лико. Для практических вычислений, легко поддающихся стандартизации, удобно пользоваться вычислительными устройствами и, в частности, аналоговыми машинами.

Доказательство предельных соотношений (113.2) и подробное описание рассмотренного способа вычисления величин $c_{ij}$ с использованием электронных моделей можно найти в работе Ю. М. Репина и В. Е. Третьякова[1]).

После вычисления величин $c_{ij}$ управляющие воздействия определяются без труда по формулам (111.9).

Пример 1. В качестве иллюстрации изложенного способа рассмотрим решение задачи о стабилизации математического маятника в верхнем, неустойчивом положении равновесия моментом, приложенным к нему на оси подвеса. Этот момент вырабатывается исполнительным механизмом, который является интегрирующим звеном. Исполнительный механизм в свою очередь подвержен некоторому управляющему воздействию $u$.

Выбирая соответствующим образом масштабы времени, координат и усилий, запишем уравнения возмущенного движения в нормальной форме:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \qquad \frac{dx_2}{dt} = \sin x_1 + x_3, \qquad \frac{dx_3}{dt} = u,$$

где $x_1 = \varphi$ — угол отклонения маятника от вертикали, $x_2 = \dot{\varphi}$, $x_3$ — момент, приложенный к маятнику.

Составим уравнения первого приближения:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \qquad \frac{dx_2}{dt} = x_1 + x_3, \qquad \frac{dx_3}{dt} = u. \tag{113.5}$$

Для этой системы рассмотрим задачу II об оптимальной стабилизации, выбрав следующий критерий качества:

$$I_u = \int_{t_0}^{\infty} \left[x_1^2(t) + x_2^2(t) + x_3^2(t) + u^2(t)\right] dt. \tag{113.6}$$

Проверим достаточное условие разрешимости задачи (см. теорему 1 § 112). С этой целью вычислим матрицу $W = \{Q, PQ, P^2Q\}$.

В нашем случае

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

и поэтому

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы $W$ равен порядку системы (113.5). Следовательно, рассматриваемая задача имеет решение. Уравнения (111.13) для определения

---

[1]) Репин Ю. М., Третьяков В. Е., Решение задачи об аналитическом конструировании регуляторов на электронных моделирующих устройствах. Автоматика и телемеханика, т. 24, вып. 6, 1963.

коэффициентов формы (113.1) принимают следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} &2c_{12}-c_{13}^2+1=0, \quad c_{11}+c_{22}-c_{13}c_{23}=0,\\ &2c_{12}-c_{23}^2+1=0, \quad c_{23}+c_{12}-c_{33}c_{13}=0,\\ &2c_{23}-c_{33}^2+1=0, \quad c_{13}+c_{22}-c_{33}c_{23}=0. \end{aligned}\right\} \tag{113.7}$$

Пусть $c_{ij}$ — искомое решение системы уравнений (113.7), для которого квадратичная форма (113.1) является определенно-положительной.

Согласно (113.2)

$$c_{ij}=\lim c_{ij}^*(t) \quad (i,\ j=1,\ 2,\ 3) \quad \text{при} \quad t\to+\infty,$$

где $c_{ij}^*(t)$ — решение системы дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dc_{11}^*(t)}{dt}=2c_{12}^*(t)-c_{12}^{*2}(t)+1,\\ &\frac{dc_{22}^*(t)}{dt}=2c_{12}^*(t)-c_{23}^{*2}(t)+1,\\ &\frac{dc_{33}^*(t)}{dt}=2c_{23}^*(t)-c_{33}^{*2}(t)+1,\\ &\frac{dc_{12}^*(t)}{dt}=c_{11}^*(t)+c_{22}^*(t)-c_{13}^*(t)\cdot c_{23}^*(t),\\ &\frac{dc_{13}^*(t)}{dt}=c_{23}^*(t)+c_{12}^*(t)-c_{33}^*(t)\cdot c_{13}^*(t),\\ &\frac{dc_{23}^*(t)}{dt}=c_{13}^*(t)+c_{22}^*(t)-c_{33}^*(t)\cdot c_{23}^*(t), \end{aligned}\right\} \tag{113.8}$$

соответствующее начальным условиям

$$c_{ij}^*(0)=0 \qquad (i,\ j=1,\ 2,\ 3).$$

На рис. 24 приведены графики переходных кривых для уравнений (113.8), вычисленные на цифровой вычислительной машине. Значения $c_{ij}$ $(i,\ j=1,2,3)$ получаются такими:

$$\begin{aligned} c_{11}&=11{,}1333, & c_{12}&=10{,}1333,\\ c_{22}&=10{,}1333, & c_{13}&=4{,}6116,\\ c_{33}&=3{,}1974, & c_{23}&=4{,}6116. \end{aligned}$$

Искомое оптимальное управление $u^0$ находится по формуле (111.9):

$$u^0=-\frac{1}{2}\frac{\partial V^0}{\partial x_3}=-(c_{13}x_1+c_{23}x_2+c_{33}x_3)=$$
$$=-(4{,}6116x_1+4{,}6116x_2+3{,}1974x_3).$$

Из примера, в частности, видно, что для определения оптимального управляющего воздействия знание всех коэффициентов оптимальной функции Ляпунова не обязательно.

Мы переходим теперь к изложению второго способа[1]) решения задачи II в форме (112.1) — (112.2), который позволяет вычислить коэффициенты оптимального управления непосредственно, без предварительного определения функции $V^0$.

Предположим, что движение объекта описывается системой линейных дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= p_{11}x_1 + \ldots + p_{1n}x_n + q_1u, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dx_n}{dt} &= p_{n1}x_1 + \ldots + p_{nn}x_n + q_nu, \end{aligned}\right\} \qquad (113.9)$$

где $p_{sj}$ и $q_s$ $(s, j = 1, \ldots, n)$ — некоторые постоянные величины, а $u$ — скалярное управляющее воздействие. Пусть критерий качества переходного процесса задан в виде интеграла

$$I_u = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}\left[\sum_{ij=1}^{n}\alpha_{ij}x_ix_j + u^2\right]dt. \qquad (113.10)$$

Здесь $\alpha_{ij}$ — постоянные коэффициенты определенно-положительной квадратичной формы.

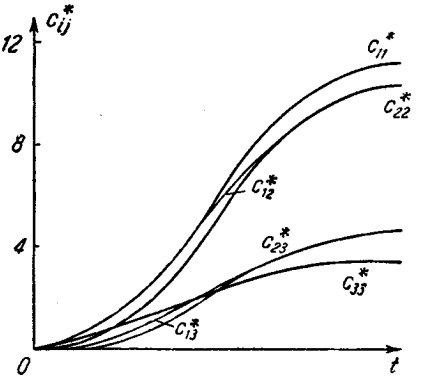

Рис. 24.

Допуская, что условия, при которых разрешима задача II в форме (113.9) — (113.10), выполнены (см. теорему 1 § 112), воспользуемся для отыскания оптимального управляющего воздействия процедурой, вытекающей из принципа максимума.

Функция Гамильтона $H = H(\psi_0, \ldots, \psi_n, x_1, \ldots, x_n, u)$, определенная в § 110 формулой (110.2), для нашей задачи имеет вид

$$H = -\frac{1}{2}\left[\sum_{ij=1}^{n}\alpha_{ij}x_ix_j + u^2\right] + \sum_{i=1}^{n}\psi_i\frac{dx_i}{dt}.$$

---

[1]) Подобный способ опубликован в статье: Пряхин Н. С., К вопросу об аналитическом конструировании регуляторов. Автоматика и телемеханика, т. 24, вып. 9, 1963. Независимо аналогичный метод был разработан и стандартизирован в вычислительном центре Уральского государственного университета под руководством Ю. М. Репина в 1962 году.

Оптимальное управление в каждый момент времени должно формироваться так, чтобы максимизировалась величина $H$ или, что то же самое, минимизировалась величина $B$ (см. § 109)

$$B=\frac{1}{2}\left[\sum_{ij=1}^{n}\alpha_{ij}x_ix_j+u^2\right]+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V^0}{\partial x_i}\cdot\frac{dx_i}{dt}.$$

Поэтому, приравнивая производную $\frac{\partial H}{\partial u}$ или $\frac{\partial B}{\partial u}$ нулю, находим структуру оптимального управления

$$u^0=q_1\psi_1+q_2\psi_2+\ldots+q_n\psi_n. \tag{113.11}$$

Составим, далее, канонически сопряженные уравнения (109.1) и (110.3):

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial\psi_i},\quad \frac{d\psi_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x_i}\qquad (i=1,\ldots,n),$$

которые в нашем случае после подстановки вместо $u$ функции $u^0$ из формулы (113.11) примут вид

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dx_1}{dt}=p_{11}x_1+\ldots+p_{1n}x_n+q_1q_1\psi_1+\ldots+q_1q_n\psi_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{dx_n}{dt}=p_{n1}x_1+\ldots+p_{nn}x_n+q_nq_1\psi_1+\ldots+q_nq_n\psi_n,\\
&\frac{d\psi_1}{dt}=\alpha_{11}x_1+\ldots+\alpha_{1n}x_n-p_{11}\psi_1-\ldots-p_{n1}\psi_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{d\psi_n}{dt}=\alpha_{n1}x_1+\ldots+\alpha_{nn}x_n-p_{1n}\psi_1-\ldots-p_{nn}\psi_n.
\end{aligned}\right\} \tag{113.12}$$

Эту систему уравнений, решающих задачу об оптимальной стабилизации, можно получить также, используя классический вариационный метод Эйлера — Лагранжа. Именно таким путем она была получена впервые А. М. Летовым[1]).

