59. Например, $f(x)=x$, $\varphi(x)=\lambda(F(x)+2\pi x)$, где $F(x)$ — функция из задачи 57, а λ выбрано так, чтобы $\varphi(1)=1$, т. е. $\varphi(x)=$ $=\frac{1}{2\pi}(F(x)+2\pi x)$.

§ 2. ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

1. Какие из следующих функций $\rho(x, y)$ являются метрикой на числовой прямой:

а) $\rho(x, y)=\operatorname{arctg}|y-x|$;

б) $\rho(x, y)=\frac{|x-y|}{1+(x-y)^2}$;

в) $\rho(x, y)=\sin^2 xy$;

г) $\rho(x, y)=|xy|$;

д) $\rho(x, y)=(x-y)^2$;

е) $\rho(x, y)=\frac{|x-y|}{x^2+2y^2+1}$;

ж) $\rho(x, y)=\sin|x-y|$.

з) $\rho(x, y)=\frac{|x-y|}{1+|x-y|}$.

2. Пусть $R(X, \rho)$ есть числовая прямая с метрикой $\rho(x, y)=$ $=\operatorname{arctg}|y-x|$ и $R^1(X)$ — числовая прямая с метрикой $\rho(x, y)=$ $=|y-x|$. Доказать, что любое открытое множество в $R(X, \rho)$ является открытым в $R^1(X)$, а любое замкнутое множество в $R(X, \rho)$ является замкнутым в $R^1(X)$.

3. Пусть $R(X, \rho)$ есть числовая прямая с метрикой $\rho(x, y)=$ $=\operatorname{arctg}|y-x|$. Доказать, что в пространстве $R(X, \rho)$ существует замкнутое ограниченное множество, не являющееся компактом.

4. Доказать, что любое открытое множество в R^n есть объединение не более чем счетного числа открытых кругов.

5. Доказать, что объединение двух связных множеств, имеющих общую точку, связно.

Множество $M\subset R^2$ называется *линейно связным*, если для любых его двух точек m_1 и m_2 существует непрерывная кривая, соединяющая эти точки и целиком лежащая в данном множестве (т. е. непрерывное отображение φ отрезка $[0, 1]\to R^n$ такое, что $\varphi(0)=m_1$, $\varphi(1)=m_2$ и для любого $x\in[0, 1]$ $\varphi(x)\in M$).

6. Доказать, что любое линейно связное множество связно.

7. Множество $M\subset R^2$ состоит из точек, координаты (x, y) которых удовлетворяют соотношению $y=\sin 1/x$, и отрезка $[x=$ $=0, -1\leqslant y\leqslant 1]$. Доказать, что M связно, но не линейно связно (определение линейно связного множества см. перед задачей № 6).

Расстоянием между двумя множествами $A\subset R^n$ и $B\subset R^n$ называется число

$$\rho(A, B)=\inf_{x\in A,\ y\in B}(\|x-y\|_{R^n}).$$

8. Доказать, что расстояние между двумя замкнутыми ограниченными непересекающимися множествами в R^n не равно нулю.

9. Привести пример двух замкнутых непересекающихся множеств в R^2, расстояние между которыми равно нулю.

10. Привести пример двух непересекающихся ограниченных множеств в R^2, расстояние между которыми равно нулю.

11. Пусть F — непустое замкнутое множество в R^n и $F=\bigcup_{m=1}^{\infty} F_m$, где F_m — замкнутые множества. Доказать, что существует число m_0 и замкнутый шар $\bar{U}\subset R^n$ такие, что

$$F\cap\bar{U}=F_{m_0}\cap\bar{U}, \qquad F\cap U\neq\varnothing.$$

12. Пусть функция $f:R^n\to R$ определена в некоторой окрестности U_0 точки $x_0\in R^n$. Для произвольной окрестности $U\subset U_0$ точки x_0 через $\operatorname{diam} U$ будем обозначать $\sup\limits_{x_1, x_2\in U}\|x_1-x_2\|_{R^n}$ — диаметр области, а через $\omega(f,U)=\sup\limits_{A,B\in U}|f(A)-f(B)|$ — колебание функции на U.

Доказать, что для любой ограниченной функции существует число $\omega(f, x_0)$, равное пределу

$$\lim_{\operatorname{diam} U\to 0}\omega(f,U)$$

(число $\omega(f, x_0)$ называется колебанием функции f в точке x_0).

13. Доказать, что $\omega(f, x_0)$ (см. № 12) равно нулю тогда и только тогда, когда f непрерывна в точке x_0.

14. Пусть $E\subset R^n$, $f:E\to R$,

$$E_c^+=\{x,\ x\in E,\ f(x)>c\},$$

$$E_c^-=\{x:x\in E,\ f(x)<c\}.$$

Доказать, что для непрерывности f на E необходимо и достаточно, чтобы множества E_c^+ и E_c^- были открыты относительно E для любого действительного числа c (это значит, что E_c^+ и E_c^- есть пересечение E с некоторым открытым в R^n множеством).

15. Пусть U — некоторый открытый шар в R^k и $f_n:\bar{U}\to R$ — последовательность функций. Для натуральных чисел n, m и числа $\varepsilon>0$ рассмотрим множества

$$A_{n,m,\varepsilon}=\{x:x\in\bar{U},\ |f_n(x)-f_{n+m}(x)|\leqslant\varepsilon\}$$

и

$$B_{n,\varepsilon}=\bigcap_{m=1}^{\infty}A_{n,m,\varepsilon}.$$

Доказать, что условие «для любого $\varepsilon>0$ — $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_{n,\varepsilon}=\bar{U}$» необходимо и достаточно для сходимости последовательности $f_n(x)$ в каждой точке $x\in\bar{U}$.

16. Пусть U — некоторый открытый шар в R^k, $f_n:\bar{U}\to R$, $f_n\in C(\bar{U})$, и для любого $x\in\bar{U}$ $f_n(x)\to f(x)$. Доказать, что для любого замкнутого множества $F\subset U$ найдется точка $x_0\in F$, в которой $f(x)$ непрерывна относительно F, т. е.

$$\lim_{x\to x_0,\ x\in F} f(x)=f(x_0).$$

17. Пусть на декартовой плоскости задано множество D ($D \neq \varnothing$). Каждой точке этого множества ставится в соответствие его ортогональная проекция на ось OX. Доказать, что полученное отображение $f: D \to R$ непрерывно.

