Таким образом, функция P имеет вид

$$P = \alpha^2 g X^{(2)}(x_1, \ldots, x_n) + xP_1(x_1, \ldots, x_n) + \ldots$$
$$\ldots + x^{m-1}P_{m-1}(x_1, \ldots, x_n).$$

Член (30.24), входящий в P, не нарушит знакоопределенности производной, если число α^2 выбрать настолько малым, чтобы форма

$$\alpha^2 g X^{(2)}(x_1, \ldots, x_n) + \sum x_s^2$$

была определенно-положительной. Что же касается остальных членов, входящих в P, то их можно уничтожить таким же точно приемом, какой мы применили в случае нечетного m. Для этого нужно вместо функции (30.21) рассмотреть функцию

$$V = \alpha^2 g x + W(x_1, \ldots, x_n) + xQ_1 + \ldots + x^{m-1}Q_{m-1},$$

где $Q_1, \ldots, Q_{m-1}$ — некоторые линейные формы переменных $x_1, \ldots, x_n$. Эти формы можно подобрать таким образом, чтобы производная от V приняла вид

$$\frac{dV}{dt} = (\alpha^2 g^2 + F)x^m + \alpha^2 g X^{(2)} + \sum_{s=1}^{n} x_s^2 + \sum_{\alpha, \beta=1}^{n} F_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta, \quad (30.25)$$

где F и $F_{\alpha\beta}$ — функции такого же вида, как и f и $f_{\alpha\beta}$.

Если α^2 достаточно мало, то производная (30.25) есть функция определенно-положительная. Сама же функция V, разложение которой начинается линейными членами, будет, очевидно, знакопеременной. Функция V удовлетворяет, таким образом, всем условиям теоремы В. Следовательно, невозмущенное движение неустойчиво.

Таким образом, все утверждения о решении задачи устойчивости в рассматриваемом случае полностью доказаны.

§ 31. Исследование задачи для системы $(n+1)$-го порядка в общем случае.

Мы переходим теперь к рассмотрению общего случая, когда правые части уравнений возмущенного движения (28.6) не подчинены никаким ограничительным условиям.

Для решения задачи постараемся преобразовать уравнения возмущенного движения к такому виду, для которого выполняются ограничительные условия предыдущего параграфа. С этой целью рассмотрим систему уравнений

$$f_s = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + p_s x + X_s = 0 \quad (s = 1, 2, \ldots, n), \quad (31.1)$$

определяющих переменные x_s как функции переменной x. Левые части этих уравнений обращаются в нуль при $x = x_1 = \ldots = x_n = 0$.

Функциональный же определитель по переменным $x_1, \ldots, x_n$ этой системы уравнений при $x = x_1 = \ldots = x_n = 0$ отличен от нуля. Действительно,

$$\left\{\frac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}\right\}_{x=x_j=0} = |p_{ik}| \neq 0,$$

так как уравнение (28.5) не имеет нулевого корня. Поэтому на основании известной теоремы существования неявных функций существует одно и только одно решение системы (31.1), при котором функции x_s обращаются в нуль при $x = 0$, и эти функции будут разлагаться в ряды по степеням x, сходящиеся при достаточно малых значениях этой величины. Пусть

$$u_s(x) = A_s^{(1)}x + A_s^{(2)}x^2 + \ldots \tag{31.2}$$

будут указанные функции, так что

$$p_{s1}u_1 + \ldots + p_{sn}u_n + p_s x + X_s(x, u_1, \ldots, u_n) \equiv 0. \tag{31.3}$$

Сделаем теперь в уравнениях (28.6) преобразование переменных

$$x_s = \xi_s + u_s(x). \tag{31.4}$$

Будем иметь:

$$\frac{dx}{dt} = X(x, \xi_1 + u_1(x), \ldots, \xi_n + u_n(x)),$$

$$\frac{d\xi_s}{dt} = p_{s1}(\xi_1 + u_1) + \ldots + p_{sn}(\xi_n + u_n) + p_s x + \\ + X_s(x, \xi_1 + u_1, \ldots, \xi_n + u_n) - \frac{du_s}{dx}\frac{dx}{dt},$$

или на основании (31.3)

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \overline{X}(x, \xi_1, \ldots, \xi_n), \\ \frac{d\xi_s}{dt} &= p_{s1}\xi_1 + \ldots + p_{sn}\xi_n + \overline{X}_s(x, \xi_1, \ldots, \xi_n), \\ &\qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \end{aligned}\right\} \tag{31.5}$$

где

$$\left.\begin{aligned} \overline{X} &= X(x, \xi_1 + u_1, \ldots, \xi_n + u_n), \\ \overline{X}_s &= X_s(x, \xi_1 + u_1, \ldots, \xi_n + u_n) - \\ &\quad - X_s(x, u_1, \ldots, u_n) - \frac{du_s}{dx}\overline{X} \end{aligned}\right\} \tag{31.6}$$

— аналитические функции переменных x, ξ_j, разложения которых начинаются членами не ниже второго порядка.

Так как новые переменные обращаются одновременно в нуль тогда и только тогда, когда обращаются одновременно в нуль старые переменные, то задача устойчивости по отношению к одним переменным

эквивалентна задаче устойчивости по отношению к другим переменным. Мы можем поэтому для решения задачи рассматривать уравнения (31.5).

