Полагая $f(y) = hy$, где $h = h(y)$ удовлетворяет условию (100.2), получим:

$$\frac{dV}{dt} = (a + c)(ac - bh)y^2 < 0 \quad \text{при} \quad y \neq 0.$$

Отсюда, так же как и в предыдущем параграфе, заключаем, что если в уравнениях (100.1) функция удовлетворяет условию (100.2), то равновесие будет асимптотически устойчиво при любом начальном возмущении.

Итак, для системы (100.1) ответ на вопрос М. А. Айзермана тоже получается всегда утвердительный.

Во всех наших рассуждениях не исключалась возможность, что кривая $z = f(x)$ касается при $x = 0$ одной из прямых $z = \alpha x$ и $z = \beta x$. В этом случае характеристическое уравнение будет иметь корни с вещественной частью, равной нулю. Следовательно, линеаризованная система будет находиться на границе области устойчивости. Так как при этом нелинейная система будет по доказанному устойчива, то по Н. Н. Баутину эта граница всегда является «безопасной» [1]).

В заключение заметим, что предположение о дифференцируемости функции $f(x)$ не делалось и, следовательно, кривая $z = f(x)$ может не иметь в начале координат определенной касательной.

---

[1]) См. § 44.

ДОПОЛНЕНИЕ II.

О СУЩЕСТВОВАНИИ ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА.

§ 101. Постановка задачи.

В §§ 71—73, 75 настоящей книги рассматривалась проблема обращения теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости. Ниже приводится с небольшими изменениями содержание статьи И. Г. Малкина «К вопросу об обратимости теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости», опубликованной после выхода в свет первого издания настоящей монографии. В этой статье установлены необходимые и достаточные условия существования функции Ляпунова в общем случае неустановившихся движений.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений возмущенного движения

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(t, x_1, \ldots, x_n) \qquad (X_s(t, 0, \ldots, 0) = 0;\ s = 1, \ldots, n), \tag{101.1}$$

определенную в области

$$t \geqslant 0,\ x \leqslant H^2,\ x = \sum_{s=1}^{n} x_s^2, \tag{101.2}$$

где H — положительная постоянная. Согласно теореме II Ляпунова (стр. 189) невозмущенное движение $x_1 = \ldots = x_n = 0$ будет асимптотически устойчиво, если существует определенно-положительная функция $V(t, x_1, \ldots, x_n)$, полная производная которой по времени, составленная в силу уравнений (101.1), есть функция определенно-отрицательная и если при этом функция V допускает бесконечно малый высший предел. Возникает вопрос об обратимости этой теоремы, т. е. вопрос о существовании функции V, удовлетворяющей всем указанным условиям, всякий раз, когда невозмущенное движение асимптотически устойчиво [1]). В общем случае теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости не обратима. Этот вопрос исследо-

---

[1]) См. стр. 310

ван в § 75 для случая, когда функции X_s линейны относительно $x_1, \ldots, x_n$ и по отношению к t непрерывны и ограничены, причем для такого рода систем установлены необходимые и достаточные условия существования функций V, удовлетворяющих всем условиям теоремы Ляпунова.

Здесь мы будем рассматривать нелинейные уравнения (101.1), правые части которых в области (101.2) непрерывны и допускают непрерывные и ограниченные частные производные по $x_1, \ldots, x_n$.

§ 102. Необходимые и достаточные условия существования функции V.

Рассмотрим решение $x_s = F_s(t, x_1^0, \ldots, x_n^0, t_0)$ уравнений (101.1) с начальными условиями $F_s(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0, t_0) = x_s^0$. Если невозмущенное движение асимптотически устойчиво, то найдется такое достаточно малое положительное число δ, что при всех начальных значениях, лежащих в области

$$x^0 \leqslant \delta^2, \quad t \geqslant 0, \tag{102.1}$$

будут выполняться соотношения

$$\lim_{t \to \infty} F_s(t, x_1^0, \ldots, x_n^0, t_0) = 0. \tag{102.2}$$

Мы сейчас покажем, что для того, чтобы для уравнений (101.1) существовала функция V, удовлетворяющая всем условиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости, необходимо и достаточно, чтобы соотношения (102.2) выполнялись равномерно относительно x_j^0 и t_0. Мы докажем, следовательно, что имеют место две следующие теоремы.

Теорема 1. *Если существует такое положительное число* δ, *что соотношения* (102.2) *выполняются равномерно относительно* $x_1^0, \ldots, x_n^0, t_0$, *лежащих в области* (102.1), *то существует допускающая бесконечно малый высший предел определенно-положительная функция* $V(t, x_1, \ldots, x_n)$, *полная производная которой по времени, составленная в силу уравнений* (101.1), *есть функция определенно-отрицательная.*

Доказательство. Заметим прежде всего, что при выполнении условий теоремы невозмущенное движение будет равномерно устойчивым. Другими словами, для всякого положительного числа ε можно найти не зависящее от t_0 положительное число $\eta(\varepsilon)$ такое, что при всех $t \geqslant t_0$ будут выполняться условия $F < \varepsilon^2$, коль скоро $x^0 \leqslant \eta^2$. Здесь введено обозначение

$$F(t, x_1^0, \ldots, x_n^0, t_0) = \sum_{s=1}^{n} F_s^2(t, x_1^0, \ldots, x_n^0, t_0). \tag{102.3}$$

В самом деле, полагая $\eta < \delta$, мы на основании условий теоремы найдем такое число $T(\varepsilon)$, зависящее только от ε, что при всех $t \geqslant t_0 + T$ будет выполняться неравенство $F < \varepsilon^2$. Будем теперь считать η настолько малым, чтобы это неравенство выполнялось также в течение конечного промежутка времени $(t_0, t_0 + T)$. Это возможно в силу теоремы о непрерывной зависимости решений от начальных условий (решение F_s сравниваем с тривиальным решением $x_1 = \ldots = x_n = 0$). При этом, как это вытекает из доказательства указанной теоремы, число η определяется исключительно числом $T(\varepsilon)$ и верхними пределами функций $|X_s|$ и их постоянных Липшица по переменным x_j в области $t_0 \leqslant t < t_0 + T$, $x \leqslant \varepsilon^2$. Полученное таким образом число η будет удовлетворять всем требуемым условиям. Из сказанного следует, что если число δ в неравенствах (102.1) достаточно мало, то функция F будет при всех $t > t_0$ во всяком случае оставаться в области $x \leqslant H^2$. Мы будем в дальнейшем предполагать, что число δ удовлетворяет указанному условию.

Покажем теперь, что для функции F при всех $\tau > 0$ выполняется неравенство [1])

$$F(t_0 + \tau, x_1^0, \ldots, x_n^0, t_0) < \varphi(\tau), \tag{102.4}$$

где $\varphi(\tau)$ — некоторая положительная непрерывная функция, для которой $\lim \varphi(\tau) = 0$ при $\tau \to \infty$. С этой целью рассмотрим какую-нибудь убывающую и сходящуюся к нулю бесконечную последовательность положительных чисел $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$ По условию теоремы для всякого числа ε_i этой последовательности найдется число $T_i(\varepsilon_i)$ такое, что при всех $\tau > T_i$ будет выполняться неравенство $F(t_0 + \tau, x_1^0, \ldots, x_n^0, t_0) < \varepsilon_i$, и это число T_i не будет зависеть от x_s^0, t_0. Последовательность T_i будет, очевидно, расходящейся, и мы можем при этом предполагать, что $T_{i+1} > T_i$. Рассмотрим теперь произвольную монотонно убывающую функцию $\varphi(\tau)$, для которой $\varphi(T_{i+1}) = \varepsilon_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Если мы при этом предположим, что в интервале $(0, T_2)$ справедливо неравенство $F < \varphi(\tau)$, что, очевидно, возможно, так как при всех значениях аргументов $F \leqslant H^2$, то построенная таким образом функция $\varphi(\tau)$ будет удовлетворять всем требуемым условиям.

Рассмотрим теперь частные производные $\dfrac{\partial F}{\partial x_s^0}$ и $\dfrac{\partial F}{\partial t_0}$. Так как по доказанному при всех $t \geqslant t_0$ и всех значениях x_s^0, лежащих в области (102.1), функции F_s остаются в области (101.2), то эти частные производные при указанных значениях аргументов существуют и не-

---

[1]) См. аналогичное рассуждение в § 73 на стр. 314.

прерывны. Покажем, что при $\tau > 0$ справедливы неравенства

$$\left|\frac{\partial F(t_0+\tau, x_1^0, \ldots, x_n^0, t_0)}{\partial x_s^0}\right| < Ae^{\lambda t} = M(\tau),$$
$$\left|\left\{\frac{\partial F(t, x_1^0, \ldots, x_n^0, t_0)}{\partial t_0}\right\}_{t=t_0+\tau}\right| < Ae^{\lambda\tau} = M(\tau), \tag{102.5}$$

где A и λ — не зависящие от x_j^0, t_0 положительные числа. С этой целью рассмотрим уравнения в вариациях для системы (101.1):

$$\frac{du_s}{dt} = p_{s1}u_1 + \ldots + p_{sn}u_n \qquad \left(p_{sj} = \frac{\partial X_s}{\partial x_j}\right). \tag{102.6}$$

При этом в производных p_{sj} величины x_s заменены функциями F_s. Пусть $u_{sj}(t, t_0)$ и $u_s^*(t, t_0)$ — решения этой системы, определяемые начальными условиями:

$$u_{sj}(t_0, t_0) = \delta_{sj} \qquad (\delta_{sj} \text{ — символ Кронекера}),$$
$$u_s^*(t_0, t_0) = -X_s(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0). \tag{102.7}$$

Тогда, как известно, имеем тождественно

$$u_{sj} = \frac{\partial F_s}{\partial x_j^0}, \quad u_s^* = \frac{\partial F_s}{\partial t_0}.$$

Полагая в уравнениях (102.6) $v_s = u_s e^{-\lambda t}$, будем иметь

$$\frac{dv_s}{dt} = p_{s1}v_1 + \ldots + p_{sn}v_n - \lambda v_s,$$

откуда

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{s=1}^{n} v_s^2 = \sum_{s,\, j=1}^{n} p_{sj}v_s v_j - \lambda\sum_{s=1}^{n} v_s^2.$$

Правая часть этого выражения при достаточно большом положительном λ будет формой определенно-отрицательной, так как, по определению, в области (101.2) частные производные функций X_s ограничены. Полагая, что λ удовлетворяет указанному условию, получим при $t > t_0$

$$\sum_{s=1}^{n} v_s^2(t) < \sum_{s=1}^{n} v_s^2(t_0)$$

и, следовательно,

$$\sum_{s=1}^{n} u_s^2(t) < \sum_{s=1}^{n} u_s^2(t_0)\, e^{2\lambda(t-t_0)}.$$

Применяя эти неравенства к решениям u_{sj} и u_s^* и учитывая, что на основании (102.7) для модулей начальных значений этих решений

могут быть назначены некоторые не зависящие от x_s^0, t_0 верхние пределы, находим, что частные производные $\frac{\partial F_s}{\partial x_j^0}$, $\frac{\partial F_s}{\partial t_0}$, а следовательно, также и частные производные $\frac{\partial F}{\partial x_j^0}$, $\frac{\partial F}{\partial t_0}$ удовлетворяют неравенствам вида (102.5).

Как показал И. Л. Массера [1]), для всякой пары положительных функций $M(\eta)$ и $\varphi(\eta)$, определенных при всех $\eta \geqslant 0$, из которых первая возрастающая, а вторая стремится к нулю при $\eta \to \infty$, можно построить функцию $G(\eta)$, удовлетворяющую следующим условиям.

1. Функция $G(\eta)$ — положительная возрастающая функция, определенная при всех $\eta \geqslant 0$ и обладающая непрерывной возрастающей (очевидно, положительной) производной $G'(\eta)$.

2. $G(0) = 0$, $G'(0) = 0$.

3. Имеют место неравенства

$$\int_0^\infty G[\varphi(\tau)]\,d\tau < \infty, \quad \int_0^\infty G'[\varphi(\tau)]\,M(\tau)\,d\tau < \infty. \tag{102.8}$$

Принимая, что $\varphi(\eta)$ и $M(\eta)$ — функции, фигурирующие в неравенствах (102.4) и (102. 5), положим

$$V(t, x_1, \ldots, x_n) = \int_t^\infty G[F(\tau, x_1, \ldots, x_n, t)]\,d\tau \equiv$$

$$\equiv \int_0^\infty G[F(t+\tau, x_1, \ldots, x_n, t)]\,d\tau \tag{102.9}$$

и покажем, что функция V удовлетворяет всем условиям теоремы.

Заметим прежде всего, что в области

$$t \geqslant 0, \quad x \leqslant \delta^2 \tag{102.10}$$

на основании (102.4) справедливы при всех $\tau > 0$ неравенства

$$G[F(t+\tau, x_1, \ldots, x_n, t)] < G[\varphi(\tau)],$$

так как $G(\eta)$ — функция возрастающая. Отсюда на основании (102.8) вытекает, что интеграл, фигурирующий в выражении V, сходится и притом равномерно в области (102.10). Следовательно, в этой области функция V существует и непрерывна по всем своим аргументам. Дифференцируя далее выражение V формально под знаком интеграла,

---

[1]) См. выше стр. 314—315.

будем иметь:

$$\frac{\partial V}{\partial x_j} = \int_t^\infty G'[F(\tau, x_1, \ldots, x_n, t)] \frac{\partial F(\tau, x_1, \ldots, x_n, t)}{\partial x_j} d\tau,$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -G[F(t, x_1, \ldots, x_n, t)] + \tag{102.11}$$

$$+ \int_t^\infty G'[F(\tau, x_1, \ldots, x_n, t)] \frac{\partial F(\tau, x_1, \ldots, x_n, t)}{\partial t} d\tau.$$

Но на основании (102.4) и (102.5) в области (102.10) при всех $\tau > t$ имеем:

$$\left| G'[F(\tau, x_1, \ldots, x_n, t)] \frac{\partial F(\tau, x_1, \ldots, x_n, t)}{\partial x_j} \right| < G'[\varphi(\tau - t)] M(\tau - t),$$

$$\left| G'[F(\tau, x_1, \ldots, x_n, t)] \frac{\partial F(\tau, x_1, \ldots, x_n, t)}{\partial t} \right| < G'[\varphi(\tau - t)] M(\tau - t),$$

так как функция $G'(\eta)$ также возрастающая. Поэтому интегралы, входящие в (102.11), сходятся в области (102.10) абсолютно и равномерно. Следовательно, выражения (102.11) представляют в области (102.10) непрерывные и ограниченные функции, которые действительно являются частными производными функции V. Итак, функция V обладает в области (102.10) непрерывными и ограниченными частными производными первого порядка. Но это условие является более сильным, чем существование бесконечно малого высшего предела.