Построим характеристический определитель для системы (113.12):

$$D(\lambda)=\begin{vmatrix} P-\lambda E & Q_1\\ \alpha & -P^*-\lambda E\end{vmatrix},$$

где обозначено $P=\{p_{sj}\}$, $Q_1=\{q_s\cdot q_j\}$, $P^*=\{p_{js}\}$, $\alpha=\{\alpha_{ij}\}$ $E=\{\delta_{ij}\}$. Известно, что построенный определитель обладает свойством $D(-\lambda)=D(\lambda)$, т. е. характеристический полином содержит только четные степени $\lambda$. Тогда уравнение $D(\lambda)=0$ наряду с каж-

[1]) Летов А. М., Аналитическое конструирование регуляторов, Автоматика и телемеханика, т. 21, вып. 4, 1960.

дым корнем, имеющим отрицательную действительную часть, будет обладать соответствующим корнем с положительной действительной частью. Следовательно, характеристический многочлен может быть выражен в виде произведения двух полиномов $n$-й степени

$$D(\lambda) = d_1(\lambda) \cdot d_2(\lambda),$$

причем корни полинома $d_1(\lambda)$ расположены в левой полуплоскости, а корни многочлена $d_2(\lambda)$ — в правой.

Обратим теперь внимание на следующее обстоятельство. Движение, определяемое уравнениями (113.9), в которые вместо $u$ подставлено оптимальное управление $u^0(x_1, \ldots, x_n)$, являющееся согласно результатам § 111 линейной функцией координат $x_s$ $(s = 1, \ldots, n)$, совпадает с движением, получающимся в силу системы уравнений

$$\frac{dx}{dt} = Px + Q_1\psi,$$

в которых вектор $\psi = \{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ вычислен на оптимальных траекториях $x_s^0(t)$ $(s = 1, \ldots, n)$.

Но по условиям задачи оптимальное управляющее воздействие должно быть таким, чтобы тривиальное решение системы

$$\frac{dx}{dt} = Px + qu^0(x_1, \ldots, x_n), \tag{113.13}$$

где

$$q = \{q_1, \ldots, q_n\},$$

было асимптотически устойчивым, следовательно, характеристический многочлен, составленный для (113.13), обязан иметь все корни с отрицательной действительной частью и этот многочлен должен тождественно совпадать с $(-1)^n d_1(\lambda)$ в силу отмеченного выше обстоятельства.

Полагая $u^0 = \nu_1 x_1 + \ldots + \nu_n x_n$ и подставляя его в таком виде в уравнения (113.13), приравниваем характеристический полином многочлену $(-1)^n d_1(\lambda)$:

$$\begin{vmatrix} p_{11} + q_1\nu_1 - \lambda, & p_{12} + q_1\nu_2, & \ldots, & p_{1n} + q_1\nu_n \\ p_{21} + q_2\nu_1, & p_{22} + q_2\nu_2 - \lambda, & \ldots, & p_{2n} + q_2\nu_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{n1} + q_n\nu_1 & p_{n2} + q_n\nu_2, & \ldots, & p_{nn} + q_n\nu_n - \lambda \end{vmatrix} = (-1)^n d_1(\lambda). \tag{113.14}$$

Если многочлен $d_1(\lambda)$ нам известен, то, сравнивая в тождестве (113.14) коэффициенты при одинаковых степенях $\lambda$, получим систему уравнений для определения коэффициентов оптимального управления. Нетрудно убедиться в том, что эта система алгебраических уравнений всегда будет линейной.

Таким образом, вопрос об отыскании оптимального управления сводится по существу к вопросу о разложении полинома степени $2n$ на два указанных выше множителя $d_1(\lambda)$ и $d_2(\lambda)$. Как только многочлен $d_1(\lambda)$ становится известным, коэффициенты оптимального управления находятся сразу же из решения линейной системы алгебраических уравнений.

Проиллюстрируем изложенный метод, решив в линейном приближении задачу, сформулированную в примере § 108.

Пример 2. Отбрасывая нелинейные члены в уравнениях (108.4), получим систему первого приближения

$$\frac{dx_1}{dt}=x_2,\quad \frac{dx_2}{dt}=\alpha x_1+\beta x_3+bu,\quad \frac{dx_3}{dt}=u. \tag{113.15}$$

Полагаем для простоты выкладок $\mu_1=\mu_2=\mu_3=\gamma=\frac{1}{2}$, так что

$$I_u=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}\left[x_1^2(t)+x_2^2(t)+x_3^2(t)+u^2(t)\right]dt. \tag{113.16}$$

Канонически сопряженная система (113.12) имеет для нашего примера вид

$$\frac{dx_1}{dt}=x_2,\quad \frac{dx_2}{dt}=\alpha x_1+\beta x_3+b^2\psi_2+b\psi_3,\quad \frac{dx_3}{dt}=b\psi_2+\psi_3$$

$$\frac{d\psi_1}{dt}=x_1-\alpha\psi_2,\quad \frac{d\psi_2}{dt}=x_2-\psi_1,\quad \frac{d\psi_3}{dt}=x_3-\beta\psi_2.$$

Раскрывая характеристический определитель этой системы, получим

$$D(\lambda)=(\lambda^2-1)\left[(\lambda^2-\alpha)^2-\lambda^2b^2+\beta^2\right].$$

Многочлен $D(\lambda)$ нетрудно в нашем случае представить в виде произведения полиномов $d_1(\lambda)$ и $d_2(\lambda)$:

$$D(\lambda)=(\lambda^3+a_1\lambda^2+a_2\lambda+a_3)(\lambda^3-a_1\lambda^2+a_2\lambda-a_3).$$

Здесь $\lambda^3+a_1\lambda^2+a_2\lambda+a_3=d_1(\lambda)$. Коэффициенты $a_1$, $a_2$, $a_3$ определяются формулами:

$$a_1=1+\sqrt{2\alpha+b^2+2\sqrt{\alpha^2+\beta^2}},$$

$$a_2=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+\sqrt{2\alpha+b^2+2\sqrt{\alpha^2+\beta^2}},$$

$$a_3=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}.$$

Легко проверить, что уравнение

$$\lambda^3+a_1\lambda^2+a_2\lambda+a_3=0$$

имеет все корни с отрицательной действительной частью. Полагая $u^0=\nu_1x_1+\nu_2x_2+\nu_3x_3$ и составляя тождество (113.14), имеем:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ \alpha+b\nu_1 & b\nu_2-\lambda, & \beta+b\nu_3 \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3-\lambda \end{vmatrix}=-\lambda^3-a_1\lambda^2-a_2\lambda-a_3.$$

Отсюда, сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $\lambda$, получаем систему линейных уравнений относительно $\nu_1$, $\nu_2$, $\nu_3$:

$$-b\nu_2-\nu_3=a_1,\quad -b\nu_1-\beta\nu_2=a_2+\alpha,\quad -\beta\nu_1+\alpha\nu_3=a_3.$$

Решая эту систему, находим коэффициенты оптимального управления:

$$\left.\begin{aligned}\nu_1&=\frac{b\alpha(a_2+\alpha)-\beta(a_1\alpha+a_3)}{\Delta},\\ \nu_2&=\frac{b(a_3+\alpha a_1)-\beta(a_2+\alpha)}{\Delta},\\ \nu_3&=\frac{b\beta(a_2+\alpha)-\beta^2a_1-a_3b^2}{\Delta},\end{aligned}\right\}\qquad(113.17)$$

где $\Delta=\beta^2-\alpha b^2$.

Учитывая, что $\alpha=-\frac{\mu}{r_0^3}$, $\beta=\frac{2\sqrt{\mu r_0}}{r_0^3}$, $b=\frac{k}{r_0}$, $k=\frac{c_r}{c_\varphi}$ (см. § 108), имеем $\Delta=\frac{\mu(4+k^2)}{r_0^5}$. Если $c_\varphi\neq 0$, то $\Delta$ не обращается в нуль ни при каких $r_0$ и является конечным числом. Следовательно, задача об оптимальной стабилизации для нашего примера имеет решение при любых $r_0$ и $c_\varphi\neq 0$.

Заметим, кстати, что условие $\Delta\neq 0$ совпадает с достаточным условием разрешимости задачи из теоремы 1 § 112. Это условие для нашего примера оказывается невыполненным, если $c_\varphi=0$, что соответствует выбросу массы только в радиальном направлении. Можно показать, что в этом случае задача II в форме (113.15) — (113.16) решения не имеет.

В самом деле, если $c_\varphi=0$, то система уравнений (108.2) имеет первый интеграл $y_3=r^2\dot\varphi=\varkappa=\text{const}$, где постоянная $\varkappa$ определяется начальными условиями, которым соответствует движение точки по исходной эллиптической орбите. В невозмущенном движении $y_3=\sqrt{\mu r_0}$ (см. § 108). Вообще говоря, $\sqrt{\mu r_0}\neq\varkappa$, так как $r_0$ по условиям задачи — произвольное число, связанное только предположением о достаточной близости эллиптической траектории к круговой орбите радиуса $r_0$. Следовательно, в процессе управления $y_3(t)$ должно меняться от величины $\varkappa$ до величины $\sqrt{\mu r_0}$, но $y_3$ изменяться вообще не может, так как при $c_\varphi=0$ в силу уравнений (108.2) $\frac{dy_3}{dt}=0$ во все время переходного процесса. Таким образом, условие $c_\varphi\neq 0$ является в рассмотренной задаче необходимым условием осуществления перехода точки с эллиптической траектории на круговую орбиту заданного радиуса.

Заметим, что решение первого примера, рассмотренного в этом параграфе, можно также получить из формул (113.17), если принять $\alpha=\beta=1$, $b=0$, так как системы уравнений (113.5) и (113.15) в этом случае совпадают.

