влетворяет всем условиям теоремы В, и поэтому исследуемое положение равновесия неустойчиво.

Итак, мы получили следующую теорему, принадлежащую Ляпунову:

Если в положении равновесия силовая функция имеет минимум и это определяется совокупностью членов наинизшего порядка в разложении этой функции, то равновесие неустойчиво.

Приведенное доказательство лишь незначительно отличается от классического доказательства Ляпунова.

§ 15. Вторая теорема Ляпунова о неустойчивости.

Докажем еще одну теорему Ляпунова о неустойчивости.

Теорема Г. *Если существует функция V такая, что ее полная производная по t в силу уравнений возмущенного движения имеет в области* (13.1) *вид*

$$\frac{dV}{dt} = \lambda V + W(x_1, \ldots, x_n), \tag{15.1}$$

где λ — положительная постоянная, а W или тождественно обращается в нуль или представляет собой знакопостоянную функцию, и если в последнем случае функция V не является знакопостоянной, знака, противоположного с W, то невозмущенное движение неустойчиво.

Доказательство. Допустим для определенности, что функция W положительна. Тогда из (15.1) получаем:

$$\frac{dV}{dt} \geqslant \lambda V. \tag{15.2}$$

Так же как и при доказательстве теоремы В, выберем начальные (при $t = t_0$) значения x_s^0 решения $x_s(t)$ таким образом, чтобы одновременно выполнялись неравенства

$$|x_s^0| \leqslant \eta, \quad V(x_1^0, \ldots, x_n^0) > 0,$$

где η сколь угодно малое положительное число. Покажем, что это решение необходимо покидает в некоторый момент времени область (13.1). Допустим противное: что неравенства (13.1) все время выполняются. Тогда все время будет выполняться неравенство (15.2) и, поскольку $V(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ положительно, производная $\frac{dV}{dt}$ будет все время оставаться положительной и, следовательно, $V[x_1(t), \ldots, x_n(t)]$ будет функцией возрастающей. Но тогда из (15.2) находим:

$$\frac{dV}{dt} \geqslant \lambda V[x_1(t), \ldots, x_n(t)] \geqslant \lambda V(x_1^0, \ldots, x_n^0)$$

и, следовательно,

$$V \geqslant \lambda V(x_1^0, \ldots, x_n^0)(t - t_0),$$

что невозможно, так как в области (13.1) функция V ограничена. Таким образом, для рассматриваемого решения неравенства (13.1) необходимо нарушаются, что и доказывает неустойчивость невозмущенного движения.

§ 16. Геометрическая интерпретация теоремы В. Теорема Н. Г. Четаева.

Теорема В, так же как и теоремы А и Б, допускает простое геометрическое истолкование.

Примем для простоты, что $n = 2$, и рассмотрим сначала тот случай, когда функция V не является знакоопределенной. В этом случае кривая $V = 0$ имеет одну (рис. 4) или несколько (рис. 5) вещественных ветвей, проходящих через начало координат.

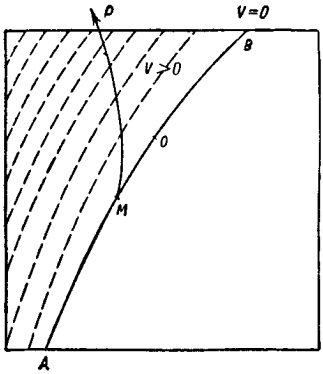

Рис. 4.

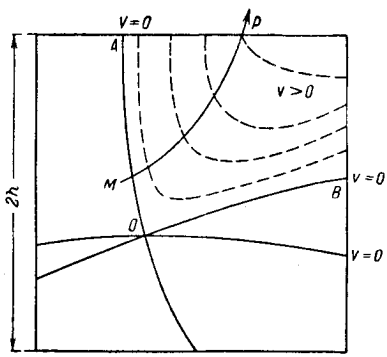

Рис. 5.

Допустим, что производная $\frac{dV}{dt}$ определенно-положительна. По условию теоремы в окрестности начала координат необходимо существует, по крайней мере, одна область, где $V > 0$. Эти области, очевидно, ограничены кривыми $V = 0$. Пусть на фиг. 4 и 5 сектор AOB представляет одну из этих областей и допустим, что пунктирные линии обозначают кривые $V = c > 0$, заполняющие эту область.

Рассмотрим интегральную кривую MP, выходящую из произвольной точки M границы области. Эта точка может быть взята сколь угодно близко от начала координат. Так как $\frac{dV}{dt} > 0$, то эта инте-

гральная кривая при возрастании t необходимо входит внутрь области $V > 0$ и пересекает кривые семейства $V = c$ в сторону, соответствующую возрастанию c, т. е. удаляясь от границы $V = 0$. При этом интегральная кривая все время будет удаляться от начала координат и в конце концов покинет область (13.1), если только она в некоторый момент времени не достигнет другой границы области $V > 0$. Это, однако, невозможно, так как если бы такое пересечение в какой-нибудь точке N (рис. 6) имело место, то в этой точке, очевидно, было бы $\frac{dV}{dt} \leqslant 0$, так как функция V, изменяясь от положительных значений к нулевому, необходимо уменьшалась бы.

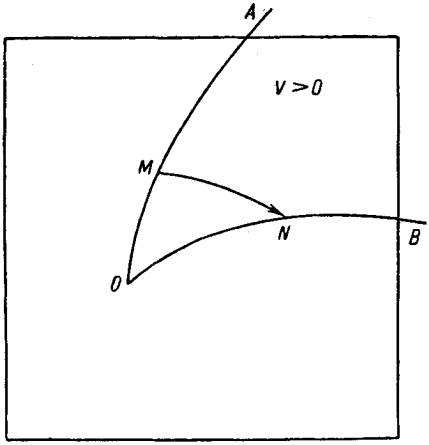

Рис. 6.

Таким образом, имеются интегральные кривые, выходящие из точек, сколь угодно близко расположенных к началу координат, и покидающие в некоторый момент времени область (13.1). Отсюда и вытекает неустойчивость движения.

Мы предположили, что функция V не является знакоопределенной. Ничто, однако, не изменится, если V и является знакоопределенной функцией. В этом случае областью $V > 0$ будет вся окрестность начала координат.

Приведенное геометрическое истолкование теоремы В сразу приводит к важному обобщению этой теоремы. Действительно, во всех предыдущих рассуждениях не играло никакой роли то обстоятельство, что производная $\frac{dV}{dt}$ является знакоопределенной. Все предыдущие рассуждения останутся в силе, если вместо знакоопределенности предположить, что $\frac{dV}{dt}$ принимает положительные значения во всех точках области $V > 0$. Мы приходим, таким образом, к следующей теореме, установленной Н. Г. Четаевым [1]).

Теорема Н. Г. Четаева. *Если для дифференциальных уравнений возмущенного движения можно найти такую функцию $V(x_1, \ldots, x_n)$, что* 1) *в сколь угодно малой окрестности*

[1]) Четаев Н. Г., Одна теорема о неустойчивости, ДАН, т. I, № 9. 1934. См. также монографию: Четаев Н. Г., Устойчивость движения (Гостехиздат, 1946), где дана более точная формулировка теоремы.

начала координат существует область, где $V > 0$, на границе которой $V = 0$, и 2) во всех точках области $V > 0$ производная $\frac{dV}{dt}$ принимает положительные значения, то невозмущенное движение неустойчиво.

Точное аналитическое доказательство теоремы Н. Г. Четаева мы дадим в главе V, где эта теорема будет изложена в более общей формулировке.

§ 17. Пример приложения теоремы Н. Г. Четаева. Теорема Н. Г. Четаева о неустойчивости равновесия.

Согласно теореме Лагранжа положение равновесия системы устойчиво, если в этом положении силовая функция имеет максимум. Наоборот, согласно теореме Ляпунова положение равновесия будет неустойчиво, если в этом положении силовая функция имеет минимум, и этот минимум определяется совокупностью членов наинизшего измерения в разложении силовой функции.

Исследуем теперь вопрос об устойчивости равновесия, когда силовая функция в положении равновесия не имеет ни максимума, ни минимума. Ограничимся при этом рассмотрением того частного случая, когда силовая функция U является формой какого-нибудь порядка m, так что

$$U = U_m(q_1, \ldots, q_n).$$

Дифференциальные уравнения возмущенного движения примем, как и в § 14, в форме (14.1). Рассмотрим функцию

$$V = -H \sum_{i=1}^{n} p_i q_i. \tag{17.1}$$

Так как по условию форма U_m при $q_1 = \ldots = q_n = 0$ не имеет максимума, то эта форма необходимо может принимать положительные значения. Отсюда следует, что в окрестности начала координат пространства $2n$ переменных q_i, p_i необходимо существует область, где

$$-H = -T + U_m > 0, \tag{17.2}$$

причем в этой области $U_m > 0$, так как $-T \leqslant 0$. Назовем областью C ту часть области (17.2), в которой выполняется условие

$$\sum_{i=1}^{n} p_i q_i > 0.$$

На основании (17.1) в области C выполняется неравенство $V > 0$,

а на границе ее, где, очевидно, либо $\sum p_i q_i = 0$, либо $H = 0$, функция V обращается в нуль.

Составим выражение производной $\frac{dV}{dt}$. Повторяя выкладки § 14 и принимая во внимание, что $\frac{dH}{dt} = 0$, найдем:

$$\frac{dV}{dt} = -H\left\{\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta + \sum_{\alpha,\beta=1}^{n}\left(A_{\alpha\beta} - \sum_{s=1}^{n} q_s \frac{\partial A_{\alpha\beta}}{\partial q_s}\right) p_\alpha p_\beta\right\} - mHU_m.$$

Выражение, стоящее в фигурных скобках, как было показано в § 14, может принимать только положительные или равные нулю значения. Величина U_m, как указывалось выше, может принимать в области C только положительные значения. Отсюда следует, что в области C выполняется условие $\frac{dV}{dt} > 0$. Таким образом, функция V удовлетворяет всем условиям теоремы Н. Г. Четаева, откуда вытекает неустойчивость исследуемого положения равновесия. Следовательно, имеет место следующая теорема, установленная Н. Г. Четаевым [1]).

Если в положении равновесия силовая функция не имеет максимума и эта функция является формой, то равновесие неустойчиво.

§ 18. Заключительные замечания.

В предыдущих параграфах мы изложили основные теоремы второго метода Ляпунова. Эти теоремы сводят задачу устойчивости к построению для уравнений возмущенного движения некоторых функций, обладающих специальными свойствами. Мы будем в дальнейшем эти функции, удовлетворяющие одной из основных теорем второго метода, называть *функциями Ляпунова*.

Мы рассмотрели ряд задач, которые удалось успешно разрешить при помощи второго метода. В каждой из этих задач было проведено конкретное построение функции Ляпунова. При этом мы видели, что это построение в каждом отдельном случае носило специфический характер, связанный с рассматриваемой конкретной задачей. Общих правил, позволяющих во всех случаях построить функцию Ляпунова, не существует. Если бы такие правила существовали, то этим самым задача устойчивости была бы полностью исчерпана. К сожалению, мы еще весьма далеки от этого.

---

[1]) Четаев Н. Г., К вопросу об обращении теоремы Лагранжа. Сборник научн. трудов Казанск. авиационного ин-та, № 2, 1934.

Тем не менее, Ляпуновым и его последователями разработаны некоторые общие приемы и идеи построения функций Ляпунова, которые с успехом применяются к конкретным задачам. Это позволило систематически рассмотреть некоторые основные задачи теории устойчивости при помощи второго метода. К такому систематическому рассмотрению указанных задач мы сейчас и приступаем. При этом мы начинаем с основной задачи об установлении необходимых и достаточных условий устойчивости по первому приближению. Этой задаче посвящена следующая глава. Как уже указывалось раньше, мы ограничиваемся сначала установившимися движениями.

ГЛАВА III.

КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ПЕРВОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ ДЛЯ УСТАНОВИВШИХСЯ ДВИЖЕНИЙ.

§ 19. Уравнения первого приближения.

В этой главе мы занимаемся установлением необходимых и достаточных условий устойчивости по первому приближению для того случая, когда дифференциальные уравнения возмущенного движения имеют вид

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + X_s(x_1, \ldots, x_n) \qquad (19.1)$$
$$(s = 1, 2, \ldots, n).$$

Здесь p_{sj} — постоянные, X_s — не зависящие от t функции переменных $x_1, \ldots, x_n$, разлагающиеся в области

$$|x| \leqslant H \qquad (19.2)$$

в ряды по степеням этих переменных, причем разложения начинаются членами не ниже второго порядка.

Рассмотрим уравнения первого приближения

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n \quad (s = 1, 2, \ldots, n). \qquad (19.3)$$

Теория интегрирования такого рода уравнений хорошо известна. Напомним основные положения этой теории [1]).

Рассмотрим уравнение n-й степени

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} p_{11} - \lambda & p_{12} & \ldots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} - \lambda & \ldots & p_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{n1} & p_{n2} & \ldots & p_{nn} - \lambda \end{vmatrix}. \qquad (19.4)$$

---

[1]) См., например, Степанов В. В., Курс обыкновенных дифференциальных уравнений, Гостехиздат, 1950.

Это уравнение называется *характеристическим уравнением*, а определитель $D(\lambda)$ — *характеристическим определителем*. Пусть λ_i — какой-нибудь корень этого уравнения. Этому корню отвечает частное решение системы (19.3) вида

$$x_s = A_s e^{\lambda_i t} \qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{19.5}$$

где A_s — постоянные, определяемые однородными алгебраическими уравнениями

$$p_{s1}A_1 + \ldots + (p_{ss} - \lambda_i) A_s + \ldots + p_{sn}A_n = 0, \tag{19.6}$$

имеющими в силу $D(\lambda_i) = 0$ нетривиальное решение.

Если уравнение (19.4) имеет только простые корни, то, полагая в (19.5) $i = 1, 2, \ldots, n$, мы получим n частных решений системы (19.3). Эти решения будут притом независимы.