Покажем теперь, что функция V определенно-положительна. С этой целью положим

$$\alpha = \frac{1}{2L\sqrt{n}} \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2},$$

где L — верхний предел величин $|X_s|$ в области (101.2). Из (102.9) имеем:

$$V > \int_0^\alpha G[F(t + \tau, x_1, \ldots, x_n, t)] d\tau. \tag{102.12}$$

Но

$$|F_s(t + \tau, x_1, \ldots, x_n, t) - x_s| =$$

$$= \left| \int_t^{t+\tau} X_s(\eta, F_1(\eta, x_1, \ldots, x_n, t), \ldots \right.$$

$$\left. \ldots, F_n(\eta, x_1, \ldots, x_n, t)) d\eta \right| < L\tau$$

и, следовательно, в интервале $0 \leqslant \tau \leqslant \alpha$ справедлива оценка

$$\sum_{s=1}^{n} \{F_s(t+\tau, x_1, \ldots, x_n, t) - x_s\}^2 < nL^2\alpha^2 = \frac{1}{4}\sum_{s=1}^{n} x_s^2,$$

откуда

$$F(t+\tau, x_1, \ldots, x_n, t) \geqslant \frac{1}{4}(x_1^2 + \ldots + x_n^2),$$

и из (102.12) получаем:

$$V > \frac{1}{2L\sqrt{n}}\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} \cdot G\left[\frac{1}{4}(x_1^2 + \ldots + x_n^2)\right].$$

Правая часть этого неравенства представляет собой не зависящую от t определенно-положительную функцию. Следовательно, V есть определенно-положительная функция.

Составим теперь выражение для полной производной $\frac{dV}{dt}$ в силу дифференциальных уравнений (101.1). Будем, очевидно, иметь:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV^*}{dt},$$

где V^* означает результат замены в выражении V величин x_s функциями $F_s(t, x_1^0, \ldots, x_n^0, t_0)$. Имеем

$$V^*(t) = \int_t^\infty G\{F[\tau, F_1(t, x_1^0, \ldots, x_n^0, t_0), \ldots, F_n(t, x_1^0, \ldots, x_n^0, t_0)]\}d\tau \equiv$$

$$\equiv \int_t^\infty G\{F(\tau, x_1^0, \ldots, x_n^0, t_0)\}\, d\tau,$$

откуда

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV^*}{dt} = -G\{F(t, x_1^0, \ldots, x_n^0, t_0)\} = -G\{x_1^2 + \ldots + x_n^2\}.$$

Следовательно, $\frac{dV}{dt}$ есть функция определенно-отрицательная. Таким образом, V удовлетворяет всем нужным условиям, что и доказывает теорему.

Теорема 2. *Если для системы уравнений* (101.1) *существует допускающая бесконечно малый высший предел определенно-положительная функция* $V(t, x_1, \ldots, x_n)$, *полная производная которой по времени, составленная в силу этих уравнений, есть функция определенно-отрицательная, то существует такое достаточно малое число* $\delta > 0$, *что решения* $x_s = F_s(t, x_1^0, \ldots, x_n^0, t_0)$ *удовлетворяют соотношениям* (102.2)

равномерно относительно величин x_s^0, t_0, *лежащих в области* (102.1)[1]).

Доказательство. Согласно условию теоремы существует допускающая бесконечно малый высший предел функция V такая, что в области $t \geqslant 0$, $x \leqslant H^2$ выполняются неравенства

$$V(t, x_1, \ldots, x_n) \geqslant W_1(x_1, \ldots, x_n), \tag{102.13}$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s} X_s \leqslant -W_2(x_1, \ldots, x_n), \tag{102.14}$$

где W_1 и W_2 — не зависящие от t определенно-положительные функции.

Пусть $C > 0$ — точный нижний предел функции W_1 при условии $x = H^2$. Тогда на основании (102.13) имеем:

$$V(t, x_1, \ldots, x_n) \geqslant C \quad \text{при} \quad x = H^2, \quad t > 0. \tag{102.15}$$

Так как V допускает бесконечно малый высший предел, то найдется такое положительное число δ, что будет справедливо неравенство

$$V(t, x_1, \ldots, x_n) < C \quad \text{при} \quad x < \delta^2, \quad t > 0. \tag{102.16}$$

Покажем, что δ и является искомым числом, фигурирующим в теореме. С этой целью рассмотрим произвольное положительное число $\varepsilon < \delta$ и обозначим через $c > 0$ точный нижний предел функции W_1 при условии $H^2 \geqslant x \geqslant \varepsilon^2$. На основании (102.13) будем иметь:

$$V(t, x_1, \ldots, x_n) \geqslant c \quad \text{при} \quad H^2 \geqslant x \geqslant \varepsilon^2, \quad t \geqslant 0. \tag{102.17}$$

Далее выберем настолько малое положительное число $\alpha < \varepsilon$, чтобы выполнялось условие

$$V(t, x_1, \ldots, x_n) < c \quad \text{при} \quad x < \alpha^2, \quad t > 0 \tag{102.18}$$

и обозначим через $l > 0$ точный нижний предел функции W_2 при условии $H^2 \geqslant x \geqslant \alpha^2$. Таким образом, на основании (102.14)

$$\frac{dV}{dt} \leqslant -l \quad \text{при} \quad H^2 \geqslant x \geqslant \alpha^2, \quad t > 0. \tag{102.19}$$

Рассмотрим теперь произвольное решение $x_s = F_s(t, x_1^0, \ldots, x_n^0, t_0)$ уравнения (101.1), начальные значения которого x_s^0 и t_0 лежат в области, определенной неравенствами (102.1).

---

[1]) К. П. Персидский доказал, что при выполнении условий теоремы решения стремятся к нулю равномерно относительно t_0, а И. Л. Массера — что при тех же условиях решения стремятся к нулю равномерно относительно x_s^0.

Покажем прежде всего, что при всех $t > t_0$ справедливо неравенство

$$F < H^2.$$

В самом деле, функция $V^*(t) = V(t, F_1, \ldots, F_n)$ на основании (102.14) монотонно убывает и при $t = t_0$ на основании (102.1) и (102.16) $V^*(t) < C$. Следовательно, то же самое неравенство справедливо и при всех $t > t_0$. Но тогда при всех $t > t_0$ будет справедливо неравенство $F < H^2$, ибо если бы в какой-нибудь момент времени это неравенство нарушилось, то для этого момента на основании (102.15) мы имели бы $V^*(t) > C$.

Обозначим теперь через $T(\varepsilon)$ зависящее только от ε положительное число, определяемое равенством

$$T(\varepsilon) = \frac{C - c}{l},$$

и покажем, что в интервале $(t_0, t_0 + T)$ найдется такой момент времени $t = t_1$, для которого

$$V^*(t_1) < c.$$

В самом деле, рассмотрим следующее равенство:

$$V^*(t_0 + T) = V(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0) + \int_{t_0}^{t_0+T} \frac{dV^*}{dt}\, dt. \qquad (102.20)$$

Если бы во всем интервале $(t_0, t_0 + T)$ было справедливо неравенство $V^*(t) > c$ и, следовательно, на основании (102.18) также и неравенство $F \geqslant \alpha^2$, то из (102.20) на основании (102.16) и (102.19) мы получили бы

$$V^*(t_0 + T) < C - lT = c,$$

что противоречит условию. Таким образом, в интервале $(t_0, t_0 + T)$ найдется такой момент времени, для которого $V^*(t) < c$. Так как $V^*(t)$ — функция убывающая, то это неравенство будет справедливо при всех значениях

$$t \geqslant t_0 + T.$$

Но тогда при всех $t \geqslant t_0 + T$ будет на основании (102.17) выполняться неравенство $x < \varepsilon^2$, что и доказывает теорему, так как число ε можно взять сколь угодно малым.

Приведенное доказательство может быть проиллюстрировано геометрически (рис. 22).

При рассмотрении рисунка необходимо учесть, что уравнение $W_1(x_1, \ldots, x_n) = k^2$ при k, достаточно малом, представляет собой

замкнутую поверхность, окружающую начало координат. Точно так же и уравнение $V(t, x_1, \ldots, x_n) = k^2$ представляет собой в пространстве переменных $x_1, \ldots, x_n$ замкнутую поверхность, окружающую начало координат, но изменяющуюся с течением времени. При этом при всех $t > 0$ поверхность $V = k^2$ в силу (102.13) лежит внутри поверхности $W_1 = k^2$ и остается вне некоторой окрестности начала координат, так как V допускает бесконечно малый высший предел.

Поверхность $W_1 = C$ лежит внутри сферы $x = H^2$ и имеет с нею по крайней мере одну общую точку на (рисунке эта поверхность не показана). То же самое можно сказать и относительно поверхности $W_1 = c$ и сферы $x = \varepsilon^2$.

Примечание. Для справедливости теоремы 2 нет, очевидно, необходимости, чтобы функции X_s допускали частные производные. Достаточно, чтобы эти функции были непрерывными и такими, чтобы была обеспечена единственность решений для уравнений (101.1). Впрочем, последнее условие также не существенно.

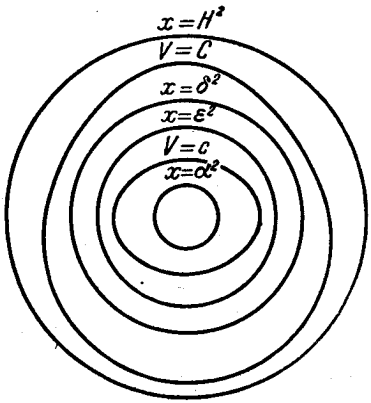

Рис. 22.

При доказательстве теоремы 1 мы видели, что при выполнении условий этой теоремы функция V будет не только допускать бесконечно малый высший предел, но и обладать ограниченными частными производными $\frac{\partial V}{\partial x_j}$. Поэтому, принимая во внимание теорему 2, убеждаемся в справедливости следующей теоремы.

Теорема 3. *Если для уравнений* (101.1) *существует определенно-положительная функция V, допускающая бесконечно малый высший предел, производная которой по времени, составленная в силу этих уравнений, есть функция определенно-отрицательная, то для этих уравнений существует функция V^{**}, обладающая такими же свойствами и для которой частные производные $\frac{\partial V^{**}}{\partial x_s}$ в некоторой окрестности начала координат и при всех $t > 0$ ограничены*[1]).

---

[1]) Это утверждение было усилено в работах Я. Курцвейля (Об обращении второй теоремы Ляпунова об устойчивости движения, Чехосл. матем. журнал, 1956, т. 6 (81), № 2, стр. 217—259, № 4, стр. 455—484) и И. Массера (Contributions to stability theory, Annals of Mathematics, 1956, т. 64, вып. 1, стр. 182—206), которые показали, что в случае равномерной асимпто-

Наряду с уравнениями (101.1) рассмотрим систему

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(t, x_1, \ldots, x_n) + R_s(t, x_1, \ldots, x_n). \quad (102.21)$$

Здесь функции R_s описывают постоянно действующие возмущающие факторы. Эти функции определены в области (101.2), где они непрерывны и таковы, что для уравнений (102.21) обеспечены условия единственности решений.

При этом функции R_s в отличие от функций X_s не обращаются, вообще говоря, в нуль при $x_1 = \ldots = x_n = 0$.

В § 70 мы доказали, что если для уравнений (101.1) существует определенно-положительная функция V, производная которой по времени, составленная в силу этих уравнений, есть функция определенно-отрицательная, и если частные производные $\frac{\partial V}{\partial x_s}$ этой функции в области (101.2) ограничены, то тривиальное решение $x_1 = \ldots = x_n = 0$ устойчиво при постоянно действующих возмущениях. Отсюда на основании теорем 1 и 3 мы приходим к следующему результату[1]).

Теорема 4. *Если тривиальное решение* $x_1 = \ldots = x_n = 0$ *системы* (101.1) *асимптотически устойчиво в смысле Ляпунова и если при этом соотношения* (102.2) *выполняются равномерно относительно* x_s^0 *и* t_0, *лежащих в области* (102.1), *то это решение устойчиво при постоянно действующих возмущениях.*

тической устойчивости существует сколь угодно гладкая функция Ляпунова, если предполагать лишь, что правые части уравнения (101.1) непрерывны, но не требовать существования производных $\frac{\partial V}{\partial x_j}$. Кроме того, Я. Курцвейлем было показано, что поверхности $V = c$ гомеоморфны сфере. Последний результат уточняет геометрическую интерпретацию теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости.

[1]) Аналогичная теорема сформулирована в работе С. И. Горшина (Об устойчивости движения с постоянно действующими возмущениями, Изв. АН Казахской ССР, № 58, 1948). Доказательство С. И. Горшина существенно отличается от приведенного здесь, где теорема 4 оказывается следствием теоремы 1 о существовании функции Ляпунова.

ДОПОЛНЕНИЕ III.

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМ ВТОРОГО МЕТОДА ЛЯПУНОВА.

§ 103. Критерии, основанные на функциях Ляпунова со знакопостоянными производными.

Критерии асимптотической устойчивости, приведенные в § 10 (теорема Б) и в § 46 (теорема II), опираются на функции Ляпунова V, производные которых $\frac{dV}{dt}$ в силу уравнений возмущенного движения являются функциями знакоопределенными. В приложениях, особенно при исследовании устойчивости в большом и в целом нелинейных систем, иногда удается построить определенно-положительную функцию V, производная которой $\frac{dV}{dt}$ является лишь функцией знакопостоянной отрицательной, но не определенно-отрицательной. Именно с этим случаем мы встретились в Дополнении I. В то же время попытки построить функцию Ляпунова V с определенно-отрицательной производной приводят к серьезным трудностям. Поэтому возникает необходимость сформулировать общий критерий, который указывал бы условия, обеспечивающие асимптотическую устойчивость невозмущенного движения при наличии лишь функции Ляпунова со знакопостоянной производной. В последнее время был предложен ряд таких критериев. По-видимому, наиболее ранними из них были теоремы, доказанные для систем уравнений, правые части которых не зависят явно от времени[1]). Без существенных изменений эти критерии обобщаются на периодические по времени системы. Позднее были доказаны аналогичные критерии для общего случая нестационарных систем с использованием, однако, двух и более функций Ляпунова[2]).

---

[1]) Барбашин Е. А., Красовский Н. Н., Об устойчивости движения в целом, ДАН, т. 86, вып. 3, 1952; Тузов А. П., Вопросы устойчивости для одной системы регулирования, Вестник ЛГУ, вып. 2, 1955.

[2]) Матросов В. М., Об устойчивости движения. ПММ, т. XXVI, вып. 5, 1962.

Приведем здесь одну теорему об асимптотической устойчивости в форме, близкой к той, которая предложена в работе Е. А. Барбашина и Н. Н. Красовского[1]).

Рассмотрим систему уравнений возмущенного движения

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(x_1, \ldots, x_n), \qquad (s = 1, 2, \ldots, n) \tag{103.1}$$

где правые части X_s определенны, непрерывны и удовлетворяют условиям единственности решений в области

$$|x_s| < H \qquad (H = \text{const}, \quad \text{или} \quad H = \infty). \tag{103.2}$$

Как и раньше, предполагаем, что $X_s(0, \ldots, 0) = 0$.