В заключение можно сказать, что оба изложенных способа решения задачи II об оптимальной стабилизации для линейных систем (112.1) при условии минимума показателя качества (112.2) процесса $x_s(t)$ $(s=1,\ldots,n)$ позволяют с успехом использовать современные

вычислительные устройства[1]). Однако второй метод, в отличие от первого, иногда может привести к решению задачи в замкнутой форме и для такого случая надобность в применении вычислительных машин отпадает. Но первый способ является более универсальным и он значительно проще по своей вычислительной схеме.

Отметим еще, что задаче о вычислении параметров оптимального управления посвящена интересная работа А. И. Лурье[2]).

## § 114. Теоремы о стабилизации по первому приближению.

Мы переходим теперь к рассмотрению нелинейных уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + q_{s1}u_1 + \ldots + q_{sr}u_r + \\ + R_s(t, x_1, \ldots, x_n; u_1, \ldots, u_r) \quad (s = 1, \ldots, n), \quad (114.1)$$

описывающих возмущенные движения $x_s(t)$ управляемой системы в окрестности заданного движения $x_s = 0$. Будем предполагать, как обычно, что функции $R_s$ определены в области

$$t \geqslant 0, \qquad |x_s| < H \qquad (s = 1, \ldots, n), \qquad (114.2)$$

где они непрерывны и удовлетворяют неравенствам

$$|R_s(t, x_1, \ldots, x_n; u_1, \ldots, u_r)| \leqslant \\ \leqslant A\{|x_1| + \ldots + |x_n| + |u_1| + \ldots + |u_r|\}, \quad (114.3)$$

причем $A$ — некоторая постоянная.

Наряду с уравнениями (114.1) рассмотрим систему первого приближения

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + q_{s1}u_1 + \ldots + q_{sr}u_r \quad (114.4) \\ (s = 1, \ldots, n).$$

При каких условиях возможность стабилизации системы (114.1) вытекает из решения проблемы в первом приближении? Исследование этого вопроса составляет предмет теории стабилизации системы (114.1) по линейному приближению. Мы ограничимся здесь лишь достаточными условиями, при которых ответ на заданный вопрос является положительным. Эти результаты являются следствием достаточных условий разрешимости задач II для системы (114.4) при условии мини-

---

[1]) Стандартные программы для решения задач изложенными способами имеются, например, в вычислительном центре Уральского государственного университета.

[2]) Лурье А. И., Минимальный квадратичный критерий качества регулируемой системы. Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 4, 1953.

мума интеграла

$$I=\int_{t_0}^{\infty}\left(\sum_{i,\,j=1}^{n}\alpha_{ij}x_ix_j+\sum_{i,\,j=1}^{r}\beta_{ij}u_iu_j\right)dt, \qquad (114.5)$$

данных в теоремах 1 и 2 § 112, и следствием общих теорем об асимптотической устойчивости по первому приближению, приведенных в §§ 22, 85.

Рассмотрим сначала случай установившегося невозмущенного движения $x_s=0$, когда величины $p_{sj}$ и $q_{sj}$ в уравнениях (114.1) являются постоянными и функции $R_s$ не зависят явно от времени. Тогда справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Если ранг матрицы*

$$W=\{Q,\ PQ,\ \ldots,\ P^{n-1}Q\} \qquad (114.6)$$

*равен $n$, то задача I о стабилизации системы* (114.1) *решается исходя из линейного приближения* (114.4) *при любом выборе функций $R_s$, удовлетворяющих неравенствам* (114.3), *если только постоянная $A$ достаточно мала. Управляющие воздействия $u_j(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ можно выбрать в форме линейных функций*

$$u_j(x_1,\ \ldots,\ x_n)=\nu_{1j}x_1+\ \ldots\ +\nu_{nj}x_n, \qquad (114.7)$$

*где $\nu_{ij}$ — постоянные.*

Доказательство. Выберем как-нибудь определенно положительные квадратичные формы

$$\sum_{i,\,j=1}^{n}\alpha_{ij}x_ix_j \quad \text{и} \quad \sum_{i,\,j=1}^{r}\beta_{ij}u_iu_j$$

с постоянными $\alpha_{ij}$ и $\beta_{ij}$. Согласно теореме 1 § 112, если ранг $W$ равен $n$, то для системы (114.4) можно решить задачу II об оптимальной стабилизации при условии минимума интеграла (114.5). При этом получатся оптимальные стабилизирующие воздействия $u_j^0(x_1,\ \ldots,\ x_n)$, описываемые линейными функциями

$$u_j^0(x_1,\ \ldots,\ x_n)=\nu_{1j}x_1+\ \ldots\ +\nu_{nj}x_n. \qquad (114.8)$$

При $u_j=u_j^0(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ линейная система, описываемая уравнениями

$$\frac{dx_s}{dt}=p_{s1}x_1+\ \ldots\ +p_{sn}x_n+$$
$$+q_{s1}u_1^0(x_1,\ \ldots,\ x_n)+\ \ldots\ +q_{sr}u_r^0(x_1,\ \ldots,\ x_n), \qquad (114.9)$$

будет асимптотически устойчивой.

Выберем для нелинейной системы (114.1) в качестве управляющих воздействий $u_j$ величины $u_j^0(x_1, \ldots, x_n)$ (114.8). Подставив $u_j = u_j^0(x_1, \ldots, x_n)$ в уравнения (114.1), получим нелинейные уравнения возмущенного движения

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + \\ + q_{s1}u_1^0(x_1, \ldots, x_n) + \ldots + q_{sr}u_r^0(x_1, \ldots, x_n) + \varphi_s(x_1, \ldots, x_n) \tag{114.10}$$

$$(s = 1, \ldots, n),$$

где функции

$$\varphi_s(x_1, \ldots, x_n) = R_s(x_1, \ldots, x_n; u_1^0(x_1, \ldots, x_n), \ldots, u_r^0(x_1, \ldots, x_n)$$

вследствие (114.3) удовлетворяют неравенству

$$|\varphi_s(x_1, \ldots, x_n)| \leqslant A_1\{|x_1| + \ldots + |x_n|\} \tag{114.11}$$

$$(s = 1, \ldots, n),$$

где

$$A_1 = A(1 + \nu), \quad \nu = \max\left(\sum_{i=1}^{n} |\nu_{ij}|, \quad j = 1, \ldots, r\right). \tag{114.12}$$

Уравнения (114.9) составляют для системы уравнений (114.10) систему первого приближения.

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} p_{11} + \sum_{j=1}^{r} q_{1j}\nu_{1j} - \lambda & \ldots & p_{1n} + \sum_{j=1}^{r} q_{1j}\nu_{nj} \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ p_{n1} + \sum_{j=1}^{r} q_{nj}\nu_{1j} & \ldots & p_{nn} + \sum_{j=1}^{r} q_{nj}\nu_{nj} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{114.13}$$

асимптотически устойчивой системы (114.9) имеет все корни $\lambda_i$ с отрицательными действительными частями. Отсюда по теореме 1 § 22 заключаем, что невозмущенное движение $x_s = 0$ системы (114.10) при условии (114.12) асимптотически устойчиво, если только постоянная $A$ достаточно мала. Тем самым теорема 1 полностью доказана.

Перейдем теперь к случаю неустановившегося невозмущенного движения $x_s = 0$, когда величины $p_{si}$ и $q_{sj}$ в уравнениях (114.4) предполагаются переменными функциями времени. Теорема о стабилизации по первому приближению в этом случае может быть сформулирована следующим образом.

Теорема 2. *Составим матрицу*

$$W(t) = \{L_1(t), \ldots, L_n(t)\},$$

*где*

$$L_1(t) = Q(t), \ldots, L_{k+1} = \frac{dL_k(t)}{dt} - P(t) L_k(t)$$

$$(k = 1, \ldots, n-1).$$

*Пусть функции $p_{si}(t)$ и $q_{sj}(t)$ имеют при $t \geqslant t_0$ равномерно непрерывные и ограниченные производные до $(n-1)$-го порядка включительно. Если при каждом $t \geqslant t_0$ в матрице $W(t)$ можно выделить $n$ линейно независимых векторов-столбцов $w^{(l_k)}(t)$ $(k = 1, \ldots, n)$ таких, что квадратичная форма*[1])

$$\Phi(t, l_1, \ldots, l_n) = \sum_{k, j=1}^{n} \left( \sum_{s=1}^{n} w_{sl_k}(t) w_{sl_j}(t) \right) l_k l_j \quad (114.14)$$

*является определенно положительной, то задача I о стабилизации системы* (114.1) *решается исходя из линейного приближения* (114.4) *при любом выборе функций $R_s$, удовлетворяющих неравенствам* (114.3), *если только постоянная $A$ достаточно мала. Управляющие воздействия $u_j(t, x_1, \ldots, x_n)$ можно выбрать в форме линейных функций*

$$u_j(t, x_1, \ldots, x_n) = \nu_{1j}(t) x_1 + \ldots + \nu_{nj}(t) x_n, \quad (114.15)$$

*где $\nu_{ij}(t)$ — непрерывные и ограниченные функции времени $t$.*

Доказательство. Выберем как-нибудь определенно-положительные функции

$$\sum_{i, j=1}^{n} \alpha_{ij}(t) x_i x_j \quad \text{и} \quad \sum_{i, j=1}^{n} \beta_{ij}(t) u_i u_j. \quad (114.16)$$

При условиях доказываемой теоремы выполняются предположения теоремы 2 § 112. Поэтому для системы (114.4) можно решить задачу II об оптимальной стабилизации при условии минимума интеграла (114.5). При этом получатся оптимальные стабилизирующие воздействия $u_j^0(t, x_1, \ldots, x_n)$ вида

$$u_j^0(t, x_1, \ldots, x_n) = \nu_{1j}(t) x_1 + \ldots + \nu_{nj}(t) x_n, \quad (114.17)$$

где $\nu_{ij}(t)$ — ограниченные и непрерывные функции времени.