Допустим теперь, что λ_i является кратным корнем и что кратность этого корня равна l. Этому корню по-прежнему соответствует решение (19.5), где A_s по-прежнему удовлетворяют уравнениям (19.6). Но в рассматриваемом случае корню λ_i будут отвечать еще и другие частные решения системы (19.3), отличные от (19.5). Эти решения имеют вид

$$x_s = f_s(t)\, e^{\lambda_i t} \qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{19.7}$$

где $f_s(t)$ — некоторые полиномы относительно t. Степень этих полиномов никогда не превосходит $l - 1$, но может быть меньше этой величины. Здесь приходится различать два случая в зависимости от того, будет ли ранг определителя $D(\lambda_i)$ равен $n - 1$ или меньше этой величины.

Допустим сначала, что ранг определителя $D(\lambda_i)$ равен $n - 1$, т. е. что хотя бы один из миноров $(n - 1)$-го порядка[1]) этого определителя отличен от нуля. В этом случае система (19.3) имеет хотя бы одно решение вида (19.7), в котором хотя бы один из полиномов $f_s(t)$ имеет степень $l - 1$. Заменяя в этом решении полиномы $f_s(t)$ их производными какого-нибудь порядка, мы снова получим решения системы (19.3). Таким путем получается l решений системы (19.3), имеющих вид

$$\left.\begin{aligned} x_s^{(1)} &= f_s(t)\, e^{\lambda_i t}, \\ x_s^{(2)} &= \frac{df_s}{dt}\, e^{\lambda_i t}, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ x_s^{(l)} &= \frac{d^{(l-1)} f_s}{dt^{l-1}}\, e^{\lambda_i t}. \end{aligned}\right\} \tag{19.8}$$

---

[1]) Минором $(n - k)$-го порядка мы называем определитель, получающийся из основного вычеркиванием k строк и колонок.

Все эти решения независимы. Последнее из них совпадает с (19.5). Мы будем говорить, что в рассматриваемом случае кратному корню λ_i отвечает одна группа решений.

Допустим теперь, что ранг определителя $D(\lambda_i)$ меньше $n-1$. Пусть, например, ранг этого определителя равен $n-2$, так что все миноры $(n-1)$-го порядка равны нулю, но хотя бы один из миноров $(n-2)$-го порядка отличен от нуля. В этом случае система (19.3) допускает два частных решения вида (19.7), в которых наивысшие степени полиномов $f_s(t)$ равны, соответственно, p и q, причем $p+q=l-2$. Эти решения таковы, что если, исходя из каждого из них, составлять новые решения путем замены полиномов $f_s(t)$ их производными какого-нибудь порядка, то все полученные таким образом решения будут независимы.

Пусть

$$\left.\begin{aligned} x_s &= f'_s e^{\lambda_i t}, \\ x_s &= f''_s e^{\lambda_i t} \end{aligned}\right\} \tag{19.9}$$

суть указанные частные решения. Степени полиномов $f'_s(t)$ не превосходят p, причем степень хотя бы одного из них достигает этого значения. Старшая степень полиномов f''_s равна q. При этом, как уже указывалось выше, $p+q=l-2$.

Заменяя в решениях (19.9) полиномы их последовательными производными, мы получим две группы решений уравнений (19.3), состоящих, соответственно, из $p+1$ и $q+1$ решений каждая и имеющих вид

$$\left.\begin{aligned} x_s^{(\alpha)} &= \frac{d^{\alpha-1} f'_s}{dt^{\alpha-1}} e^{\lambda_i t} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, p+1), \\ x_s^{(\beta)} &= \frac{d^{\beta-1} f''_s}{dt^{\beta-1}} e^{\lambda_i t} \qquad (\beta = 1, 2, \ldots, q+1). \end{aligned}\right\} \tag{19.10}$$

Таким образом, и в рассматриваемом случае корню λ_i соответствует $p+q+2=l$ частных решений. Среди этих решений имеются два (по одному в каждой группе) вида (19.5). Эти решения соответствуют двум независимым системам чисел A_s, удовлетворяющим однородным алгебраическим уравнениям (19.6). Последние действительно имеют два независимых решения, так как ранг определителя $D(\lambda_i)$ равен $n-2$.

В общем случае, когда ранг определителя $D(\lambda_i)$ равен $n-k$, корню кратности l по-прежнему соответствует l независимых решений, но эти решения распадаются на k групп, подобных (19.10).

Ранг определителя $D(\lambda_i)$ не может быть меньше $n-l$. В противном случае, как это легко показать, кратность корня λ_i будет больше l. Поэтому число групп решений, соответствующих рассматри-

ваемому корню, не может превосходить числа l, т. е. кратности корня. Если число групп равно l, то каждая группа будет состоять из одного решения и все решения будут вида (19.5).

Таким образом, во всех случаях число частных решений уравнений (19.3), соответствующих кратному корню, равно кратности этого корня. Действительное вычисление этих решений приводится к решению систем линейных алгебраических уравнений. Наиболее простой способ составления этих уравнений указан Н. Г. Четаевым[1]).

Рассматривая все корни уравнения (19.4), мы получим n независимых частных решений уравнений (19.3). Обозначая эти решения через $x_{s1}, x_{s2}, \ldots, x_{sn}$ (первый индекс — номер функции, второй индекс — номер решения), мы получим общее решение уравнений (19.3) в виде

$$x_s = C_1 x_{s1} + C_2 x_{s2} + \ldots + C_n x_{sn}, \tag{19.11}$$

где $C_1, \ldots, C_n$ — произвольные постоянные. Эти постоянные определяются из начальных условий и если начальные значения величин x_s в каком-нибудь решении малы, то и соответствующие значения постоянных C_j будут также малыми.

Если корень λ_i является комплексным, то решения вида (19.5) или (19.7) будут также комплексными, и так как нас интересуют только вещественные решения, то необходимо будет их преобразовать к вещественному виду. Для этого заметим, что так как коэффициенты p_{sj} являются вещественными, то если дифференциальным уравнениям (19.3) удовлетворяет какая-нибудь система комплексных функций, то им удовлетворяют также вещественные и мнимые части этих функций. Пусть $\lambda_i = \mu + i\nu$. Тогда в решении (19.5) или (19.7) величины A_s и $f_s(t)$ будут также комплексными. Положим $A_s = P_s + iQ_s$, $f_s = \varphi_s + i\psi_s$, где постоянные P_s, Q_s и функции φ_s и ψ_s будут вещественными. Выделяя в (19.5) и в (19.7) вещественные и мнимые части, мы получим, что рассматриваемому корню $\mu + i\nu$ отвечают два решения: либо вида

$$x_s = (P_s \cos \nu t - Q_s \sin \nu t)\, e^{\mu t}, \quad x_s = (P_s \sin \nu t + Q_s \cos \nu t)\, e^{\mu t} \tag{19.12}$$

либо вида

$$x_s = (\varphi_s \cos \nu t - \psi_s \sin \nu t)\, e^{\mu t}, \quad x_s = (\varphi_s \sin \nu t + \psi_s \cos \nu t)\, e^{\mu t}. \tag{19.13}$$

Эти же самые решения отвечают и корню $\mu - i\nu$.

Все вышесказанное позволяет легко решить задачу устойчивости для того случая, когда дифференциальные уравнения возмущенного движения имеют вид (19.3). Действительно, характер невозмущенного движения, его устойчивость или неустойчивость, полностью определяется корнями характеристического уравнения (19.4).

---

[1]) Четаев Н. Г., Устойчивость движения, Гостехиздат, 1946.

Допустим сначала, что все корни характеристического уравнения имеют отрицательные вещественные части. В этом случае все рассмотренные выше частные решения независимо от того, имеют ли они вид (19.5) или (19.7), (19.12) или (19.13), стремятся к нулю при неограниченном возрастании t. То же самое будет справедливо и по отношению к общему решению (19.11), каковы бы ни были постоянные C_j. Кроме того, решения $x_s(t)$, отвечающие начальным условиям $|x_s(t_0)| \leqslant 1$, будут равномерно ограничены при всех $t \geqslant t_0$. Следовательно, невозмущенное движение устойчиво и притом асимптотически при любых начальных возмущениях.

Допустим теперь, что среди корней характеристического уравнения имеется, по крайней мере, один с положительной вещественной частью. Этому корню отвечает частное решение, неограниченно возрастающее при $t \to \infty$. Умножая все функции этого решения на постоянную C, мы снова получим решение, для которого начальные значения функций x_s могут быть сделаны сколь угодно малыми, если C выбрать достаточно малым. Таким образом, в рассматриваемом случае система (19.3) имеет решение со сколь угодно малыми начальными значениями, неограниченно возрастающее при $t \to \infty$, и следовательно, невозмущенное движение неустойчиво.

Допустим теперь, что характеристическое уравнение, не имея корней с положительными вещественными частями, имеет корни с вещественными частями, равными нулю. Это могут быть нулевые корни или корни чисто мнимые. Каждому нулевому корню отвечают решения вида

$$x_s = A_s, \tag{19.14}$$

если этот корень является простым или даже если он является кратным, но число групп решений равно кратности корня. В противном случае система (19.3) будет иметь решения вида

$$x_s = f_s(t), \tag{19.15}$$

где $f_s(t)$ — полиномы. Для каждой пары чисто мнимых корней $\pm \nu \sqrt{-1}$ будут получаться решения вида

$$x_s = P_s \cos \nu t - Q_s \sin \nu t, \quad x_s = P_s \sin \nu t + Q_s \cos \nu t, \tag{19.16}$$

если эти корни простые или если они кратные, но число групп решений, им соответствующих, равно их кратности. Если корни $\pm \nu \sqrt{-1}$ являются кратными и число групп решений, им соответствующих, меньше их кратности, то система (19.3) будет иметь решения вида

$$x_s = \varphi_s \cos \nu t - \psi_s \sin \nu t, \quad x_s = \varphi_s \sin \nu t + \psi_s \cos \nu t, \tag{19.17}$$

где φ_s и ψ_s — полиномы.

Наличие решений вида (19.14) или (19.16) не нарушает устойчивости, так как все входящие в эти решения функции ограничены. Правда, при этом устойчивость не будет, очевидно, асимптотической. Наличие же решений вида (19.15) или (19.17) вызывает, очевидно, неустойчивость.

Таким образом, для случая, когда уравнения возмущенного движения имеют вид (19.3), мы приходим к следующим заключениям.

Для того чтобы невозмущенное движение было асимптотически устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения имели отрицательные вещественные части. Если среди корней этого уравнения имеется хотя бы один с положительной вещественной частью, то невозмущенное движение неустойчиво. Невозмущенное движение будет устойчивым, но не асимптотически, когда характеристическое уравнение, не имея корней с положительными вещественными частями, имеет корни с вещественными частями, равными нулю, если эти корни простые или если они кратные, но число групп решений, им соответствующих, равно их кратности. Если характеристическое уравнение имеет кратные корни с нулевыми вещественными частями и если число групп решений, соответствующих этим корням, меньше их кратности, то невозмущенное движение неустойчиво.

Таким образом, задача устойчивости для линейных уравнений с постоянными коэффициентами решается просто. Здесь нет необходимости пользоваться вторым методом. Тем не менее мы займемся построением функций Ляпунова для уравнений (19.3), так как эти функции будут играть фундаментальную роль в дальнейшем. Нам придется для этого предварительно доказать некоторые вспомогательные предложения.

§ 20. Некоторые вспомогательные предложения.

Пусть $V(x_1, \ldots, x_n)$ — какая-нибудь форма m-го порядка. Рассмотрим производную этой формы по времени, составленную в силу уравнений (19.3), т. е. форму того же порядка:

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s}(p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n),$$

и поставим задачу определить форму V таким образом, чтобы выполнялось соотношение

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s}(p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n) = \lambda V, \tag{20.1}$$

где λ — постоянная. Коэффициенты искомой формы должны удовлетворять некоторой системе уравнений, которые мы получим, приравнивая коэффициенты при подобных членах в правой и левой частях уравнения (20.1). Исследуем подробнее эти уравнения. Для этого допустим сначала, что $m=1$, т. е. положим

$$V = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n. \tag{20.2}$$

Подставляя (20.2) в (20.1) и приравнивая коэффициенты при $x_1, \ldots, x_n$, получим следующую систему уравнений, которым должны удовлетворять коэффициенты $a_1, \ldots, a_n$:

$$\begin{aligned} p_{11}a_1 + p_{21}a_2 + \ldots + p_{n1}a_n &= \lambda a_1, \\ p_{12}a_1 + p_{22}a_2 + \ldots + p_{n2}a_n &= \lambda a_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_{1n}a_1 + p_{2n}a_2 + \ldots + p_{nn}a_n &= \lambda a_n. \end{aligned}$$

Для того чтобы эта система линейных однородных уравнений имела решение, отличное от тривиального, необходимо и достаточно, чтобы определитель этой системы

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} p_{11}-\lambda & p_{21} & \ldots & p_{n1} \\ p_{12} & p_{22}-\lambda & \ldots & p_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{1n} & p_{2n} & \ldots & p_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

обращался в нуль. Таким образом, для того чтобы уравнение (20.1) могло быть удовлетворено линейной формой, необходимо и достаточно, чтобы λ было корнем характеристического уравнения. Каждому корню этого уравнения отвечает своя форма, и если характеристическое уравнение имеет n различных корней, то мы получим n различных линейных форм, удовлетворяющих уравнению (20.1).

Допустим теперь, что $m > 1$. Обозначим через N число членов формы m-го порядка[1]). Этих членов будет, очевидно, столько, сколько существует различных систем целых неотрицательных чисел $m_1, \ldots, m_n$, связанных соотношением

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_n = m. \tag{20.3}$$

Перенумеровав все члены формы V в каком-нибудь порядке, обозначим через $a_1, a_2, \ldots, a_N$ коэффициенты при этих членах. Тогда подставляя форму V в уравнение (20.1) и приравнивая коэффициенты при подобных членах в правой и левой частях этого урав-

---

[1]) Число N определяется формулой

$$N = \frac{n(n+1)\ldots(n+m-1)}{m!}.$$

нения, мы получим для определения a_j систему линейных однородных уравнений вида

$$A_{l1}a_1 + A_{l2}a_2 + \ldots + A_{lN}a_N = \lambda a_l \qquad (l = 1, 2, \ldots, N), \tag{20.4}$$

где A_{lj} — некоторые постоянные, являющиеся линейными комбинациями коэффициентов $p_{s\sigma}$. Так, например, при $m = 2$ и $n = 2$ система (20.4) будет иметь вид:

$$\begin{aligned} 2p_{11}a_1 + p_{21}a_2 &= \lambda a_1, \\ 2p_{12}a_1 + (p_{11} + p_{22})\,a_2 + 2p_{21}a_3 &= \lambda a_2, \\ p_{12}a_2 + 2p_{22}a_3 &= \lambda a_3, \end{aligned}$$

если

$$V = a_1x_1^2 + a_2x_1x_2 + a_3x_2^2.$$

Для того чтобы система (20.4) имела решение, отличное от тривиального $a_1 = a_2 = \ldots = a_N = 0$, необходимо и достаточно, чтобы λ удовлетворяло уравнению

$$D_m(\lambda) = \begin{vmatrix} A_{11} - \lambda & A_{12} & \ldots & A_{1N} \\ A_{21} & A_{22} - \lambda & \ldots & A_{2N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{N1} & A_{N2} & \ldots & A_{NN} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{20.5}$$

Таким образом, для того чтобы уравнению (20.1) можно было удовлетворить формой m-го порядка, необходимо и достаточно, чтобы величина λ была корнем алгебраического уравнения N-й степени (20.5).