Пусть $V(x_1, \ldots, x_n)$ — некоторая функция Ляпунова, имеющая знакопостоянную отрицательную производную $\frac{dV}{dt}$ в силу уравнений (103.1). Обозначим через M множество тех точек x_s из области $|x_s| < H$, где $\frac{dV}{dt} = 0$. При этом, однако, не будем включать точку $x_1 = \ldots = x_n = 0$, где всегда $\frac{dV}{dt} = 0$. Тогда можно сформулировать следующий критерий асимптотической устойчивости.

Теорема Д. *Если для дифференциальных уравнений возмущенного движения* (103.1) *можно найти определенно положительную в области* (103.2) *функцию* V *такую, что ее производная* $\frac{dV}{dt}$ *удовлетворяет в этой области условиям*:

1) $$\frac{dV}{dt} < 0 \quad \textit{вне} \quad M;$$

2) $$\frac{dV}{dt} = 0 \quad \textit{на} \quad M,$$

где M — *многообразие точек* $\{x_s\}$, *не содержащее целых движений* $x_s(t)$ *системы при* $0 < t < \infty$, *то невозмущенное движение асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Устойчивость невозмущенного движения следует из теоремы А (§ 9). Значит, для всякого $0 < \varepsilon < H$ найдется такое $\eta(\varepsilon) > 0$, что любое возмущенное движение $x_s(t)$ системы (103.1), выходящее в момент времени $t = t_0$ из области $|x_s(t_0)| \leqslant \eta$, будет удовлетворять условию

$$|x_s(t)| < \varepsilon \tag{103.3}$$

при всех $t \geqslant t_0$. Покажем, что эта устойчивость является асимптотической, т. е.

$$\lim x_s(t) = 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty.$$

---

[1]) См. первую работу в сноске на стр. 463.

Так как $\frac{dV}{dt} \leqslant 0$, то

$$V(x_1(t), \ldots, x_n(t)) \leqslant V(x_1(t_0), \ldots, x_n(t_0)) \quad \text{при} \quad t \geqslant t_0$$

и функция $V(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ как невозрастающая и неотрицательная функция времени имеет определенный предел V_0 при $t \to \infty$, причем

$$V(x_1(t), \ldots, x_n(t)) \geqslant V_0 \quad \text{при} \quad t \geqslant t_0. \tag{103.4}$$

Допустим, что $V_0 \neq 0$. Из ограниченности области (103.3) вытекает, что найдется последовательность точек $x_s^{(k)} = x_s(t_0 + k\tau)$ ($k = k_1, k_2, \ldots$; $\tau = \text{const} > 0$), которая сходится к точке q с координатами $x_1^*, \ldots, x_n^*$, лежащей в области (103.3). Вследствие непрерывности функции V должно выполняться равенство $V(x_1^*, \ldots, x_n^*) = V_0$.

Рассмотрим теперь движения $x_s^{(q)}(t)$ и $x_s^{(k_i)}(t)$, выходящие при $t = t_0$ соответственно из точек q и $x_s^{(k_i)}$. Так как по условию теоремы движение $x_s^{(q)}(t)$ при $t_0 \leqslant t < \infty$ не может лежать целиком на многообразии M, то должны существовать такие интервалы времени, когда $\frac{dV}{dt} < 0$ вдоль этого движения. Значит, можно указать момент времени $T > t_0$, в который выполняется условие

$$V\left(x_1^{(q)}(T), \ldots, x_n^{(q)}(T)\right) = V_1 < V_0.$$

Так как последовательность $x_s^{(k_i)}$ сходится к точке q, то вследствие непрерывной зависимости решений от начальных данных можно записать неравенство

$$\max\left\{\left|x_1^{(q)}(T) - x_1^{(k_i)}(T)\right|, \ldots, \left|x_n^{(q)}(T) - x_n^{(k_i)}(T)\right|\right\} < \delta$$

при всех $k_i > N(\delta)$, каково бы ни было наперед заданное число $\delta > 0$. Следовательно,

$$\lim V\left(x_1^{(k_i)}(T), \ldots, x_n^{(k_i)}(T)\right) \leqslant V_1 \quad \text{при} \quad k_i \to \infty. \tag{103.5}$$

Вследствие независимости функций X_s от времени справедливы равенства

$$x_s^{(k_i)}(T) = x_s(T + k_i\tau),$$

поэтому условие (103.5) можно записать таким образом:

$$\lim V(x_1(T + k_i\tau), \ldots, x_n(T + k_i\tau)) \leqslant V_1 \quad \text{при} \quad k_i \to \infty.$$

Это неравенство противоречит (103.4), поэтому наше допущение $V_0 \neq 0$ неверно. Следовательно, $V_0 = 0$, т. е.

$$\lim V(x_1(t), \ldots, x_n(t)) = 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty$$

и

$$\lim x_s(t) = 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty.$$

Примечание. Если многообразие M есть поверхность, заданная уравнением

$$F(x_1, \ldots, x_n) = 0, \tag{103.6}$$

то условие

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_s} X_s \neq 0 \qquad (x_1^2 + \ldots + x_n^2 \neq 0)$$

в области (103.3) является достаточным для отсутствия целых движений на M.

Действительно, если в некоторый момент $t = t_1$ траектория $x_s(t)$, выходящая из области $|x_s(t_0)| \leqslant \eta$, попадает на поверхность (103.6), то сразу при $t > t_1$ она должна покинуть эту поверхность, так как

$$\left(\frac{dF(x_1(t), \ldots, x_n(t))}{dt}\right)_{t=t_1} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_s} X_s \neq 0.$$

Заметим теперь, что если в случае $H = \infty$ к условиям доказанной теоремы добавить требование, чтобы функция $V(x_1, \ldots, x_n)$ удовлетворяла условию[1])

$$\lim V(x_1, \ldots, x_n) = \infty \quad \text{при} \quad x \to \infty, \tag{103.7}$$

где $x = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$, то получится критерий асимптотической устойчивости в целом.

В самом деле, рассмотрим возмущенное движение $x_s(t)$ системы (103.1), выходящее в момент времени t_0 из произвольной точки пространства $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Условие (103.7) обеспечивает ограниченность области

$$V(x_1, \ldots, x_n) \leqslant V(x_1(t_0), \ldots, x_n(t_0)),$$

в которой будет оставаться движение $x_s(t)$ при всех $t_0 \leqslant t < \infty$. Повторяя, далее, рассуждения, приведенные в доказательстве теоремы, убеждаемся в том, что асимптотическая устойчивость имеет место при любых начальных возмущениях. Таким образом, при указанном дополнительном условии мы действительно имеем дело с устойчивостью в целом.

Мы рассмотрели теорему, обобщающую теорему Ляпунова об асимптотической устойчивости. Можно сформулировать также критерий неустойчивости, который является обобщением соответствующей теоремы Ляпунова (теорема В § 13).

---

[1]) См. примечание к стр. 68.

Теорема Е. *Если для дифференциальных уравнений возмущенного движения* (103.1) *можно найти функцию* $V(x_1, \ldots, x_n)$ *такую, что ее производная* $\frac{dV}{dt}$ *удовлетворяет условиям:*

$$1) \quad \frac{dV}{dt} > 0 \quad \text{вне } M;$$

$$2) \quad \frac{dV}{dt} = 0 \quad \text{на } M,$$

где M — *многообразие точек* $\{x_s\}$, *не содержащее целых движений при* $0 < t < \infty$, *и если при этом можно указать точки, лежащие в произвольной окрестности начала координат, такие, что в них* $V > 0$, *то невозмущенное движение неустойчиво.*

Доказательство этой теоремы[1]) приводить не будем.

§ 104. Примеры приложения предыдущих теорем.

В качестве первого примера, когда функция V удовлетворяет всем условиям теоремы Д и условию (103.7), можно привести функции Ляпунова, построенные в Дополнении I при решении задачи М. А. Айзермана для систем (99.1) и (100.1).

В самом деле, рассмотрим, например, функцию

$$2V = 2\int_0^x [cf(x) - abx]\,dx + (cx - ay)^2 \qquad (a \neq 0).$$

Ее производная по времени в силу (99.1) равна

$$\frac{dV}{dt} = [f(x) + cx] \cdot [cf(x) - abx].$$

При условиях, наложенных на функцию $f(x)$ в § 98, имеем:

$$\frac{dV}{dt} < 0 \quad \text{при} \quad x \neq 0,$$

$$\frac{dV}{dt} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0.$$

Многообразием M, о котором шла речь в теореме Д, является в данном случае ось y без точки $x = y = 0$. Так как при $x = 0$, $y \neq 0$ $\frac{dx}{dt} = ay \neq 0$, то это многообразие не содержит целых движений, кроме $x \equiv y \equiv 0$. Нетрудно, далее, заметить, что условие (99.2)

[1]) Красовский Н. Н., Некоторые задачи об устойчивости движения, Физматгиз, 1959.

обеспечивает определенную положительность функции V и выполнение условия

$$\lim V(x, y) = \infty$$

при $\max\{|x|, |y|\} \to \infty$.

Таким образом, устойчивость невозмущенного движения системы (99.1) в целом действительно следует в данном случае из теорем § 103.

Приведем еще один пример приложения теорем Д и Е из предыдущего параграфа.

Рассмотрим голономную консервативную механическую систему с n степенями свободы, подверженную дополнительно управляющему воздействию и описываемую следующими уравнениями Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_i'}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = b_i u \qquad (104.1)$$

$$(i = 1, \ldots, n).$$

Здесь q_i — обобщенные координаты; T — кинетическая, Π — потенциальная энергия; u — скаляр, который характеризует величину управляющего воздействия; $b_i(q_1, \ldots, q_n)$ — функции, определяющие направление силы u. Функции T, Π и b_i заданы. Закон регулирования $u = u(q_1, \ldots, q_n; q_1', \ldots, q_n')$ является искомым.

Пусть при $u \equiv 0$ система (104.1) обладает положением равновесия $q_i = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$. Равновесие консервативной механической системы не может быть асимптотически устойчивым по Ляпунову, так как эти системы допускают интеграл энергии. Задача состоит в таком выборе управления $u(q, q')$, при котором положение равновесия становится асимптотически устойчивым. Упрочнение равновесия до асимптотической устойчивости выбором u назовем стабилизацией системы. Систему будем называть стабилизируемой, если возможна ее стабилизация[1]).

Рассмотрим уравнения первого приближения системы (104.1) в окрестности точки $q_i = 0$, $q_i' = 0$:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T^0}{\partial q_i'}\right) + \frac{\partial \Pi^0}{\partial q_i'} = b_i^0 u \qquad (i = 1, \ldots, n). \qquad (104.2)$$

Здесь

$$T^0 = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^0 q_i' q_j', \quad \Pi^0 = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}^0 q_i q_j$$

$$(a_{ij}^0, b_{ij}^0, b_i^0 \text{ — постоянные}).$$

---

[1]) См. дополнение IV, § 106.

Будем говорить, что управление

$$u = u^0(q, q') = \sum_{i=1}^{n} (p_i^0 q_i + r_i^0 q_i') \tag{104.3}$$

$$(p_i^0 = \text{const}, \quad r_i^0 = \text{const}),$$

найденное для уравнений (104.2), стабилизирует систему (104.1) по первому приближению, если равновесие $q_i = q_i' = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ системы (104.1) асимптотически устойчиво при $u = u^0 + \mu(q, q')$, каковы бы ни были высшие нелинейные члены $T - T^0$, $\Pi - \Pi^0$, $\mu = u - u^0$.

Запишем уравнения (104.2) в нормальных координатах [1]):

$$\begin{aligned} \frac{dx_{2i-1}}{dt} &= x_{2i}, \quad (i = 1, \ldots, n), \\ \frac{dx_{2i}}{dt} &= -\lambda_i x_{2i} + e_i^0 u, \end{aligned} \tag{104.4}$$

где вектор $\{e_i^0\}$ связан с вектором $\{b_i^0\}$ неособым линейным преобразованием; x_{2i-1} — новые координаты, x_{2i} — скорости.

Рассмотрим сначала случай, когда все числа λ_i в уравнениях (104.4) положительны. Тогда при $u \equiv 0$ невозмущенное движение $x_s = 0$ системы (104.4) устойчиво, но не асимптотически. Предположим, что все λ_i различны и все числа e_i^0 не равны нулю.

Тогда систему (104.4) можно стабилизировать до асимптотической устойчивости диссипативной силой [2])

$$e_i^0 u = -\frac{\partial R^0}{\partial q_i'} \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{104.5}$$

где R^0 — знакоположительная функция Релея

$$R^0 = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} e_i^0 x_{2i}\right)^2.$$

Действительно, функция

$$V = H(q_1, \ldots, q_n; q_i', \ldots, q_n') = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i x_{2i-1}^2 + x_{2i}^2), \tag{104.6}$$

равная полной энергии системы, является в этом случае определенно положительной. Ее производная $\frac{dV}{dt}$ в силу системы (104.4) при u

---

[1]) Четаев Н. Г., Устойчивость движения, Гостехиздат, 1955, стр. 97—99.

[2]) См. Пожарицкий Г. К., Об асимптотической устойчивости равновесий и стационарных движений механических систем с частичной диссипацией. ПММ, т. XXVIII, вып. 3, 1964.

из (104.3) удовлетворяет равенству

$$\frac{dV}{dt} = -\left(\sum_{i=1}^{n} e_i^0 x_{2i}\right)^2 \tag{104.7}$$

и является функцией знакопостоянной отрицательной. Покажем, что поверхность

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^0 x_{2i} = 0,$$

где $\frac{dV}{dt} = 0$, не содержит целых движений $x_s(t)$ системы (104.4), отличных от $x_s = 0$. Действительно, если бы это было не так, то выполнялись бы n равенств:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} e_i^0 x_{2i}(t) \equiv 0, \\ &\frac{d^k}{dt^k}\left(\sum_{i=1}^{n} e_i^0 x_{2i}(t)\right) = \sum_{i=1}^{n} e_i^0 \lambda_i^k x_{2i}(t) \equiv 0 \\ &(k = 1, \ldots, n-1), \end{aligned}\right\} \tag{104.8}$$

и, в частности, при некотором $t = t^*$ система (104.8) имела бы не тривиальное решение $x_{2i}(t^*)$. Но это невозможно, так как при наших предположениях $(e_i^0 \neq 0,\ \lambda_i \neq \lambda_j;\ i \neq j;\ i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, n)$ определитель

$$\begin{vmatrix} e_1^0, & e_2^0, & \ldots, & e_n^0 \\ \lambda_1 e_1^0, & \lambda_2 e_2^0, & \ldots, & \lambda_n e_n^0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \lambda_1^{n-1} e_1^0, & \lambda_2^{n-1} e_2^0, & \ldots, & \lambda_n^{n-1} e_n^0 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Итак, в данном случае выполнены все условия теоремы Д. Тем самым доказана асимптотическая устойчивость движения $x_s = 0$ системы (104.4) при воздействии u, определенном равенством (104.5). Из теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению заключаем, что управляющее воздействие u вида

$$\left.\begin{aligned} &b_i u = -\frac{\partial R}{\partial q_i'} \quad (i = 1, \ldots, n), \\ &R = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i q_i'\right)^2 \end{aligned}\right\} \tag{104.9}$$

стабилизирует до асимптотической устойчивости нелинейную систему (104.1).