---

[1]) Условие определенной положительности формы $\Phi(t, l_1, \ldots, l_n)$ означает, что линейная независимость выбранных векторов $w^{(l_k)}$ в известном смысле равномерна по $t \geqslant t_0$ и углы между этими векторами не могут становиться произвольно малыми.

Подставляя $u_j = u_j^0(t, x_1, \ldots, x_n)$ в уравнения (114.17), получим линейную систему с переменными коэффициентами

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}(t)\,x_1 + \ldots + p_{sn}(t)\,x_n + \\ + q_{s1}(t)\,u_1^0(t, x_1, \ldots, x_n) + \ldots + q_{sr}(t)\,u_r^0(t, x_1, \ldots, x_n) \quad (114.18)$$
$$(s = 1, \ldots, n).$$

По построению управляющих воздействий $u_j^0(t, x_1, \ldots, x_n)$ невозмущенное движение $x_s = 0$ системы (114.18) асимптотически устойчиво. Более того, для системы (114.18) можно указать допускающую бесконечно малый высший предел определенно-положительную функцию Ляпунова $V(t, x_1, \ldots, x_n)$, имеющую определенно отрицательную производную $\frac{dV}{dt}$ в силу уравнений (114.18). В качестве такой функции $V$ можно выбрать оптимальную функцию Ляпунова $V^0(t, x_1, \ldots, x_n)$, существование которой обеспечивается теоремой 2 из § 112.

Выберем теперь в нелинейной системе (114.1) в качестве управляющих воздействий $u_j$ величины $u_j^0(t, x_1, \ldots, x_n)$ (114.17). Подставив $u_j = u_j^0(t, x_1, \ldots, x_n)$ в уравнения (114.1), получим нелинейные уравнения возмущенного движения:

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}(t)\,x_1 + \ldots + p_{sn}(t)\,x_n + q_{s1}(t)\,u_1^0(t, x_1, \ldots, x_n) + \\ + \ldots + q_{sr}(t)\,u_r^0(t, x_1, \ldots, x_n) + \varphi_s(t, x_1, \ldots, x_n) \quad (114.19)$$
$$(s = 1, \ldots, n).$$

Здесь функции

$$\varphi_s(t, x_1, \ldots, x_n) = \\ = R_s(t, x_1, \ldots, x_n;\ u_1^0(t, x_1, \ldots, x_n), \ldots, u_r^0(t, x_1, \ldots, x_n))$$

удовлетворяют неравенству

$$|\varphi_s(t, x_1, \ldots, x_n)| \leqslant A_1\{|x_1| + \ldots + |x_n|\}, \quad (114.20)$$

где

$$A_1 = A(1 + \nu)$$

$$\nu = \max\left(\sum_{i=1}^{n} |\nu_{ij}|, \quad j = 1, \ldots, r; \quad t \geqslant 0\right).$$

Невозмущенное движение $x_s = 0$ системы (114.19) асимтотически устойчиво вследствие теоремы I из § 88, если только постоянная $A$ достаточно мала. В самом деле, для системы первого приближения (114.18) существует функция Ляпунова $V^0(t, x_1, \ldots, x_n)$, удовлет-

воряющая теореме II об асимптотической устойчивости, и имеет место оценка (114.20). Отсюда следует справедливость теоремы 2.

Итак, мы указали достаточные условия разрешимости задачи I о стабилизации нелинейной системы (114.1) по первому приближению (114.2).

Вопрос о решении задачи II об оптимальной стабилизации системы (114.1) по первому приближению решается аналогичным образом. Мы приведем здесь лишь формулировку результатов. Доказательство этих результатов можно найти в работах Э. Г. Альбрехта и В. И. Зубова[1]).

Рассмотрим снова систему уравнений (114.1), где будем предполагать, что функции $R_s$ разлагаются в области (114.2) в ряды по степеням $x_s$ и $u_j$ с коэффициентами, являющимися непрерывными и ограниченными функциями времени $t$. Предполагаем, как всегда, что эти разложения начинаются с членов, порядок которых не ниже второго.

Для системы (114.1) рассмотрим задачу II об оптимальной стабилизации при условии минимума интеграла

$$I = \int_{t_0}^{\infty} \omega(t, x_1(t), \ldots, x_n(t), u_1(t), \ldots, u_r(t))\, dt, \qquad (114.21)$$

где функция $\omega$ также предполагается аналитической функцией величин $x_s$ и $u_j$, т. е. разлагается в ряд по степеням этих величин с непрерывными и ограниченными коэффициентами.

По смыслу задачи об оптимальной стабилизации функцию $\omega$ целесообразно выбирать в виде определенно-положительной функции от $x_s$ и $u_j$. Поэтому можно предполагать, что разложение функции $\omega$ в ряд начинается с четных степеней $x_s$ и $u_j$. В соответствии с этим обсудим случаи, когда функция $\omega$ имеет разложение

$$\omega(t, x_1, \ldots, x_n; u_1, \ldots, u_r) = \\ = \sum_{k=2}^{\infty} \omega^{(k)}(t, x_1, \ldots, x_n; u_1, \ldots, u_r), \qquad (114.22)$$

где $\omega^{(k)}$ — формы переменных $x_s$ и $u_j$. При этом полагаем, что первый член $\omega^{(2)}$ разложения (114.22) является определенно-положительной функцией вида

$$\omega^{(2)} = \sum_{i,\, j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j + \sum_{i,\, j=1}^{r} \beta_{ij} u_i u_j, \qquad (114.23)$$

---

[1]) См. сноски на стр. 492.

т. е. формы

$$\sum_{i,\,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j \quad \text{и} \quad \sum_{i,\,j=1}^{r} \beta_{ij} u_i u_j$$

предполагаются определенно-положительными.

Допустим, что система уравнений первого приближения удовлетворяет условиям теоремы 1 (стр. 497) в случае установившегося невозмущенного движения $x_s = 0$, или условиям теоремы 2 в случае неустановившегося движения $x_s = 0$ (стр. 499). Тогда согласно теоремам 1 и 2 § 112 задача II об оптимальной стабилизации линейных систем (114.4) при условиях минимума интеграла (114.5) от квадратичных форм (114.22) имеет решение вида

$$u_j^0 = \nu_{1j} x_1 + \ldots + \nu_{nj} x_n. \tag{114.24}$$

Оказывается, что в таких случаях задача II об оптимальной стабилизации нелинейной системы (114.1) при условии минимума интеграла (114.21) с функцией $\omega$ общего вида (114.22) также имеет решение. При этом оптимальное управление $u_j^0(t, x_1, \ldots, x_n)$ такой задачи представляется в виде рядов

$$u_j^0(t, x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{\infty} u_j^{(k)}(t, x_1, \ldots, x_n) \tag{114.25}$$

$$(j = 1, \ldots, r),$$

которые сходятся при всех достаточно малых значениях $x_s$.

Здесь $u_j^{(1)}(t, x_1, \ldots, x_n)$ представляют собой линейные формы

$$u_j^{(1)} = \nu_{1j} x_1 + \ldots + \nu_{nj} x_n,$$

совпадающие с оптимальным управлением (114.24), решающим задачу (114.1), (114.21) в первом приближении. Коэффициенты форм $u_j^{(k)}(t, x_1, \ldots, x_n)$ при $k \geqslant 2$ определяются из некоторых систем линейных уравнений. В случае постоянных $p_{sj}$, $q_{sj}$, $\alpha_{ij}$, $\beta_{ij}$ эти уравнения оказываются алгебраическими. В общем случае переменных $p_{sj}(t)$, $q_{sj}(t)$, $\alpha_{ij}(t)$, $\beta_{ij}(t)$ эти уравнения являются обыкновенными дифференциальными уравнениями. Область сходимости рядов (114.25) определяется коэффициентами и свойствами линейной системы (114.18).

## ПРИМЕЧАНИЯ РЕДАКТОРА.

**К стр. 18.** Большое число исследований было посвящено в последнее время задачам об асимптотической устойчивости, где область начальных возмущений $x_s(t_0)$, для которых должно выполняться условие (3.5), нельзя считать малой. Такие задачи изучены, например, в работах: Еругин Н. П., Качественное исследование интегральных кривых системы дифференциальных уравнений. ПММ, т. 14, вып. 5, 1950; О некоторых вопросах теории устойчивости движения и качественной теории дифференциальных уравнений. ПММ, т. 14, вып. 6, 1950; Лурье А. И., Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования, Гостехиздат, 1951; Малкин И. Г., Об устойчивости систем автоматического регулирования. ПММ, т. 16, вып. 4, 1952; Барбашин Е. А., Об устойчивости решения одного нелинейного уравнения третьего порядка. ПММ, т. 16, вып. 5, 1952; Летов А. М., Устойчивость нелинейных систем автоматического регулирования, Гостехиздат, 1955; Зубов В. И., Методы А. М. Ляпунова и их применение, Изд. ЛГУ, 1957; Плисс В. А., Некоторые проблемы теории устойчивости движения в целом. Изд. ЛГУ, 1958; Айзерман М. А., Гантмахер Ф. Р., Абсолютная устойчивость регулируемых систем, Изд. АН СССР, 1963.

В подобных случаях приобретает особенное значение *оценка* области (3.3) тех начальных возмущений $x_s(t_0)$, для которых выполняется предельное соотношение (3.5). В соответствии с этим оказывается полезным дополнить определение асимптотической устойчивости следующим образом.

(α) *Пусть $G$ — некоторая, наперед заданная область изменения переменных $x_s$*, в которой по условиям задачи могут лежать значения $x_s(t_0)$ начальных возмущений. Тогда невозмущенное движение $x_s = 0$ называется *асимптотически устойчивым в большом*, если это движение устойчиво и если условие (3.5) выполняется для *всех $x_s(t_0)$ из области $G$*.