Числовую функцию $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ назовем *линейно непрерывной*, если она непрерывна, как функция каждой из координат x_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, при фиксированных остальных.

18. Привести пример функции $f: R^2 \to R$, линейно непрерывной в квадрате $[-1, 1] \times [-1, 1]$, но разрывной в начале координат.

19. Доказать, что линейно непрерывная в некотором круге $U \subset R^2$ функция $f: U \to R$ имеет в этом круге точку непрерывности.

20. Привести пример функции $f(x, y)$, разрывной в каждой точке квадрата $[0, 1] \times [0, 1]$, но непрерывной как функция x при любом фиксированном $y \in [0, 1]$.

21. Пусть область $G \subset R^2$ и функция $f: G \to R$ непрерывна в G как функция переменной x при фиксированном y, таком, что $(x, y) \in G$, и удовлетворяет условию Липшица по переменной y, т. е. существует постоянная L такая, что $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant L|y_1 - y_2|$ для любой пары точек (x, y_1), (x, y_2) из G. Доказать, что f непрерывна в G.

22. Пусть $G \subset R^2$ и функция $f: G \to R$ линейно непрерывна в G и монотонна по одной из переменных. Доказать, что f непрерывна в G.

23. Привести пример разрывной в квадрате $A = [-1, 1] \times [-1, 1]$ числовой функции f, строго монотонной по каждой переменной и непрерывной по одной из них на $[-1, 1]$ (при фиксированной другой).

24. Привести пример функций $f(x, y)$ и $g(x, y)$, каждая из которых является разрывной в точке $(0, 0)$ и таких, что:

а) их сумма есть функция, непрерывная в точке $(0, 0)$;

б) их произведение есть функция, непрерывная в точке $(0, 0)$.

25. Пусть $f(x, y) = \dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$. Показать, что

$$\lim_{x \to 0} (\lim_{y \to 0} f(x, y)) \text{ и } \lim_{y \to 0} (\lim_{x \to 0} f(x, y))$$

существуют и равны, но не существует $\lim\limits_{(x, y) \to (0, 0)} f(x, y)$.

26. Пусть существуют

$$\lim_{(x, y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = A \quad \text{и} \quad \lim_{x \to x_0} (\lim_{y \to y_0} f(x, y)) = B.$$

Доказать, что $A = B$.

27. Пусть

$$f(x, y) = (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}.$$

Доказать, что существует $\lim\limits_{(x, y) \to (0, 0)} f(x, y)$, но не существует ни один из повторных пределов:

$$\lim_{x \to 0} (\lim_{y \to 0} f(x, y)), \qquad \lim_{y \to 0} (\lim_{x \to 0} f(x, y)).$$

28. Показать, что

$$\lim_{x\to\infty}\left(\lim_{y\to\infty}\frac{x^2+y^2}{1+(x-y)^4}\right)=\lim_{y\to\infty}\left(\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+y^2}{1+(x-y)^4}\right),$$

но $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\frac{x^2+y^2}{1+(x-y)^4}$ не существует.

29. Найти

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{m\to\infty}\cos^m(n!\,2\pi x)\right).$$

30. Показать, что функция

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0;\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

в любой окрестности точки $(0,0)$ принимает любые значения из $(-1,1)$.

31. Показать, что функция

$$f(x,y)=\begin{cases}e^{\frac{x}{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

в любой окрестности точки $(0,0)$ принимает любые положительные значения.

32. Пусть $f(x,y)=xye^{-(y-x^2)^2}$. Показать, что $f(x,y)\to 0$, когда точка (x,y) стремится к ∞, оставаясь на фиксированном луче $x=t\cos\alpha$, $y=t\sin\alpha$, $0\leqslant\alpha<2\pi$, $t\to+\infty$, но $f(x,y)$ не является бесконечно малой при $x\to\infty$, $y\to\infty$.

33. Доказать, что следующие функции непрерывны в начале координат:

а) $f=\begin{cases}\dfrac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0;\\ 0, & x^2+y^2=0;\end{cases}$ б) $f=\sin(x^2+y^2)$;

в) $f=\begin{cases}x^2\ln(x^2+y^2), & x^2+y^2\neq 0;\\ 0, & x^2+y^2=0;\end{cases}$ г) $f=\begin{cases}\dfrac{\sin xy}{x}, & x\neq 0;\\ y, & x=0;\end{cases}$

д) $f=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0;\\ 0, & x^2+y^2=0;\end{cases}$ е) $f=\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0;\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$

34. Доказать, что следующие функции не являются непрерывными в начале координат:

а) $f=\begin{cases}\sin\dfrac{y}{x}, & x^2+y^2\neq 0;\\ 0, & x^2+y^2=0;\end{cases}$ б) $f=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0;\\ 0, & x^2+y^2=0;\end{cases}$

в) $f=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^2}{x^3+y^3}, & x^2+y^2\neq 0;\\ 0, & x^2+y^2=0;\end{cases}$ г) $f=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^2}{x^2+y}, & x^2+y\neq 0;\\ 0, & x^2+y=0;\end{cases}$

д) $f=\begin{cases}\dfrac{x^2+y}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0;\\ 0, & x^2+y^2=0;\end{cases}$ е) $f=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0;\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$

Обозначим

$D=\{(x, y)\colon\ x^2+y^2<1\}$, $M_1=\{(u, v)\colon\ u^2+v^2<4\}$,

$M_2=\{(u, v)\colon\ u^2+v^2<4\}\cup\{(u, v)\colon\ (u-4)^2+v^2<1\}$,

$M_3=\{(u, v)\colon\ u^2+v^2\leqslant 4\}$, $M_4=\{(u, v)\colon\ v^2<u\}$.

35. Существует ли непрерывное в D отображение $f\colon D\to R^2$ такое, что:

а) $f(D)=M_1$; б) $f(D)=M_2$; в) $f(D)=M_3$; г) $f(D)=M_4$?

Если существует, то привести пример, если не существует, то объяснить почему?

36. Пусть $E=\{(x, y)\colon x^2+y^2<4\}$. Существует ли непрерывное в E отображение $f\colon E\to R^2$, для которого:

а) $f(D)=M_1$; б) $f(D)=M_2$; в) $f(D)=M_3$; г) $f(D)=M_4$.

Если существует, то привести пример, если не существует, то объяснить почему?