Между корнями уравнения (20.5) и корнями характеристического уравнения существует простая зависимость, а именно, имеет место следующая изящная теорема, принадлежащая Ляпунову.

Теорема 1. *Все корни уравнения* (20.5) *определяются формулой*

$$\lambda = m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 + \ldots + m_n\lambda_n, \tag{20.6}$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — *корни характеристического уравнения, а* $m_1, m_2, \ldots, m_n$ — *любые целые неотрицательные числа, связанные соотношением*

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_n = m. \tag{20.7}$$

Доказательство. Как мы видели выше, каждому корню λ_j характеристического уравнения отвечает, по крайней мере, одна *линейная* форма, удовлетворяющая уравнению (20.1). Пусть V_j —

линейная форма, отвечающая корню λ_j [1]), так что

$$\frac{dV_j}{dt} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V_j}{\partial x_s} (p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n) = \lambda_j V_j \qquad (20.8)$$
$$(j = 1, 2, \ldots, n).$$

Рассмотрим форму m-го порядка

$$V = V_1^{m_1} V_2^{m_2} \ldots V_n^{m_n},$$

где $m_1, m_2, \ldots, m_n$ — любые целые неотрицательные числа, связанные соотношением (20.7). Составляя производную этой функции по времени в силу уравнений (19.3), будем на основании (20.8) иметь:

$$\frac{dV}{dt} = m_1 V_1^{m_1-1} V_2^{m_2} \ldots V_n^{m_n} \frac{dV_1}{dt} + m_2 V_1^{m_1} V_2^{m_2-1} \ldots V_n^{m_n} \frac{dV_2}{dt} + \ldots +$$
$$+ m_n V_1^{m_1} V_2^{m_2} \ldots V_n^{m_n-1} \frac{dV_n}{dt} = (m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 + \ldots + m_n\lambda_n) V.$$

Таким образом, форма m-го порядка V удовлетворяет уравнению (20.1) со значением λ, равным величине (20.6). Но для этого, как мы видели, необходимо, чтобы λ было корнем уравнения (20.5). Итак, доказано, что все величины (20.6) являются корнями уравнения (20.5).

Нам остается показать, что величины (20.6) исчерпывают все корни уравнения (20.5), т. е. что других корней это уравнение не имеет. Это обстоятельство совершенно очевидно для того случая, когда все числа (20.6) различны. Действительно, в этом случае формула (20.6) определяет столько различных корней уравнения (20.5), сколько существует различных систем целых неотрицательных чисел $m_1, \ldots, m_n$, связанных соотношением (20.7). Но таких систем существует как раз N, что равно степени уравнения (20.5).

Допустим теперь, что коэффициенты $p_{s\sigma}$ уравнений (19.3) таковы, что среди чисел (20.6) имеются одинаковые при разных системах значений $m_1, \ldots, m_n$, связанных соотношением (20.7). Покажем, что и в этом случае уравнение (20.5) не имеет корней, не содержащихся в выражении (20.6). Допустим противное, что $\lambda = \lambda^*$ является корнем уравнения (20.5), не содержащимся среди чисел (20.6). Обозначим через α модуль разности между корнем λ^* и наиболее близким к нему числом из системы (20.6). Изменим теперь коэффициенты $p_{s\sigma}$, заменив их величинами $p'_{s\sigma}$. Тогда уравнение (20.5) заменится новым уравнением $D'_m(\lambda) = 0$, и корни нового характеристического уравнения будут уже другими величинами, которые мы обозначим через $\lambda'_1, \ldots, \lambda'_n$. Если величины $p'_{s\sigma}$ достаточно мало отличаются от $p_{s\sigma}$, то корни

[1]) Между этими формами могут быть одинаковые, если не все числа λ_j различны.

$\lambda_1', \ldots, \lambda_n'$ будут сколь угодно мало отличаться от корней $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ и корни уравнения $D_m'(\lambda) = 0$ будут сколь угодно мало отличаться от корней уравнения (20.5). В частности, уравнение $D_m'(\lambda) = 0$ будет иметь корень, сколь угодно мало отличающийся от λ^*. Но $p_{s\sigma}'$ можно выбрать так, чтобы все числа

$$m_1\lambda_1' + m_2\lambda_2' + \ldots + m_n\lambda_n' \tag{20.9}$$

были различны при любых целых неотрицательных m_j, связанных соотношением (20.7). Тогда все корни уравнения $D_m'(\lambda) = 0$, и в частности тот, который сколь угодно мало отличается от λ^*, будут находиться среди чисел (20.9). Следовательно, λ^* сколь угодно мало отличается от одного из чисел (20.9), которое в свою очередь сколь угодно мало отличается от соответствующего ему числа из системы (20.6), что невозможно, так как разность между λ^* и ближайшим к нему числом (20.6) равна конечной величине α.

Итак, и в случае, когда среди чисел (20.6) имеются равные, все корни уравнения (20.5) находятся среди этих чисел. Только в рассматриваемом случае уравнение (20.5) будет иметь кратные корни. Таким образом, теорема полностью доказана.

Пусть теперь $U(x_1, \ldots, x_n)$ — заданная форма m-го порядка. Постараемся определить форму V того же порядка таким образом, чтобы выполнялось уравнение

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{s=1}^{n} (p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n)\frac{\partial V}{\partial x_s} = U. \tag{20.10}$$

Обозначим, как и прежде, через $a_1, \ldots, a_N$ коэффициенты формы V, а коэффициенты заданной формы U обозначим через $b_1, \ldots, b_N$. Приравнивая в уравнении (20.10) коэффициенты при подобных членах, мы получим для определения $a_1, \ldots, a_N$ уравнения, отличающиеся от (20.4) только правыми частями, которые теперь будут равны не величинам λa_i, а величинам b_i, так что эти уравнения имеют вид:

$$A_{i1}a_1 + A_{i2}a_2 + \ldots + A_{iN}a_N = b_N \tag{20.11}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, N).$$

Определитель этой системы совпадает, очевидно, с $D_m(0)$, и если он отличен от нуля, то уравнения (20.11) будут допускать одно и только одно решение для $a_1, \ldots, a_N$. В этом случае будет существовать одна и только одна форма V, удовлетворяющая уравнению (20.10). Но все корни полинома $D_m(\lambda)$ определяются выражением (20.6), и мы приходим, таким образом, к следующей теореме.

Теорема 2. *Если корни λ_j характеристического уравнения таковы, что выражение* (20.6) *не обращается в нуль ни при*

каких целых неотрицательных $m_1, \ldots, m_n$, *связанных соотношением* (20.7), *то какова бы ни была наперед заданная форма* m*-го порядка* $U(x_1, \ldots, x_n)$, *существует одна и только одна форма того же порядка* $V(x_1, \ldots, x_n)$, *удовлетворяющая уравнению* (20.10).

§ 21. Построение функций Ляпунова для систем линейных уравнений с постоянными коэффициентами.

Мы переходим теперь к построению функций Ляпунова для систем линейных уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n \quad (s = 1, 2, \ldots, n) \tag{21.1}$$

с постоянными коэффициентами.

Допустим сначала, что невозмущенное движение асимптотически устойчиво. Это, как мы видели, будет тогда и только тогда, когда все корни λ_j характеристического уравнения имеют отрицательные вещественные части. Будет ли при этом существовать функция, удовлетворяюшая всем условиям теоремы Б предыдущей главы? Положительный ответ на этот вопрос дается следующей теоремой.

Теорема 1. *Если все корни характеристического уравнения имеют отрицательные вещественные части, то какова бы ни была наперед заданная знакоопределенная форма* $U(x_1, \ldots, x_n)$, *существует одна и только одна форма* $V(x_1, \ldots, x_n)$ *того же порядка, удовлетворяющая уравнению*

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s}(p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n) = U, \tag{21.2}$$

и эта форма получится обязательно знакоопределенная, знака, противоположного с U.

Доказательство. Так как вещественные части всех корней λ_l отрицательны, то величина (20.6) не обращается в нуль ни при каких целых неотрицательных $m_1, \ldots, m_n$, не равных нулю одновременно. Поэтому на основании теоремы 2 предыдущего параграфа существует одна и только одна форма V, удовлетворяющая уравнению (21.2). Остается показать, что если форма U — знакоопределенная, то и форма V будет также знакоопределенной, знака, противоположного с U.

Допустим для определенности, что форма U определенно-отрицательна. Рассмотрим форму V. Возможны три случая: 1) форма V может принимать отрицательные значения, 2) форма V — постоянно-положительная и 3) форма V — определенно-положительная.

Если бы имел место первый случай, то функция V удовлетворяла бы всем условиям теоремы В и невозмущенное движение было бы неустойчиво, что противоречит условию.

Что касается второго случая, то он вообще невозможен, каковы бы ни были корни характеристического уравнения. В самом деле, будем рассматривать величины x_s как функции времени, удовлетворяющие уравнениям (21.1), и выберем их начальные значения x_s^0 таким образом, чтобы $V(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ равнялось нулю. Это возможно, так как форма V по условию — не знакоопределенная, а только знакопостоянная. Но так как производная $\frac{dV}{dt}$ отрицательна, то функция V должна уменьшаться и, следовательно, становиться отрицательной, что противоречит условию ее положительности.

Таким образом, остается только третий случай, что и доказывает теорему.

Рассмотренная в доказанной теореме функция V удовлетворяет всем условиям теоремы Б и является, следовательно, функцией Ляпунова для рассматриваемого случая[1]). Таким образом, для того чтобы построить функцию Ляпунова для системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами, когда все корни характеристического уравнения имеют отрицательные вещественные части, необходимо задаться какой-нибудь знакоопределенной формой произвольного порядка и искать другую форму того же порядка, производная которой равнялась бы заданной форме. Как мы видели в предыдущем параграфе, задача сведется к решению системы линейных алгебраических уравнений. Вычисления при этом будут тем более громоздкими, чем больше порядок формы. Поэтому если в какой-нибудь задаче имеется необходимость действительно вычислить коэффициенты формы V, то в качестве формы U следует взять какую-нибудь знакоопределенную квадратичную форму, например сумму квадратов величин x_s.

Допустим теперь, что среди корней характеристического уравнения имеется хотя бы один с положительной вещественной частью. В этом случае невозмущенное движение для уравнений (21.1) неустойчиво. Вопрос о существовании и построении функций Ляпунова, т. е. функций, удовлетворяющих теореме В или теореме Г, решается нижеследующими теоремами.

Теорема 2. *Если среди корней характеристического уравнения имеется хотя бы один с положительной вещественной частью и если эти корни таковы, что величина*

$$m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 + \ldots + m_n\lambda_n \tag{21.3}$$

не обращается в нуль ни при каких целых неотрицательных $m_1, \ldots, m_n$, *связанных соотношением*

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_n = m, \tag{21.4}$$

---

[1]) См. примечание в конце книги (стр. 520).

то, какова бы ни была наперед заданная знакоопределенная форма U порядка m, существует одна и только одна форма V того же порядка, удовлетворяющая уравнению (21.2), *и эта форма наверное не будет знакопостоянной (в частности, знакоопределенной), знака, противоположного с U.*

Доказательство. Пусть U — произвольная знакоопределенная форма m-го порядка. Допустим для определенности, что эта форма положительна. На основании теоремы 2 предыдущего параграфа существует одна и только одна форма V того же порядка, которая удовлетворяет уравнению (21.2). Нам остается показать, что эта форма не может быть ни определенно-отрицательной, ни постоянно-отрицательной. В самом деле, если бы форма V была определенно-отрицательной, то она удовлетворяла бы всем условиям теоремы Б и невозмущенное движение было бы асимптотически устойчиво, что противоречит условию. С другой стороны, форма V не может быть постоянно-отрицательной, каковы бы ни были корни характеристического уравнения. Чтобы в этом убедиться, достаточно, как и при доказательстве предыдущей теоремы, рассмотреть какое-нибудь решение уравнений (21.1) с начальными значениями, обращающими форму V в нуль. Для этого решения форма V, возрастая в силу положительности $\frac{dV}{dt}$, необходимо приняла бы положительные значения, что противоречит условию. Таким образом, теорема полностью доказана.

Форма V, фигурирующая в доказанной теореме, представляет собой функцию Ляпунова, удовлетворяющую всем условиям теоремы В. Однако доказанная теорема дает возможность построить эту функцию лишь при некотором добавочном условии о необращении в нуль выражения (21.3). Это условие может не выполняться, как, например, в случае, когда характеристическое уравнение имеет нулевой корень. В этом случае, каково бы ни было число m, всегда существует комбинация целых неотрицательных чисел $m_1, \ldots, m_n$, связанных соотношением (21.4), при которой выражение (21.3) обращается в нуль. Действительно, если, например, $\lambda_1 = 0$, то достаточно положить

$$m_1 = m, \quad m_2 = \ldots = m_n = 0.$$

Легко видеть, что в рассматриваемом случае вообще не существует функции Ляпунова, удовлетворяющей теореме В. В самом деле, если характеристическое уравнение имеет нулевой корень, то определитель системы однородных линейных уравнений

$$p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + \ldots + p_{sn}x_n = 0$$

обращается в нуль и эта система имеет решение, отличное от тривиального $x_1 = \ldots = x_n = 0$. Но для этого решения выражение

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{s=1}^{n} (p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n) \frac{\partial V}{\partial x_s}$$

обращается в нуль, какова бы ни была функция V, будь то форма или более сложная функция, и следовательно, это выражение не является знакоопределенным. Следовательно, в рассматриваемом случае для уравнений (21.1) не может существовать функции со знакоопределенной производной, что является основным условием, фигурирующим в теореме В [1]).