Предположим теперь, что невозмущенное движение $x_s = 0$ системы (104.4) при $u \equiv 0$ неустойчиво и, следовательно, среди чисел λ_i есть отрицательные. Предположим при этом, что в одном из уравнений (104.4), где $\lambda_k < 0$, имеем $e_k^0 = 0$. Тогда, очевидно, движение $x_s = 0$ системы (104.1) нельзя сделать асимптотически устойчивым, как бы ни выбирать воздействие u в форме

$$u(x_1, \ldots, x_n) = \nu_1 x_1 + \ldots + \nu_n x_n. \qquad (104.10)$$

Действительно, система первого приближения (104.4) при выборе u в виде (104.9) всегда будет иметь среди своих собственных чисел $\rho_1, \ldots, \rho_{2n}$ по крайней мере одно положительное число $\rho = \lambda_k$. Отсюда по теореме Ляпунова о неустойчивости по первому приближению заключаем, что движение $q_s = q'_s = 0$ системы (104.1) при u (104.10) неустойчиво. Следовательно, в этом случае стабилизация системы (104.1) по первому приближению невозможна.

Подчас удается, налагая на систему (104.1) сверх u дополнительные гироскопические силы, изменить систему (104.4) первого приближения так, что движение $x_s = 0$ этой системы становится устойчивым (неасимптотически), и при этом для новой системы первого приближения будут выполняться достаточные условия, при которых возможно упрочнение системы до асимптотической устойчивости выбором воздействия u вида (104.5). Эти условия указаны теоремой 1 § 112.

Гироскопические силы Q_i описываются в линейном приближении Q_i кососимметрической матрицей $\{g_{ij}^0\}$ $(g_{ij}^0 = -g_{ji}^0)$ $(g_{ij}^0$ — постоянные),

$$Q_i = \sum_{j=1}^{n} g_{ij}^0 x_{2j}.$$

Поэтому уравнения (104.4) после наложения гироскопических сил принимают вид

$$\frac{dx_{2i-1}}{dt} = x_{2i},$$

$$\frac{dx_{2i}}{dt} = -\lambda_i x_{2i-1} + \sum_{j=1}^{n} g_{ij}^0 x_{2j} + e_i^0 u \qquad (i = 1, \ldots, n). \qquad (104.11)$$

Ограничимся в дальнейшем случаями, когда среди собственных чисел λ_i нет нулей.

Вопрос о том, каким образом вычисляются гироскопические силы, обладающие указанными свойствами, а также вывод эффективных критериев, при которых это вычисление возможно, здесь рассматривать

не будем. Отметим лишь следующее. Согласно общей теории указанная математическая задача будет решена, если будет найдена кососимметрическая матрица $\{g_{ij}^0\}$, описывающая в линейном приближении гироскопические силы, такая, что при добавлении в уравнения (104.2) членов $g_{ij}^0 q_j'$ система первого приближения будет удовлетворять условиям общего положения[1]). Это можно сделать в широком классе случаев.

Простым примером такой ситуации является маятник с двумя степенями свободы (ξ, η) в окрестности верхнего неустойчивого положения равновесия, управляемый моментом u, воздействующим на координату φ (рис. 23).

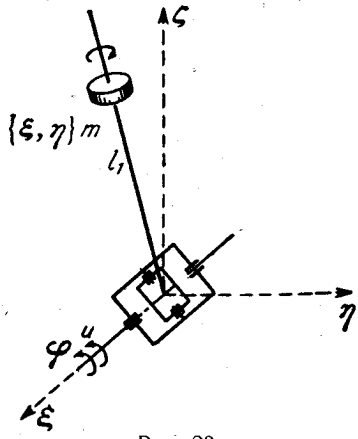

Рис. 23.

Гироскопический эффект, возникающий при быстром вращении маховичка m, делает систему устойчивой. Пусть система уравнений первого приближения (104.1) записана в данном случае в виде

$$x_1' = x_2, \quad x_2' = x_1 - \omega x_4,$$
$$x_3' = x_4, \quad x_4' = x_3 + \omega x_2 + u, \tag{104.12}$$

где величины x_1, x_3 изображают координаты ξ и η; величины x_2, x_4 — скорости ξ' и η', а величина ω пропорциональна скорости вращения маховичка m вокруг стержня l_1.

Легко проверить, что в данном случае выполняются условия теоремы 1 § 112. В самом деле, матрица W в данном случае имеет вид

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -\omega & 0 \\ 0 & -\omega & 0 & -2\omega+\omega^3 \\ 0 & 1 & 0 & 1-\omega^2 \\ 1 & 0 & 1-\omega^2 & 0 \end{vmatrix},$$

и ранг ее равен 4.

Итак, мы рассматриваем случаи, когда система (104.4) неустойчива и ее, а следовательно, и исходную систему (104.1) нельзя стабилизировать выбором управления u в виде (104.9). Однако после наложения на (104.1) гироскопических сил Q_i получаем систему

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_i'}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = b_i u + Q_i \tag{104.13}$$

$$(i = 1, \ldots, n),$$

[1]) См. Дополнение IV, § 112.

для которой система первого приближения (104.10) приобретает свойство стабилизируемости.

Оказывается в таких случаях система (104.4) приобретает обязательно еще одно важное свойство: поверхность

$$R=\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} e_i^0 x_{2i}\right)^2=0$$

не может при этом содержать целиком движений $x_s(t)$ $(s=1, \ldots, 2n)$ системы (104.10), отличных от $x_s \equiv 0$ $(s=1, \ldots, 2n)$. Такое же свойство приобретает система (104.1): поверхность

$$R(q, q')=\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i q_i'\right)^2$$

системы (104.1) не может при этом содержать целиком движений $\{q_s(t), q_s'(t)\}$ системы (104.13), отличных от $q_i(t)=q_i'(t)\equiv 0$ [1]). Здесь мы примем это утверждение без доказательства.

Теперь можно доказать следующее интересное свойство системы (104.13) в рассматриваемом случае.

Теорема 1. *Пусть консервативная система* (104.1) *в первом приближении* (104.2) *неустойчива и не стабилизируема воздействием и. Предположим, что при наложении подходящих гироскопических сил система* (104.2) *переходит в устойчивую и стабилизируемую систему* (104.11). *Тогда система* (104.13) *стабилизируется по первому приближению силой* (104.3) *в классе сил общей природы. При этом, однако, система* (104.13) *не только не может быть стабилизирована диссипативной силой* (104.9) *но, напротив, диссипативная сила* (104.9) *с частичной диссипацией обязательно разрушает устойчивость, которой обладает система* (104.13) *при* $u\equiv 0$.

Примечание. Теорема 1 утверждает, следовательно, что диссипативная сила u (104.9) с частичной диссипацией обязательно разрушает устойчивость системы (104.13), если только гироскопическая устойчивая система может быть упрочнена по первому приближению до асимптотической устойчивости силой (104.3) общей природы.

Доказательство теоремы 1. Итак, следует показать, что диссипативная сила (104.9) обязательно разрушает устойчивость положения равновесия $q_i=0$ системы (104.13), если только при наложении гироскопических сил Q_i неустойчивая система (104.1)

---

[1]) Красовский Н. Н., Об одном свойстве гироскопической стабилизируемости управляемой консервативной механической системы. Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 5, 1964.

переходит в стабилизируемую по первому приближению систему (104.13). Покажем это.

Функция $V = H(q, q')$ вида (104.6), где H — полная энергия системы (104.1), в рассматриваемом случае является знакопеременной. Ее производная $\frac{dV}{dt}$ вдоль движений системы (104.12) при управлении u (104.9) удовлетворяет равенству

$$\frac{dV}{dt} = -2R.$$

Следовательно, величина $\frac{dV}{dt}$ является знакоотрицательной функцией и может обращаться тождественно в нуль лишь при $R(q(t), q'(t)) \equiv 0$. Но, как только что отмечено, не существует движения $\{q_i(t), q_i'(t)\}$, отличного от положения равновесия и такого, что на нем $R \equiv 0$. Следовательно, движений $\{q_i(t), q_i'(t)\}$, отличных от $q_i = 0$, $q_i' = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, на которых $\frac{dV}{dt} \equiv 0$, нет. Это означает, что функция V удовлетворяет в данном случае всем условиям теоремы о неустойчивости. Следовательно, неустойчивость положения равновесия системы (104.13) установлена.

В заключение отметим, что этот результат для управляемых механических систем тесно связан с результатами Н. Г. Четаева [1]) о влиянии диссипативных сил на устойчивость равновесий механических систем.

---

[1]) См. монографию, упомянутую в сноске на стр. 342.

ДОПОЛНЕНИЕ IV.

ПРОБЛЕМЫ СТАБИЛИЗАЦИИ УПРАВЛЯЕМЫХ ДВИЖЕНИЙ.

§ 105. Предварительные замечания.

В последнее время получила большое развитие теория оптимальных процессов в управляемых динамических системах. Этой теории посвящен ряд фундаментальных монографий, появившихся в последние годы [1]). Среди проблем оптимального управления занимает важное место задачи о стабилизации заданного движения. Это — задача о построении регулирующих воздействий, которые обеспечивают устойчивое осуществление желаемого движения при наилучшем возможном качестве переходного процесса. Задача об оптимальной стабилизации тесно смыкается с общей задачей об устойчивости движения, составляющей предмет настоящей монографии. Она является дальнейшим развитием проблемы устойчивости в приложении к теории управляемых систем. Методы исследования проблем оптимальной стабилизации переплетаются с классическими методами теории устойчивости Ляпунова. В частности, метод динамического программирования, один из основных в задачах оптимального управления [2]), является по существу объединением методов вариационного исчисления с методом функций Ляпунова.

В монографиях по теории оптимальных процессов, посвященных весьма общим аспектам этой теории, указанное обстоятельство не выдвигается, естественно, на первый план и не рассматривается специально с позиций теории устойчивости Ляпунова. В то же время развитие проблем оптимального управления и методов их решения определило некоторые новые направления исследований по устойчивости регулируемых движений. Эти исследования тесно связаны

---

[1]) Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф., Математическая теория оптимальных процессов, М., Физматгиз, 1961; Беллман Р., Гликсберг И., Гросс О., Некоторые вопросы математической теории процессов управления, М., Изд-во иностр. лит-ры, 1962; Фельдбаум А. А., Основы теории оптимальных автоматических систем, М., Физматгиз, 1963.

[2]) См. монографию Беллмана и др., упомянутую в сноске [1]).

с материалом настоящей монографии. По указанным причинам мы сочли целесообразным дать настоящее приложение к книге И. Г. Малкина.

Это приложение содержит краткий очерк некоторых проблем стабилизаций управляемых движений и методов их решения. При этом выбран лишь тот материал, который имеет прямое отношение к содержанию монографии. Автор приложения старался в меру возможности согласовать характер изложения с основным текстом книги.

В основу материала настоящего приложения легли исследования, выполненные в последние годы и имеющие своим источником проблему аналитического конструирования регуляторов, поставленную А. М. Летовым [1]).

§ 106. Постановка задачи о стабилизации.

Рассмотрим некоторую управляемую динамическую систему и допустим, что ее движение может быть описано системой дифференциальных уравнений, которая может быть приведена к нормальному виду

$$\frac{dy_s}{dt} = Y_s(t, y_1, \ldots, y_n, v_1, \ldots, v_r) \qquad (106.1)$$
$$(s = 1, \ldots, n).$$

Здесь, как и в уравнениях (2.1), переменные y_s — это некоторые параметры, связанные с движением, например координаты, скорости и т. д. Уравнения (106.1) отличаются от уравнений (2.1) тем, что здесь фигурируют величины $v_1, \ldots, v_r$, которые описывают управляющие воздействия, приложенные к рассматриваемому объекту. Такие воздействия не исключались, конечно, и выше всюду в тексте книги при изучении движений, описываемых уравнениями (2.1). Функции $v_j(t)$ могли входить неявно в правые части уравнений (2.1) и в правые части вытекающих из них уравнений возмущенного движения (3.2). Однако сейчас эти переменные v_j фигурируют явно и играют центральную роль во всем дальнейшем изложении.

Предположим, что нас интересует какое-либо частное движение нашей системы, порождаемое управляющими воздействиями $v_j = p_j(t)$ $(j = 1, \ldots r)$. Этому движению соответствует некоторое частное решение $y_s = f_s(t)$ $(s = 1, \ldots, n)$ уравнений (106.1) (при $v_j = p_j(t)$). Как и выше, будем это движение называть невозмущенным. Наряду с невозмущенным движением $\{f_s(t)\}$ будем рассматривать возмущенные движения $\{y_s(t)\}$. Предполагается, что возмущенные движения $y_s(t)$

---

[1]) Летов А. М., Аналитическое конструирование регуляторов. Автоматика и телемеханика, т. XXI, № 4, 5, 6, 1960; т. XXII, № 4, 1961; т. XXIII, № 11, 1962.

также описываются уравнениями (106.1) но уже при значениях $v_j(t)$, отличных, вообще говоря, от величин $p_j(t)$. Отклонения $v_j(t)-p_j(t)$ переменных v_j от $p_j(t)$ обусловливают здесь специфические особенности задачи об устойчивости движения $y_s=f_s(t)$. Проблема стабилизации невозмущенного движения $y_s=f_s(t)$, собственно, и состоит в таком выборе величин $\Delta v_j=v_j-p_j(t)$, при которых движение $y_s=f_s(t)$ оказывается устойчивым.

Для исследования проблем стабилизации целесообразно составить уравнения возмущенного движения управляемой системы, перейдя к новым переменным

$$x_s=y_s-f_s(t), \quad u_j=v_j-p_j(t) \tag{106.2}$$
$$(s=1, \ldots, n;\ j=1, \ldots, r),$$

где, следовательно, x_s — возмущения движений, u_j — отклонения управляющих воздействий от величин $p_j(t)$.

Полученные таким образом преобразованные уравнения

$$\begin{aligned}\frac{dx_s}{dt}&=X_s(t, x_1, \ldots, x_n; u_1, \ldots, u_r)=\\&=Y_s(t, x_1+f_1, \ldots, x_n+f_n; u_1+p_1, \ldots, u_r+p_r)-\\&\qquad-Y_s(t, f_1, \ldots, f_n; p_1, \ldots, p_r)\end{aligned} \tag{106.3}$$
$$(s=1, \ldots, n)$$

мы и будем рассматривать в дальнейшем.

Теперь можно сформулировать задачу о стабилизации.