37. Пусть $E=\{(x, y)\colon x^2+y^2<4\}$. Существует ли непрерывное и биективное отображение $f\colon E\to R^2$, для которого:

а) $f(D)=M_1$; б) $f(D)=M_2$; в) $f(D)=M_3$; г) $f(D)=M_4$.

Если существует, то привести пример, если не существует, то объяснить почему?

38. Показать, что функция $f=\sin\dfrac{\pi x}{y}$ непрерывна в своей области определения E и не является равномерно непрерывной на множестве $E\cap\{(x, y)\colon x^2+y^2\leqslant 1\}$. Какое условие теоремы Кантора нарушено?

39. Показать, что функция $f=x^2+y^2$ равномерно непрерывна на множестве $x^2+y^2<1$.

40. Функция $f=\dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4}$ непрерывна на множестве $0<x^2+y^2<2$. Будет ли она равномерно непрерывна на этом множестве? Будет ли она равномерно непрерывна на множестве $\dfrac{1}{2}<x^2+y^2<2$?

41. Пусть $f\colon R^2\to R$ равномерно непрерывна на открытом ограниченном множестве $D\subset R^2$ и A — предельная точка D, не принадлежащая D. Доказать, что существует $\lim\limits_{M\to A} f(M)$.

42. Пусть D — открытое множество в R^n и $f\colon D\to R$. Для того чтобы f была равномерно непрерывна на D, необходимо и достаточно, чтобы существовала функция g, непрерывная в $\bar{D}$, такая, что $f=g$ на D. Доказать.

43. Привести пример функции $f: R^2 \to R$, равномерно непрерывной на множестве $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, непрерывной, но не равномерно непрерывной функцией на всей плоскости.

44. Пусть $f = \sqrt[3]{x^2 y}$. Показать, что функция f непрерывна в квадрате $[-1, 1] \times [-1, 1]$, в начале координат имеет частные производные, но не дифференцируема.

45. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{xy}{|x|+|y|}, & x^2+y^2 \neq 0; \\ 0, & x^2+y^2 = 0. \end{cases}$$

Проверить, что функция f в квадрате $A = [-1, 1] \times [-1, 1]$ всюду имеет частные производные, эти производные ограничены в A, но f не является дифференцируемой в начале координат.

46. Пусть $f = \begin{cases} (x^2+y^2)\cos\dfrac{\pi}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2+y^2 = 0. \end{cases}$ Показать, что f дифференцируема в точке $(0, 0)$, но ее частные производные — разрывные функции в точке $(0, 0)$.

47. Пусть область $G \subset R^2$, а функция $f: G \to R$ непрерывна по одной из переменных и имеет ограниченную производную по другой переменной в G. Доказать, что f непрерывна в G.

48. Пусть $G \subset R^2$ — выпуклая область, функция $f: G \to R$ имеет в G ограниченные частные производные по обеим переменным. Доказать, что f равномерно непрерывна в G.

49. Область $M \subset R^2$ состоит из тех точек m, полярные координаты которых φ_m, r_m удовлетворяют условию

$$\varphi_m > 2\pi, \ \operatorname{arctg}\varphi_m - \alpha < r_m < \operatorname{arctg}\varphi_m + \alpha,$$

где

$$\alpha = \frac{1}{8}(\operatorname{arctg}(2\pi + \varphi_m) - \operatorname{arctg}\varphi_m).$$

Обозначим через O полюс и $\varphi = \varphi(x, y)$, то значение угла между полярной осью и отрезком Om, для которого

$$\operatorname{arctg}\varphi - \alpha < r_m < \operatorname{arctg}\varphi + \alpha, \ \alpha = \frac{1}{8}(\operatorname{arctg}(2\pi + \varphi) - \operatorname{arctg}\varphi).$$

Показать, что функция $\varphi(x, y)$ однозначно определена на M, имеет непрерывные и ограниченные частные производные по переменным x и y в M, но не является равномерно непрерывной в M.

50. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0; \\ 0, & x^2+y^2 = 0. \end{cases}$$

Показать, что $f''_{xy}(0, 0) \neq f''_{yx}(0, 0)$. Какое условие теоремы Шварца здесь нарушено?

51. Дано уравнение $y^2 - x^2(1-x) = 0$.

а. Каково множество $A \subset R$ тех значений x, для которых это уравнение определяет $y(x)$?

б. Сколько однозначных функций на множестве A определяет это уравнение?

в. Сколько однозначных непрерывных на A функций определяет это уравнение?

г. Сколько однозначных, дифференцируемых во всех внутренних точках A, функций определяет это уравнение?

д. Сколько однозначных непрерывных функций на отрезке $[0, 1]$ определяет это уравнение, если добавить условие:

I. $y\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{\sqrt{8}}$. II. $y(1) = 0$.

52. Уравнение $(x^2+y^2)^2 = x^3 - 3xy^2$ определяет y как многозначную функцию x. Какое максимальное количество значений y может соответствовать данному x? Выделить однозначные гладкие ветви $y(x)$ и найти точки ветвления.

53. Показать, что уравнение $x = ky + \varphi(y)$, где $k \neq 0$ и $\varphi(y)$ — дифференцируемая, периодическая с периодом T функция, удовлетворяющая условию $|\varphi'(y)| < |k|$, однозначно определяет функцию $y(x) = \frac{x}{k} + \psi(x)$, где $\psi(x)$ — периодическая функция с периодом $|k| \cdot T$. Проиллюстрировать результат графически.

54. Пусть

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0; \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

Показать, что:

а) $f(x, y)$ непрерывна в начале координат;

б) $f(x, y)$ не является дифференцируемой в начале координат;

в) для любых $x = x(t)$, $y = y(t) : x(0) = 0$, $y(0) = 0$;

$x \in C^1[-1, 1]$, $y \in C^1[-1, 1]$;

$x^2(t) + y^2(t) > 0$ при $t \neq 0$

$f^*(t) = f(x(t), y(t))$ дифференцируема при любом $t \in [-1, 1]$ (в частности, при $t = 0$).

Найти выражение $f_t^{*\prime}|_{t=0}$ через $x_t'|_{t=0}$ и $y_t'|_{t=0}$.