Таким образом, для системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами, когда характеристическое уравнение имеет корень с положительной вещественной частью, не всегда существует функция Ляпунова, удовлетворяющая теореме В. Однако в этом случае всегда существует функция Ляпунова, удовлетворяющая теореме Г. Существование этой функции и ее вид устанавливаются следующей теоремой.

Теорема 3. *Если среди корней характеристического уравнения системы* (21.1) *существует хотя бы один с положительной вещественной частью, то какова бы ни была наперед заданная знакоопределенная форма U произвольного порядка m, всегда найдется такая форма V того же порядка и такое положительное число α, что будет выполняться соотношение*

$$\frac{dV}{dt} = \alpha V + U \tag{21.5}$$

и при этом форма V наверно не будет знакопостоянной, знака, противоположного с U.

Доказательство. Рассмотрим уравнение

$$D'(\rho) = \begin{vmatrix} p_{11} - \frac{\alpha}{m} - \rho & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} - \frac{\alpha}{m} - \rho & \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} - \frac{\alpha}{m} - \rho \end{vmatrix} = 0, \tag{21.6}$$

где α — положительное число. Корни ρ_j этого уравнения связаны с корнями λ_j характеристического уравнения соотношениями

$$\rho_j = \lambda_j - \frac{\alpha}{m}.$$

Поэтому величину α можно выбрать настолько малой, чтобы и уравнение (21.6) имело, так же как и характеристическое уравнение, хотя бы один корень с положительной вещественной частью. При этом, задавшись каким-нибудь m, можно числом α распорядиться, так, чтобы величина

$$m_1\rho_1 + m_2\rho_2 + \dots + m_n\rho_n$$

---

[1]) См. примечание в конце книги (стр. 520).

не обращалась в нуль ни при каких целых неотрицательных $m_1, \ldots, m_n$, равных в сумме m.

Но тогда на основании предыдущей теоремы существует одна и только одна форма m-го порядка V, удовлетворяющая уравнению

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s}\left[p_{s1}x_1 + \ldots + \left(p_{ss} - \frac{\alpha}{m}\right)x_s + \ldots + p_{sn}x_n\right] = U, \qquad (21.7)$$

где U — любая наперед заданная знакоопределенная форма m-го порядка. При этом форма V наверно не будет знакопостоянной, знака, противоположного с U.

Из (21.7), учитывая, что на основании теоремы Эйлера об однородных функциях

$$\sum_{s=1}^{m} x_s \frac{\partial V}{\partial x_s} = mV,$$

получаем:

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s}(p_{s1}x + \ldots + p_{ss}x_s + \ldots + p_{sn}x_n) = \alpha V + U,$$

что и доказывает теорему.

Доказанные теоремы дают метод построения функций Ляпунова для систем линейных уравнений с постоянными коэффициентами, когда характеристическое уравнение либо имеет все корни с отрицательными вещественными частями, либо хотя бы один корень с положительной вещественной частью. Построение функций Ляпунова для случая, когда характеристическое уравнение, не имея корней с положительными вещественными частями, имеет корни с вещественными частями, равными нулю, мы здесь не рассматриваем, так как нам это не потребуется для дальнейшего.

Все доказанные в этом параграфе теоремы установлены А. М. Ляпуновым.

§ 22. Теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению.

Допустим теперь, что дифференциальные уравнения возмущенного движения имеют вид

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + X_s(x_1, \ldots, x_n) \qquad (22.1)$$
$$(s = 1, 2, \ldots, n),$$

где $X_s(x_1, \ldots, x_n)$ в области

$$|x_s| \leqslant H$$

разлагаются в ряды по степеням $x_1, \ldots, x_n$, начинающиеся членами не ниже второго порядка.

Теоремы, установленные в предыдущем параграфе, дают возможность чрезвычайно просто разрешить основную задачу об установлении необходимых и достаточных условий, при которых вопрос об устойчивости для системы (22.1) разрешается рассмотрением лишь уравнений первого приближения:

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n \quad (s = 1, 2, \ldots, n) \tag{22.2}$$

независимо от того или иного частного выбора функций X_s.

Имеют место следующие основные теоремы, установленные А. М. Ляпуновым.

Теорема 1. *Если все корни характеристического уравнения системы первого приближения имеют отрицательные вещественные части, то невозмущенное движение устойчиво и притом асимптотически, каковы бы ни были члены высших порядков в дифференциальных уравнениях возмущенного движения.*

Доказательство. Рассмотрим квадратичную форму $V(x_1, \ldots, x_n)$, определяемую уравнением

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s}(p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n) = -(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2).$$

На основании теоремы 2 предыдущего параграфа такая форма V непременно существует и будет обязательно знакоопределенной положительной. Составим производную этой формы по времени в силу полной системы дифференциальных уравнений возмущенного движения (22.1). Будем иметь:

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s}(p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + X_s) =$$

$$= -(x_1^2 + \ldots + x_n^2) + \sum_{s=1}^{n} X_s \frac{\partial V}{\partial x_s}.$$

Так как разложение функции $\sum X_s \frac{\partial V}{\partial x_s}$ начинается членами не ниже третьего порядка, то функция $\frac{dV}{dt}$ на основании леммы 4 § 7 будет знакоопределенной отрицательной, каковы бы ни были функции X_s. Следовательно, функция V удовлетворяет всем условиям теоремы Б и невозмущенное движение асимптотически устойчиво. Теорема, таким образом, доказана.

Теорема 2. *Если среди корней характеристического уравнения системы первого приближения имеется хотя бы один*

с положительной вещественной частью, то невозмущенное движение неустойчиво при любом выборе членов порядка выше первого в дифференциальных уравнениях возмущенного движения.

Доказательство. Рассмотрим квадратичную форму

$$V(x_1, \ldots, x_n),$$

определяемую уравнением

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s}(p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n) = \alpha V + (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2),$$

где α — некоторое положительное число. На основании теоремы 3 предыдущего параграфа такая форма V обязательно существует и эта форма может принимать положительные значения. Составляя производную этой формы по времени в силу полной системы дифференциальных уравнений (22.1), получим:

$$\frac{dV}{dt} = \alpha V + W(x_1, \ldots, x_n),$$

где

$$W(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 + \sum_{s=1}^{n} X_s \frac{\partial V}{\partial x_s}$$

на основании леммы 4 § 7 является функцией определенно-положительной при любом выборе функций X_s.

Форма V является, таким образом, функцией Ляпунова, удовлетворяющей условиям теоремы Г. Следовательно, невозмущенное движение при любом выборе функций X_s неустойчиво, и теорема доказана.

Теоремы 1 и 2 обратимы. Невозмущенное движение будет устойчиво при любом выборе функций X_s только тогда, когда характеристическое уравнение первого приближения имеет корни только с отрицательными вещественными частями и при этом устойчивость будет асимптотической. В то же время неустойчивость при любом выборе функций X_s будет иметь место только тогда, когда среди корней характеристического уравнения имеется хотя бы один с положительной вещественной частью, а именно: имеет место следующая теорема Ляпунова, которую мы приводим без доказательства.

Теорема 3. *Если характеристическое уравнение системы первого приближения не имеет корней с положительными вещественными частями, но имеет корни с вещественными частями, равными нулю, то члены высших порядков в уравнениях возмущенного движения можно выбрать так, чтобы получить по желанию как устойчивость, так и неустойчивость.*

Как мы видели в § 19, если характеристическое уравнение имеет часть корней с нулевыми, а остальные с отрицательными вещественными частями, то невозмущенное движение в первом приближении может быть как устойчивым, так и неустойчивым. Теорема 3 показывает, что какой бы из этих случаев ни имел место, вопрос об устойчивости решается исключительно членами выше первого порядка в уравнениях возмущенного движения, так что движение, устойчивое в первом приближении, может оказаться в действительности неустойчивым, и наоборот.

Таким образом, все случаи, которые могут представиться при исследовании задачи устойчивости, когда уравнения возмущенного движения имеют вид (22.1), можно разбить на две категории: на случаи *некритические*, когда задача решается уравнениями первого приближения, и случаи *критические*, когда требуется рассмотрение членов более высоких порядков. Критические случаи имеют место тогда и только тогда, когда характеристическое уравнение не имеет корней с положительными вещественными частями и имеет корни с вещественными частями, равными нулю. С точки зрения математической, критические случаи можно рассматривать как исключение. Но с точки зрения механической эти случаи являются особенно важными, как в этом легко убедиться из рассматриваемых ниже примеров.

§ 23. Примеры приложения предыдущих теорем.

Рассмотрим несколько примеров приложения теорем предыдущего параграфа.

Пример 1. Рассмотрим твердое тело, вращающееся по инерции вокруг неподвижной точки. Если такому телу сообщить в начальный момент времени вращение вокруг одной из главных осей инерции в закрепленной точке, то тело и в дальнейшем будет вращаться вокруг этой оси и притом равномерно. Исследуем устойчивость этих вращений.

Примем в качестве осей координат главные оси инерции в закрепленной точке, и пусть исследуемое невозмущенное движение соответствует вращению вокруг оси x. Дифференциальные уравнения возмущенного движения составлены нами в § 3 (уравнения (3.9)) и имеют вид

$$\left.\begin{aligned} A\frac{dx}{dt}+(C-B)\,yz &= 0,\\ B\frac{dy}{dt}+(A-C)(x+\omega)\,z &= 0,\\ C\frac{dz}{dt}+(B-A)(x+\omega)\,y &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (23.1)$$

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -\rho & 0 & 0 \\ 0 & -\rho & \frac{(C-A)\omega}{B} \\ 0 & \frac{(A-B)\omega}{C} & -\rho \end{vmatrix} = 0$$

системы первого приближения имеет один корень, равный нулю, и два корня, определяемых формулой

$$\rho_{1,2} = \pm\omega\sqrt{\frac{(C-A)(A-B)}{CB}}. \tag{23.2}$$

Если $C < A < B$ или $C > A > B$, т. е. если вращение происходит вокруг средней оси инерции, то оба корня (23.2) будут вещественны и один из них будет обязательно положительным. Следовательно, невозмущенное движение будет неустойчиво.

Если вращение происходит вокруг малой или большой оси инерции, так что выполняются неравенства $A < B$, $A < C$ или $A > B$, $A > C$, то оба корня (23.2) будут чисто мнимыми. Так как при этом третий корень равен нулю, то мы имеем дело с критическим случаем и первое приближение задачи не решает.

Общее исследование случая трех критических корней очень сложно. Но в рассматриваемом примере задача решается просто.

Уравнения (23.1) имеют, как легко видеть, первый интеграл

$$B(B-A)y^2 + C(C-A)z^2 = \text{const.},$$

знакоопределенный относительно y и z. Отсюда сразу вытекает устойчивость по отношению к переменным y и z. Но тогда из первого интеграла

$$A(x+\omega)^2 + By^2 + Cz^2 = \text{const.},$$

которым система (23.1) также обладает[1]) и который является интегралом энергии, немедленно вытекает устойчивость и по отношению к переменной x.

Таким образом, вращение вокруг средней оси инерции неустойчиво, а вращения вокруг большой или малой оси инерции устойчивы.

Пример 2. Рассмотрим вопрос об устойчивости вращательных движений снаряда при настильной траектории стрельбы, которым мы уже занимались в § 12. Дифференциальные уравнения возмущенного движения имеют вид (12.2). Отбрасывая члены высших порядков,

---

[1]) Этот интеграл не может быть принят за функцию Ляпунова, так как его левая часть не обращается в нуль при $x = y = z = 0$.

получим следующую систему уравнений первого приближения:

$$\left.\begin{aligned} A\ddot{\beta} - Cn\dot{\alpha} - eR\beta = 0, \\ A\ddot{\alpha} + Cn\dot{\beta} - eR\alpha = 0. \end{aligned}\right\} \tag{23.3}$$

Для того чтобы составить характеристическое уравнение без приведения системы (23.3) к нормальному виду, положим в ней

$$\alpha = Me^{\lambda t}, \quad \beta = Ne^{\lambda t}.$$

Для нахождения M и N получим систему линейных однородных уравнений:

$$-Cn\lambda M + (A\lambda^2 - eR)N = 0,$$
$$(A\lambda^2 - eR)M + Cn\lambda N = 0,$$

и следовательно, искомое характеристическое уравнение имеет вид

$$C^2n^2\lambda^2 + (A\lambda^2 - eR)^2 = 0.$$

Все четыре корня этого уравнения даются формулой

$$\lambda_{1,\,2,\,3,\,4} = \frac{\pm Cni \pm \sqrt{4AeR - C^2n^2}}{2A}.$$

Следовательно, если выполняется неравенство

$$4AeR - C^2n^2 > 0,$$

то два корня имеют положительную вещественную часть и невозмущенное движение неустойчиво. При выполнении неравенства

$$4AeR - C^2n^2 < 0 \tag{23.4}$$

все четыре корня характеристического уравнения будут чисто мнимые. Мы будем, следовательно, иметь дело с критическим случаем и для решения задачи необходимо будет рассмотреть и нелинейные члены в уравнениях (12.2).

Решение задачи устойчивости при четырех критических корнях очень сложно. Однако в рассматриваемом случае, как мы видели в § 12, задачу удалось полностью разрешить непосредственным построением функции Ляпунова. При этом оказалось, что при выполнении неравенства (23.4) невозмущенное движение устойчиво.

§ 24. Неустойчивость равновесия. Случай канонических систем.

В качестве следующего примера вернемся снова к вопросу об устойчивости равновесия, когда силовая функция в положении равновесия не обращается в максимум. В предыдущей главе была доказана неустойчивость равновесия для двух случаев отсутствия максимума:

для случая, когда силовая функция в положении равновесия имеет минимум, который определяется членами наинизшего порядка в разложении силовой функции, и для случая, когда силовая функция не имеет ни максимума, ни минимума и является формой.