В частности, область $G$ может быть определена неравенствами

$$|x_s(t_0)| \leqslant N,$$

где $N$ — заданное число.

Если в изучаемой реальной системе начальные возмущения $x_s(t_0)$ могут оказаться весьма большими и их трудно или нецелесообразно заранее оценивать каким-либо числом $N$, то оказывается полезным следующее определение.

(β) *Невозмущенное движение называется асимптотически устойчивым в целом, если это движение устойчиво и если условие* (3.5) *выполняется для любых начальных возмущений* $x_s(t_0)$, *как бы велики они ни были.*

Отметим еще, что свойство устойчивости, выражаемое неравенствами (3.3) и (3.4), не следует, вообще говоря, из условия (3.5) даже в случае, когда в уравнениях (3.2) функции $X_s$ не зависят явно от времени $t$. Именно, можно построить пример, когда условие (3.5) выполняется для всех начальных возмущений $x_s(t_0)$, но невозмущенное движение $x_s = 0$ неустойчиво. Подобная ситуация рассмотрена, например, в работе: Красовский Н. Н., Об устойчивости решений системы двух дифференциальных уравнений. ПММ, т. 17, вып. 6, 1953.

**К стр. 21.** Приведенное определение устойчивости при постоянно действующих возмущениях является наиболее употребительным. В исследованиях, однако, встречались некоторые модификации этого определения, учитывающие дополнительные обстоятельства. Данное определение требует малости возмущений $R_s$ в каждый момент времени $t$. Однако возможны случаи, когда возмущения $R_s$ в отдельные моменты достигают немалой величины, оставаясь значительную часть времени достаточно малыми. В таких случаях может оказаться полезным следующее определение.

(γ) *Невозмущенное движение* $y_s = f_s(t)$ *устойчиво при постоянно действующих возмущениях малых в среднем* (*на интервале* $T$), *если для всякого положительного числа* $\varepsilon$, *как бы мало оно ни было, существуют два других положительных числа* $\eta_1(\varepsilon)$ *и* $\eta_2(\varepsilon)$ *таких, что всякое решение* $y_s(t)$ *уравнений* (4.1), *удовлетворяющее при* $t = t_0$ *неравенствам*

$$|y_s(t_0) - f_s(t_0)| < \eta_1(\varepsilon),$$

*удовлетворяет при* $t > t_0$ *неравенствам*

$$|y_s(t) - f_s(t)| < \varepsilon,$$

*каковы бы ни были функции* $R_s(t, y_1, \ldots, y_n)$, *удовлетворяющие при* $t > t_0$ *для всех постоянных* $\alpha_s = y_s - f_s(t)$, $|\alpha_s| < \varepsilon$ *неравенствам*

$$\int_t^{t+T} |R_s(t, y_1, \ldots, y_n)|\, dt < \eta_2(\varepsilon).$$

Здесь $T$ — положительное число, выбранное в меру бо́льшим для того, чтобы в изучаемой системе отдельные всплески возмущений $R_s(t, y_1(t), \ldots, y_n(t))$ компенсировались в среднем малостью их на большей части интервала $(t, t+T)$. Задача об устойчивости при возмущениях, малых в среднем, изучалась, например, И. Вркочем (Интегральная устойчивость, Чехослов. матем. журнал, т. 9, № 1, 1959) и В. Е. Гермаидзе и Н. Н. Красовским (Об устойчивости при постоянно действующих возмущениях, ПММ, т. 21, вып. 6, 1957).

Были исследованы также аналогичные задачи об устойчивости при малых запаздываниях воздействий и сигналов в системах, описываемых уравнениями вида (2.1) и уравнениями с запаздывающим аргументом (см., например, работу: Репин Ю. М., Об устойчивости решений уравнений с запаздывающим аргументом. ПММ, т. 21, вып. 2, 1957).

Е. А. Барбашиным была поставлена и исследована задача об осуществлении программного движения $y_s = f_s(t)$ при импульсных возмущениях (см. работы: О построении периодических движений. ПММ, т. 25, вып. 2, 1961; Программное регулирование систем со случайными параметрами. ПММ, т. 25, вып. 5, 1961).

Были изучены некоторые задачи об устойчивости при случайных возмущениях $R_s$ с известными вероятностными характеристиками (см., например, работы: Кац И. Я., Красовский Н. Н., Об устойчивости систем со случайными параметрами. ПММ, т. 24, вып. 5, 1960; Хасьминский Р. З., Об устойчивости траекторий марковских процессов. ПММ, т. 26, вып. 6, 1962).

Это перечисление ни в коей мере не претендует на полноту. Из весьма большого числа исследований, посвященных рассматриваемым вопросам, мы ограничились лишь упоминанием отдельных работ.

Все упомянутые задачи обладают общим свойством, отмеченным выше в монографии для основного определения устойчивости при постоянно действующих возмущениях $R_s$, а именно справедливы следующие утверждения:

1) В практически интересных случаях эти задачи приводятся к проблеме устойчивости по Ляпунову.

2) Асимптотическая устойчивость движения $x_s = 0$ является достаточным условием его устойчивости при постоянно действующих возмущениях описанных типов (по крайней мере для установившихся и периодических невозмущенных движений).

3) Для исследования новых задач устойчивости при различных возмущениях $R_s$ пригодны классические методы теории Ляпунова, модернизированные в соответствии с особенностями этих задач.

**К стр. 26.** Первый метод А. М. Ляпунова позволил ему получить ряд весьма глубоких и важных результатов. В качестве примера отметим изящную теорию условной устойчивости, развитую

А. М. Ляпуновым в работе «Общая задача об устойчивости движения» (Гостехиздат, 1950) на основе первого метода. Эти результаты послужили источником глубоких исследований более поздних авторов по теории дифференциальных уравнений и, в частности, по устойчивости движения и по проблемам теории нелинейных колебаний. Одно из достоинств данного метода состоит в том, что он работает в наиболее тонких случаях и позволяет не только указать качественную картину изучаемого явления, но и построить явный вид исследуемых решений $x_s(t)$.

В настоящей монографии основной упор делается на второй метод Ляпунова. Поэтому результаты теории устойчивости, связанные с первым методом, затрагиваются лишь частично.

**К стр. 26.** В связи с новыми задачами об устойчивости нелинейных систем и в связи с проблемами стабилизации управляемых движений в последние годы (начиная приблизительно с 1950 года) интерес ко второму методу Ляпунова весьма возрос. Исследование принципиальных математических проблем, относящихся к этому методу, а также исследование вопросов эффективного построения функций Ляпунова для прикладных задач, начатые впервые в нашей стране, были развиты в эти годы в большом числе серьезных работ советских и иностранных специалистов. При этом всестороннем исследовании были установлены универсальность и эффективность второго метода Ляпунова для широкого круга проблем, включая, например, задачи об устойчивости в целом нелинейных систем автоматического регулирования, задачи об устойчивости систем с запаздываниями воздействий во времени, задачи об устойчивости стохастических систем и т. д. Выяснилось также, что метод функций Ляпунова может быть использован для решения проблем синтеза оптимальных управляемых систем с обратной связью, так как он тесно переплетается с методами динамического программирования в теории оптимальных процессов (см. приложение IV).

**К стр. 28.** Данные определения свойств знакоопределенности и знакопостоянства функций $V$ описывают поведение этих функций лишь в малой окрестности (6.3) невозмущенного движения $x_s = 0$. Этого достаточно для исследования вопросов об устойчивости, неустойчивости или об асимптотической устойчивости при достаточно малых начальных возмущениях $x_s(t_0)$. При исследовании вторым методом Ляпунова задачи об асимптотической устойчивости в большом (см. выше примечание к стр. 18) приходится рассматривать поведение функций $V$ в достаточно большой области $G$ изменения переменных $x_s$, а в случае задачи об устойчивости в целом следует рассматривать $V$ при всех значениях $x_s$. Поэтому в таких случаях определение свойства знакопостоянства или знакоопределенности должно

сопровождаться указанием или оценкой той области изменения $x_s$, в которой выполняется соответствующее свойство.

**К стр. 38.** Теорема Б может быть обобщена на случаи асимптотической устойчивости *в большом и в целом* (см. примечание к стр. 18). Это обобщение достигается за счет введения в формулировку теоремы оценок, характеризующих область асимптотической устойчивости. Таким путем получаются следующие критерии асимптотической устойчивости.

Теорема $Б_1$. *Если для дифференциальных уравнений возмущенного движения возможно найти функцию $V(x_1, \ldots, x_n)$, знакоопределенную в области*

$$|x_s| \leqslant Q, \tag{10.5}$$

*полная производная которой по времени, составленная в силу этих уравнений, есть функция, также знакоопределенная в этой области, знака, противоположного с $V$, причем выполняется неравенство $M_N < m_Q$, то невозмущенное движение асимптотически устойчиво в большом относительно начальных возмущений $x_s(t_0)$ из области*

$$|x_s(t_0)| \leqslant N.$$

Здесь символ $m_Q$ означает точный нижний предел функции $|V(x_1, \ldots, x_n)|$ при условии $x = Q$ $(x = \max(|x_1|, \ldots, |x_n|))$, символ $M_N$ означает точный верхний предел функции $|V(x_1, \ldots, x_n)|$ при $x = N$. Предполагается, естественно, что $N < Q$.

Читателю, внимательно разобравшему доказательство теоремы Б, смысл неравенства $M_N < m_Q$ в формулировке теоремы $Б_1$ должен быть ясен, и он сможет сам провести доказательство теоремы $Б_1$ по тому же плану, по которому проведено выше доказательство теоремы Б. Достаточный критерий устойчивости в целом формулируется следующим образом.