55. Функция $f(x, y)$ определена и непрерывна в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) и удовлетворяет следующим условиям:

1) существуют производные $f_x'(x_0, y_0)$ и $f_y'(x_0, y_0)$;

2) для любого отображения $\varphi: R^2(u, v) \to R^2(x, y)$; $\varphi(u_0, v_0) = (x_0, y_0)$, непрерывно дифференцируемого в некоторой окрестности точки (u_0, v), существуют производные $(f \circ \varphi)_u'(u_0, v_0) = A$ и $(f \circ \varphi)_y'(u_0, v_0) = B$;

3) справедливы равенства

$$A = f'_x(x_0, y_0)\, x'_u(u_0, v_0) + f'_y(x_0, y_0)\, y'_u(u_0, v_0),$$

$$B = f'_x(x_0, y_0)\, x'_v(u_0, v_0) + f'_y(x_0, y_0)\, y'_v(u_0, v_0).$$

Доказать, что f дифференцируема в точке (x_0, y_0).

Ответы и указания

1. а) да, б) нет, не выполнено неравенство треугольника: если взять, например, $x=10$, $y=11$, $z=0$; в) нет, не выполнено условие $\rho(x, y)=0$ тогда и только тогда, когда $x=y$; г) нет, так же, как и в пункте в); д) нет, не выполнено неравенство треугольника, если взять, например, $x=2$, $y=1$, $z=0$; е) нет, не выполнено условие симметрии; ж) нет, так же, как и в пункте в); з) да. **2.** Указание. Пусть $U_1(x_0, \varepsilon)$ есть ε-окрестность точки x_0 в $R^1(x)$ и $U_2(x_0, \varepsilon)$ — ε-окрестность в $R(x, \rho)$. Показать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta_1 > 0$ такое, что $U_1(x_0, \delta_1) \subset U_2(x_0, \varepsilon)$ и существует $\delta_2 > 0$ такое, что $U_2(x_0, \delta_2) \subset U_1(x_0, \varepsilon)$. **3.** Указание. Пользуясь результатом задачи 2, показать, что любой компакт в $R(x)$ есть компакт в $R^1(x, \rho)$. **4.** Указание. Представить открытое множество G в виде счетного объединения ограниченных открытых множеств G_α, а каждое из G_α в виде $G_\alpha = \bigcup G_{\alpha,n}$, где $G_{\alpha,n}$ — множество тех $x \in G_\alpha$, для которых расстояние до границы G_α больше $1/n$. **5.** Пусть M_1 и M_2 — связные множества и $x_0 \in M_1 \cap M_2$. Если $M = M_1 \cup M_2$ несвязно, то существует два открытых непересекающих множества G_1 и G_2 такие, что $M \subset G_1 \cup G_2$, $M \cap G_2 \neq \varnothing$, $M \cap G_1 \neq \varnothing$. Пусть $x_0 \in G_1$. Так как M_1 связно и $x_0 \in M_1 \cap G_1$, то $M_1 \subset G_1$. Точно так же и $M_2 \subset G_1$. Следовательно, $M = M_1 \cup M_2 \subset G_1$, и так как $G_1 \cap G_2 = \varnothing$, то $M \cap G_2 = \varnothing$, что противоречит условию несвязности M. **6.** Указание. Воспользоваться тем, что при непрерывном отображении отрезок переходит в связное множество. **8.** Указание. Показать, что для любых двух множеств $A \subset R^n$, $B \subset R^n$ функция $\varphi: A \to R^1$, $\varphi(x) = \inf\limits_{y \in B} \| x - y \|_{R^n}$ непрерывна. **9.** Например, гипербола $x^2 - y^2 = 1$ и ее асимптота $y = x$. **10.** Например, два открытых круга $\{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$ и $\{(x, y) : (x-2)^2 + y^2 < 1\}$. **11.** Предположим противное. Тогда в любом шаре u, таком, что $F \cap u \neq \varnothing$, найдется точка x_1 такая, что $x_1 \in F \cap \bar{u}$, $x_1 \overline{\in} F_1$. Так как F_1 замкнуто, то найдется шар $u_1 \subset \bar{u}$ с центром в точке x_1, $\bar{u}_1 \cap F_1 = \varnothing$, причем можно считать, что радиус δ_1 шара u_1 не превосходит 1. Продолжая так же рассуждать, получим последовательность вложенных и замкнутых шаров $\bar{u} \supset \bar{u}_1 \supset \bar{u}_2 \supset \ldots \supset \bar{u}_n \supset \ldots$ с центрами в точках x_n и радиусами $\delta_n < \frac{1}{n}$ соответственно таких, что

$\bar{u}_n \cap E \neq \varnothing$, $\bar{u}_n \cap F_n = \varnothing$, $n = 1, 2, \ldots$. Пусть x_0 — общая точка всех множеств $\bar{u}_n \cap F$, тогда, с одной стороны, $x_0 \in F$, с другой стороны для любого n имеем $x_0 \overline{\in} F_n$, поэтому $x_0 \overline{\in} F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Полученное противоречие доказывает утверждение задачи. **12.** Указание. Проверить, что для последовательности $U_n(x_0)$ вложенных окрестностей точки x_0 последовательность $\omega(f, U_n)$ монотонна и ограниченна. Для произвольной последовательности $U_n(x_0)$ окрестностей точки x_0 при условии $\operatorname{diam}_{n\to\infty} U_n(x_0) \to 0$ доказать существование последовательности $\tilde{U}_m(x_0)$ вложенных окрестностей точки x_0 такой, что для любого $n \in N$ существуют $m_1(n) \in N$ и $m_2(n) \in N$ такие, что $\tilde{U}_{m_1(n)}(x_0) \supset U_n(x_0) \supset \supset \tilde{U}_{m_2(n)}(x_0)$ и $\operatorname{diam}_{m\to\infty} \tilde{U}_m(x_0) \to 0$. **14.** Необходимость условия следует из свойства сохранения знака непрерывной функции. Достаточность условия докажем от противного. Если f разрывна в точке $x_0 \in E$, то x_0 не является изолированной точкой E и по крайней мере две из трех точек расширенной числовой прямой $\varliminf_{x\to x_0} f(x)$, $f(x_0)$, $\varlimsup_{x\to x_0} f(x)$ различны. Для определенности положим, что $\varliminf_{x\to x_0} f(x) < f(x_0)$ (остальные случаи рассматриваются аналогично). Если $\varliminf_{x\to x_0} f(x) < c < f(x_0)$, то $x_0 \in E_c^+$, но в любой окрестности точки x_0 найдется точка $\tilde{x} \in E$, $\tilde{x} \overline{\in} E_c^+$, таким образом, E_c^+ не является открытым относительно множества E. Полученное противоречие доказывает достаточность условия задачи. **15.** Указание. Показать, что условие задачи эквивалентно фундаментальности последовательности $f_n(x_0)$ для любого $x_0 \in U$. **16.** Указание. См. задачу № 186, ч. I, гл. IV. **18.** Например, $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0; \\ 0 & x = y = 0. \end{cases}$