Мы рассмотрим сейчас случай, когда силовая функция в положении равновесия не имеет ни максимума, ни минимума, и это определяется членами наинизшего порядка в разложении силовой функции, которое мы будем предполагать начинающимся членами второго порядка. Этот случай изучен Ляпуновым, доказавшим при этом неустойчивость равновесия.

Пусть $q_1 = q_2 = \ldots = q_n = 0$ — значения обобщенных координат в положении равновесия,

$$2T = \sum_{\alpha, \beta=1}^{n} (a_{\alpha\beta} + A_{\alpha\beta}) \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta, \quad 2U = \sum_{\alpha, \beta=1}^{n} (c_{\alpha\beta} + C_{\alpha\beta}) q_\alpha q_\beta$$

— кинетическая энергия и силовая функция, причем функции $A_{\alpha\beta}(q_1, \ldots, q_n)$ и $C_{\alpha\beta}(q_1, \ldots, q_n)$ обращаются в нуль при $q_1 = \ldots = q_n = 0$, а $a_{\alpha\beta}$ и $c_{\alpha\beta}$ — постоянные. По предположению квадратичная форма

$$2U_2 = \sum_{\alpha, \beta=1}^{n} c_{\alpha\beta} q_\alpha q_\beta$$

не обращается тождественно в нуль.

Дифференциальные уравнения возмущенного движения возьмем в форме Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Отбрасывая члены высших порядков, получим обычную систему уравнений малых колебаний:

$$a_{i1}\ddot{q}_1 + a_{i2}\ddot{q}_2 + \ldots + a_{in}\ddot{q}_n = c_{i1}q_1 + \ldots + c_{in}q_n$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

Характеристическое уравнение этой системы первого приближения имеет вид

$$\begin{vmatrix} a_{11}\lambda^2 - c_{11} & a_{12}\lambda^2 - c_{12} & \ldots & a_{1n}\lambda^2 - c_{1n} \\ a_{21}\lambda^2 - c_{21} & a_{22}\lambda^2 - c_{22} & \ldots & a_{2n}\lambda^2 - c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}\lambda^2 - c_{n1} & a_{n2}\lambda^2 - c_{n2} & \ldots & a_{nn}\lambda^2 - c_{nn} \end{vmatrix} = 0. \qquad (24.1)$$

По предположению силовая функция в положении равновесия $q_1 = \ldots = q_n = 0$ не имеет ни максимума, ни минимума. Это значит, что функция $U(q_1, \ldots, q_n)$ является знакопеременной. С другой стороны, мы предположили, что эта знакопеременность определяется

членами наинизшего порядка в разложении силовой функции, что означает, что знакопеременной является уже форма U_2. В теории малых колебаний доказывается, что уравнение (24.1), рассматриваемое как уравнение относительно λ^2, имеет только вещественные корни. В этой же теории доказывается, что если форма U_2 является знакопеременной, то среди этих корней имеются обязательно положительные. Но тогда уравнение (24.1), рассматриваемое как уравнение $2n$-го порядка относительно λ, также имеет положительные корни, что и доказывает неустойчивость равновесия.

Для того чтобы равновесие было устойчиво, необходимо, чтобы все корни λ_j^2 уравнения (24.1) были отрицательны. Это будет тогда и только тогда, когда форма U_2 является определенно-отрицательной. Тогда все корни λ_j будут чисто мнимыми. Мы будем, следовательно, иметь дело с критическим случаем. Но равновесие при этом будет устойчивым на основании теоремы Лагранжа.

Чтобы рассмотреть пример более общего характера, допустим, что предложена система $2n$-го порядка, которая имеет каноническую форму

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial y_i},\quad \frac{dy_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x_i}\quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{24.2}$$

где H — произвольная квадратичная форма $2n$ переменных $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$.

Уравнения (24.2) можно переписать в виде

$$\frac{dx_i}{dt}=C_{i1}x_1+C_{i2}x_2+\ \ldots\ +C_{in}x_n+B_{i1}y_1+B_{i2}y_2+\ldots+B_{in}y_n,$$

$$\frac{dy_i}{dt}=-A_{i1}x_1-A_{i2}x_2-\ldots-A_{in}x_n-C_{1i}y_1-C_{2i}y_2-\ldots-C_{ni}y_n,$$

где

$$A_{ij}=\frac{\partial^2 H}{\partial x_i\,\partial x_j},\quad B_{ij}=\frac{\partial^2 H}{\partial y_i\,\partial y_j},\quad C_{ij}=\frac{\partial^2 H}{\partial y_i\,\partial x_j}.$$

Следовательно, характеристическое уравнение имеет вид

$$D(\lambda)=$$

$$=\begin{vmatrix} C_{11}-\lambda & C_{12} & \ldots & C_{1n} & B_{11} & B_{12} & \ldots & B_{1n} \\ C_{21} & C_{22}-\lambda & \ldots & C_{2n} & B_{21} & B_{22} & \ldots & B_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ C_{n1} & C_{n2} & \ldots & C_{nn}-\lambda & B_{n1} & B_{n2} & \ldots & B_{nn} \\ A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1n} & C_{11}+\lambda & C_{21} & \ldots & C_{n1} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2n} & C_{12} & C_{22}+\lambda & \ldots & C_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n1} & A_{n2} & \ldots & A_{nn} & C_{1n} & C_{2n} & \ldots & C_{nn}+\lambda \end{vmatrix}=0. \tag{24.3}$$

Определитель $D(\lambda)$ можно преобразовать следующим образом:

$$D(\lambda)=$$

$$=\begin{vmatrix} C_{11}-\lambda & C_{21} & \dots C_{n1} & A_{11} & A_{21} & \dots A_{n1} \\ C_{12} & C_{22}-\lambda & \dots C_{n2} & A_{12} & A_{22} & \dots A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{1n} & C_{2n} & \dots C_{nn}-\lambda & A_{1n} & A_{2n} & \dots A_{nn} \\ B_{11} & B_{21} & \dots B_{n1} & C_{11}+\lambda & C_{12} & \dots C_{1n} \\ B_{12} & B_{22} & \dots B_{n2} & C_{21} & C_{22}+\lambda & \dots C_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{1n} & B_{2n} & \dots B_{nn} & C_{n1} & C_{n2} & \dots C_{nn}+\lambda \end{vmatrix}=$$

$$=(-1)^n\begin{vmatrix} B_{11} & B_{21} & \dots B_{n1} & C_{11}+\lambda & C_{12} & \dots C_{1n} \\ B_{12} & B_{22} & \dots B_{n2} & C_{21} & C_{22}+\lambda & \dots C_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{1n} & B_{2n} & \dots B_{nn} & C_{n1} & C_{n2} & \dots C_{nn}+\lambda \\ C_{11}-\lambda & C_{21} & \dots C_{n1} & A_{11} & A_{21} & \dots A_{n1} \\ C_{12} & C_{22}-\lambda & \dots C_{n2} & A_{12} & A_{22} & \dots A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{1n} & C_{2n} & \dots C_{nn}-\lambda & A_{1n} & A_{2n} & \dots A_{nn} \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} C_{11}+\lambda & C_{12} & \dots C_{1n} & B_{11} & B_{21} & \dots B_{n1} \\ C_{21} & C_{22}+\lambda & \dots C_{2n} & B_{12} & B_{22} & \dots B_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots C_{nn}+\lambda & B_{1n} & B_{2n} & \dots B_{nn} \\ A_{11} & A_{21} & \dots A_{n1} & C_{11}-\lambda & C_{21} & \dots C_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots A_{n2} & C_{12} & C_{22}-\lambda & \dots C_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots A_{nn} & C_{1n} & C_{2n} & \dots C_{nn}-\lambda \end{vmatrix} \qquad (24.4)$$

(сначала делаем строки столбцами, затем меняем местами первые и последние n строк, после чего меняем местами первые и последние n колонок). Но так как

$$A_{ij}=A_{ji},\quad B_{ij}=B_{ji},$$

то из (24.4) следует, что уравнение (24.3) не меняется при замене λ на $-\lambda$. Следовательно, уравнение (24.3) содержит только четные степени λ. Поэтому, если оно имеет корни с вещественными частями отрицательными, то оно будет иметь корни и с положительными вещественными частями и невозмущенное движение будет неустойчиво. Следовательно, для того чтобы движение было устойчиво, необхо-

димо, чтобы все корни уравнения (24.3) были чисто мнимыми. Будет ли при этом действительно иметь место устойчивость, зависит от членов более высоких порядков в дифференциальных уравнениях возмущенного движения.

Если форма H является знакоопределенной, то, учитывая, что $H = \text{const}$. является интегралом уравнений (24.2), мы должны будем заключить на основании теоремы А, что невозмущенное движение в первом приближении устойчиво. Следовательно, в этом случае все корни уравнения (24.3) будет обязательно чисто мнимыми. Но уравнение (24.3) может иметь только чисто мнимые корни и тогда, когда H не является знакоопределенной.

§ 25. Теорема Гурвица.

Из предыдущего ясно, что для задачи устойчивости имеет большое значение вопрос о знаках вещественных частей корней алгебраических уравнений. В частности, важно знать необходимые и достаточные условия, при которых все корни уравнения имеют отрицательные вещественные части. Эти необходимые и достаточные условия даются теоремой Гурвица, которую мы приводим здесь без доказательства[1]).

Теорема Гурвица. *Пусть предложено уравнение n-й степени*

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0. \qquad (25.1)$$

Составим определители

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \ldots 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \ldots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & a_{2n-4} & \ldots a_n \end{vmatrix} \equiv a_n\Delta_{n-1},$$

где $a_i = 0$, *если* $i > n$.

---

[1]) Доказательство теоремы Гурвица можно найти в книге: Курош А. Г., Курс высшей алгебры, Гостехиздат, 1946, а также в книге: Четаев Н. Г., Устойчивость движения, Гостехиздат, 1946. В технических приложениях теории устойчивости движения для проверки отрицательности вещественных частей корней характеристического уравнения часто используется не теорема Гурвица, а другие критерии. В частности, в теории автоматического регулирования, радиотехнике и электронике обычно применяются так называемые частотные критерии, базирующиеся на понятии передаточной функции системы (см., например, Попов Е. П., Динамика систем автоматического регулирования, Гостехиздат, 1954).

Для того чтобы все корни уравнения (25.1) *имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно, чтобы удовлетворялись неравенства*

$$\Delta_1 > 0,\ \Delta_2 > 0,\ \ldots,\ \Delta_{n-1} > 0,\ a_n > 0.$$

Для уравнения третьей степени

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$$

имеем условия:

$$a_1 > 0,\ \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = a_1a_2 - a_3a_0 > 0,\ a_3 > 0. \tag{25.2}$$

Для уравнения четвертой степени

$$a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0 \tag{25.3}$$

имеем:

$$a_1 > 0,\ \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0,\ \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} > 0,\ a_4 > 0$$

или

$$a_1 > 0,\ a_1a_2 - a_3a_0 > 0,\ a_3(a_1a_2 - a_0a_3) - a_4a_1^2 > 0,\ a_4 > 0.$$

Из третьего условия на основании четвертого вытекает $a_3(a_1a_2 - a_0a_3) > a_4a_1^2 > 0$, следовательно, второе условие может быть заменено неравенством $a_3 > 0$. Таким образом, условия отрицательности вещественных частей корней уравнения (25.3) имеют вид

$$a_1 > 0,\ a_3 > 0,\ a_3(a_1a_2 - a_0a_3) - a_4a_1^2 > 0,\ a_4 > 0.$$

§ 26. Обобщение теорем Ляпунова об устойчивости по первому приближению. Приложение к регулируемым системам.

Теоремы Ляпунова об устойчивости и неустойчивости по первому приближению обобщались различными авторами. Целью этих обобщений являлось ослабление условий, налагаемых на функции X_s, которые Ляпунов, как мы видели, предполагал аналитическими с разложениями, начинающимися членами не ниже второго порядка. При этом был предложен ряд довольно сложных доказательств. Так, например, Коттон[1]) заменил систему дифференциальных уравнений (22.1) эквивалентной системой интегральных уравнений, которую он затем интегрировал методом последовательных приближений, приме-

[1]) Cotton E., Sur les solutions asymptotiques des équations différentielles, Annales scientifiques de l'École normale supérieure, т. 28, 1911.

нив при этом громоздкий метод доказательства сходимости этих приближений. Аналогичным приемом пользовался Перрон[1]).

Однако метод доказательства, предложенный самим Ляпуновым, изложенный нами в § 22, показывает без всяких дополнительных исследований, что указанные теоремы сохраняют силу при значительно более общих предположениях относительно X_s. А именно, при доказательстве теоремы 1 § 22 условие, что функции X_s разлагаются в ряды, начинающиеся членами не ниже второго порядка, было использовано только для того, чтобы можно было утверждать, что функция

$$-(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)+\sum_{s=1}^{n} X_s \frac{\partial V}{\partial x_s} \tag{26.1}$$

является определенно-отрицательной. На основании леммы 2 § 7 для этого достаточно, чтобы в некоторой окрестности начала координат выполнялось неравенство

$$\left|\sum_{s=1}^{n} X_s \frac{\partial V}{\partial x_s}\right| < A\{|x_1|+\ldots+|x_n|\}^2, \tag{26.2}$$

где A — достаточно малая постоянная, а для этого, учитывая линейность функций $\frac{\partial V}{\partial x_s}$, достаточно, чтобы функции X_s удовлетворяли неравенствам

$$|X_s(x_1, \ldots, x_n)| < \alpha\{|x_1|+\ldots+|x_n|\}, \tag{26.3}$$

где α — также достаточно малая постоянная, зависящая исключительно от коэффициентов формы V.

Таким образом, теорема 1 § 22 остается справедливой, если от функций X_s потребовать только, чтобы они в некоторой окрестности начала координат удовлетворяли неравенствам (26.3). Необходимо также потребовать, чтобы выполнялись общие предположения относительно дифференциальных уравнений возмущенного движения, сделанные нами в § 6.

Все сказанное относительно теоремы 1 справедливо также и для теоремы 2.

Указанные обобщения теорем Ляпунова являются наиболее общими из известных в литературе. И мы только что видели, как просто они доказываются при помощи функций Ляпунова. Однако ценность указанных доказательств заключается не только в их простоте. Главная ценность этих доказательств заключается в том, что они дают

---

[1]) Perron O., Über Stabilität und asymptotisches Verhalten der Integrale von Differentialgleichungssystemen, Math. Zeit., т. 29, вып. 1, 1928.

