x)\,dx\right\}^{1/n}=M$.

44. Указание. Применить теорему о среднем к интегралу $\int\limits_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)\, g(x)\, dx$ и использовать результат задачи № 43. **45.** Указание. См. задачу № 44. **46.** Указание. Использовать результат задачи № 43. **48.** Указание. Воспользоваться неравенством $[f'(x)]^2 \geqslant 2f'(x) - 1$. **49.** По условию $\exp\left(-\int\limits_0^x f(t)\, dt\right) = f(x)$ или $\int\limits_0^x f(t)\, dt = -\ln f(x)$. Дифференцируя это равенство, находим $f'(x) = -(f(x))^2$; так как $f(0) = e^0 = 1$, то $f(x) = \frac{1}{x+1}$. **50.** Имеем $\frac{1}{1-\alpha}\int\limits_\alpha^1 f(x)\, dx \leqslant f(\alpha) \leqslant \frac{1}{\alpha}\int\limits_0^\alpha f(x)\, dx$, откуда $\alpha\int\limits_\alpha^1 f(x)\, dx \leqslant (1-\alpha)\int\limits_0^\alpha f(x)\, dx$ и $\alpha\int\limits_0^1 f(x)\, dx \leqslant \int\limits_0^\alpha f(x)\, dx$. **51.** Указание. Сделать замену переменного $x^2 = y$ и полученный интеграл преобразовать к интегралу по промежутку $[0, \pi]$. **52.** Из неравенства $u(t) \leqslant C + \int\limits_a^t u(x)\, v(x)\, dx$ получаем $\frac{uv}{C + \int\limits_a^t uv dx} \leqslant v$. Проинтегрировав обе части этого неравенства от a до t, получим неравенство $\ln\left(C + \int\limits_a^t uv dx\right) - \ln C \leqslant \int\limits_a^t v dx$ или неравенство $u \leqslant C + \int\limits_a^t uv dx \leqslant C \exp\left(\int\limits_a^t v(x)\, dx\right)$. **53.** Указание. Воспользоваться тем, что функция $g(u) = u - u^m$ ограничена сверху и задачей 52. **54.** Первое решение. Из неравенства $f(x) > 0$ для любого $x \in [a, b]$ следует, что $\int\limits_a^b f(x)\, dx \geqslant 0$. Если $\int\limits_a^b f(x)\, dx = 0$, то для любого отрезка $[a', b'] \subset [a, b]$ имеем $\int\limits_{a'}^{b'} f(x)\, dx = 0$ (почему ?). Если $\int\limits_a^b f(x)\, dx = 0$, то существует такое разбиение T отрезка $[a, b]$, что $S(f, T) = \sum\limits_{i=1}^n M_i (x_i - x_{i-1}) < b - a$, где $M_i = \sup\limits_{[x_{i-1}, x_i]} f$, следовательно, хотя бы для одного отрезка разбиения $[x_{i_0-1}, x_{i_0}]$ имеем $\sup\limits_{[x_{i_0-1}, x_{i_0}]} f < 1$. Обозначим $[x_{i_0-1}, x_{i_0}]$ через $[a_1, b_1]$. Тем же рассуждением получаем, что найдется отрезок $[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$ такой,