Задача I (о стабилизации). *Требуется найти такие управляющие воздействия* $u_1(t, x_1, \ldots, x_n), \ldots, u_r(t, x_1, \ldots, x_n)$, *которые обеспечивают асимптотическую устойчивость невозмущенного движения* $x_s=0$ *в силу уравнений* (106.3) (*при* $u_j=u_j^0(t, x_1, \ldots, x_n)$).

Реальной основой для сформулированной задачи I является следующая ситуация. Предполагается, что в ходе регулирования можно измерять текущие значения всех координат $x_s(t)$ $(s=1, \ldots, n)$. На основе этого измерения управляющее устройство должно вырабатывать воздействия $u_j(t, x_1(t), \ldots, x_n(t))$ $(j=1, \ldots, r)$ на объект. Эти воздействия должны обеспечивать асимптотическую устойчивость заданного невозмущенного движения $x_s=0$.

По смыслу величин x_s и u_j (106.2) предполагается, что функции $u_j(t, x_1, \ldots, x_n)$, определение которых составляет задачу I, должны удовлетворять равенствам

$$u_j(t, 0, \ldots, 0)=0 \qquad (j=1, \ldots, r). \tag{106.4}$$

Будем предполагать, что функции $u_j(t, x_1, \ldots, x_n)$ должны быть определены и непрерывны в области

$$t \geqslant 0, \quad |x_s| < H, \qquad (s = 1, \ldots, n), \tag{106.5}$$

где заданы функции X_s, являющиеся правыми частями уравнений (106.3). Кроме того, примем, что функции X_s и u_j удовлетворяют условиям, которые обеспечивают существование и единственность решений x_s при любых начальных условиях t_0, $x_s(t_0)$ из области (106.5). Мы будем исследовать задачу о стабилизации, предполагая, что функции $u_j(t, x_1, \ldots, x_n)$ не стеснены никакими дополнительными неравенствами, т. е. предполагается, что в (106.3) переменные u_j могут принимать любые, сколь угодно большие значения. В соответствии с этим считаем, что функции X_s определены при t и x_s из области (106.5) для всех значений $-\infty < u_j < +\infty$ $(j = 1, \ldots, r)$.

Задача о стабилизации сформулирована нами для случая асимптотической устойчивости. Наряду с этой задачей можно изучать задачу о стабилизации, которая содержит более слабое требование лишь устойчивости заданного движения $x_s = 0$. Однако здесь мы ограничимся только более грубой проблемой о стабилизации управляемой системы до асимптотической устойчивости.

§ 107. Постановка задачи об оптимальной стабилизации.

Прикладные задачи о стабилизации наряду с требованием асимптотической устойчивости заданного движения $x_s = 0$ содержат обычно пожелания о наилучшем возможном качестве переходного процесса, т. е. пожелания о наилучшем (с какой-либо точки зрения) качестве возмущенного движения $x_s(t)$ в процессе его приближения к состоянию $x_s = 0$ при $t \to \infty$. При этом обычно высказывается также пожелание о наименьшей возможной затрате ресурсов (энергии, импульсов и т. д.), расходуемых на формирование управляющих воздействий $u_j(t, x_1, \ldots, x_n)$. Такие пожелания часто можно выразить в виде условия минимальности некоторого интеграла

$$I = \int_{t_0}^{\infty} \omega(t, x_1[t], \ldots, x_n[t]; u_1[t], \ldots, u_r[t])\, dt. \tag{107.1}$$

Здесь $\omega(t, x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_r)$ — неотрицательная функция, определенная в области (106.5). Символом $u_j[t]$ будем обозначать величины управляющих воздействий $u_j[t] = u_j(t, x_1[t], \ldots, x_n[t])$ (в функции только от времени), которые реализуются в системе (106.3) при $u_j = u_j(t, x_1, \ldots, x_n)$. При этом символы $x_s[t]$ обозначают как раз те движения системы (106.3), которые порождаются управлением $u_j[t] = u_j(t, x_1[t], \ldots, x_n[t])$. Иногда, чтобы подчеркнуть,

что движение $x_s[t]$ порождается некоторым фиксированным управлением $u_j = u_j^*(t, x_1, \ldots, x_n)$, будем снабжать символы $x_s[t]$ и $u_j[t]$ индексом $*$, т. е. будем писать $x_s^*[t]$ и $u_j^*[t]$.

Вопрос о выборе функции ω, определяющей оценку качества I (107.1) процесса $x_s(t)$, здесь подробно обсуждать не будем. То или иное решение этого вопроса определяется в каждом случае конкретными особенностями рассматриваемой прикладной задачи. Заметим лишь, что обычно при выборе функции ω ведущие роли играют следующие три мотива.

1. Условие минимума интеграла (107.1) должно обеспечивать достаточно быстрое затухание движений $x_s[t]$.

2. Величина интеграла I должна удовлетворительно оценивать ресурсы, затрачиваемые на формирование управляющих воздействий $u_j[t]$.

3. Функция ω должна быть такой, чтобы решение задачи не оказалось чрезмерно трудным и чтобы по возможности это решение можно было получить в замкнутой форме.

В частности, условиям 1 — 3 во многих случаях удовлетворительно отвечает функция $\omega(t, x_1, \ldots, x_n; u_1, \ldots, u_r)$, выбранная в виде определенно положительной квадратичной формы

$$\omega = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j + \sum_{i,j=1}^{r} \beta_{ij} u_i u_j. \tag{107.2}$$

Задачу о стабилизации системы (106.3) при условии минимума какого-либо критерия качества I (107.1) будем называть задачей об оптимальной стабилизации. Следовательно, эта проблема формулируется так:

Задача II (об оптимальной стабилизации). *Пусть выбран критерий качества процесса $x_s(t)$ в виде интеграла* (107.1). *Требуется найти такие управляющие воздействия $u_1^0(t, x_1, \ldots, x_n), \ldots, u_r^0(t, x_1, \ldots, x_n)$, которые обеспечивают асимптотическую устойчивость невозмущенного движения $x_s = 0$ в силу уравнений* (106.3) (*при $u_j = u_j^0(t, x_1, \ldots, x_n)$*). *При этом каковы бы ни были другие управляющие воздействия $u_j^*(t, x_1, \ldots, x_n)$, решающие задачу* I, *должно выполняться неравенство*

$$\int_{t_0}^{\infty} \omega\left(t, x_1^0[t], \ldots, x_n^0[t]; u_1^0[t], \ldots, u_r^0[t]\right) dt \leqslant$$
$$\leqslant \int_{t_0}^{\infty} \omega\left(t, x_1^*[t], \ldots, x_n^*[t]; u_1^*[t], \ldots, u_r^*[t]\right) dt \tag{107.3}$$

для всех начальных условий t_0, $x_s(t_0)$ *из области*

$$t_0 \geqslant 0, \qquad |x_s(t_0)| \leqslant \eta. \tag{107.4}$$

Здесь положительная постоянная η или задана заранее по условиям задачи, или эта величина имеет тот же смысл, что и величина η в постановке задачи об устойчивости (см. стр. 16).

В частности, если речь идет о задаче об оптимальной стабилизации в целом, то условие (107.3) должно выполняться для всех начальных возмущений $x_s(t_0)$, как бы велики они ни были.

Функции $u_j^0(t, x_1, \ldots, x_n)$ $(j = 1, \ldots, r)$, разрешающие задачу II, будем называть *оптимальным управлением.*

Задача II об оптимальной стабилизации предъявляет к функциям u_j^0 больше требований, чем задача I к разрешающим ее функциям u_j. Однако исследование и решение задачи II облегчаются тем обстоятельством, что эта проблема, как правило, имеет единственное решение $u_j^0(t, x_1, \ldots, x_n)$. Напротив, выбор функций $u_j(t, x_1, \ldots, x_n)$, решающих задачу I, обычно содержит большой произвол. По этой причине часто оказывается целесообразным такой путь решения задачи I.

Для исключения произвола в выборе функций $u_j(t, x_1, \ldots, x_n)$ вводят в условия этой задачи вспомогательное условие (107.3) минимума некоторого интеграла I (107.1), хотя может быть исходная проблема стабилизации никаких явных условий оптимальности не содержит. Тем самым исходная задача I превращается во вспомогательную задачу II. При этом, естественно, функция ω в (107.1) должна выбираться так, чтобы решение вспомогательной задачи II было возможно более простым. При решении сложных проблем стабилизации вспомогательные задачи II могут также вводиться лишь на отдельных этапах (см. сноску на стр, 492).

Материал настоящего приложения посвящен исследованию задач I и II методами, опирающимися на основные идеи классической теории устойчивости движения.

§ 108. Пример задачи о стабилизации.

В качестве примера рассмотрим задачу о переводе точки, находящейся под действием центральной силы F, с некоторой эллиптической траектории на круговую орбиту, достаточно близкую к эллиптической. Эту задачу можно сформулировать как проблему стабилизации невозмущенного движения, соответствующего заданной орбите.

Будем полагать, что движение точки управляется реактивной силой R; тогда масса точки m является величиной переменной и ее

движение будет описываться известным уравнением Мещерского[1])

$$m\frac{dv}{dt}=F+R, \tag{108.1}$$

где $m(t)=m_0+m_1(t)$, $m_0=\text{const}$, $m_1(t)\geqslant 0$, $R=\frac{dm_1}{dt}(a-v)$, v — скорость точки, a — скорость частицы dm_1 в момент $t+dt$ после ее отделения от точки, так что $c=a-v$ есть относительная скорость отделяющейся частицы.

Если вектор реактивной силы R во все время движения точки остается в плоскости первоначальной траектории, то движение точки будет плоским и оно вполне будет определяться изменением ее полярных координат r и φ.

Дифференциальные уравнения, описывающие изменение r и φ, можно получить, если спроектировать векторное уравнение (108.1) на направление радиуса движущейся точки и перпендикулярное к нему направление. Известно[2]), что проекции вектора ускорения $w=\frac{dv}{dt}$ на указанные направления вычисляются по формулам

$$w_r=\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2, \qquad w_\varphi=2\dot{r}\dot{\varphi}+r\ddot{\varphi}.$$

Тогда можно записать два дифференциальных уравнения, каждое из которых есть уравнение второго порядка относительно r и φ:

$$m(\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2)=F+R_r, \qquad m\frac{d(r^2\dot{\varphi})}{dt}=rR_\varphi,$$

где

$$R_r=c_r\frac{dm_1}{dt}, \qquad R_\varphi=c_\varphi\frac{dm_1}{dt},$$

а c_r и c_φ — проекции относительной скорости отделяющейся частицы на направление радиуса и поперечное направление, соответственно.

Разделив оба уравнения на $m(t)$ и полагая, что сила F есть сила всемирного тяготения, окончательно получим:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2r}{dt^2}&=-\frac{\mu}{r^2}+r\dot{\varphi}^2+c_r\frac{d\ln m}{dt},\\ \frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi})&=rc_\varphi\frac{d\ln m}{dt}.\end{aligned}\right\} \tag{108.2}$$

Здесь $\mu=fM$, f — постоянная всемирного тяготения, M — масса притягивающего тела, которую мы считаем большой по сравнению с m и поэтому принимаем ее неподвижной.

---

[1]) Мещерский И. В., Работы по механике тел переменной массы, Гостехиздат, 1949.

[2]) Суслов Г. К., Теоретическая механика, Гостехиздат, 1946.

Предположим теперь, что задана некоторая круговая орбита радиуса r_0 и достаточно близкая к круговой эллиптическая траектория, по которой точка движется под действием только силы притяжения, пока реактивная сила отсутствует. Примем движение точки по круговой орбите за невозмущенное. Требуется определить закон изменения массы, следуя которому движение точки могло бы с течением времени неограниченно приблизиться к движению по круговой орбите.

Обозначая $r_0 c_\varphi \frac{d \ln m}{dt} = u$, $r = y_1$, $\dot{r} = y_2$ и вводя новую координату $y_3 = r^2\dot{\varphi}$, запишем уравнения (108.2) в нормальной форме:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= y_2, \\ \frac{dy_2}{dt} &= -\frac{\mu}{y_1^2} + \frac{y_3^2}{y_1^3} + bu, \\ \frac{dy_3}{dt} &= \frac{1}{r_0} y_1 u. \end{aligned}\right\} \qquad (108.3)$$

Полагая величины $|c_r|$ и $|c_\varphi|$ постоянными во все время движения, т. е. считая, что выброс массы производится ориентированно относительно системы координат, связанной с точкой, имеем $b = \frac{c_r}{c_\varphi r_0} = \frac{k}{r_0} = \text{const}$. Невозмущенное движение нашей точки определится, очевидно, соотношениями $y_1 = r_0$, $y_2 = 0$, $y_3 = \sqrt{\mu r_0}$, которые представляют собой частное решение системы (108.3) при $u \equiv 0$, соответствующее движению по круговой орбите.

Положим $x_1 = y_1 - r_0$, $x_2 = y_2$, $x_3 = y_3 - \sqrt{\mu r_0}$ и, подставляя в (108.3), получим дифференциальные уравнения возмущенного движения:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= \alpha x_1 + \beta x_3 + bu + f_2(x_1, x_2, x_3), \\ \frac{dx_3}{dt} &= u + f_3(x_1, x_2, x_3), \end{aligned}\right\} \qquad (108.4)$$

где обозначено $\alpha = -\frac{\mu}{r_0^3}$, $\beta = \frac{2\sqrt{\mu r_0}}{r_0^3}$, а функции f_2 и f_3 раскладываются в некоторой окрестности точки $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ в ряды по степеням x_1, x_2, x_3, начинающиеся членами не ниже второго порядка.

Итак, задачу, поставленную в начале параграфа, можно сформулировать следующим образом: найти функцию $u = u(x_1, x_2, x_3)$,

обращающуюся в нуль при $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ и такую, чтобы тривиальное решение системы (108.4) было асимптотически устойчивым при достаточно малых начальных возмущениях $x_i(t_0) = x_{i0}$ $(i = 1, 2, 3)$. Эти возмущения определяются в момент t_0 включения управляющего воздействия. Таким образом, получаем задачу I (о стабилизации). Очевидно, что решение этой задачи не является единственным.

Допустим, что к переходному процессу и управляющему воздействию u предъявлены некоторые требования. Например, требуется, чтобы переходный процесс, характеризующийся значениями $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ при $t > t_0$, затухал достаточно быстро, и одновременно желательно, чтобы количество переменной массы, израсходованной на управление, было бы при этом не слишком велико. Для этого надо среди всех управляющих воздействий, решающих задачу I (допустимых управлений), определить такое управление $u^0(x_1, x_2, x_3)$ — оптимальное управление, — которое минимизирует некоторую цену качества, определяемую изложенными выше требованиями. Таким образом, получим задачу II (об оптимальной стабилизации).