возможность практически вычислить область устойчивости, когда последняя имеет место.

Действительно, область асимптотической устойчивости в случае теоремы 1 определяется (см. примечание в конце § 10) областью знакоопределенности функции (26.1). Что же касается последней, то она совпадает с областью, где выполняются условия (26.3). Это может быть все пространство, если, например, функции X_s являются линейными с достаточно малыми коэффициентами. Если функции X_s являются аналитическими, начинающимися членами не ниже второго порядка, то областью выполнимости условий (26.3) будет некоторая окрестность начала координат, которую нетрудно определить, если известно число α.

Во всех случаях дело сводится к определению числа α, а поскольку коэффициенты формы V известны, то задача сводится к вычислению числа A, т. е. числа, при котором функция (26.1) будет определенно-отрицательной при выполнении неравенства (26.2). Последняя задача элементарна. Действительно, нужно выбрать число A таким образом, чтобы выполнялось неравенство

$$A\{|x_1|+\ldots+|x_n|\}^2<x_1^2+\ldots+x_n^2. \tag{26.4}$$

Поскольку обе части неравенства (26.4) представляют квадратичные формы, это неравенство будет выполняться всюду, если оно выполняется на сфере единичного радиуса. Таким образом, можно положить

$$A<\frac{1}{n},$$

так как $\sqrt{n}$ есть максимум величины $|x_1|+\ldots+|x_n|$ на сфере $\sum x_s^2=1$.

Вышеуказанный метод определения области устойчивости можно несколько видоизменить путем другого выбора функции V. Можно, очевидно, выбрать функцию V таким образом, чтобы удовлетворялось уравнение

$$\sum_{s=1}^{n}(p_{s1}x_1+\ldots+p_{sn}x_n)\frac{\partial V}{\partial x_s}=U(x_1,\ldots,x_n),$$

где U — любая наперед заданная определенно-отрицательная квадратичная форма, а не обязательно сумма отрицательных квадратов. Тогда неравенство (26.4) заменится неравенством

$$A\{|x_1|+\ldots+|x_n|\}^2<-U(x_1,\ldots,x_n)$$

и для числа A имеем:

$$A<\frac{m}{n},$$

где m — наименьшее значение формы $-U$ на сфере единичного радиуса.

Таким образом, число A получится зависящим от коэффициентов заданной формы U. Этим можно воспользоваться для расширения области устойчивости.

Можно, наконец, определить α прямо из условия, что при выполнении (26.3) должно выполняться неравенство

$$\left|\sum_{s=1}^{n} X_s \frac{\partial V}{\partial x_s}\right| < -U(x_1, \ldots, x_n), \tag{26.5}$$

без перехода через неравенство (26.2).

Приведенные способы определения области устойчивости являются лишь некоторыми из тех, которые можно рекомендовать. Вообще здесь следует помнить, что область устойчивости определяется по правилам § 10, областью, где выполняется неравенство (26.5), и для определения последней следует воспользоваться любым способом, который в каждом отдельном случае окажется наиболее удобным.

Практически могут возникнуть следующие три основные задачи, связанные с определением области устойчивости:

1) заданы уравнения первого приближения (с отрицательными вещественными частями у корней характеристического уравнения), заданы нелинейные члены, требуется определить область устойчивости;

2) заданы уравнения первого приближения, задана требуемая область устойчивости, необходимо определить условия, которым должны удовлетворять нелинейные члены;

3) задана требуемая область устойчивости, известен характер нелинейных членов, необходимо определить условия, которым должны удовлетворять коэффициенты уравнений первого приближения.

Для пояснения всего вышеизложенного рассмотрим одну из задач этого рода, решенную М. А. Айзерманом [1]).

Допустим, что предложена регулируемая система, описываемая дифференциальными уравнениями вида

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= p_{11}x_1 + p_{12}x_2 + \ldots + p_{1n}x_n + f(x_k), \\ \frac{dx_i}{dt} &= p_{i1}x_1 + p_{i2}x_2 + \ldots + p_{in}x_n \\ &\qquad (i = 2, 3, \ldots, n), \end{aligned}\right\} \tag{26.6}$$

где $f(x_k)$ — нелинейная функция одного аргумента x_k.

---

[1]) Айзерман М. А., О сходимости процессов автоматического регулирования после больших начальных отклонений. Автоматика и телемеханика, т. VII, № 2—3, 1946.

Относительно функции $f(x_k)$ предполагается, что при любом x_k кривая $f=f(x_k)$ лежит между прямыми $f=(a_0-a_1)x_k$ и $f=(a_0+a_2)x_k$, где a_1 и a_2 — некоторые постоянные. Предполагается далее, что для соответствующей линеаризованной системы

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= p_{11}x_1+\ldots+p_{1n}x_n+a_0x_k, \\ \frac{dx_i}{dt} &= p_{i1}x_1+\ldots+p_{in}x_n \\ &(i=2,\ 3,\ \ldots,\ n) \end{aligned}\right\} \tag{26.7}$$

характеристическое уравнение имеет корни только с отрицательными вещественными частями.

Требуется определить такие значения для чисел a_1 и a_2, при которых положение равновесия $x_1=\ldots=x_n=0$ регулируемой системы асимптотически устойчиво при любых начальных возмущениях.

Мы видим, таким образом, что задача подобна задаче об определении числа α в неравенствах (26.3). Эту задачу М. А. Айзерман решает следующим образом.

Пусть $V(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ определенно-положительная квадратичная форма, производная которой в силу линейной системы (26.7) равна наперед заданной определенно-отрицательной квадратичной форме $U(x_1,\ \ldots,\ x_n)$, так что

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}(p_{i1}x_1+\ldots+p_{in}x_n)+a_0x_k\frac{\partial V}{\partial x_1}=U(x_1,\ \ldots,\ x_n). \tag{26.8}$$

Тогда квадратичная форма

$$U(x_1,\ \ldots,\ x_n)+ax_k\frac{\partial V}{\partial x_1}=$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}(p_{i1}x_1+\ldots+p_{in}x_n)+(a_0+a)x_k\frac{\partial V}{\partial x_1} \tag{26.9}$$

будет также определенно-отрицательной, если число $|a|$ достаточно мало. Пусть $-a_1$ и a_2 — наименьшее и наибольшее значения a, при которых форма (26.9) еще определенно-отрицательна. Эти величины легко определяются простым применением какого-нибудь признака знакоопределенности квадратичных форм. Полученные числа a_1 и a_2 и являются искомыми. Действительно, если форма (26.9) является определенно-отрицательной при $-a_1\leqslant a\leqslant a_2$, то функция

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}(p_{i1}x_1+\ldots+p_{in}x_n)+f(x_k)\frac{\partial V}{\partial x_1}$$

будет также определенно-отрицательной, так как кривая $f(x_k)$ лежит между прямыми $f=(a_0-a_1)x_k$ и $f=(a_0+a_1)x_k$ и, следовательно, при любом x_k найдется такое число a, лежащее в интервале $(-a_1, a_2)$, что будем иметь: $f(x_k)=(a_0+a)x_k$.

Пример. Проведем все выкладки на примере автоматического регулирования числа оборотов силового двигателя, рассмотренном М. А. Айзерманом. Регулирование осуществляется по схеме, изображенной на рис. 7.

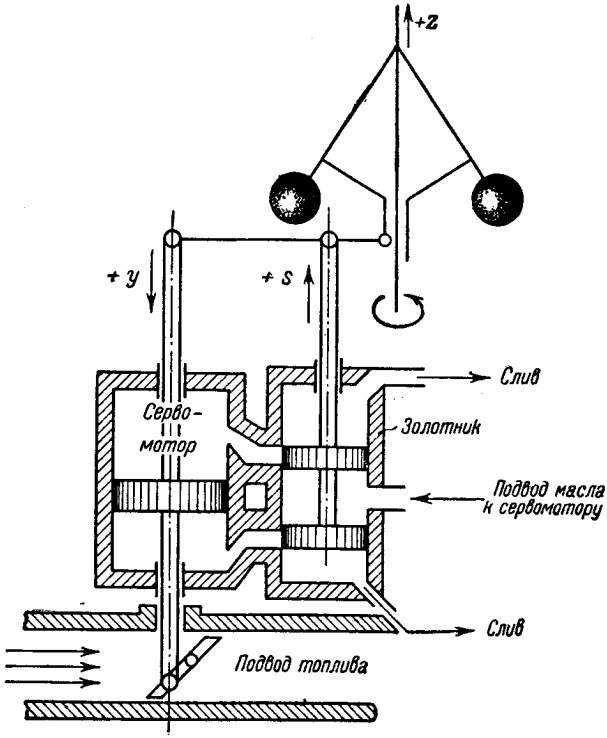

Рис. 7.

Обозначим через x отклонение числа оборотов от его значения, которое нужно поддерживать, считая эту величину положительной, когда число оборотов растет. Через z обозначим смещение муфты измерителя. Эту величину будем считать положительной, если ее изменение вызвано ростом x. Далее обозначим через s смещение золотника сервомотора от равновесного положения, считая эту величину положительной, когда она соответствует росту z. И наконец, обозначим через y смещение поршня сервомотора, считая эту вели-

чину положительной, когда смещение поршня сервомотора вызвано положительным смещением s.

При линейной идеализации имеем следующие уравнения:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{уравнение регулируемого объекта:} & \dfrac{dx}{dt} = -Nax - by; \\ \text{уравнение сервомотора:} & \dfrac{dy}{dt} = c_3 s; \\ \text{уравнение золотника:} & s = c_2 z - d_1 y; \\ \text{уравнение измерителя:} & z = c_1 x. \end{array}\right\} \quad (26.10)$$

Здесь a, b, c_1, c_2, c_3, d_1 — положительные постоянные. Что же касается величины N, то она равна $+1$, если при отсоединенном регуляторе двигатель устойчиво держит обороты, т. е. обладает положительным самовыравниванием. Напротив, $N = -1$, если двигатель обладает отрицательным самовыравниванием, и, наконец, $N = 0$, если двигатель не обладает самовыравниванием.

Мы рассмотрим здесь случай, когда самовыравнивание нелинейно и характеризуется однозначной нелинейной функцией $f(x)$. Уравнение движения мы получим, заменяя в первом уравнении (26.10) член $-Nax$ членом $f(x)$. Тогда, исключая s и z, получим следующие уравнения задачи:

$$\frac{dx}{dt} = f(x) - by, \quad \frac{dy}{dt} = cx - dy, \qquad (26.11)$$

где $c = c_1 c_2 c_3$, $d = d_1 c_3$.

Мы будем предполагать, что самовыравнивание отрицательно. В этом случае функция $f(x)$, обращающаяся в нуль при $x = 0$, будет обладать в этой точке положительной производной, которую мы обозначим через a_0.

Тогда для системы первого приближения будем иметь:

$$\frac{dx}{dt} = a_0 x - by, \qquad \frac{dy}{dt} = cx - dy.$$

Для того чтобы характеристическое уравнение имело корни с отрицательными вещественными частями, необходимо, чтобы выполнялись неравенства

$$d - a_0 > 0, \quad bc - a_0 d > 0. \qquad (26.12)$$

Мы будем предполагать, что эти условия выполняются.

Для решения задачи положим:

$$U = -M(x^2 + y^2), \quad 2V = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2,$$

где M — некоторая заданная положительная постоянная, и выберем

A, B, C таким образом, чтобы выполнялось уравнение

$$\frac{\partial V}{\partial x}(a_0x - by) + \frac{\partial V}{\partial y}(cx - dy) = -M(x^2 + y^2). \tag{26.13}$$

Приравнивая в (26.13) коэффициенты при подобных членах, мы получим следующие уравнения для этих коэффициентов:

$$\begin{aligned} a_0A + cB &= -M, \\ -bB - dC &= -M, \\ -bA + (a_0 - d)B + cC &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\left.\begin{aligned} \Delta A &= M[d(d - a_0) + c(b + c)], \\ \Delta B &= -M(a_0c + bd), \\ \Delta C &= M[b(b + c) - a_0(d - a_0)], \end{aligned}\right\} \tag{26.14}$$

где Δ определяется формулой

$$\Delta = (bc - a_0d)(d - a_0)$$

и является в силу (26.12) величиной положительной.

Рассмотрим теперь форму

$$-M(x^2 + y^2) + ax\frac{\partial V}{\partial x} = (-M + aA)x^2 + aBxy - My^2.$$

Для того чтобы эта форма была определенно-отрицательной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$B^2a^2 + 4M(-M + aA) < 0.$$

Это неравенство будет выполняться при всех значениях a, лежащих в интервале $-a_1 < a < a_2$, где a_1 и a_2 определяются формулами

$$\left.\begin{aligned} a_2 &= \frac{2M}{B^2}\left(-A + \sqrt{A^2 + B^2}\right), \\ -a_1 &= \frac{2M}{B^2}\left(-A - \sqrt{A^2 + B^2}\right). \end{aligned}\right\} \tag{26.15}$$

Положим $M = \Delta$, после чего (26.15) примет вид

$$a_{1,2} = \frac{2\Delta}{B^2}\left(\pm A^* + \sqrt{A^{*2} + B^{*2}}\right), \tag{26.16}$$

где

$$A^* = d(d - a_0) + c(b + c), \qquad B^* = -(a_0c + bd).$$

Таким образом, если при всех значениях x кривая $f = f(x)$ лежит между прямыми $f = (a_0 - a_1)x$ и $f = (a_0 + a_2)x$, где a_1 и a_2 определяются формулами (26.16), то состояние равновесия регулируемой системы асимптотически устойчиво при любых начальных возмущениях [1]).

[1]) См. примечание в конце книги (стр. 521).

§ 27. Заключительные замечания.

Итак, все случаи, которые могут представиться при решении задачи устойчивости, когда уравнения возмущенного движения имеют вид (19.1), можно подразделить на *некритические*, когда задача решается первым приближением, и *критические*, когда рассмотрение лишь первого приближения недостаточно. Случаи будут критическими тогда и только тогда, когда характеристическое уравнение системы первого приближения, не имея корней с положительными вещественными частями, имеет корни с вещественными частями, равными нулю.