Теорема $Б_2$. *Если для дифференциальных уравнений возмущенного движения возможно найти определенно-положительную функцию $V(x_1, \ldots, x_n)$, полная производная по времени которой, составленная в силу этих уравнений, есть при всех $x_s$ функция определенно-отрицательная, и если при этом*

$$\lim_{x \to \infty} V(x_1, \ldots, x_n) = \infty,$$

*то невозмущенное движение асимптотически устойчиво в целом.*

Смысл последнего условия $\lim V = \infty$ состоит в следующем: при этом условии для любого числа $N$ можно подобрать число $Q > N$, удовлетворяющее неравенству $M_N < m_Q$. Но тогда справедливость

теоремы $Б_2$ выводится из теоремы $Б_1$. Важность этого условия для задач устойчивости в целом была отмечена Н. П. Еругиным (см. работу: Об одной задаче теории устойчивости систем автоматического регулирования. ПММ, т. XVI, вып. 5, 1952) и Е. А. Барбашиным (см. работу: Барбашин Е. А., Красовский Н. Н., Об устойчивости движения в целом. ДАН СССР, т. 86, вып. 3, 1952).

**К стр. 47.** Дополнительное условие (12.9) не является стеснительным, так как всегда можно предполагать, что характеристики $f(\sigma)$ реальных систем этому условию удовлетворяют. Кроме того, следует иметь в виду, что теорема $Б_2$ является *достаточным* критерием устойчивости. Поэтому дополнительное условие (12.9) является в подобных случаях достаточным, но отнюдь не необходимым условием устойчивости в целом. Детальный анализ рассмотренной в этом параграфе задачи А. И. Лурье, учитывающий многие исследования этой проблемы, выполненные в последнее время, содержится в книге М. А. Айзермана и Ф. Р. Гантмахера, упомянутой выше в примечании к стр. 18. Отметим еще, что исследование данной задачи А. И. Лурье занимает большое место в монографии А. М. Летова, посвященной нелинейным регулируемым системам (см. также примечание к стр. 18).

**К стр. 68.** Функция $V$ удовлетворяет, естественно, и дополнительному условию

$$\lim_{x \to \infty} V(x_1, \ldots, x_n) = \infty,$$

фигурирующему в теореме $Б_2$ (см. примечание к стр. 38), указывающей достаточные условия устойчивости в целом. Отметим, кстати, что для линейных систем асимптотическая устойчивость в целом является очевидным следствием асимптотической устойчивости относительно начальных возмущений $x_s(t)$ из малой окрестности невозмущенного движения $x_s = 0$.

**К стр. 70.** Необходимые и достаточные условия существования функции $V(x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющей условиям теоремы В в предположении неустойчивости установившегося движения $x_s = 0$, заключаются в следующем: достаточно малая окрестность $|x_s| < \eta$ точки $x_s = 0$ не должна содержать целиком движений $x_s(t)$ $(-\infty < t < \infty)$, отличных от невозмущенного движения $x_s = 0$. Доказательство этого утверждения можно найти в книге: Красовский Н. Н., Некоторые задачи теории устойчивости движения, Физматгиз, 1959, стр. 43. В рассмотренном в данном параграфе примере указанное условие не выполняется, так как в любой ок-

рестности точки $x_s = 0$ содержатся положения равновесия $x_s = c_s$, отличные от этой точки.

**К стр. 89.** При применении более гибкого способа построения функции Ляпунова $V(x, y)$, включающей, помимо квадратичных членов, слагаемые вида

$$\int_0^x f(\xi)\, d\xi,$$

для задач, подобных рассматриваемой здесь, получаются более общие достаточные условия устойчивости в целом, весьма близкие к необходимым условиям (см. дополнение I). Однако такой метод построения функций Ляпунова $V$, естественно, выходит за рамки классической теории устойчивости движения по первому приближению, рассматриваемой в этой главе.

**К стр. 109.** В этом случае система (28.6) допускает голоморфный интеграл — семейство инвариантных поверхностей

$$x = f(x_1, x_2, \ldots, x_n, c), \quad f(0, 0, \ldots, 0) = 0,$$

на каждой из которых имеется особая точка $x = c$, $x_s = u_s(c)$, $s = 1, 2, \ldots, n$ (см. Ляпунов А. М.., Общая задача об устойчивости движения, Гостехиздат, 1950). Расположение траекторий системы (28.6) при $n = 2$ на произвольной поверхности $x = f(x_1, x_2, c)$ для достаточно малого $c$ в окрестности точки $x = c$, $x_s = u_s(c)$, $s = 1, 2$ выяснено в работе Б. Н. Скачкова (Вестник ЛГУ, № 8, 1954).

**К стр. 126.** Проблема центра и фокуса до последнего времени продолжает оставаться одной из основных задач качественной и аналитической теорий обыкновенных дифференциальных уравнений. Например, отметим следующий результат. Если в системе (36.1) $X$ и $Y$ — многочлены от $x$ и $y$ фиксированной степени, то для нее число условий центра конечно (Альмухамедов М. И. Изв. физ.-матем. общества, (3), 8, Казань, 1936 — 1937; 9, 1937). Эти условия найдены в явном виде для случаев: а) $X \equiv 0$, $Y$ — многочлен от $x$ и $y$ третьей или пятой степени (Куклес И. С. ДАН СССР, т. 42, № 4 и 5, 1944); б) $X$ и $Y$ — однородные многочлены от $x$ и $y$ второй степени (Сибирский К. С. Изв. АН СССР, сер. матем., № 11, 1963); в) $X$ и $Y$ — однородные многочлены от $x$ и $y$ третьей степени (Сахарников Н. А. ПММ, т. 14, вып. 6, 1950; Малкин К. Е. Волжский матем. сб., вып. 2, 1964).

Для системы (36.1) в общем случае разработаны новые варианты записи условий центра и новые способы составления таких условий

(Куклес И. С., Нуров Т. Н. Изв. высш. учебн. заведений, Математика, № 6, 1963; Альмухамедов М. И. Уч. зап. Казанск. пед. ин-та, вып. 10, 1955; Малкин К. Е. Уч. зап. Рязанск. пед. ин-та, т. 24, 1960). Полностью решен вопрос о существовании проходящей через начало координат оси симметрии поля направлений (Сибирский К. С. ДАН СССР, т. 151, № 3, 1963).

**К стр. 196.** Теорема II, так же как и аналогичная теорема Б в стационарном случае, может быть обобщена на случаи асимптотической устойчивости в большом и в целом. Таким путем получается, например, следующий критерий устойчивости в целом. Будем говорить, что функция $V(t, x_1, \ldots, x_n)$ является определенно-положительной и допускает высший предел в *целом*, если можно указать две непрерывные функции $w(x_1, \ldots, x_n)$, $W(x_1, \ldots, x_n)$ такие, что при всех значениях $x_s$ выполняются неравенства

$$w(x_1, \ldots, x_n) \leqslant V(t, x_1, \ldots, x_n) \leqslant W(x_1, \ldots, x_n),$$

причем функция $w(x_1, \ldots, x_n)$ определенно-положительна, кроме того,

$$\lim_{x \to \infty} w(x_1, \ldots, x_n) = \infty \qquad (x = \max(|x_1|, \ldots, |x_n|))$$

и

$$W(0, \ldots, 0) = 0.$$

Справедливо утверждение.

Теорема $\mathrm{II}_1$. *Если можно указать функцию $V(t, x_1, \ldots, x_n)$, которая была бы определенно положительной и допускала бы высший предел в целом, причем ее производная $\frac{dV}{dt}$ в силу уравнений возмущенного движения была бы функцией определенно-отрицательной при всех значениях $x_s$, то невозмущенное движение $x_s = 0$ асимптотически устойчиво в целом.*

На доказательстве этой теоремы останавливаться не будем, так как оно проводится по тому же плану, что и доказательство теоремы II с небольшими дополнениями, связанными с особенностями постановки задачи об устойчивости в целом. Эти особенности подчеркнуты выше в примечаниях к стр. 18 и 38.

**К стр. 235.** В последнее время уравнение (59.2), так же как и более общие случаи линейных канонических систем с периодическими коэффициентами, было подвергнуто дальнейшему подробному изучению. При этом были получены новые интересные результаты.

Теории периодических систем посвящен обзорный доклад В. М. Старжинского и В. А. Якубовича на II Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике в Москве 27. I — 3. II

1964 г. (Сборник трудов II Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике, Изд. АН СССР, 1965).

**К стр. 306.** За время, прошедшее после выхода в свет первого издания настоящей монографии, проблема существования функций Ляпунова $V(t, x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющих условиям теорем I, II и III, послужила предметом весьма большого числа исследований. Основной вывод, который следует из результатов этих работ, таков:

*Характер поведения возмущенных движений, определенный той или иной функцией $V$ из классических теорем второго метода Ляпунова, является не только необходимым, но и достаточным условием существования такой функции.*

При этом выяснилось, что свойства гладкости функций $V$ могут быть намного выше, чем гладкость правых частей соответствующих уравнений возмущенного движения.