19. Указание. Показать, что такая функция есть предел последовательности непрерывных функций и применить результат задачи 16. **20.** Например, $f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } y \text{ рационально и } x \in [0, 1], \\ 0, & \text{если } y \text{ иррационально и } x \in [0, 1]. \end{cases}$ **21.** Указание. Представить приращение f в виде $f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y) = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y) + f(x+\Delta x, y) - f(x, y)$. **22.** Пусть $(x_0, y_0) \in G$. Возьмем некоторое $\varepsilon > 0$. Выберем $\widetilde{\Delta x} > 0$ и $\widetilde{\Delta y} > 0$ такие, что $\{(x, y) : x_0 - \widetilde{\Delta x} \leqslant x \leqslant x_0 + \widetilde{\Delta x},\ y_0 - \widetilde{\Delta y} \leqslant y \leqslant y_0 + \widetilde{\Delta y}\} \in G$. Для определенности предположим, что функция $f(x, y)$ не убывает по переменной y при фиксированном x. В силу линейной непрерывности $f(x, y)$ существуют h и k: $0 < h < \widetilde{\Delta x}$, $0 < k < \widetilde{\Delta y}$ такие, что $|f(x_0, y_0) - f(x_0 + \Delta x, y_0)| < \varepsilon$, $|f(x_0, y_0) - f(x_0, y_0 + \Delta y)| < \varepsilon$,

$|f(x_0, y_0+k)-f(x_0+\Delta x, y_0+k)|<\varepsilon$, $|f(x_0, y_0-k)-f(x_0+\Delta x, y_0-k)|<\varepsilon$ для всех Δx и Δy : $|\Delta x|\leqslant h$, $|\Delta y|\leqslant k$. Тогда для $|\Delta x|<h$, $|\Delta y|<k$ имеем $|f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)|\leqslant|f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0+\Delta x, y_0)|+|f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0, y_0)|\leqslant|f(x_0+\Delta x, y_0+k)-f(x_0+\Delta x, y_0)|+\varepsilon\leqslant|f(x_0+\Delta x, y_0+k)-f(x_0, y_0+k)|+|f(x_0, y_0+k)-f(x_0, y_0)|+|f(x_0, y_0)-f(x_0+\Delta x, y_0)|+\varepsilon\leqslant 4\varepsilon$, т. е. функция $f(x, y)$ непрерывна в (x_0, y_0). **23.** Например, $f(x, y)=x+y+\operatorname{sign} y$. **24.** Например: а) $f=\operatorname{sign}(xy)$, $g=x-\operatorname{sign}(xy)$; б) $f=\operatorname{sign}(xy)$, $g=xy$. **25.** Указание. Рассмотреть $f(x, x)$ и $f(x, -x)$. **28.** Указание. Рассмотреть $f(x, x)$ и $f(x, 0)$. **29.** $D(x)=\begin{cases}0, & x \text{ — иррациональное;}\\ 1, & x \text{ — рациональное.}\end{cases}$ **32.** Указание. Рассмотреть $f(x, x^2)$. **33.** Указание. а) $|f(x, y)|\leqslant\frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}\leqslant\frac{1}{2}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$; в) — е) перейти к полярной системе координат. **34.** Указание. а) Рассмотреть $f(x, x)$; б) рассмотреть $f(0, y)$; в) рассмотреть $f(x, 0)$; г) рассмотреть $f(x, x^3-x^2)$; д) рассмотреть $f(x, kx)$ либо перейти к полярным координатам; е) рассмотреть $f(x, x)$. **35.** Необходимые примеры отображений удобно записывать в виде $r_1=r_1(r, \varphi)$, $\varphi_1=\varphi_1(r, \varphi)$, где (r, φ) — полярные координаты точки $M(x, y)$, $x^2+y^2>0$, а (r_1, φ_1) — полярные координаты точек $P(u, v)$, $u^2+v^2>0$ (полярная и декартова система координат согласованы). Если при отображении f полюс переходит в полюс, r_1 и φ_1 — непрерывные функции от r и φ, $\lim\limits_{r\to 0} r_1(r, \varphi)=0$ для любого φ, $\lim\limits_{\varphi\to 2\pi}\varphi_1(r, \varphi)=\varphi_1(r, 0)+2\pi$ для любого $r>0$, то отображение f будет непрерывным. а. f_1: полюс переходит в полюс, $r_1=2r$, $\varphi_1=\varphi$. б. Непрерывного отображения D в M_2 не существует, так как D связно, а M_2 несвязно. в. f_2: полюс переходит в полюс, $r_1=8r(1-r)$, $\varphi_1=\varphi$. г. $f_3=g_1\circ g_2$, где $g_2:(x, y)\to(u, v)$ полюс переводит в полюс $\varphi_1=\varphi$, $r_1=\frac{2r}{(1-r\cos\varphi)}$ и $g_1:(u, v)\to(u, v)$ — сдвиг в плоскости UOV на единицу вправо по оси U ($g_2:(x, y)\to(u, v)$ переводит множество D во внутренность параболы $v^2=u+1$). **36.** а) Отображение f_1 из решения задачи 35; б) такого отображения нет, см. п. б) решения задачи 35; в) отображение f_2 из решения задачи 35; г) такого отображения не существует, так как по условию отображение f непрерывно на $\bar{D}=\{(x, y): x^2+y^2\leqslant 1\}\subset E$, следовательно, $f(\bar{D})$ — ограниченное множество и в силу соотношения $f(D)\subset f(\bar{D})$ $f(D)$ также должно быть ограниченным множеством. **37.** а) Отображение f_1 из решения задачи 35; б) такого отображения не существует, см. п. б) решения задачи 35; в) такого отображения не существует. Действительно, из условия задачи следует, что $f^{-1}(M_2)=f^{-1}(f(D))=D$, т. е. прообраз замкнутого множества, есть множество открытое, что противоречит