С точки зрения математической критические случаи можно рассматривать как исключительные. Однако с точки зрения механической эти случаи имеют очень важное значение. Так, во всех примерах, рассмотренных нами в §§ 23 и 24, устойчивость могла иметь место только в критических случаях. С другой стороны, для многих механических систем характеристическое уравнение системы первого приближения имеет критические корни в силу самого устройства этих систем. Такой, например, будет система регулирования, рассмотренная нами в § 12. Действительно, уравнения возмущенного движения (12.7) этой системы имеют один характеристический корень, равный нулю.

Таким образом, очень важно иметь методы, позволяющие решать задачу устойчивости в критических случаях. К сожалению, эта задача очень сложна и до сих пор нет общих методов ее решения. При этом задача делается тем сложнее, чем больше число критических корней. Ляпунов разрешил эту задачу для следующих трех случаев:

1) Характеристическое уравнение имеет один нулевой корень и n корней с отрицательными вещественными частями.

2) Характеристическое уравнение имеет пару чисто мнимых корней и n корней с отрицательными вещественными частями.

3) Характеристическое уравнение имеет два нулевых корня, и система имеет только второй порядок. При этом двойному нулевому корню соответствует только одна группа решений.

В следующей главе мы рассмотрим первые два случая. Случай двойного нулевого корня при несколько иных предположениях будет рассмотрен в главе VI, после того как будут установлены некоторые общие теоремы теории критических случаев. В этой же главе будут рассмотрены и критические случаи, когда характеристическое уравнение имеет две пары чисто мнимых корней и когда оно имеет один нулевой и пару чисто мнимых корней.

ГЛАВА IV.

ИССЛЕДОВАНИЕ КРИТИЧЕСКИХ СЛУЧАЕВ ДЛЯ УСТАНОВИВШИХСЯ ДВИЖЕНИЙ.

§ 28. Случай одного нулевого корня. Приведение уравнений к специальному виду.

Допустим, что система уравнений возмущенного движения есть система $(n+1)$-го порядка и имеет вид

$$\frac{dy_j}{dt} = q_{j1}y_1 + \ldots + q_{j,\,n+1}y_{n+1} + Y_j(y_1, \ldots, y_{n+1}) \quad (28.1)$$
$$(j = 1, 2, \ldots, n+1),$$

где q_{jl} — постоянные, а функции Y_j разлагаются в некоторой окрестности начала координат в ряды по степеням величин y_s, начинающиеся членами не ниже второго порядка. Мы переходим к рассмотрению критического случая, когда характеристическое уравнение системы первого приближения

$$\frac{dy_j}{dt} = q_{j1}y_1 + \ldots + q_{j,\,n+1}y_{n+1} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n+1) \qquad (28.2)$$

имеет один нулевой корень при остальных n корнях с отрицательными вещественными частями.

Введем в уравнениях (28.2) вместо одной из переменных y_j переменную x при помощи подстановки

$$x = a_1y_1 + a_2y_2 + \ldots + a_{n+1}y_{n+1},$$

где a_j — некоторые постоянные. Эти постоянные мы постараемся выбрать таким образом, чтобы преобразованное уравнение приняло вид

$$\frac{dx}{dt} = 0.$$

Мы должны, следовательно, иметь тождественно

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{j=1}^{n+1} a_j \frac{dy_j}{dt} = \sum_{j=1}^{n+1} a_j (q_{j1}y_1 + \ldots + q_{j,\,n+1}y_{n+1}) = 0.$$

Приравнивая нулю коэффициенты при y_k, мы получим следующую систему линейных однородных алгебраических уравнений:

$$q_{1k}a_1 + q_{2k}a_2 + \ldots + q_{n+1,\,k}a_{n+1} = 0 \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n+1). \tag{28.3}$$

Так как характеристическое уравнение системы (28.2) имеет нулевой корень, то определитель системы (28.3) обращается в нуль и, следовательно, эта система имеет решение для a_j, в котором не все эти постоянные равны нулю. Допустим для определенности, что $a_{n+1} \neq 0$. Тогда мы можем принять переменную x вместо переменной y_{n+1}. Остальные переменные y_i сохраним прежние, но будем обозначать их в дальнейшем через x_i. Таким образом, мы преобразуем уравнения (28.2) при помощи подстановки

$$\left.\begin{aligned} x &= a_1y_1 + \ldots + a_ny_n + a_{n+1}y_{n+1}, \\ x_i &= y_i \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \end{aligned}\right\} \tag{28.4}$$

Теперь, обозначая

$$p_{sk} = q_{sk} - \frac{1}{a_{n+1}} q_{s,\,n+1}a_k,$$

$$p_s = \frac{1}{a_{n+1}} q_{s,\,n+1} \qquad (s,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

мы приведем уравнения (28.2) к виду

$$\frac{dx}{dt} = 0,$$

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + p_s x,$$

где p_s, p_{sj}—постоянные. Характеристическое уравнение этой системы, имеющее вид

$$\begin{vmatrix} p_{11}-\lambda & p_{12} & \ldots & p_{1n} & p_1 \\ p_{21} & p_{22}-\lambda & \ldots & p_{2n} & p_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{n1} & p_{n2} & \ldots & p_{nn}-\lambda & p_n \\ 0 & 0 & & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

распадается на уравнение $\lambda = 0$ и уравнение

$$\begin{vmatrix} p_{11}-\lambda & p_{12} & \ldots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22}-\lambda & \ldots & p_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{n1} & p_{n2} & \ldots & p_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{28.5}$$

Так как характеристическое уравнение инвариантно по отношению к линейным преобразованиям и в рассматриваемом случае имеет n

корней с отрицательными вещественными частями, то *все корни уравнения* (28.5) *имеют отрицательные вещественные части.*

Если при помощи подстановки (28.4) преобразовать систему (28.1), то она, очевидно, примет вид

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = X(x, x_1, \ldots, x_n), \\ &\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + p_s x + X_s(x, x_1, \ldots, x_n) \\ &\qquad\qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \end{aligned}\right\} \quad (28.6)$$

где X и X_s — аналитические функции переменных $x, x_1, \ldots, x_n$, разложения которых начинаются членами не ниже второго порядка.

Таковы будут дифференциальные уравнения возмущенного движения в интересующем нас критическом случае одного нулевого корня характеристического уравнения. Этот вид дифференциальных уравнений будет исходным для дальнейшего исследования.

§ 29. Исследование задачи для случая системы первого порядка.

Мы рассмотрим сначала случай, когда $n = 0$ и, следовательно, уравнение возмущенного движения имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = X(x) = gx^m + g_{m+1}x^{m+1} + \ldots, \quad (29.1)$$

где $m \geqslant 2$, а $g, g_{m+1}, \ldots$ — некоторые постоянные.

В рассматриваемом частном случае задача устойчивости решается сразу, а именно: если m является числом четным, то невозмущенное движение неустойчиво; если же m является числом нечетным, то при $g < 0$ невозмущенное движение асимптотически устойчиво, а при $g > 0$ оно неустойчиво.

Действительно, если m — число четное, то правая часть уравнения (29.1) в некоторой окрестности начала координат принимает значения одного знака, совпадающего со знаком g. Поэтому если рассматривать точку, движущуюся по оси x согласно уравнению (29.1), то скорость этой точки имеет определенное направление, независимо от того, будет ли точка находиться справа или слева от начала координат. Следовательно, если при $g > 0$ движущаяся точка в начальный момент находится справа от начала координат, а при $g < 0$ слева от начала координат, то она будет удаляться от этой точки пока не выйдет из области знакоопределенности функции X. Следовательно, невозмущенное движение неустойчиво вне зависимости от знака g.

Если m — число нечетное, то скорость движущейся точки меняет свое направление при переходе через начало координат. При этом при $g > 0$ точка всегда удаляется от начала координат, а при $g < 0$ она, напротив, к нему приближается. Следовательно, в первом случае

невозмущенное движение неустойчиво, а во втором случае оно устойчиво и притом асимптотически.

Легко построить функции Ляпунова для рассматриваемой задачи, а именно, если m — число нечетное, то полагаем:

$$V=\frac{1}{2}gx^2.$$

Для $\frac{dV}{dt}$ имеем:

$$\frac{dV}{dt}=g^2x^{m+1}+gg_{m+1}x^{m+2}+\ldots$$

Обе функции как V, так и $\frac{dV}{dt}$ знакоопределенны. При этом, если $g>0$, то обе эти функции будут одинакового знака, и V удовлетворяет всем условиям теоремы В, откуда мы снова заключаем о неустойчивости движения. При $g<0$ V и $\frac{dV}{dt}$ имеют противоположные знаки и, следовательно, функция V удовлетворяет всем условиям теоремы Б, откуда вытекает асимптотическая устойчивость.

При m четном полагаем просто

$$V=x.$$

Тогда $\frac{dV}{dt}$ будет функцией знакоопределенной, а сама функция V, каков бы ни был знак g, может принимать значения того же знака, что и $\frac{dV}{dt}$. Следовательно, как при $g>0$, так и при $g<0$ V удовлетворяет всем условиям теоремы В, и невозмущенное движение неустойчиво.

§ 30. Исследование задачи для системы $(n+1)$-го порядка в частном случае.

Допустим теперь, что $n\neq 0$. Мы будем, однако, сначала предполагать, что правые части уравнений (28.6) связаны некоторым ограничительным условием. Это условие заключается в следующем.

Обозначим через $X^{(0)}(x)$ и $X_s^{(0)}(x)$ соответственно совокупности всех членов в функциях X и X_s, не содержащих $x_1, \ldots, x_n$, так что

$$\left.\begin{aligned} X^{(0)}(x)&=X(x,\ 0,\ \ldots,\ 0)=gx^m+g^{(m+1)}x^{m+1}+\ldots,\\ X_s^{(0)}(x)&=X_s(x,\ 0,\ \ldots,\ 0)=g_sx^{m_s}+g_s^{(m_s+1)}x^{m_s+1}+\ldots\\ &\qquad (s=1,\ 2,\ \ldots,\ n),\end{aligned}\right\}\qquad (30.1)$$

где g, $g^{(m+1)}$, g_s, $g_s^{(m_s+1)}$ — постоянные. Мы будем предполагать, что

1) $X^{(0)}(x)$ не обращается тождественно в нуль,
2) $m_s\geqslant m$,
3) все величины p_s в уравнениях (28.6) равны нулю.

При этих предположениях задача устойчивости решается сразу, а именно: *невозмущенное движение всегда неустойчиво, если m — число четное. Если m — число нечетное, то при $g > 0$ невозмущенное движение неустойчиво, а при $g < 0$ оно устойчиво и притом асимптотически.* Другими словами, ответ получается такой же, как если бы решалась задача устойчивости для одного уравнения

$$\frac{dx}{dt} = X^{(0)}(x) = gx^m + \ldots$$

Таким образом, для решения задачи устойчивости при выполнении вышеуказанных ограничений можно отбросить все некритические уравнения, а в критическом уравнении отбросить все члены, содержащие некритические переменные, и исследовать полученное таким образом одно уравнение с одной неизвестной функцией.

Для доказательства высказанных предложений мы постараемся для уравнений возмущенного движения, которые в рассматриваемом случае имеют вид

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = X^{(0)}(x) + X'(x, x_1, \ldots, x_n) = gx^m + \ldots + X', \\ &\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + X_s(x, x_1, \ldots, x_n) \\ &\qquad\qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \end{aligned}\right\} \tag{30.2}$$

где функция $X'(x, x_1, \ldots, x_n)$ обращается в нуль при $x_1 = \ldots = x_n = 0$, построить функции Ляпунова, удовлетворяющие условиям теоремы Б или В. Задача, следовательно, заключается в построении функции $V(x, x_1, \ldots, x_n)$, производная которой, составленная в силу уравнений (30.2), была бы знакоопределенной.

Допустим сначала, что m — число нечетное. Пусть $W(x_1, \ldots, x_n)$ — квадратичная форма переменных $x_1, \ldots, x_n$, выбранная согласно условию

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial W}{\partial x_s}(p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n) = x_1^2 + \ldots + x_n^2. \tag{30.3}$$

Так как все корни уравнения (28.5) имеют отрицательные вещественные части, то на основании теоремы 1 § 21 форма W существует и будет определенно-отрицательной.

Если бы функции X_s не зависели от x, то производная по времени от формы W, составленная в силу последних n уравнений системы (30.2), т. е. выражение

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial W}{\partial x_s}(p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + X_s), \tag{30.4}$$

являлась бы при достаточно малых $x_1, \ldots, x_n$ определенно-положительной функцией относительно $x_1, \ldots, x_n$.

С другой стороны, если бы функция X не зависела от $x_1, \ldots, x_n$, т. е. если бы $X' = 0$, то производная по времени от функции $\frac{1}{2} gx^2$, составленная в силу первого уравнения (30.2), равная

$$gxX = g^2x^{m+1} + gg_{m+1}x^{m+2} + \ldots + gxX', \tag{30.5}$$

была бы при x достаточно малом определенно-положительной относительно x. Поэтому при указанных условиях производная по времени от функции

$$V_1 = \frac{1}{2} gx^2 + W(x_1, \ldots, x_n), \tag{30.6}$$

составленная в силу полной системы уравнений (30.2), была бы определенно-положительной функцией всех $n+1$ переменных $x, x_1, \ldots, x_n$ в некоторой достаточно малой окрестности начала координат. Эту производную можно было бы представить в виде

$$(g^2 + f)\, x^{m+1} + x_1^2 + \ldots + x_n^2 + \sum_{\alpha, \beta=1}^{n} f_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta, \tag{30.7}$$

где f — некоторая функция от x, обращающаяся в нуль при $x = 0$, а $f_{\alpha\beta}$ — некоторые функции от $x_1, \ldots, x_n$, обращающиеся в нуль при $x_1 = \ldots = x_n = 0$.

Но так как функция X содержит $x_1, \ldots, x_n$, а функции X_s содержат x, то производная от V_1 в силу (30.2) не будет определенно-положительной. В ней появятся члены, нарушающие знакоопределенность.

Чтобы выяснить общий вид этих членов, заметим прежде всего, что выражение (30.7) останется, очевидно, знакоопределенным, если функция f содержит не только переменную x, но и переменные $x_1, \ldots, x_n$, а функции $f_{\alpha\beta}$ содержат не только переменные $x_1, \ldots, x_n$, но и переменную x. Важно только, чтобы функции f и $f_{\alpha\beta}$ обращались в нуль при $x = x_1 = \ldots = x_n = 0$.