Для нашего примера целесообразным критерием качества был бы интеграл

$$I_u(x_{10}, x_{20}, x_{30}) = \int_{t_0}^{\infty} (\mu_1 x_1^2 + \mu_2 x_2^2 + \mu_3 x_3^2 + \gamma |u|)\, dt, \quad (108.5)$$

где μ_1, μ_2, μ_3 — некоторые положительные константы, а $\gamma = \frac{1}{|c_\varphi| r_0}$. В самом деле, интеграл

$$I_u^{(1)} = \int_{t_0}^{\infty} (\mu_1 x_1^2 + \mu_2 x_2^2 + \mu_3 x_3^2)\, dt$$

характеризует известным образом качество переходного процесса, оценивая малость величин $x_s(t)$, а интеграл

$$I_u^{(2)} = \int_{t_0}^{\infty} \gamma |u|\, dt = -\int_{t_0}^{\infty} \frac{d \ln m}{dt} = \ln \frac{m_0 + m_1(t_0)}{m_0}$$

определяет запас переменной массы m_1 в начальный момент управления t_0. Итак, переход на круговую орбиту можно осуществить за счет минимальных управляющих ресурсов и вместе с тем при хорошем качестве переходного процесса, если удастся найти оптимальное управление u^0, для которого

$$I_{u^0}(x_{10}, x_{20}, x_{30}) \leqslant I_u(x_{10}, x_{20}, x_{30})$$

при любых x_{i0} $(i = 1, 2, 3)$ и для всех u, решающих задачу I.

Однако два обстоятельства вынуждают отказаться от критерия (108.5), несмотря на всю его целесообразность.

Во-первых, неаналитичность подынтегральной функции приводит к трудоемким вычислениям при определении оптимального управляющего воздействия, а в замкнутой форме найти решение вряд ли возможно. Во-вторых, по той же причине структура алгоритма управления получается весьма сложной, а потому технически трудно осуществимой.

Учитывая указанные обстоятельства, можно предложить вместо (108.5) в качестве критерия оптимальности интеграл

$$I_u(x_{10}, x_{20}, x_{30}) = \int_{t_0}^{\infty} (\mu_1 x_1^2 + \mu_2 x_2^2 + \mu_3 x_3^2 + \gamma u^2)\, dt, \quad (108.6)$$

который несущественно отличается от (108.5) лишь в части, характеризующей расход переменной массы, но зато позволяет найти оптимальное управление в замкнутой форме и простое по своей структуре.

Решение этой задачи будет приведено после изложения общей теории (см. § 113).

§ 109. Второй метод Ляпунова для задач об оптимальной стабилизации.

В этом параграфе мы изложим основную теорему второго метода Ляпунова исследования проблем оптимальной стабилизации. Эта теорема является модификацией теоремы II Ляпунова (см. стр. 195), причем учитываются соображения метода динамического программирования Р. Беллмана[1]).

Рассмотрим дифференциальные уравнения возмущенного движения

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(t;\ x_1, \ldots, x_n;\ u_1, \ldots, u_r) \qquad (s = 1, \ldots, n), \quad (109.1)$$

где функции X_s определены в области

$$t \geqslant 0, \quad |x_s| \leqslant H \quad (109.2)$$

и удовлетворяют в этой области всем условиям, перечисленным в § 106.

Как и в теореме II, нам придется рассматривать функции Ляпунова $V(t, x_1, \ldots, x_n)$, определенно-положительные в области (109.2). Существенную роль будет играть одно выражение, которое мы обо-

---

[1]) См. его монографию, упомянутую в сноске на стр. 475.

значим символом $B[V;\ t;\ x_1,\ \ldots,\ x_n;\ u_1,\ \ldots,\ u_r]$:

$$B[V;\ t;\ x_1,\ \ldots,\ x_n;\ u_1,\ \ldots,\ u_r] = \\ = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} X_i(t;\ x_1,\ \ldots,\ x_n;\ u_1,\ \ldots,\ u_r) + \\ + \omega(t;\ x_1,\ \ldots,\ x_n;\ u_1,\ \ldots,\ u_r). \quad (109.3)$$

Здесь ω — функция, определяющая показатель (107.1) качества регулирования.

Очевидно, если при некотором выборе функции $V(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n)$ и функций $u_j = u_j^*(t;\ x_1,\ \ldots,\ x_n)$ $(j = 1,\ \ldots,\ r)$ в области (109.2) выполняется равенство

$$B[V;\ t;\ x_1,\ \ldots,\ x_n;\ u_1^*,\ \ldots,\ u_r^*] = 0, \quad (109.4)$$

то это означает, что производная $\frac{dV}{dt}$ функции V в силу уравнений (106.3) при $u_j = u_j^*(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n)$ удовлетворяет в этой области равенству

$$\frac{dV}{dt} = -\omega(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n). \quad (109.5)$$

Основная теорема об оптимальной стабилизации, которую мы в дальнейшем будем называть теоремой IV, может быть сформулирована следующим образом.

Теорема IV. *Если для дифференциальных уравнений возмущенного движения* (109.1) *можно найти допускающую бесконечно малый высший предел определенно положительную функцию* $V^0(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n)$ *и функции* $u_j^0(t;\ x_1,\ \ldots,\ x_n)$, *удовлетворяющие в области* (109.2) *условиям*:

1) *функция*

$$w(t;\ x_1,\ \ldots,\ x_n) = \omega(t;\ x_1,\ \ldots,\ x_n;\ u_1^0(t;\ x_1,\ \ldots,\ x_n),\ \ldots \\ \ldots,\ u_r^0(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n))$$

является определенно положительной;

2) *справедливо равенство*

$$B[V^0;\ t;\ x_1,\ \ldots,\ x_n;\ u_1^0(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n),\ \ldots \\ \ldots,\ u_r^0(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n)] = 0; \quad (109.6)$$

3) *каковы бы ни были числа* u_j, *справедливо неравенство*

$$B[V^0;\ t;\ x_1,\ \ldots,\ x_n;\ u_1,\ \ldots,\ u_r] \geqslant 0, \quad (109.7)$$

то функции $u_j^0(t, x_1, \ldots, x_n)$ *разрешают задачу* II *об оптимальной стабилизации. При этом выполняется равенство*

$$\int_{t_0}^{\infty} \omega\left(t, x_1^0[t], \ldots, x_n^0[t]; u_1^0[t], \ldots, u_r^0[t]\right) dt =$$

$$= \min \int_{t_0}^{\infty} \omega(t, x_1[t], \ldots, x_n[t]; u_1[t], \ldots, u_r[t])\, dt =$$

$$= V^0(t_0, x_1(t_0), \ldots, x_n(t_0)). \quad (109.8)$$

Примечание. Как отмечено выше в книге (см. стр. 38, 195), функции V, удовлетворяющие условиям теорем Ляпунова об асимптотической устойчивости, не только устанавливают сам факт устойчивости, но и позволяют оценить область

$$|x_s(t_0)| \leqslant \eta \qquad (s = 1, \ldots, n) \quad (109.9)$$

тех начальных возмущений $x_s(t_0)$, для которых выполняются неравенства

$$|x_s(t)| < H \qquad (t \geqslant t_0,\ s = 1, \ldots, n) \quad (109.10)$$

и предельное соотношение

$$\lim x_s(t) = 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty. \quad (109.11)$$

При $u_j = u_j^0(t, x_1, \ldots, x_n)$ в уравнениях (109.1) функция V^0 удовлетворяет условиям теоремы II об асимптотической устойчивости. Число η, определяющее область (109.9), в соответствии с изложенным в § 10 может быть, следовательно, найдено из соотношения

$$\sup\{V^0(t, x_1, \ldots, x_n) \quad \text{при} \quad |x_s| \leqslant \eta\} <$$
$$< \inf\{V^0(t, x_1, \ldots, x_n) \quad \text{при} \quad \max(|x_1|, \ldots, |x_n|) = h\}, \quad (109.12)$$

где h — некоторое положительное число, меньшее чем H $(t \geqslant t_0 \geqslant 0)$. Будем считать число h фиксированным.

Утверждение теоремы IV, выражаемое неравенством (109.8), надо понимать в следующем смысле: при $u_j = u_j^0(t, x_1, \ldots, x_n)$ интеграл (107.1) достигает *наименьшего значения для всех начальных условий* $x_s(t_0)$ $(t_0 \geqslant 0)$ *из области* (109.9), где число η выбрано в соответствии с неравенством (109.12).

Доказательство теоремы. При $u_j = u_j^0(t, x_1, \ldots, x_n)$ функция V^0 удовлетворяет всем условиям теоремы II. Ее производная $\frac{dV^0}{dt}$ в силу уравнений (109.1) (при $u_j = u_j^0$) определяется равенством

$$\frac{dV^0}{dt} = -\omega\left(t, x_1, \ldots, x_n; u_1^0, \ldots, u_r^0\right) \quad (109.13)$$

и, следовательно, является функцией определенно-отрицательной. Поэтому воздействия $u_j^0(t, x_1, \ldots, x_n)$ обеспечивают асимптотическую устойчивость невозмущенного движения $x_s = 0$ и выполнение предельного соотношения (109.11) для всех начальных условий $x(t_0)$ из области (109.9), (109.12).

Теперь для доказательства теоремы достаточно проверить справедливость соотношения (109.8). Сделаем это. Движения $x_s^0[t]$ при условии (109.9), (109.12) удовлетворяют неравенству $|x_s^0[t]| \leqslant h < H$. Следовательно, вдоль таких движений при всех $t \geqslant t_0$ выполняется равенство (109.6) или, иначе говоря, равенство (109.13). Кроме того, вследствие асимптотической устойчивости выполняется предельное соотношение

$$\lim V^0(t, x_1^0[t], \ldots, x_n^0[t]) = 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty. \qquad (109.14)$$

Интегрируя равенство (109.13) вдоль движения $x_s^0[t]$ в пределах от $t = t_0$ до $t = \infty$ и учитывая (109.14), получим:

$$V^0(t_0, x_1(t_0), \ldots, x_n(t_0)) = \\ = \int_{t_0}^{\infty} \omega(t, x_1^0[t], \ldots, x_n^0[t]; u_1^0[t], \ldots, u_r^0[t])\, dt. \qquad (109.15)$$

С другой стороны, пусть $u_1^*(t, x_1, \ldots, x_n), \ldots, u_r^*(t, x_1, \ldots, x_n)$ — какие-либо функции, также решающие задачу о стабилизации движения $x_s = 0$ для начальных возмущений из области (109.9). Примем сначала, что соответствующие движения $x_s^*[t]$ не выходят при $t \geqslant t_0$ из области $|x_s| \leqslant h$. Тогда в процессе движения $x_s^*[t]$ все время будет выполняться (109.7), или, иначе говоря, будет выполняться неравенство

$$\frac{dV^0}{dt} \geqslant -\omega(t, x_1^*[t], \ldots, x_n^*[t]). \qquad (109.16)$$

Здесь $\frac{dV^0}{dt}$ производная функции V^0 вдоль движения $x_s^*[t]$. Интегрируя неравенство (109.16) от $t = t_0$ до $t = \infty$ и снова учитывая предельное соотношение

$$\lim V^0(t, x_1^*[t], \ldots, x_n^*[t]) = 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty, \qquad (109.17)$$

получим:

$$V^0(t_0, x_1(t_0), \ldots, x_n(t_0)) \leqslant \\ \leqslant \int_{t_0}^{\infty} \omega(t, x_1^*[t], \ldots, x_n^*[t]; u_1^*[t], \ldots, u_r^*[t])\, dt. \qquad (109.18)$$

Аналогичное неравенство получается и в том случае, когда движение $x_s^*[t]$ на время покидает область

$$|x_s| \leqslant h \qquad (s=1, \ldots, n). \tag{109.19}$$

Действительно, в последнем случае имеет место следующая ситуация. Пусть $\tau > t_0$ — момент времени, когда движение $x_s^*[t]$ в последний раз вошло в область (109.19) и уже при $t \geqslant \tau$ не покидает эту область. Тогда с этого момента вдоль движения $x_s^*[t]$ все время выполняется условие (109.16). Интегрируя это неравенство от $t=\tau$ до $t=\infty$ и учитывая опять предельное соотношение (109.17), получим:

$$V^0(\tau, x_1^*[\tau], \ldots, x_n^*[\tau]) \leqslant$$

$$\leqslant \int_\tau^\infty \omega(t, x_1^*[t], \ldots, x_n^*[t], u_1^*[t], \ldots, u_r^*[t])\,dt. \tag{109.20}$$

Но по выбору $x_s(t_0)$ из области (109.9), (109.12) справедливо неравенство

$$V^0(t^0, x_1(t_0), \ldots, x_n(t_0)) < V^0(\tau, x_1^*[\tau], \ldots, x_n^*[\tau]), \tag{109.21}$$

а вследствие неотрицательности функции ω имеем:

$$\int_\tau^\infty \omega(t, x_1^*[t], \ldots, x_n^*[t]; u_1^*[t], \ldots, u_r^*[t])\,dt <$$

$$< \int_{t_0}^\infty \omega(t, x_1^*[t], \ldots, x_n^*[t]; u_1^*[t], \ldots, u_r^*[t])\,dt. \tag{109.22}$$

Из (109.20) — (109.22) снова следует справедливость неравенства (109.18). Соотношения (109.15) и (109.18) доказывают (109.8). Тем самым теорема IV полностью доказана.

Примечание. В условиях теоремы IV предполагается, что величины u_j в уравнениях (109.1) являются функциями от t и $x_s(t)$. Однако анализ доказательства этой теоремы показывает, что соотношение (109.8) справедливо и в том случае, когда в (109.8) $u_j = u_j[t]$ представляют собой *любые функции времени* $u_j = u_j(t)$, обеспечивающие предельное соотношение $\lim x_s[t] = 0$ при $t \to \infty$. Действительно, в этом доказательстве по существу нигде не использовалось предположение, что функция $u_j^*[t]$ имеет форму $u_j^*[t] = u_j^*(t, x_1^*[t], \ldots, x_n^*[t])$, а не просто является явной функцией только от времени t. Следовательно, теорема IV устанавливает оптимальность управления $u_j^0 = u_j^0(t, x_1, \ldots, x_n)$ как по отношению к управляющим воздействиям вида $u_j = u_j(t, x_1, \ldots, x_n)$, так и по отношению к управляющим воздействиям $u_j = u_j(t)$ для всех начальных возмущений из области (109.9), (109.12).

§ 110. Замечания ко второму методу Ляпунова в теории стабилизации.

Итак, для решения задачи II об оптимальной стабилизации следует попытаться найти функции V^0 и u_j^0, удовлетворяющие условиям теоремы IV. При этом необходимо обеспечить выполнение равенства (109.6), которое является уравнением в частных производных относительно искомой функции V^0. Уравнение (109.6) надо разрешить с учетом дополнительного условия (109.7). В результате получается достаточно трудная задача. Однако, как и в случае общей задачи об устойчивости движения, где также проблема эффективного построения функций Ляпунова весьма нелегка, можно указать некоторые типы уравнений (109.1), для которых функция V^0 строится в замкнутой форме. Отыскание этих типов уравнений и построение соответствующих функций V^0 облегчаются известными результатами теории устойчивости движения. В частности, для линейных систем, как и в обычных задачах устойчивости, полезным аппаратом исследования являются функции V^0 в виде квадратичных форм.