непрерывности отображения. г) такого отображения не существует, см. п. г) решения задачи 36. **38.** Указание. Рассмотреть значение функции на прямых $y=kx$. **39.** Указание. Использовать то, что функция $f(x, y)$ непрерывна на множестве $x^2+y^2\leqslant 1$. **40.** На множестве $0<x^2+y^2<2$ функция не является равномерно непрерывной (см. указание к задаче 38). На множестве $\frac{1}{2}<x^2+y^2<2$ функция равномерно непрерывна (см. указание к задаче 39). **41.** Указание. Использовать критерий Коши. **42.** Указание. Для доказательства необходимости надо доказать, что функция $f(A)=\lim\limits_{M\to A,\, M\in D} f(M)$ существует (см. задачу 41) и непрерывна на границе $\partial D=\overline{D}\setminus D$. **43.** Например, $f(x, y)=x^2e^{-x}+y^2e^{-y}$; $f(x, y)=e^{-x-y}$. **44.** f непрерывна как композиция многочлена и кубического корня. Так как для любого $x\in[-1, 1]$, $f(x, 0)=0$ и для любого $y\in[-1, 1]$, $f(0, y)=0$, то $f'_x(0, 0)=0$, $f'_y(0, 0)=0$. Если f дифференцируема в точке $M_0=(0, 0)$, то $df=0$ и, следовательно, $\Delta f=f(x, y)-f(0, 0)=f(x, y)=o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2})$ $(\Delta x^2+\Delta y^2\to 0)$. Но для $y=x$ имеем: $f(x, x)=x$, следовательно, $\frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\sqrt{2}\,\mathrm{sign}\,x$, а функция $\sqrt{2}\,\mathrm{sign}\,x$ не является бесконечно малой при $x\to 0$. Полученное противоречие показывает, что f не дифференцируема в точке $M_0=(0, 0)$. **45.** Так же, как в предыдущей задаче, доказывается, что $f'_x(0, 0)=f'_y(0, 0)=0$ и f не дифференцируема в точке $M_0=(0, 0)$. Если $M=(x, y)$, $x>0$, $y>0$, то в некоторой окрестности точки M $f(x, y)=\frac{xy}{x+y}$, следовательно, $f'_x(M)=\frac{y^2}{(x+y)^2}$, $f'_y(M)=\frac{x^2}{(x+y)^2}$, т. е. в первом квадранте $|f'_x(M)|\leqslant 1$, $|f'_y(M)|\leqslant 1$, так как $f(-x, -y)=f(x, y)=-f(x; -y)=-f(-x, y)$, то $|f'_x(M)|\leqslant 1$, $|f'_y(M)|\leqslant 1$ для любой точки M, не лежащей на осях OX и OY. Непосредственным переходом к пределу получается, что для точек M, лежащих на осях OX и OY, $f'_x(M)=\mathrm{sign}\,y$, $f'_y(M)=\mathrm{sign}\,x$. **47.** Указание. Использовать теорему Лейбница и результат задачи 21 в δ-окрестности $U_\delta(M)$ произвольной точки $M\subset G$, где δ выбирается так, чтобы $U_\delta(M)\subset G$. **48.** Указание. Использовать теорему Лейбница. **49.** Пусть $M_p=\{m: 2\pi p<\varphi_m\leqslant 2\pi(p+1),\ \mathrm{arctg}\,\varphi_m-\alpha<r_m<\mathrm{arctg}\,\varphi_m+\alpha\}$, тогда $M=\bigcup\limits_{p=1}^{\infty} M_p$. Если точка $m=(x, y)\in M_p$, то $\varphi(x, y)=\varphi_0+2\pi p$, где φ_0 $(0<\varphi_0\leqslant 2\pi)$ — угол между вектором $\overrightarrow{Om}$ и полярной осью, совпадающей с положительной полуосью OX. Чтобы установить однозначную определенность функции $\varphi(x, y)$, достаточно показать, что множества M_p не пересекаются. Пусть l_0 есть луч, выходящий из полюса

под углом φ_0, $0<\varphi_0\leqslant 2\pi$, к полярной оси. Этот луч пересекается с M_p по отрезку, концевые точки которого отстоят от полюса на $r_p=\operatorname{arctg}(\varphi_0+2\pi p)-\frac{1}{8}(\operatorname{arctg}(\varphi_0+2\pi(p+1))-\operatorname{arctg}(\varphi_0+2\pi p))$ и $\tilde{r}_p=\operatorname{arctg}(\varphi_0+2\pi p)+\frac{1}{8}(\operatorname{arctg}(\varphi_0+2\pi(p+1))-\operatorname{arctg}(\varphi_0+2\pi p))$. Так как $\tilde{r}_p<r_{p+1}$, то отрезки $l_0\cap M_p$ и $l_0\cap M_q$, $p\neq q$, не пересекаются. Следовательно, $M_p\cap M_q\neq\varnothing$, $p\neq q$. Возьмем последовательность точек m_p с полярными координатами $\varphi_p=\varphi_0+2\pi p$, $r_p=\operatorname{arctg}(\varphi_0+2\pi p)$. Тогда $m_p\in M_p\cap l_0$, $\lim\limits_{p\to\infty} r_p=\pi/2$, следовательно, существует $\lim\limits_{p\to\infty} m_p=m_0$, и в силу критерия Коши для любого $\varepsilon>0$ существует P такое, что для любых $p_1>p_2>P$ $\|m_{p_1}-m_{p_2}\|<\varepsilon$. С другой стороны, из того, что $m_{p_1}\in M_{p_1}\cap l_0$, $m_{p_2}\in M_{p_2}\cap l_0$, следует $\varphi(m_{p_1})=\varphi_0+2\pi p_1$, $\varphi(m_{p_2})=\varphi_0+2\pi p_2$, т. е. $|\varphi(m_{p_1})-\varphi(m_{p_2})|=2\pi|p_1-p_2|\geqslant 2\pi$. Итак, в множестве M имеется пара сколь угодно близких точек, разность значений функции φ в которых не менее 2π, т. е. φ не является равномерно непрерывной на M. Пусть $m_0=(x_0, y_0)\in M$. Если $x_0\neq 0$, то найдется такая окрестность точки $m_0\,U(m_0)\in M$, что $\varphi(m)=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+2\pi k_1(m_0)$, $k_1\in N$ для любого $m\in U(m_0)$; если $y_0\neq 0$, то найдется такая окрестность точки m_0 $U(m_0)$, что $\varphi(m)=\operatorname{arcctg}\frac{x}{y}+2\pi k_2(m_0)$, $k_2\in N$. Следовательно, для любой точки $m_0\in M$ имеем $\frac{\partial\varphi}{\partial x}(m_0)=\frac{-y_0}{x_0^2+y_0^2}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}(m_0)=\frac{x_0}{x_0^2+y_0^2}$, т. е. $\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}(m)\right|\leqslant 1$, $\left|\frac{\partial\varphi}{\partial y}(m)\right|\leqslant 1$ для любого $m\in M$. **50.** $(f'_y)'_x(0, 0)=1$, $(f'_x)'_y(0, 0)=-1$. **51.** а) $A=(-\infty, 1]$; б) бесконечно много; в) четыре: $y_1=-x\sqrt{1-x}$, $y_2=-|x|\cdot\sqrt{1-x}$, $y_3=|x|\sqrt{1-x}$, $y_4=x\sqrt{1-x}$; г) две: $y_1=-x\sqrt{1-x}$, $y_2=x\sqrt{1-x}$; д) I) одну: $y=-x\sqrt{1-x}$; II) две: $y_1=-x\sqrt{1-x}$ и $y_2=x\sqrt{1-x}$. **52.** Указание. Для анализа многозначной функции $y(x)$ полезно нарисовать кривую, определяемую данным уравнением, перейдя к полярным координатам. Точки ветвления: $(-9/16, 3\sqrt{15}/16)$, $(-9/16, -3\sqrt{15}/16)$, $(0, 0)$, $(1, 0)$. Гладкие ветви: $y_1=\frac{1}{2}\sqrt{-x\sqrt{16x+9}-3x-2x^2}$; $y_2=-y_1$ $(-9/16\leqslant x\leqslant 0)$; $y_3=\frac{1}{2}\sqrt{x\sqrt{16x+9}-3x-2x^2}$; $y_4=-y_3$ $(-9/16\leqslant x\leqslant 1)$. **53.** В силу периодичности φ, применяя теорему Лейбница, получаем $\max\limits_{y\in R}|\varphi(y)|=\max\limits_{0\leqslant y\leqslant T}|\varphi(y)|\leqslant|k|T+|\varphi(0)|$, следовательно, переменная $x=ky+$