что $\sup\limits_{[a_1, b_1]} f < \frac{1}{2}$. Продолжая это рассуждение, получим систему вложенных отрезков $[a_q, b_q]$, $q \in N$, таких, что $\sup\limits_{[a_q, b_q]} f < \frac{1}{q}$, следовательно, если $c \in \bigcap\limits_{q=1}^{\infty} [a_q, b_q]$, то $f(c) \leqslant 0$. Итак, предположение, что $\int\limits_a^b f(x)\,dx = 0$, противоречит условию: $f(x) > 0$ для любого $x \in [a, b]$. Следовательно, $\int\limits_a^b f(x)\,dx > 0$. Второе решение. Так как f интегрируема по Риману, то в силу критерия Лебега множество точек ее разрыва есть множество меры нуль. Тогда существует точка $x_0 \in (a, b)$, в которой функция непрерывна, следовательно, существует интервал $(c, d) \subset (a, b)$ и число $\varepsilon > 0$ такие, что $x_0 \in (c, d)$ и $f(x) \geqslant \varepsilon$ для любого $x \in (c, d)$, откуда следует утверждение задачи. **55.** Ищем функцию f в виде $f(x) = \int\limits_a^x \varphi(t)\,dt + A$. Чтобы функция f удовлетворяла условиям а), б), в), достаточно, чтобы функция φ удовлетворяла следующим условиям: 1) $\varphi \in C(-\infty, +\infty)$; 2) $\varphi(a) = k_1$, $\varphi(b) = k_2$; 3) $m - \varepsilon \leqslant \varphi(x) \leqslant M + \varepsilon$, $x \in [a, b]$; 4) $\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx = B - A$. Обозначим $k = (B - A)/(b - a)$. Рассмотрим два случая: I. Пусть $k_1 < k < k_2$. Тогда точка c, удовлетворяющая соотношению $\frac{c-a}{b-c} = \frac{k_2 - k}{k - k_1}$, лежит строго внутри $[a, b]$. Пусть $\varphi(x) = k_1$ для $x \leqslant a$, $\varphi(c) = k$, $\varphi(x) = k_2$ для $x \geqslant b$ и $\varphi(x)$ линейна на $[a, c]$ и $[c, b]$. Условия 1), 2), 3) выполнены и $\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx = \frac{1}{2}(c-a)(k+k_1) + \frac{1}{2}(b-c)(k_2+k) = k(b-a) = B - A$, так что выполнено и условие 4). II. Пусть $k_1 \leqslant k_2 < k$. Возьмем число k', удовлетворяющее условиям а) $k < k' < k + \varepsilon$ и б) $k' < 2k - \frac{k_1 + k_2}{2}$. Так как $\frac{k_1 + k_2}{2} < k$, то $2k - \frac{k_1 + k_2}{2} > k$ и условия а) и б) непротиворечивы. Пусть $\varphi(x) = k_1$ для $x \leqslant a$, $\varphi(x) = k_2$ для $x \geqslant b$, $\varphi(x) = k'$ для $x \in [a + \alpha, b - \alpha]$, $\varphi(x)$ линейна на $[a, a + \alpha]$ и $[b - \alpha, b]$, где α — некоторое число, лежащее между нулем и $(b - a)/2$, которое точно определяется позже. Условия 1), 2) и 3) для φ выполнены. Покажем, что можно подобрать α так, чтобы выполнялось ус-

ловие 4): $\int_a^b \varphi(x)\,dx = k'(b-a) - \frac{1}{2}(k'-k_1)\alpha - \frac{1}{2}(k'-k_2)\alpha = J_\alpha$.

При $\alpha \to 0+$ $J_\alpha \to k'(b-a) > k(b-a) = B-A$, а при $\alpha \to \frac{b-a}{2}$ $J_\alpha \to \frac{b-a}{2}\left(k' + \frac{k_1+k_2}{2}\right) < (b-a)k = B-A$ в силу условий на k'. Следовательно, в силу непрерывной зависимости J_α от α найдется такое значение α, $0 < \alpha < \frac{b-a}{2}$, что $J_\alpha = B-A$, т. е. выполнено условие 4). Заметим также, что это построение φ проходит и тогда, когда $k_1 < k_2 = k$. Если же $k_1 = k_2 = k$, то $\varphi = k$, $f = kx + A$. Все остальные варианты соотношений между k_1, k_2 и k рассматриваются аналогично либо первому, либо второму случаю. **56.** Замкнутость P следует из того, что P есть дополнение до отрезка $[0, 1]$ открытого множества $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{2^{i-1}} u_{ij}$. Предположим, что P есть множество меры нуль. Тогда существует система интервалов $\{\delta_k\}$ таких, что $\bigcup_{k=1}^{\infty} \delta_k \subset P$ и $\sum_{k=1}^{\infty} |\delta_k| < \frac{1}{3}$. Система интервалов $\{\delta_k, u_{ij}\}$, $k = 1, 2, \ldots, 1 \leqslant j \leqslant 2$, $i = 1, 2, \ldots$, покрывает весь отрезок $[0, 1]$. Выберем из нее конечную подсистему, покрывающую $[0, 1]$, и разделим интервалы этой конечной подсистемы на две группы: в первую отнесем интервалы вида δ_k, во вторую — вида u_{ij}. Перенумеруем интервалы первой группы $\delta_1, \delta_2 \ldots, \delta_q, \ldots, \delta_Q$ и второй $u_1, u_2, \ldots, u_p, \ldots, u_P$. Так как конечное число интервалов $\delta_1, \ldots, \delta_Q$, $u_1, \ldots, u_P$ покрывает отрезок $[0, 1]$, то должно быть $\sum_{q=1}^{Q} |\delta_g| + \sum_{p=1}^{P} |u_p| > 1$. С другой стороны, $\sum_{q=1}^{Q} |\delta_q| < \sum_{q=1}^{\infty} |\delta_q| < \frac{1}{3}$, $\sum_{p=1}^{P} u_p < \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{2^{i-1}} u_{ij} = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{i-1} \frac{1}{5^i} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{5}} = \frac{1}{3}$; $\sum_{q=1}^{Q} |\delta_q| + \sum_{p=1}^{P} |u_p| < \frac{2}{3}$. Полученное противоречие показывает, что P не есть множество меры нуль. **57.** Из определения видно, что F непрерывно дифференцируема на каждом из интервалов $u_{i,j}$, $1 \leqslant j \leqslant 2^{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots$, $F(x) = 0$ на множестве P, вне отрезка $[0, 1]$ и в тех точках интервала u_{ij}, которые отстоят от его границы не более чем