Учитывая это обстоятельство, запишем производную от V_1 в силу уравнений (30.2) в виде

$$\begin{aligned}\frac{dV_1}{dt} &= gxX + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial W}{\partial x_s}(p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + X_s) = \\ &= (g^2 + f(x, x_1, \ldots, x_n))\, x^{m+1} + \sum_{s=1}^{n} x_s^2 + \\ &+ \sum_{\alpha, \beta=1}^{n} f_{\alpha\beta}(x, x_1, \ldots, x_n)\, x_\alpha x_\beta + P(x, x_1, \ldots, x_n),\end{aligned} \tag{30.8}$$

где функции f и $f_{\alpha\beta}$ обращаются в нуль при $x = x_1 = \ldots = x_n = 0$, а P — совокупность всех членов, которые не могут быть включены ни в выражение

$$f(x, x_1, \ldots, x_n)\, x^{m+1}, \tag{30.9}$$

ни в выражение

$$\sum_{\alpha, \beta=1}^{n} f_{\alpha\beta}(x, x_1, \ldots, x_n)\, x_\alpha x_\beta. \tag{30.10}$$

Рассмотрим подробнее функцию P. Все члены, входящие в выражение P, можно, очевидно, разбить на следующие четыре группы: на члены, свободные от $x_1, \ldots, x_n$, на члены, линейные относительно $x_1, \ldots, x_n$, на члены, квадратичные относительно $x_1, \ldots, x_n$, и на члены, имеющие относительно $x_1, \ldots, x_n$ порядок выше второго. Очевидно, что все члены последней группы можно включить в выражение (30.10). Нам остается поэтому рассмотреть только первые три группы членов.

Все члены, свободные от $x_1, \ldots, x_n$, содержатся, очевидно, только в выражении (30.5). Совокупность всех этих членов есть

$$gxX^{(0)}(x) = g^2x^{m+1} + gg_{m+1}x^{m+2} + \ldots$$

Первый из них выписан в (30.8) явно, а остальные могут быть включены в выражение (30.9). Следовательно, функция P не содержит членов, свободных от $x_1, \ldots, x_n$.

Члены, линейные относительно $x_1, \ldots, x_n$, входят в выражение производной (30.8) как через совокупность (30.4), так и через совокупность (30.5). Если эти члены имеют относительно x порядок, не меньший $m+1$, то они могут быть, очевидно, включены в выражение (30.9). Таким образом, в функции P содержатся лишь те линейные относительно $x_1, \ldots, x_n$ члены, которые имеют относительно x порядок k, где $k = 2, \ldots, m$.

Рассмотрим, наконец, члены, квадратичные относительно $x_1, \ldots, x_n$. Если эти члены имеют общий порядок выше второго, то они могут быть включены в выражение (30.10) и, следовательно, в функцию P не входят. Члены же, квадратичные относительно $x_1, \ldots, x_n$ и имеющие только второй порядок, т. е. обладающие постоянными коэффициентами, содержатся, очевидно, все в выражении

$$\sum_{s=1}^{n} (p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n) \frac{\partial W}{\partial x_s} \equiv \sum x_s^2$$

и, следовательно, в функцию P также не входят.

Таким образом, функция P имеет вид

$$P = x^2P_2(x_1, \ldots, x_n) + \ldots + x^mP_m(x_1, \ldots, x_n), \tag{30.11}$$

где $P_i(x_1, \ldots, x_n)$ — некоторые линейные формы от $x_1, \ldots, x_n$.

Наличие в выражении производной слагаемого (30.11) нарушает ее знакоопределенность. Чтобы избавиться от этого слагаемого, поступим следующим образом.

Добавим к функции V_1 член $x^k Q_k(x_1, \ldots, x_n)$, где Q_k — подлежащая еще определению линейная форма переменных x_j. Другими словами, рассмотрим вместо V_1 функцию

$$\bar{V}_1 = \frac{1}{2} g x^2 + W(x_1, \ldots, x_n) + x^k Q_k(x_1, \ldots, x_n). \quad (30.12)$$

Член $x^k Q_k(x_1, \ldots, x_n)$ внесет в выражение производной два слагаемых: слагаемое

$$k x^{k-1} Q_k(x_1, \ldots, x_n) X(x, x_1, \ldots, x_n) \quad (30.13)$$

и слагаемое

$$x^k \sum_{s=1}^{n} (p_{s1} x_1 + \ldots + p_{sn} x_n + X_s) \frac{\partial Q_k}{\partial x_s}. \quad (30.14)$$

Рассмотрим подробней все члены, входящие в эти слагаемые. Нас будут при этом интересовать лишь те из этих членов, которые влияют на знак производной, т. е. члены, не содержащие $x_1, \ldots, x_n$, члены, линейные относительно $x_1, \ldots, x_n$, и члены, квадратичные относительно $x_1, \ldots, x_n$.

Члены, свободные от $x_1, \ldots, x_n$, содержатся, очевидно, только в слагаемом (30.14). Совокупность этих членов мы получим, полагая в этом слагаемом $x_1 = \ldots = x_n = 0$. Следовательно, эта совокупность есть

$$x^k \sum_{s=1}^{n} X_s^{(0)}(x) \frac{\partial Q_k}{\partial x_s}. \quad (30.15)$$

Так как по условию $m_s \geqslant m$, то все члены, входящие в (30.15), имеют порядок не ниже $(m+k)$-го и, следовательно, могут быть включены в выражение (30.9). Таким образом, все новые члены, свободные от $x_1, \ldots, x_n$, не влияют на знакоопределенность производной.

Рассмотрим теперь члены, линейные относительно $x_1, \ldots, x_n$. Покажем, что все эти члены (входящие в слагаемые (30.13) и (30.14)) имеют относительно x порядок, не меньший k, и притом совокупность всех членов k-го порядка относительно x имеет вид

$$x^k \sum_{s=1}^{n} (p_{s1} x_1 + \ldots + p_{sn} x_n) \frac{\partial Q_k}{\partial x_s}. \quad (30.16)$$

Действительно, интересующие нас члены содержатся как в слагаемом (30.13), так и в слагаемом (30.14). Чтобы получить эти члены

в слагаемом (30.13), необходимо в функции X взять члены, не содержащие $x_1, \ldots, x_n$. Эти члены имеют порядок не ниже m, причем $m \geqslant 2$. Следовательно, все члены, линейные относительно $x_1, \ldots, x_n$, содержащиеся в слагаемом (30.13), имеют порядок относительно x, не меньший $k+1$.

Обращаясь теперь к слагаемому (30.14), мы видим, что кроме (30.16) мы получим еще члены интересующего нас вида, если мы в функциях X_s выделим все члены, линейные относительно $x_1, \ldots, x_n$. Но каждый из этих членов содержит, по крайней мере, первую степень x, так как все члены в X_s имеют порядок не ниже второго. Поэтому все члены, линейные относительно $x_1, \ldots, x_n$, содержащиеся в (30.14) и происходящие от функций X_s, имеют порядок относительно x, не меньший $k+1$.

Итак, все члены, линейные относительно $x_1, \ldots, x_n$, которыми производная $\frac{d\overline{V}_1}{dt}$ отличается от производной $\frac{dV_1}{dt}$, имеют относительно x порядок не ниже k, причем совокупность всех членов, имеющих относительно x порядок k, дается выражением (30.16).

Что касается членов, квадратичных относительно $x_1, \ldots, x_n$, то нас могут интересовать лишь те из них, которые имеют общий порядок, равный двум, так как остальные могут быть включены в выражение (30.10). Но такого рода членов слагаемое $x^k Q_k$ в выражение производной не вносит. Действительно, слагаемое (30.13) содержит члены не ниже третьего порядка, а слагаемое (30.14) имеет множитель x^k, и следовательно, члены, квадратичные относительно $x_1, \ldots, x_n$, будут иметь общий порядок, превышающий два.

Резюмируя вышесказанное, мы приходим к заключению, что производная функция (30.12) может быть представлена в следующем виде:

$$\frac{d\overline{V}}{dt} = (g^2 + \overline{f})\, x^{m+1} + \sum_{s=1}^{n} x_s^2 + \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \overline{f}_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta + x^2 P_2 + \ldots$$
$$\ldots + x^{k-1} P_{k-1} + x^k S + x^{k+1} \overline{P}_{k+1} + \ldots + x^m \overline{P}_m, \quad (30.17)$$

где $\overline{f}$, $\overline{f}_{\alpha\beta}$ — функция такого же типа, как и f, $f_{\alpha\beta}$, $\overline{P}_{k+1}, \ldots, \overline{P}_m$ — линейные формы от $x_1, \ldots, x_n$, вообще говоря, отличные от $P_{k+1}, \ldots, P_m$, а

$$S = P_k + \sum_{s=1}^{n} (p_{s1} x_1 + \ldots + p_{sn} x_n) \frac{\partial Q_k}{\partial x_s}. \quad (30.18)$$

Выберем теперь линейную форму Q_k таким образом, чтобы выражение (30.18) обратилось тождественно в нуль. Это всегда возможно сделать на основании теоремы 2 § 20, так как все корни уравнения (28.5) имеют отрицательные вещественные части.

При таком выборе Q_k в выражении (30.17) уничтожится один из членов, нарушающих его знакоопределенность. При этом другие члены этого типа, имеющие относительно x меньший порядок, будут такими же, как и в выражении производной $\frac{dV_1}{dt}$. Мы можем поэтому последовательно, добавляя к функции V_1 члены xQ_1, x^2Q_2, ..., x^mQ_m и подбирая соответствующим образом линейные формы Q_i, уничтожить в выражении производной все члены, нарушающие ее знакоопределенность. Другими словами, мы можем линейные формы Q_i выбрать таким образом, чтобы производная от функции

$$V=\frac{1}{2}gx^2+W(x_1, \ldots, x_n)+x^2Q_2+\ldots+x^mQ_m \qquad (30.19)$$

в силу системы (30.2) имела вид

$$\frac{dV}{dt}=(g^2+F(x, x_1, \ldots, x_n))\,x^{m+1}+$$
$$+\sum_{s=1}^{n}x_s^2+\sum_{\alpha,\,\beta=1}^{n}F_{\alpha\beta}(x, x_1, \ldots, x_n)\,x_\alpha x_\beta,$$

где F, $F_{\alpha\beta}$ — некоторые функции от x, x_1, ..., x_n, обращающиеся в нуль при $x=x_1=\ldots=x_n=0$.

Функция $\frac{dV}{dt}$ получилась определенно-положительной. Рассмотрим функцию V. Как было указано выше, квадратичная форма $W(x_1, \ldots, x_n)$ определенно-отрицательна. Поэтому если $g<0$, то и квадратичная форма

$$\frac{1}{2}gx^2+W(x_1, \ldots, x_n) \qquad (30.20)$$

$n+1$ переменных x, x_j будет также определенно-отрицательной. Но тогда определенно-отрицательной будет и функция (30.19), и она, следовательно, будет удовлетворять всем условиям теоремы Б, откуда вытекает асимптотическая устойчивость невозмущенного движения.

Напротив, если $g>0$, то квадратичная форма (30.20), а следовательно, и функция V будет знакопеременной. Функция V будет, следовательно, удовлетворять всем условиям теоремы В, и невозмущенное движение будет неустойчиво.

Допустим теперь, что m есть число четное и покажем, что невозмущенное движение независимо от знака g неустойчиво.

В рассматриваемом случае функцию Ляпунова пытаемся искать в виде

$$V_1=\alpha^2gx+W(x_1, \ldots, x_n), \qquad (30.21)$$

где по-прежнему $W(x_1, \ldots, x_n)$ обозначает квадратичную форму, удовлетворяющую уравнению (30.3), а α^2 — некоторое положительное

число, выбором которого мы распорядимся позже. Функция (30.21), как и в случае нечетного m, представляет собой сумму функций Ляпунова, построенных по отдельности для одного первого уравнения системы (30.2), если в нем отбросить все члены, содержащие x_j, и для последних n уравнений этой системы, если в них отбросить все члены, содержащие x.

Производная от (30.21) по времени, составленная в силу полной системы (30.2), может быть представлена в виде

$$\frac{dV_1}{dt} = \alpha^2 g \frac{dx}{dt} + \sum_{s=1}^{n} (p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + X_s) \frac{\partial W}{\partial x_s} =$$

$$= (\alpha^2 g^2 + f) x^m + \sum_{s=1}^{n} x_s^2 + \sum_{\alpha, \beta=1}^{n} f_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta + P, \qquad (30.22)$$

где f, $f_{\alpha\beta}$ обращаются в нуль при $x = x_1 = \ldots = x_n = 0$, а P—совокупность членов, которые не могут быть включены ни в выражение

$$(\alpha^2 g^2 + f) x^m, \qquad (30.23)$$

ни в выражение (30.10).

Анализируя все члены, входящие в (30.22), мы видим, что те из них, которые не содержат $x_1, \ldots, x_n$, могут быть все включены в выражение (30.23). То же самое относится и к членам, линейным относительно $x_1, \ldots, x_n$, если они содержат x в степени, не меньшей m. Члены же вида

$$xP_1, \; x^2P_2, \; \ldots, \; x^{m-1}P_{m-1},$$

где P_i — линейные формы величин $x_1, \ldots, x_n$, должны быть отнесены к функции P.

Из членов более высоких порядков относительно x_j нас могут интересовать квадратичные, имеющие общий порядок, равный двум, т. е. обладающие постоянными коэффициентами. Все остальные члены, квадратичные относительно $x_1, \ldots, x_n$, могут быть включены в выражение (30.10).

В отличие от случая нечетного m выражение $\frac{dV_1}{dt}$ содержит квадратичные относительно x_j члены с постоянными коэффициентами, отличные от $\sum x_s^2$. Эти члены содержатся в $\alpha^2 g \frac{dx}{dt}$, и их совокупность имеет вид

$$\alpha^2 g X^{(2)} (x_1, \ldots, x_n), \qquad (30.24)$$

где $X^{(2)}$ — квадратичная форма переменных x_j, представляющая собой совокупность членов второго порядка в разложении функции $X(0, x_1, \ldots, x_n)$.