$+\varphi(y)$ принимает все действительные значения. Так как $x'_y = k + \varphi'_y \neq 0$, то обратная функция $y = y(x)$ определена, непрерывна и дифференцируема на всей числовой оси. Функция $g(x) = y(x) - \frac{x}{k}$ также однозначно определяется из уравнения $kg + \varphi\left(g + \frac{x}{k}\right) = 0$ при любом x. Если $x_1 = x + |k|T$, то значение $g_1 = g(x_1)$ должно удовлетворять уравнению $kg_1 + \varphi\left(g_1 + \frac{x}{k} + T \operatorname{sign} k\right) = 0$, которое в силу периодичности φ равносильно уравнению $kg_1 + \varphi\left(g_1 + \frac{x}{k}\right) = 0$. Таким образом, значения $g = g(x)$ и $g_1 = g(x + |k|T)$ удовлетворяют одному и тому же уравнению, и в силу однозначности его решения $g = g_1(x) = g(x + |k|T)$, т. е. функция g периодическая с периодом $|k| \cdot T$.

54. Так как $|xy| \leqslant \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, то $|f(x, y)| \leqslant \frac{1}{2}|x|$, откуда следует непрерывность f в начале координат. Так же, как в задаче 44, находится, что $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$. Если f дифференцируема в точке $M = (0, 0)$, то отсюда следует, что $df = 0$ и $\Delta f = f(x, y) - f(0, 0) = f(x, y) = o(\sqrt{x^2 + y^2})$ $(x^2 + y^2 \to 0)$. Но для $y = x$ имеем $\frac{f(x, x)}{\sqrt{x^2 + x^2}} = \frac{x^3}{x^2\sqrt{2}\,|x|} = \frac{1}{2}\operatorname{sign} x$, а функция $\frac{1}{2}\operatorname{sign} x$ не бесконечно малая при $x \to 0$. Следовательно, f не дифференцируема в точке $M_0 = (0, 0)$.

Пусть $x = x(t)$, $x(0) = 0$, $y = y(t)$, $y(0) = 0$, $x(t), y(t) \in C^1[-1, 1]$, $x'_t(0) = A$, $y'_t(0) = B$, $A^2 + B^2 > 0$. Тогда при $t \to 0$ $x(t) = At + o(t)$, $y(t) = Bt + o(t)$ и $f^*(t) = f(x(t), y(t)) = \frac{A^2Bt^3 + o(t^3)}{A^2t^2 + B^2t^2 + o(t^2)} = \frac{A^2Bt}{A^2 + B^2} + o(t)$, т. е. $f^*(t)$ дифференцируема в нуле и $(f^*)'_t|_{t=0} = \frac{A^2B}{A^2 + B^2}$. Если $A = 0$ и $B = 0$, то $x(t) = t \cdot \varepsilon_1(t)$, $y(t) = t \cdot \varepsilon_2(t)$, где $\varepsilon_1^2(t) + \varepsilon_2^2(t) \to 0$, при $t \to 0$; так как $x^2(t) + y^2(t) > 0$ при $t \neq 0$, то $\varepsilon_1^2(t) + \varepsilon_2^2(t) > 0$ при $t \neq 0$. Тогда $\frac{f^*(t) - f^*(0)}{t} = \frac{f^*(t)}{t} = \frac{\varepsilon_1^2\varepsilon_2}{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}$ и, как было показано выше, $\lim\limits_{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 \to 0} \frac{\varepsilon_1^2\varepsilon_2}{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2} = 0$, т. е. $f^*(t)$ дифференцируема в нуле и $f^{*\prime}_t|_{t=0} = 0$. **55.** Пусть $f'_x(x_0, y_0) = A$ и $f'_y(x_0, y_0) = B$. Функция $g(x, y) = f(x_0 + x, y_0 + y) - Ax - By - f(x_0, y_0)$ дифференцируема в точке $M_0 = (0, 0)$ тогда и только тогда, когда f дифференцируема в точке (x_0, y_0). Так как $g'_x(M_0) = 0$, $g'_y(M_0) = 0$, то в силу условия задачи для любых $x(t)$, $y(t)$, $x(0) = 0$, $y(0) = 0$,