Функции $V^0(t, x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющие условиям теоремы IV, будем называть *оптимальными функциями Ляпунова*, отвечающими соответствующей задаче II об оптимальной стабилизации.

Теорема IV может обобщаться в различных направлениях. Если речь идет о проблеме оптимальной стабилизации в целом (см. стр. 480), то в формулировке теоремы IV достаточно потребовать выполнения соотношений (109.6), (109.7) при всех x_s $(-\infty < x_s < +\infty$, $s = 1, \ldots, n)$ и добавить условия, обеспечивающие устойчивость движения $x_s = 0$ в целом. Эти условия указаны в примечании к стр. 38. Поэтому мы не будем приводить здесь соответствующую полную формулировку теоремы IV в этом случае. Теорема IV также сохраняет свою силу и в тех случаях, когда управляющие воздействия стеснены дополнительными неравенствами (например, $|u_j| \leqslant 1$). В таких случаях следует лишь потребовать, чтобы функция V^0 удовлетворяла неравенству (109.7) при всех значениях u_j, стесненных заданными ограничениями. Можно, наконец, ослабить условия определенной положительности функции $\omega(t, x_1, \ldots, x_n; u_1, \ldots, u_r)$, заменив его условием знакоположительности при дополнительных ограничениях в духе критерия асимптотической устойчивости, данного в приложении III. Изменения, которые при этом следует внести в формулировку теоремы IV, очевидны, и мы на них здесь не останавливаемся.

В теореме IV естественно предполагается, что функция $V^0(t, x_1, \ldots, x_n)$ имеет в области (109.2) непрерывные частные производные $\frac{\partial V^0}{\partial t}$, $\frac{\partial V^0}{\partial x_s}$ $(s = 1, \ldots, n)$. Для задач оптимального упра-

вления, однако, интересны случаи, когда это предположение не выполняется при отдельных значениях t и x_s, заполняющих, может быть, некоторые поверхности. Критерий оптимальности, подобный теореме IV, но работающий с применением таких не гладких функций $V^0(t, x_1, \ldots, x_n)$, разработан В. Г. Болтянским[1]).

В заключение этого параграфа сделаем еще несколько кратких замечаний о связи теоремы IV с общими методами вариационного исчисления и, в частности, с известными методами математической теории оптимальных процессов.

Критерий оптимальности воздействий u_j^0, который выражается равенством (109.6) и неравенством (109.7), соответствует известному методу в вариационном исчислении, опирающемуся на теорию распространения возмущений[2]). Здесь, однако, в отличие от наиболее распространенной формы необходимых условий экстремальности, критерий приведен в форме достаточных условий минимума интеграла (107.1). При этом условия теоремы IV одновременно обеспечивают выполнение предельного соотношения $\lim x_s(t) = 0$ при $t \to \infty$. Такая формулировка соответствует характеру основных теорем второго метода Ляпунова исследования устойчивости движения. Поэтому она и выбрана нами здесь. Естественным результатом отмеченной связи теоремы IV с методами классического вариационного исчисления является тот факт, что соотношение (109.6) имеет форму уравнения в частных производных вида известного уравнения Гамильтона—Якоби.

Фундаментальным методом исследования задач об оптимальном управлении является метод, основанный на принципе максимума Л. С. Понтрягина[3]). В теории оптимальных процессов, развитой Л. С. Понтрягиным и его сотрудниками В. Г. Болтянским, Р. В. Гамкрелидзе и Е. Ф. Мищенко, оптимальное управление u_j ищется в виде функции только от времени $u_j = u_j^0(t)$ (отдельно для каждых фиксированных начальных условий $x_s(t_0)$).

Для задачи, аналогичной задаче II, но состоящей в определении управления u_j в форме $u_j = u_j^0(t)$, принцип максимума утверждает, что на оптимальном движении $x_s^0[t]$ системы (109.1), порожденном управлением $u_j^0(t)$, обязательно выполняется условие

$$H\left[\psi_0(t), \ldots, \psi_{n+1}(t);\ t,\ x_1^0[t], \ldots, x_n^0[t];\ u_1^0, \ldots, u_r^0\right] \geqslant$$
$$\geqslant H\left[\psi_0(t), \ldots, \psi_{n+1}(t);\ t;\ x_1^0[t], \ldots, x_n^0[t];\ u_1, \ldots, u_r\right], \qquad (110.1)$$

---

[1]) Болтянский В. Г., Достаточные условия оптимальности и обоснование метода динамического программирования. Изв. АН СССР, серия математическая, т. XXVIII, № 3, 1964.

[2]) См., например, монографию: Гельфанд И. М., Фомин С. В., Вариационное исчисление, М., Физматгиз, 1961.

[3]) См. монографию Л. С. Понтрягина и др., упомянутую в сноске на стр. 475.

каковы бы ни были числа $u_1, \ldots, u_r$. Здесь величина H определена равенством

$$H[\psi_0, \ldots, \psi_{n+1}; t; x_1, \ldots, x_n; u_1, \ldots, u_r] = \\ = \sum_{i=1}^{n} \psi_i X_i(t, x_1, \ldots, x_n; u_1, \ldots, u_r) + \\ + \psi_{n+1} + \omega(t; x_1, \ldots, x_n; u_1, \ldots, u_r)\psi_0, \quad (110.2)$$

а величины $\psi_i(t)$ являются некоторым частным решением системы

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\psi_i}{dt} &= -\sum_{j=0}^{n} \frac{\partial X_j}{\partial x_i}\psi_j \qquad (i=0, \ldots, n), \\ \frac{d\psi_{n+1}}{dt} &= -\sum_{j=0}^{n} \frac{\partial X_j}{\partial t}\psi_j, \end{aligned}\right\} \quad (110.3)$$

где $X_0 = \omega$ и $X_{n+1} = 1$. При этом на оптимальном движении $x_s^0[t]$ величина H остается постоянной, т. е.

$$H[\psi_0(t), \ldots, \psi_{n+1}(t); t; x_1^0[t], \ldots, x_n^0[t]; u_1^0(t), \ldots, u_r^0(t)] = 0 \\ \text{при } t \geqslant t_0. \quad (110.4)$$

Связь принципа максимума с теоремой IV определяется следующим обстоятельством: можно проверить, что при выполнении условий теоремы IV на движении $x^0[t]$, порожденном оптимальным управлением $u_j^0[t] = u_j^0(t, x_1^0[t], \ldots, x_n^0[t])$, справедливы равенства

$$\psi_s(t) = -\frac{\partial V^0(t, x_1^0[t], \ldots, x_n^0[t])}{\partial x_s} \qquad (s=1, \ldots, n),$$

$$\psi_{n+1}(t) = -\frac{\partial V^0(t, x_1^0[t], \ldots, x_n^0[t])}{\partial t},$$

$$\psi_0 = -1.$$

Но в таком случае понятно, что равенство (110.4) и условие (110.1) имеют тот же смысл, что и равенство (109.6) и неравенство (109.7), соответственно. Подчеркнем, однако, еще раз, что принцип максимума указывает *необходимые условия* оптимальности управления $u_j = u_j^0(t)$, в то время как теорема IV дает *достаточные условия* для оптимального управления u_j в форме $u_j = u_j^0(t, x_1, \ldots, x_n)$.

Заметим, наконец, что в случае установившихся движений $x_s = 0$, т. е. в случаях, когда функции X_s и ω не зависят явно от времени, оптимальную функцию Ляпунова V^0 и оптимальное управление u_j^0 также следует искать в виде функций, не зависящих явно от времени, т. е. $V^0 = V^0(x_1, \ldots, x_n)$, $u_j^0 = u_j^0(x_1, \ldots, x_n)$ $(j=1, \ldots, r)$.

§ 111. Решение задачи о стабилизации для уравнений первого приближения.

Для задач I и II о стабилизации, как и для общей проблемы устойчивости, может быть развита теория исследования этих задач по первому приближению. Здесь можно указать случаи, когда решение проблемы определяется линейным приближением, а также критические случаи, когда возможность разрешения проблемы и сами искомые воздействия $u_j(t, x_1, \ldots, x_n)$ определяются членами высшего порядка малости в уравнениях (109.1) возмущенного движения.

В настоящем приложении мы ограничимся лишь одним результатом, относящимся к этой теории. Именно, мы рассмотрим случай, когда задача I для нелинейной системы решается исходя из ее линейного приближения. Имеются работы[1]), в которых можно найти более подробное изложение теории стабилизации по первому приближению.

Примем, что дифференциальные уравнения возмущенного движения имеют вид

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + q_{s1}u_1 + \ldots + q_{sr}u_r + \\ + R_s(t, x_1, \ldots, x_n; u_1, \ldots, u_r) \quad (111.1)$$
$$(s = 1, \ldots, n).$$

Здесь p_{sj}, q_{sj} — ограниченные и непрерывные функции времени, в частности p_{sj}, q_{sj} — постоянные; R_s — функции, разлагающиеся в области

$$t \geqslant 0, \quad |x_s| < H \qquad (s = 1, \ldots, n) \qquad (111.2)$$

в ряды по степеням переменных x_s и u_s с ограниченными коэффициентами, причем разложения начинаются членами не ниже второго порядка.

Мы переходим теперь к исследованию задач о стабилизации для уравнений первого приближения

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + q_{s1}u_1 + \ldots + q_{sr}u_r \quad (111.3)$$
$$(s = 1, \ldots, n).$$

---

[1]) Альбрехт Э. Г., Об оптимальной стабилизации нелинейных систем, ПММ, т. XXV, вып. 5, 1961; К теории аналитического конструирования регуляторов, Труды Межвузовской конференции по прикладной теории устойчивости движения и аналитической механике, Изд. КАИ, Казань, 1962; Зубов В. И., К теории аналитического построения регуляторов. Автоматика и телемеханика, т. XXIV, № 8, 1963; Гальперин Е. А., Красовский Н. Н., О стабилизации установившихся движений нелинейных управляемых систем, ПММ, т. XXVII, вып. 6, 1963; Красовский Н. Н., Осипов Ю. С., О стабилизации движений управляемого объекта с запаздыванием в системе регулирования. Изв. АН СССР, Техническая кибернетика № 6, 1963.

Исследование начнем с задачи II об оптимальной стабилизации, причем в качестве критерия качества (107.1) выберем интеграл

$$I=\int_{t_0}^{\infty}\left\{\sum_{i,\,j=1}^{n}\alpha_{ij}(t)\,x_i(t)\,x_j(t)+\sum_{i,\,j=1}^{r}\beta_{ij}(t)\,u_i(t)\,u_j(t)\right\}dt, \qquad (111.4)$$

где квадратичные формы $\sum\limits_{i,\,j=1}^{n}\alpha_{ij}x_ix_j$ и $\sum\limits_{i,\,j=1}^{r}\beta_{ij}u_iu_j$ предполагаются определенно-положительными.

Оптимальную функцию Ляпунова $V^0(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n)$, которая удовлетворяла бы условиям теоремы IV, следует здесь искать в виде квадратичной формы

$$V^0(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n)=\sum_{i,\,j=1}^{n}c_{ij}(t)\,x_ix_j. \qquad (111.5)$$

Составим выражение $B[V^0;\ t;\ x_1,\ \ldots,\ x_n;\ u_1,\ \ldots,\ u_r]$ (109.3):

$$B[V^0;\ t;\ x_1,\ \ldots,\ x_n;\ u_1,\ \ldots,\ u_r]=$$
$$=\frac{\partial V^0}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V^0}{\partial x_i}\left(\sum_{s=1}^{n}p_{is}x_s+\sum_{j=1}^{r}q_{ij}u_j\right)+$$
$$+\sum_{i,\,j=1}^{n}\alpha_{ij}x_ix_j+\sum_{i,\,j=1}^{r}\beta_{ij}u_iu_j. \qquad (111.6)$$

При $u_j=u_j^0(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n)$ величина B должна иметь минимум и обращаться при этом в нуль. Поэтому, приравнивая правую часть (111.6) к нулю, получим первое уравнение для V^0 и u_j^0. Дифференцируя правую часть (111.6) по u_j $(j=1,\ \ldots,\ r)$ и приравнивая результаты к нулю, получим еще r уравнений для определения V^0 и u_j^0. Эти уравнения имеют вид

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V^0}{\partial x_i}q_{ij}+2\sum_{i=1}^{r}\beta_{ij}u_i^0=0 \qquad (111.7)$$
$$(j=1,\ \ldots,\ n).$$

Уравнения (111.7) можно разрешить относительно u_j^0, так как вследствие определенной положительности формы $\sum\limits_{i,\,j=1}^{r}\beta_{ij}u_iu_j$

детерминант

$$\Delta = \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1r} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \beta_{r1} & \beta_{r2} & \cdots & \beta_{rr} \end{vmatrix} \tag{111.8}$$

отличен от нуля.

Определим из уравнений (111.7) величины

$$u_j^0 = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{r}\frac{\Delta_{kj}}{\Delta}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V^0}{\partial x_i}q_{ik} \tag{111.9}$$

$$(j = 1, \ldots, r).$$

Здесь Δ_{kj} — алгебраическое дополнение элемента k-й строки и j-й колонки в (111.8). Внося значения u_j^0 (111.9) в равенство $B[V^0;\ t;\ x_1, \ldots, x_n;\ u_1^0, \ldots, u_r^0] = 0$, получаем уравнение для определения функции V^0:

$$\frac{\partial V^0}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V^0}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{n} p_{ij}x_j\right) -$$

$$-\frac{1}{4}\sum_{k,\,s=1}^{r}\frac{\Delta_{ks}}{\Delta}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial V^0}{\partial x_j}q_{jk}\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial V^0}{\partial x_j}q_{js}\right) + \sum_{i,\,j=1}^{n}\alpha_{ij}x_ix_j = 0. \tag{111.10}$$

Подставляя в (111.10) выражения

$$\frac{\partial V^0}{\partial t} = \sum_{i,\,j=1}^{n}\frac{dc_{ij}}{dt}x_ix_j,$$

$$\frac{\partial V^0}{\partial x_i} = 2\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_j$$

и приравнивая к нулю коэффициенты при произведениях x_ix_j, получим уравнения для определения величин $c_{ij}(t)$:

$$\frac{dc_{ij}}{dt} + \sum_{k=1}^{n}(p_{ki}c_{kj} + p_{kj}c_{ki}) -$$

$$-\sum_{k,\,s=1}^{r}\frac{\Delta_{ks}}{\Delta}\left(\sum_{l=1}^{n}c_{lj}q_{lk}\right)\left(\sum_{m=1}^{n}c_{mi}q_{ms}\right) + \alpha_{ij} = 0 \tag{111.11}$$

$$(i,\ j = 1, \ldots, n;\quad c_{ij} = c_{ji};\quad \alpha_{ij} = \alpha_{ji}).$$

Если удастся найти ограниченное частное решение $c_{ij}(t)$ уравнения (111.11) такое, что форма (111.5) окажется определенно-положительной, то согласно теореме IV задача будет решена. При этом оптимальные управляющие воздействия имеют вид (111.9) и являются, следовательно, линейными функциями от координат x_s.