В частности, вопрос об обратимости теоремы II с достаточной полнотой был решен в работе И. Г. Малкина «К вопросу об обратимости теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости», которая составляет содержание дополнения II, приведенного в настоящем издании этой монографии. Более подробно с проблемами существования функций Ляпунова и методами исследования этих проблем читатель может ознакомиться также по работам: Барбашин Е. А., Метод сечений в теории динамических систем, Матем. сб., т. 29, вып. 2, 1951; Барбашин Е. А., Красовский Н. Н., Об устойчивости движения в целом. ДАН СССР, т. 86, вып. 3, 1952; О существовании функции Ляпунова в случае асимптотической устойчивости в целом. ПММ, т. 18, вып. 3, 1954; Massera J. L., On Liapounoffs condition of stability. Annals of Mathematics, т. 50, № 3, 1949. Contributiono to stability theory. Annalo of Math., v. 64, № 1, 1956; Курцвейль Я., К обращению первой теоремы Ляпунова об устойчивости движения. Чехосл. матем. журнал, т. 5 (80), 1955; Об обращении второй теоремы Ляпунова об устойчивости движения. Чехосл. матем. журнал, т. 6 (81), № 2, 1956; Курцвейль Я., Вркоч И., Об обращении теоремы Ляпунова об устойчивости и теоремы Персидского о равномерной устойчивости. Чехосл. матем. журнал, т. 7 (82), № 2, 1957; Зубов В. И., К теории второго метода А. М. Ляпунова. ДАН СССР, т. 99, вып. 3, 1954; Вопросы теории второго метода Ляпунова, построение общего решения в области асимптотической устойчивости. ПММ, т. 19, вып. 6, 1955; К теории второго метода А. М. Ляпунова. ДАН СССР, т. 100, вып. 5, 1955; Методы А. М. Ляпунова и их применение, Изд-во ЛГУ, 1957; Вркоч И., Обращение теоремы Четаева. Чехосл. матем. журнал, т. 5 (80), 1955; Joshizawa T., On the stability of solutions of a system of differential equations. Memoirs of the Colledge of science. Univ. of Kyoto,

XXIX, № 1, ser. A, math, 1955; Красовский Н. Н., Некоторые задачи теории устойчивости движения, Физматгиз, 1959.

Подчеркнем, что здесь упомянута лишь небольшая часть работ из обширной библиографии вопроса.

Отметим еще два обстоятельства, связанные с задачами о существовании функций Ляпунова.

1. Решение этих проблем в положительном смысле позволило продвинуть теорию устойчивости движений при постоянно действующих возмущениях. Это объясняется тем, что наличие функции Ляпунова позволяет обычно доказать сохранение соответствующих свойств при малых добавках к уравнениям возмущенного движения (см., например, материал на стр. 461—462 настоящей монографии). Таким образом, параллельно с теорией существования функций Ляпунова в последние годы существенно развилась теория устойчивости при постоянно действующих возмущениях (см. также примечание к стр. 21).

2. Методы, использованные в большинстве работ о существовании функций Ляпунова, позволяют решить вопрос лишь в принципе. Однако эти методы, как правило, мало полезны для эффективного построения функций Ляпунова в конкретных прикладных задачах.

**К стр. 307.** Вопрос об обратимости теорем А. М. Ляпунова и Н. Г. Четаева о неустойчивости решается следующим образом.

Функция $V(t, x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющая условиям теоремы Н. Г. Четаева, существует во всех случаях неустойчивости (см. упомянутую работу И. Вркоча и монографию Н. Н. Красовского).

Теорема Ляпунова о неустойчивости (теорема В) обратима не всегда, как это уже отмечалось выше на стр. 70 (см. также примечание к этой странице). Необходимые и достаточные условия существования функции $V(t, x_1, \ldots, x_n)$, которая удовлетворяет условиям теоремы III, таковы:

Функция $V$ из теоремы III существует тогда и только тогда, когда выполнены условия: 1) невозмущенное движение $x_s = 0$ неустойчиво; 2) существует число $\varepsilon > 0$ такое, что каково бы ни было число $\eta < \varepsilon$, можно указать число $T(\eta) > 0$ так, что $x(t^*) > \varepsilon$ в некоторый момент времени $|t^* - t_0| < T$, если только $\varepsilon > x(t_0) \geqslant \eta$. Здесь $x = \max(|x_1|, \ldots, |x_n|)$.

В частности, в случае установившегося движения $x_s = 0$, когда правые части уравнений возмущенного движения не зависят явно от $t$, условие 2) означает, что $\varepsilon$ — окрестность точки $x_s = 0$ не содержит целиком движений $x_s(t)$ $(-\infty < t < \infty)$, кроме самой точки $x_s = 0$. Доказательство приведенных утверждений можно найти в цитированной монографии Н. Н. Красовского.

**К стр. 350.** После 1952 года были построены весьма интересные примеры, показывающие, что характеристичные числа правиль-

ных систем могут оказаться неустойчивыми (см. работы: Виноград Р. Э. ПММ, т. 17, вып. 6, 1953; ДАН СССР, т. 103, № 4, 1955). Были найдены условия устойчивости характеристичных чисел (см. работы: Виноград Р. Э. ДАН СССР, т. 119, № 4, 1958; Былов Б. Ф. Мат. сборник, т. 48, № 1, 1959). Отметим, в частности, один тонкий результат (Богданов Ю. С., О существовании аппроксимирующей последовательности для правильной линейной дифференциальной системы. Успехи матем. наук, т. XV, вып. 1, 1960), относящийся к вопросу об устойчивости характеристичных чисел правильных систем.

Пусть $p$ — вещественная $(n \times n)$-матрица, заданная, кусочно-непрерывная и ограниченная для вещественного аргумента $t \geqslant 0$, $k = 1, 2, 3, \ldots$; $m$ означает $k$ или отсутствие индекса; $T$ — безгранично возрастающая последовательность положительных чисел $t_k$; $p_k$ — матрица-функция, совпадающая с $p$ на интервале $[0, t_k)$ и периодически продолженная вне его; $S_m$ — система линейных дифференциальных уравнений $\frac{dx}{dt} = p_m x$; $\lambda_m$ — совокупность расположенных в порядке возрастания характеристичных чисел нормальной системы решений $S_m$, рассматриваемая как вектор. Последовательность $T$ назовем *аппроксимирующей*, если $\lambda_k \to \lambda$ при $k \to \infty$.

К. П. Персидский (см. работу, цитированную в сноске на стр. 341) высказал следующее утверждение: если $S$ — правильная система, то *любая* последовательность $T$ является аппроксимирующей. Впоследствии Р. Э. Виноград (Успехи матем. наук, т. IX, вып. 2, 1954) на примере ряда систем двух уравнений показал несостоятельность этого утверждения. Оказалось, что для правильных (более того, периодических) систем, рассмотренных Р. Э. Виноградом, *существуют* $T$, которые *не являются* аппроксимирующими.

Н. П. Еругин поставил вопрос: можно ли для любой правильной системы $S$ указать *по крайней мере одну* аппроксимирующую последовательность $T$. Оказалось, что: 1) *существуют правильные системы, для которых ни одна последовательность $T$ не является аппроксимирующей*; 2) *любая правильная двумерная система $S$ ортогональной подстановкой переменных, коэффициенты которой зависят только от аргумента системы и верхней грани модулей элементов $p$, может быть преобразована к виду, при котором аппроксимирующая последовательность $T$ заведомо существует.*

**К стр. 351.** Доказанная теорема допускает уточнение, которое проведено в работе: Богданов Ю. С., Замечание к § 81 монографии И. Г. Малкина «Теория устойчивости движения», Гостехтеориздат, 1952. ПММ, т. 20, вып. 3, 1956.

Ниже эта работа приводится целиком.

Рассмотрим систему однородных линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i = p_{1i}x_1 + \ldots + p_{ni}x_n \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

с коэффициентами $p_{ij} = p_{ij}(t)$, заданными, непрерывными и ограниченными для $t \geqslant 0$. Если $x_{i1}, \ldots, x_{in}$, $i = 1, \ldots, n$ — фундаментальная система решений (1) с характеристичными числами решений $\mu'_1, \ldots, \mu'_n$, то всегда

$$\mu'_1 + \ldots + \mu'_n + \varliminf_{t\to\infty} \int_0^t (p_{11} + p_{22} + \ldots + p_{nn})\, dt \leqslant 0. \tag{2}$$

Система (1) правильна тогда и только тогда, если можно указать такую фундаментальную систему решений ее, для которой в (2) имеет место знак равенства. Если такая фундаментальная система решений существует, то она необходимо нормальная согласно Ляпунову.

Пусть $X(t, \tau) \equiv (x_{ij}(t, \tau))$ — матрица, которая при фиксированном $\tau$ представляет собой фундаментальную систему решений (1), нормированную для $t = \tau$ $(X(\tau, \tau) = I)$, а $\mu_i$ означает характеристичное число решения (1) $x_{i1}(t, 0), \ldots, x_{in}(t, 0)$.

Определение. Назовем (1) системой $A$, если по любому положительному $\gamma$ можно указать постоянное $C_\gamma$, не зависящее ни от $t$, ни от $\tau$, такое, что

$$|x_{ij}(t, \tau)| < \begin{cases} C_\gamma \exp[(\gamma - \mu_i)(t - \tau)] & (0 \leqslant \tau \leqslant t), \quad (3) \\ C_\gamma \exp[(\gamma + \mu_i)(\tau - t)] & (0 \leqslant t \leqslant \tau). \quad (3') \end{cases}$$

*Именно такие системы рассматриваются в одном из разделов* (§ 81) *книги И. Г. Малкина*. В указанном разделе доказывается, что если система (1) удовлетворяет условию (3) *и правильна*, то ее характеристичные числа устойчивы. Нетрудно убедиться, что верно следующее предложение. Системы $A$ всегда правильны (следствие: *характеристичные числа любой системы $A$ устойчивы*).