$x(t)$, $y(t) \in C^1(-1, 1)$ имеем $g'_t(x(t), y(t))|_{t=0} = 0$. Предположим, что g не дифференцируема в точке $M_0 = (0, 0)$. Это значит, что существует последовательность точек $M_p = (x_p, y_p) \to M_0$ и число $\varepsilon_0 > 0$ такие, что для любого $p \in N$ имеем $g(x_p, y_p) \geqslant \varepsilon_0 \sqrt{x_p^2 + y_p^2}$. Пусть k — конечная предельная точка множества $\left\{\frac{y_p}{x_p}\right\}$. (Если это множество не имеет конечных предельных точек, то аналогичное рассуждение проводится для множества $\left\{\frac{x_p}{y_p}\right\}$, для которого в этом случае нуль будет предельной точкой.) Выберем подпоследовательность M_{p_i} последовательности M_p такую, что x_{p_i} монотонно стремятся к нулю (для определенности $x_{p_i} > 0$) и $\frac{y_{p_i}}{x_{p_i}} \to k$ $(i \to \infty)$. Положим $n_1 = p_1$. Так как $y_{p_i} \to 0$, $x_{p_i} \to 0$ при $i \to \infty$, то найдется такой номер $n_2 = p_i$, что $\frac{y_{n_1}}{x_{n_1}} - \frac{1}{2} < \frac{y_{n_1} - y_{n_2}}{x_{n_1} - x_{n_2}} < \frac{y_{n_1}}{x_{n_1}} + \frac{1}{2}$. Продолжая по индукции такой выбор, построим последовательность точек $M_q = (x_q, y_q)$ таких, что при $q \to \infty$, $x_q \downarrow 0$, $y_q \to 0$, $\frac{y_k}{x_k} \to k$ и при любом q $(q = 1, 2 \ldots)$ $\frac{y_q}{x_q} - \frac{1}{q} < \frac{y_q - y_{q+1}}{x_q - x_{q+1}} < \frac{y_q}{x_q} + \frac{1}{q}$. Используя результат задачи 55 § 1 гл. IV, для каждого q найдем функцию $\varphi_q : R^1 \to R^1$ такую, что $\varphi_q \in C^1(-\infty, +\infty)$ $\varphi_q(x_{q+1}) = y_{q+1}$, $\varphi_q(x_q) = y_q$, $\varphi'_q(x_{q+1}) = \frac{y_{q+1}}{x_{q+1}}$, $\varphi'_q(x_q) = \frac{y_q}{x_q}$, $\frac{y_q}{x_q} - \frac{2}{q} < \varphi'_q(x) < \frac{y_q}{x_q} + \frac{2}{q}$, $x \in [x_{q+1}, x_q]$. Положим

$$x(t) = t \text{ и } y(t) = y(x) = \begin{cases} \varphi_q(x), & x \in (x_{q+1}, x_q); \\ kx, & x \leqslant 0; \\ \frac{y_1}{x_1} x + y_1, & x > x_1. \end{cases}$$

Тогда $x(t)$, $y(t) \in C^1(-\infty, \infty)$, $x(0) = y(0) = 0$, но по построению последовательности $M_q = (x_q, y_q)$ $g(x_q, y(x_q)) = g(x_q, y_q) \geqslant \varepsilon_0 \sqrt{x_q^2 + y_q^2}$, следовательно, функция $g(x(t), y(t))$ не может иметь в точке $t = 0$ производную, равную нулю. Полученное противоречие показывает, что g дифференцируема в точке $M_0 = (0, 0)$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 3

Часть I. Графики, пределы, дифференциальное исчисление функции одной переменной 4

Глава I. Построение эскизов графиков функций 4

§ 1. Элементарные преобразования графиков 4
§ 2. Графики рациональных функций 14
§ 3. Графики алгебраических функций 16
§ 4. Обратные тригонометрические функции и их графики . . . 20
§ 5. Кривые, заданные параметрически 25
§ 6. Полярная система координат и уравнения кривых в этой системе 29
§ 7. Функции, заданные неявно 31
Задачи 34

Глава II. Вычисление пределов 48

§ 1. Предел функции 48
§ 2. Предел последовательности 67
§ 3. Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора 70
Задачи 77
Ответы 87

Глава III. Дифференциальное исчисление функций одного действительного переменного 89

§ 1. Вычисление производных 89
§ 2. Дифференциал функции и инвариантность его формы . . . 101
§ 3. Приложения дифференциального исчисления 103
Касательные и нормали к кривым 103
Возрастание и убывание функции 110
Формула Тейлора, правило Лопиталя 113
Исследование функций и построение кривых 117
Задачи 122
Ответы 133

Глава IV. Теоретические задачи 144

§ 1. Общие свойства числовых множеств на прямой 144
§ 2. Последовательности и их свойства 148
§ 3. Функции. Общие свойства 152
§ 4. Предел и непрерывность функций 154
§ 5. Дифференцируемость функций 159
Ответы, решения, указания 162

Часть II. Неопределенный и определенный интегралы. Дифференциальное исчисление функций многих переменных 174

Глава I. Неопределенный интеграл 174

§ 1. Первообразная и простейшие способы ее нахождения . . . 174
Задачи 177
§ 2. Интегрирование по частям 180
Задачи 181
§ 3. Замена переменного 182
§ 4. Простейшие интегралы, содержащие квадратный трехчлен . . 190
Задачи 193
§ 5. Интегрирование рациональных дробей 194
Задачи 203
§ 6. Интегрирование некоторых тригонометрических функций . . 204
Задачи 208
§ 7. Интегрирование выражений, содержащих радикалы 209
Задачи 218
§ 8. Задачи на различные методы интегрирования 219
Ответы 223

Глава II. Определенный интеграл Римана 236
§ 1. Вычисление определенного интеграла. Понятие несобственного интеграла 236
§ 2. Площадь плоской области 246
§ 3. Объем тела вращения 254
§ 4. Длина дуги кривой 265
§ 5. Площадь поверхности вращения 270
Задачи 276
Ответы 283

Глава III. Дифференциальное исчисление функций многих переменных . 286
§ 1. Предел и непрерывность 286
§ 2. Производная, первый дифференциал, частные производные . . 291
§ 3. Дифференцирование сложных функций 300
§ 4. Производные высших порядков. Второй дифференциал . . . 303
§ 5. Дифференцирование неявных функций 310
§ 6. Замена переменных 320
§ 7. Геометрические приложения 329
§ 8. Экстремумы функций многих переменных 336
Задачи 351
Ответы 369

Глава IV. Теоретические задачи 381
§ 1. Первообразная и определенный интеграл Римана 381
Ответы и указания 391
§ 2. Функции многих переменных 401
Ответы и указания 408