В частности, в случае установившегося движения $x_s = 0$, когда p_{si}, q_{si} — постоянные величины и коэффициенты α_{ij}, β_{ij} — тоже постоянные числа, форму V^0 следует искать в виде

$$V^0 = \sum_{i,\, j=1}^{n} c_{ij} x_i x_j \tag{111.12}$$

где $c_{ij} = \text{const}$. Тогда дифференциальные уравнения (111.11) превращаются в алгебраические уравнения[1])

$$\sum_{k=1}^{n} (p_{ki} c_{kj} + p_{kj} c_{ki}) - \sum_{k,\, s=1}^{r} \frac{\Delta_{ks}}{\Delta} \left(\sum_{l=1}^{n} c_{lj} q_{lk} \right) \left(\sum_{m=1}^{n} c_{mi} q_{ms} \right) + \alpha_{ij} = 0$$

$$(i,\ j = 1,\ \ldots,\ n;\quad c_{ij} = c_{ji};\quad \alpha_{ij} = \alpha_{ji}). \tag{111.13}$$

Итак, решение задачи II сводится в данном случае к разрешению уравнений (111.11). При этом возникает проблема о существовании ограниченного частного решения $c_{ij}(t)$, обеспечивающего определенную положительность формы V^0 (111.5).

§ 112. Достаточные условия разрешимости задачи о стабилизации для линейных систем.

Мы переходим теперь к изложению достаточных условий, при которых может быть решена задача II об оптимальной стабилизации для линейной управляемой системы

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1} x_1 + \ldots + p_{sn} x_n + q_{s1} u_1 + \ldots + q_{sr} u_r \tag{112.1}$$

$$(s = 1,\ \ldots,\ n)$$

при условии минимума интеграла

$$I = \int_{t_0}^{\infty} \left\{ \sum_{i,\, j=1}^{n} \alpha_{ij}(t)\, x_i(t)\, x_j(t) + \sum_{i,\, j=1}^{r} \beta_{ij}(t)\, u_i(t)\, u_j(t) \right\} dt, \tag{112.2}$$

где формы $\sum\limits_{i,\, j=1}^{n} \alpha_{ij}(t)\, x_i(t)\, x_j(t)$ и $\sum\limits_{i,\, j=1}^{r} \beta_{ij} u_i(t)\, u_j(t)$, как и выше, предполагаются определенно-положительными.

---

[1]) См. работы в сноске на стр. 476.

Согласно § 111 для существования решения этой задачи достаточно, чтобы уравнения (111.11) имели ограниченные решения $c_{ij}(t)$ такие, что форма

$$V^0(t, x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i, j=1}^{n} c_{ij}(t)\, x_i x_j \tag{112.3}$$

является определенно-положительной.

Как и в общей задаче об устойчивости, будем различать случаи установившегося движения $x_s = 0$, когда величины p_{ij}, q_{ij}, α_{ij} и β_{ij} будем полагать постоянными, и общие случаи неустановившегося движения $x_s = 0$, когда $p_{ij}(t)$, $q_{ij}(t)$, $\alpha_{ij}(t)$, $\beta_{ij}(t)$ — переменные функции времени t.

Обсудим сначала случай установившегося невозмущенного движения $x_s = 0$. Оптимальная функция Ляпунова V^0 (112.3) ищется в этом случае в виде квадратичной формы

$$V^0(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i, j=1}^{n} c_{ij} x_i x_j \tag{112.4}$$

с постоянными коэффициентами c_{ij}. Дифференциальные уравнения (111.11) для c_{ij} обращаются в систему алгебраических уравнений (111.13). Управляющие воздействия $u_j^0(x_1, \ldots, x_n)$ имеют при этом вид

$$u_j^0(x_1, \ldots, x_n) = \nu_{1j} x_1 + \ldots + \nu_{nj} x_n, \tag{112.5}$$

где ν_{sj} — постоянные.

В обсуждаемом случае важную роль играет матрица W, построенная следующим образом:

$$W = \{Q, PQ, \ldots, P^{n-1}Q\}. \tag{112.6}$$

Здесь Q — матрица $\{q_{sj}\}$ $(s = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, r)$, P — матрица $\{p_{sj}\}$ $(s = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, n)$. В частности, если система (112.1) управляется лишь одним воздействием $u = u_1$, то матрица Q превращается в вектор-столбец

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} \\ q_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ q_{n1} \end{bmatrix},$$

матрицы P^kQ также обращаются в векторы-столбцы

$$P^kQ=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}^k \cdot \begin{bmatrix} q_{11} \\ q_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ q_{n1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{1k+1} \\ w_{2k+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ w_{nk+1} \end{bmatrix}$$

и матрица W оказывается $n \times n$-матрицей

$$W=\begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & \cdots & w_{1n} \\ w_{21} & w_{22} & \cdots & w_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ w_{n1} & w_{n2} & \cdots & w_{nn} \end{bmatrix}.$$

В общем случае матрица W имеет n строк и $n \times r$ столбцов.

Оказывается, что возможность решения задачи II об оптимальной стабилизации системы (112.1) при условии минимума величины (112.2) определяется свойствами матрицы W. В частности, достаточные условия разрешимости задачи даются следующей теоремой.

Теорема 1. *Пусть ранг матрицы W равен n. Тогда справедливы следующие заключения:*

1. *Задача* II *для системы* (112.1) *при условии минимума величины* (112.2) *имеет решение, причем существуют квадратичная форма* $V^0(x_1, \ldots, x_n)$ (112.4) *и управляющие воздействия* $u_j^0(x_1, \ldots, x_n)$ *вида* (112.5), *удовлетворяющие всем условиям теоремы* IV.

2. *Управляющие воздействия* $u_j^0(x_1, \ldots, x_n)$ (112.5), *определяемые оптимальной функцией Ляпунова* $V^0(x_1, \ldots, x_n)$ (112.4) *в соответствии с равенствами* (111.19), *являются единственным решением задачи.*

Мы не будем приводить здесь доказательство первого утверждения теоремы 1. Это доказательство можно найти в работах Р. Е. Калмана, Я. Курцвейля и Ф. М. Кирилловой[1]). Проверим здесь лишь справедливость второго утверждения.

---

[1]) Калман Р. Е., Об общей теории систем управления, Труды I конгресса ИФАК, т. I, Изд. АН СССР, 1961; Contributions to the theory of optimal control Sumposium Internacional de Ecnaciones Differenciales Ordinarias, Publ. por La Univ. Nac. Automa de Mexico y La Sociided. Matem. Mexicana, 1961; Курцвейль Я., К аналитическому конструированию регуляторов. Автоматика и телемеханика, т. XXII, № 6, 1961; Кириллова Ф. М., К задаче об аналитическом конструировании регуляторов ПММ, т. XXV, вып. 3, 1961.

Итак, пусть в соответствии с пунктом 1 теоремы функция V^0 вида (112.4) является оптимальной функцией Ляпунова и в совокупности с функциями $u_j^0(x_1, \ldots, x_n)$ вида (112.5) удовлетворяет всем условиям теоремы IV. Но при известной функции $V^0(x_1, \ldots, x_n)$ управляющие воздействия $u_j^0(x_1, \ldots, x_n)$ определяются единственным образом из условий (111.7) минимума выражения $B[V^0; x_1, \ldots, x_n; u_1, \ldots, u_r]$ по u_j. Если выбрать какие-либо непрерывные управляющие воздействия $u_j^*(x_1, \ldots, x_n) \neq u_j^0(x_1, \ldots, x_n)$ в некоторой, пусть даже очень малой области S изменения величин x_s, то в этой области выражение $B[V^0; x_1, \ldots, x_n; u_1^*, \ldots, u_r^*]$ будет положительным. Но тогда согласно рассуждениям на стр. 488 интеграл

$$J = \int_{t_0}^{\infty} \left\{ \sum_{i,\, j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i^*[t]\, x_j^*[t] + \sum_{i,\, j=1}^{r} \beta_{ij} u_i^*[t]\, u_j^*[t] \right\} dt$$

будет больше, чем величина $V^0(x_1^*[t_0], \ldots, x_n^*[t_0])$ для всех движений $x_s^*[t]$, проходящих через область S при $t \geqslant t_0$. Это означает, что управление $u_j^*(x_1, \ldots, x_n)$ не является оптимальным. Тем самым доказана единственность оптимального управления $u_j^0(x_1, \ldots, x_n)$, найденного по функции $V^0(x_1, \ldots, x_n)$ из уравнений (111.19).

Матрицы вида P^kQ были рассмотрены в связи с задачами об оптимальном регулировании Р. В. Гамкрелидзе [1]). В частности, условие независимости векторов $Q, PQ, \ldots, P^{n-1}Q$ в случае, когда линейная система (112.1) управляется одним воздействием $u = u_1$, было названо им «условием общего положения». Это условие играет важную роль в теории линейных управляемых систем. Позднее свойства матрицы W в связи с проблемами управления были изучены во многих работах [2]).

Перейдем теперь к обсуждению случаев неустановившегося невозмущенного движения $x_s = 0$. В этих случаях разрешимость задачи II об оптимальной стабилизации связана со свойствами матрицы $W(t)$, которая имеет следующий вид:

$$W(t) = \{L_1(t), \ldots, L_n(t)\}. \tag{112.7}$$

Здесь $L_k(t)$ — матрицы, определенные рекуррентными соотношениями

$$L_1(t) = Q(t), \ldots, L_{k+1}(t) = \frac{dL_k(t)}{dt} - P(t)\, L_k(t), \tag{112.8}$$

---

[1]) См. монографию Л. С. Понтрягина и др. в сноске на стр. 475.
[2]) См., например, работы в сноске на стр. 492.

причем, естественно, предполагается, что элементы $p_{sk}(t)$ и $q_{sj}(t)$ матриц $P(t)$ и $Q(t)$ имеют все производные, необходимые для построения матрицы $W(t)$.

Достаточные условия разрешимости задачи II для системы (112.1) при условии минимума величины (112.2) даются следующей теоремой.

Теорема 2. *Пусть функции $p_{sk}(t)$ и $q_{sj}(t)$ имеют при $t \geqslant 0$ равномерно непрерывные и ограниченные производные до $(n-1)$-го порядка включительно, и пусть существует число $\tau > 0$, удовлетворяющее следующему условию:*

На любом отрезке $t \leqslant \vartheta \leqslant t+\tau$ найдется точка $\vartheta^*(t)$ такая, что в матрице $W(\vartheta^*)$ можно выделить n линейно независимых векторов-столбцов

$$w^{(i_k)}(\vartheta^*) = \{w_{si_k}(\vartheta^*)\} \qquad (k=1, \ldots, n;\ s=1, \ldots, n)$$

причем квадратичная форма

$$\Phi(t, l_1, \ldots, l_n) = \sum_{k,\, j=1}^{n} \left(\sum_{s=1}^{n} w_{si_k}(\vartheta^*(t))\, w_{si_j}(\vartheta^*(t)) \right) l_k l_j \qquad (112.9)$$

определенно-положительна.

Тогда справедливы следующие заключения:

1. *Задача* II *для системы* (112.1) *при условии минимума величины* (112.2) *имеет решение, причем существуют квадратичная форма $V^0(t, x_1, \ldots, x_n)$* (112.3) *и управляющие воздействия*

$$u_j^0(t, x_1, \ldots, x_n) = \nu_{1j}(t)\, x_1 + \ldots + \nu_{nj}(t)\, x_n, \qquad (112.10)$$

удовлетворяющие всем условиям теоремы IV.

2. *Управляющие воздействия $u_j^0(t, x_1, \ldots, x_n)$* (112.10), *определяемые оптимальной функцией Ляпунова $V^0(t, x_1, \ldots, x_n)$* (112.3) *в соответствии с равенствами* (111.19), *являются единственным решением задачи.*

Справедливость теоремы 2 мы также примем без доказательства. Это доказательство можно найти в работе Н. Н. Красовского[1]).

§ 113. Практические способы решения задач об оптимальной стабилизации для линейных систем.

Теоремы, сформулированные в предыдущем параграфе, указывают достаточные условия, при выполнении которых разрешима задача II об оптимальной стабилизации системы (112.1) при условии минимума

[1]) Красовский Н. Н., О стабилизации неустойчивых движений дополнительными силами при неполной обратной связи. ПММ, т. XXVII, вып. 4, 1963.

показателя качества (112.2) процесса $x_s(t)$ $(s=1, \ldots, n)$. Следовательно, при этих условиях уравнения (111.13) (или уравнения (111.11)), определяющие оптимальную функцию Ляпунова V^0, имеют решения c_{ij} (или $c_{ij}(t)$), обладающие всеми нужными свойствами.

Решение уравнений (111.11) может представить серьезные трудности, а решение уравнений (111.13) обычно не вызывает принципиальных затруднений, однако и в этом случае практический счет может оказаться весьма громоздким.

Предполагая в дальнейшем, что величины p_{kl}, q_{ik}, α_{ij} и β_{ij}, фигурирующие в (112.1) и (112.2), не зависят от времени, изложим два возможных способа решения задачи об оптимальной стабилизации.

Первый способ основан на таком свойстве искомых решений c_{ij} уравнений (111.13): если задача II в форме (112.1) — (112.2) имеет решение, то величины c_{ij}, удовлетворяющие уравнениям (111.13) и определяющие оптимальную функцию Ляпунова

$$V^0(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,\, j=1}^{n} c_{ij} x_i x_j, \tag{113.1}$$

суть числа

$$c_{ij} = \lim c^*_{ij}(t) \quad \text{при} \quad t \to +\infty \tag{113.2}$$

$$(i,\ j = 1, \ldots, n),$$

где $c^*_{ij}(t)$ — частное решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dc^*_{ij}}{dt} = \sum_{k=1}^{n} (p_{ki} c^*_{kj} + p_{kj} c^*_{ki}) - \\ - \sum_{k,\, s=1}^{r} \frac{\Delta_{ks}}{\Delta} \left(\sum_{l=1}^{n} c^*_{lj} q_{lk} \right) \left(\sum_{m=1}^{n} c^*_{mi} q_{ms} \right) + \alpha_{ij}, \tag{113.3}$$

отвечающее начальным условиям

$$c^*_{ij}(0) = 0 \qquad (i,\ j = 1, \ldots n). \tag{113.4}$$

(Уравнения (113.3) получаются из уравнений вида (111.11), в которых t заменяется на $-t$.)

Упомянутое свойство подсказывает метод вычисления величин c_{ij}. Для этой цели следует найти решение $c^*_{ij}(t)$ уравнений (113.3) — (113.4) при достаточно больших значениях $t = \tau$. Вследствие соотношений (113.2) можно принять

$$c_{ij} = c^*_{ij}(\tau) \qquad (i,\ j = 1, \ldots, n).$$

Таким образом, коэффициенты оптимальной функции Ляпунова могут быть вычислены сколь угодно точно, если τ достаточно ве-