Доказательство. Из известных свойств фундаментальных систем решений следует, что $X(t, \tau) = X^{-1}(\tau, 0)X(t, 0)$. Поэтому $X^{-1}(t, \tau) = X(\tau, t)$, $X^{-1}(t, 0) = X(0, t)$. Далее,

$$\varliminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \sum_{i=1}^n p_{ii}\, dt = -\varlimsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln |\det X^{-1}(t, 0)| =$$

$$= -\varlimsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln |\det X(0, t)|,$$

но $|\det X(0, t)| \leqslant C_\gamma^n n! \exp(n\gamma + \mu_1 + \ldots + \mu_n)$ (см. (3′) при $t = 0$, $\tau = t$). Поэтому

$$-\overline{\lim_{t\to\infty}}\left(t^{-1}\ln|\det X(0, t)|\right) \geqslant -n\gamma - \mu_1 - \ldots - \mu_n \quad \text{при} \quad t \to \infty$$

Число $\gamma$ — произвольное, значит,

$$\underline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t}\int_0^t \sum_{i=1}^n p_{ii}\,dt = -\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t}\ln|\det X(0, t)| \geqslant -\mu_1 - \ldots - \mu_n.$$

Таким образом, для фундаментальной системы решений системы (1)

$$\mu_1 + \ldots + \mu_n + \underline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t}\int_0^t (p_{11} + p_{22} + \ldots + p_{nn})\,dt \geqslant 0. \qquad (4)$$

Сопоставляя (4) с соотношением (2), верным для любой фундаментальной системы решений (1), приходим к заключению, что (4) должно быть равенством, а это и доказывает правильность системы (1) — произвольной системы $A$ (фундаментальная система решений (1), нормированная в точке $t = 0$, попутно оказалась нормальной).

Замечание 1. Условия (3) можно сформулировать, не предполагая $\mu_i$ характеристичными числами системы (1), но лишь некоторыми постоянными, не зависящими ни от $\gamma$, ни от $\tau$. Однако из проведенных рассуждений ясно, что ничем другим как характеристичными числами системы (1) $\mu_i$ быть не могут.

Замечание 2. Если (1) — система $A$, то нормальной будет любая фундаментальная система решений (1), нормированная в какой-нибудь точке $t = \tau$, поэтому, например, из $\mu_1 > \mu_2 > \ldots > \mu_n$ следует, что $p_{ij} \equiv 0$ для $i < j$ ($i, j = 1, \ldots, n$).

**К стр. 362.** После 1952 года в теории характеристичных чисел Ляпунова получен ряд новых результатов.

Проведены глубокие исследования зависимости характеристичных чисел системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими и почти периодическими коэффициентами от параметров, входящих в коэффициенты. Получены разложения характеристичных чисел в ряды по степеням параметра, найдены оценки снизу радиуса сходимости таких рядов, позволяющие эффективно оценивать погрешность, возникающую при замене указанных рядов частными суммами. Все эти вопросы подробно освещены в монографии: Еругин Н. П., Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими и квазипериодическими коэффициентами, Изд. АН БССР, Минск, 1963.

Опубликованы оценки характеристичных чисел, найденные в свое время Н. Г. Четаевым (ПММ, т. 24, вып. 1, 1960) как для систем

общего вида, так и для систем, коэффициенты которых имеют ограниченное колебание. Указаны и другие эффективные оценки характеристичных чисел (Горбунов А. Д. Вестник МГУ, № 2, 1956).

Открыта новая характеристика системы — центральный показатель, управляющий скачками характеристичных чисел, и указаны способы вычисления этой характеристики для ряда систем (Виноград Р. Э. Матем. сб., т. 42, № 2, 1957).

Доказано, что данную систему уравнений всегда можно заменить системой с кусочно постоянными коэффициентами, причем характеристичные числа обеих систем будут совпадать (Богданов Ю. С. Матем. сб., т. 41, № 1, 1957). Предпринята попытка распространить теорию характеристичных чисел на нелинейные системы (Богданов Ю. С. ДАН СССР, т. 158, № 1, 1964).

**К стр. 366.** Приведенные геометрические соображения указывают путь для обоснованного аналитического доказательства теоремы, которое, строго говоря, должно дополнить эти соображения. Это подробное доказательство, однако, помимо технических деталей не содержит интересных новых моментов и здесь не приводится. Кроме того, следует иметь в виду, что возможно и другое доказательство теоремы, исходя непосредственно из существования в рассматриваемом случае функции Ляпунова $V$, удовлетворяющей оценке (см. монографию: Красовский Н. Н., Некоторые задачи теории устойчивости движения, Физматгиз, 1959)

$$\frac{dV}{dt} \leqslant -c_3\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\nu+m-1},$$

$$\left|\frac{\partial V}{\partial x_i}\right| \leqslant c_4\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\nu-1}$$

$(c_3 > 0,\ c_4 > 0$ — постоянные).

Доказательство теоремы с помощью такой функции $V$ проводится стандартным путем.

**К стр. 377.** Как отмечено выше, критерии устойчивости по линейному приближению, даваемые теоремами 1—3, означают следующее. Если в случае неустановившегося движения $x_s = 0$ в линейном приближении движение $x_s = 0$ асимптотически устойчиво и если при этом возмущенные движения $x_s(t, t_0)$ линейного приближения (88.4) удовлетворяют оценке (88.5), характерной для асимптотической устойчивости линейных систем с постоянными параметрами, то имеет место асимптотическая устойчивость и полной нелинейной системы (88.1) при условиях (88.3). В такой форме этот критерий обобщается на

задачи устойчивости по первому приближению и в тех случаях, когда первое приближение не является линейным, но когда в правых частях уравнений первого приближения стоят однородные формы от $x_s$ произвольного порядка $m \geqslant 1$ с переменными по времени $t$, непрерывными и ограниченными коэффициентами (см. монографию Н. Н. Красовского в примечании к стр. 306).

Отметим еще, что выяснился следующий любопытный факт: линейность системы (88.4) не является существенной для справедливости утверждения, подобного теореме 2. Именно, если для некоторых уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(t, x_1, \ldots, x_n),$$

где $X_s$ — произвольные нелинейные функции, удовлетворяющие условиям Липшица, выполняется оценка (88.5), то невозмущенное движение $x_s = 0$ асимптотически устойчиво в силу уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(t, x_1, \ldots, x_n) + \varphi_s(t, x_1, \ldots, x_n)$$

при любом выборе функций $\varphi_s$, удовлетворяющих неравенству (88.3), если только постоянная $A$ достаточно мала.

Это утверждение доказано в работе: Барбашин Е. А., Скалкина М. А., К вопросу об устойчивости по первому приближению. ПММ, т. 19, вып. 5, 1955.

**К стр. 383.** Сформулированная теорема известна под названием «принципа сведения». Этот принцип, введенный фактически А. М. Ляпуновым и лежащий в основе его метода исследования критических случаев, играет постоянно центральную роль при изучении этих случаев, фигурируя в той или иной форме почти во всех работах, посвященных им. В процессе использования принцип сведения подвергся усовершенствованию в соответствии с рассматриваемыми конкретными задачами. Заметим, в частности, что в последнее время этот принцип получил весьма существенное развитие в работах В. А. Плисса (см., например, работы: Плисс В. А., О принципе сведения в теории устойчивости движения. ДАН СССР, т. 164, № 5, 1964; О принципе сведения в теории устойчивости движения. Изв. АН СССР, Математика, т. XXVIII, № 6, 1964).

**К стр. 384.** Это преобразование можно использовать лишь при условии, что $r \neq 0$. В самом деле, при $r = 0$, но $x_s \neq 0$ величины $\xi_s$ становились бы бесконечно большими. В соответствии с этим ниже, если не сделано дополнительных оговорок, следует иметь в виду, что новые переменные $\xi_s$ используются при рассмотрении траектории $x_s(t)$, $y_i(t)$ системы (91.1) лишь в такой области изменения $x_s$, $y_i$, где $|\xi_s| \leqslant H$. Здесь $H$ — некоторая положительная постоянная. Область

в пространстве $\{x_s, y_i\}$, где $|\xi_s| < H$, будем обозначать символом $G$. Область $G$ охватывает многообразие $x_1 = \ldots = x_n = 0$, $y_1^2 + \ldots + y_k^2 \neq 0$, сжимаясь в точку при приближении к началу координат.

**К стр. 422.** Задача, рассмотренная в этом параграфе, для системы второго порядка решалась также методами качественной теории дифференциальных уравнений на плоскости.

Для системы

$$\frac{dx}{dt} = y + X(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Y(x, y)$$

выяснены возможные топологические типы расположения траекторий [в окрестности точки (0, 0) встречается 10 различных типов] и полностью решена задача их различения с точностью до проблемы различения центра и фокуса (Хаимов Н. Б., Уч. зап. Сталинабад. пед. ин-та, т. II, 1952; Андреев А. Ф. Вестник ЛГУ, № 8, 1955). Последняя проблема решена для случая, когда $X$ и $Y$ являются однородными многочленами от $x$ и $y$ третьей степени (Андреев А. Ф. ПММ, т. 17, вып. 3, 1953).

Для произвольной системы второго порядка с аналитическими в точке (0, 0) правыми частями

$$\frac{dx}{dt} = X(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Y(x, y) \quad (X(0, 0) = Y(0, 0) = 0)$$

разработан алгоритм, позволяющий конечным числом операций, во-первых, выяснить, является ли точка (0, 0) особой точкой 1-й группы (имеются ли траектории, примыкающие к этой точке с определенными касательными) или 2-й группы (центр или фокус); во-вторых, в случае, когда точка (0, 0) принадлежит к 1-й группе, выяснить расположение траекторий в ее окрестности (исключая некоторые особые подслучаи) (Куклес И. С. Труды 3-го Всесоюзн. матем. съезда, М., АН СССР, т. III, 1958; Андреев А. Ф. Вестник ЛГУ, № 1, 1962), причем найдены оценки для упомянутого выше числа операций (Куклес И. С., Груз Д. М. Изв. АН Уз.ССР, № 1, 1958; Андреев А. Ф., Дифференциальные уравнения, т. 1, № 9, 1965).