на $|u_{ij}|\left(1-\frac{1}{i}\right)$. Поэтому для $x_0 \in P$ разностное отношение $\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}$ или равно нулю, или $x_0+h \in u_{ij}$, $h \geqslant |u_{ij}| \cdot \frac{i-1}{i}$, тогда $\left|\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}\right| = \left|\frac{F(x_0+h)}{h}\right| \leqslant \frac{|u_{ij}|}{i} \cdot \frac{i}{|u_{ij}|(i-1)} = \frac{1}{i-1}$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$, найдем I_0 так, чтобы $\frac{1}{i-1} < \varepsilon$, $i > I_0$ и положим $h_0 = \frac{1}{5^{I_0}} \cdot \frac{I_0}{I_0-1}$. Тогда для всех $x_0 \in P$ и всех $h: |h| < h_0$ $\frac{|F(x_0+h)-F(x_0)|}{h} < \varepsilon$. Следовательно, $F'(x)$ существует и равна нулю для всех $x \in P$. Вне $[0, 1]$ $F'(x)=0$. Итак, F дифференцируема на всей прямой. Для $x \in u_{ij}$ $|F'(x)| = \left|2\pi \cos \frac{\pi t}{i\,|u_{ij}|} \times \sin \frac{\pi t}{i\,|u_{ij}|}\right| = \left|\pi \sin \frac{2\pi t}{i5^i}\right|$, где t—расстояние от x до середины u_{ij} при $t \leqslant \frac{|u_{i,j}|}{2i} = \frac{1}{2i5^i}$, а если x отстоит от середины u_{ij} больше, чем на $\frac{1}{2i5^i}$, то $F'(x)=0$. Следовательно, с одной стороны, $|F'(x)| \leqslant \pi$, $x \in u_{ij}$, с другой стороны, если $t = \frac{|u_{ij}|}{4i} = \frac{1}{4i5^i}$, то $|F'(x)| = \pi$. Итак, $|F'(x)| \leqslant \pi$ для любого $x \in (-\infty, +\infty)$. Пусть $M_k = [0, 1] \setminus \bigcup_{i=1}^{k} \bigcup_{j=1}^{2^{i-1}} u_{ij}$. Из построения системы интервалов u_{ij}, $1 \leqslant j \leqslant 2^{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots$, следует, что M_k состоит из 2^k непересекающихся отрезков равной длины: $\rho_{k,1}, \rho_{k,2}, \ldots, \rho_{k,2^k}, \ldots$ и $|\rho_{k,j}| < \frac{1}{2^k}$, $1 \leqslant j \leqslant 2^k$. Интервал $u_{k+1,j}$ лежит строго внутри $\rho_{k,j}$, $P = \bigcap_{k=1}^{\infty} M_k$, поэтому для любой точки $x_0 \in P$ и любой ее окрестности $U(x_0)$ найдется такой отрезок $\rho_{k_0,j}$, что $x_0 \in \rho_{k_0,j} \subset U(x_0)$ и, следовательно, найдется интервал $U_{k_0+1,j}$, лежащий внутри этой окрестности. Так как $F'(x_0)=0$, а $\max\limits_{x \in U_{k_0+1,j}} |F'(x)| = \pi$, то точка x_0 является точкой разрыва функции F'. Итак, функция F' определена и ограничена на всей числовой прямой и множеством ее точек разрыва является множество P. Так как это множество не есть множество меры нуль (см. задачу 56), то в силу критерия Лебега F'не интегрируема по Риману на $[0, 1]$. **58.** Например, $f(x)=x$, $G(x)=F(x)+2\pi x$, где $F(x)$—функция из задачи 57.