Уравнения (31.5) удовлетворяют второму и третьему ограничительному условиям, введенным в предыдущем параграфе. Действительно, коэффициенты при первой степени x в последних n уравнениях (31.5) равны нулю, а для функций $\bar{X}^{(0)}$ и $\bar{X}_s^{(0)}$ на основании (31.6) имеем:

$$\left.\begin{aligned} &\bar{X}^{(0)}(x) = \bar{X}(x, 0, \ldots, 0) = X(x, u_1(x), \ldots, u_n(x)), \\ &\bar{X}_s^{(0)}(x) = \bar{X}_s(x, 0, \ldots, 0) = -\frac{du}{dx}\bar{X}^{(0)}, \end{aligned}\right\} \quad (31.7)$$

откуда непосредственно следует, что разложение функций $\bar{X}_s^{(0)}$ начинается членами, порядок которых не ниже порядка младшего члена в разложении функции $\bar{X}^{(0)}$.

Следовательно, если функция $\bar{X}^{(0)}$ не обращается тождественно в нуль, то система (31.5) удовлетворяет всем условиям предыдущего параграфа и для решения задачи устойчивости мы можем воспользоваться полученными там результатами. Если же $\bar{X}^{(0)} \equiv 0$, то на основании (31.7) $\bar{X}_s^{(0)} \equiv 0$ и условия предыдущего параграфа не выполняются. Этот случай является особенным и требует специального рассмотрения. Мы этим займемся в § 33. Сейчас мы рассмотрим неособенный случай.

В этом случае согласно результатам предыдущего параграфа мы должны рассмотреть лишь первое из уравнений (31.5), отбросить в нем все члены, зависящие от $\xi_1, \ldots, \xi_n$, и решать задачу устойчивости для полученного таким образом уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \bar{X}^{(0)}(x). \quad (31.8)$$

Но на основании (31.7) правая часть этого уравнения есть результат подстановки в правую часть первого из уравнений (28.6) вместо величин x_j функций (31.2). Следовательно, уравнение (31.8) имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = X(x, u_1(x), \ldots, u_n(x)). \quad (31.9)$$

Задача устойчивости для этого уравнения решается младшим членом в разложении его правой части. Если степень этого младшего члена нечетная, а коэффициент при нем отрицателен, то невозмущенное движение устойчиво и притом асимптотически. Во всех остальных случаях оно неустойчиво.

Таким образом, для решения задачи устойчивости в интересующем нас случае, когда характеристическое уравнение системы первого приближения имеет один нулевой корень при остальных корнях

с отрицательными вещественными частями, *можно* руководствоваться следующим правилом:

1) приводим уравнения возмущенного движения к виду (28.6);

2) приравниваем нулю правые части некритических уравнений и решаем относительно x_j полученные таким образом уравнения (31.1);

3) полученными функциями от x заменяем величины x_j в правой части критического уравнения, и если результат подстановки не обращается тождественно в нуль, то решаем задачу устойчивости для полученного таким образом одного уравнения с одной неизвестной функцией (31.9).

Для этого рассматриваем лишь младший член в разложении правой части уравнения (31.9). Пусть этот член будет gx^m. Тогда при m нечетном и $g < 0$ невозмущенное движение устойчиво и притом асимптотически. В других случаях оно неустойчиво.

§ 32. Примеры.

В предыдущем параграфе мы видели, что для решения задачи устойчивости в интересующем нас критическом случае необходимо прежде всего разрешить систему уравнений (31.1) относительно переменных x_s. Для действительного вычисления этого решения будем искать его в виде рядов

$$x_s(x) = B_s^{(1)}x + B_s^{(2)}x^2 + \ldots \qquad (s = 1, 2, \ldots, n) \qquad (32.1)$$

с неопределенными коэффициентами $B_s^{(i)}$. Для определения этих коэффициентов подставим ряды (32.1) в уравнения (31.1) и приравняем нулю коэффициенты при различных степенях x. Приравнивая нулю коэффициенты при первой степени x, мы получим систему уравнений

$$p_{s1}B_1^{(1)} + p_{s2}B_2^{(1)} + \ldots + p_{sn}B_n^{(1)} + p_s = 0 \quad (s = 1, 2, \ldots, n) \quad (32.2)$$

для определения $B_s^{(1)}$. Эти уравнения линейны, обладают отличным от нуля определителем и дают одно и только одно решение для $B_s^{(1)}$. Точно так же, приравнивая нулю коэффициенты при x^i, мы получим для определения $B_s^{(i)}$ систему уравнений вида

$$p_{s1}B_1^{(i)} + p_{s2}B_2^{(i)} + \ldots + p_{sn}B_n^{(i)} + P_s^{(i)} = 0 \quad (s = 1, 2, \ldots, n), \quad (32.3)$$

где $P_s^{(i)}$ — некоторые полиномы относительно $B_j^{(1)}, B_j^{(2)}, \ldots, B_j^{(i-1)}$.

Уравнения (32.3) дают возможность последовательно определять коэффициенты $B_s^{(i)}$ по мере возрастания их порядка.

После того как коэффициенты $B_s^{(i)}$ уже вычислены, необходимо подставить ряды (32.1) в функцию X вместо x_s. Младший член полученного таким образом ряда относительно x и решает, как мы видели, задачу устойчивости. Но так как нас интересует лишь младший член

указанного ряда, то при действительном проведении вычислений достаточно в общем случае подсчитать в рядах (32.1) только первые члены $B_s^{(1)}x$, которые и определят младший член в функции X. Если, однако, окажется, что в результате подстановки (32.1) в функцию X коэффициент при младшем члене благодаря некоторым зависимостям между коэффициентами функций X и X_s обратится в нуль, то придется в рядах (32.1) учесть и члены $B_s^{(2)}x^2$, а в некоторых случаях и члены более высоких порядков.

Заметим, что если все величины p_s равны нулю, то уравнения (32.2) дают $B_1^{(1)} = B_2^{(1)} = \ldots = B_n^{(1)} = 0$ и, следовательно, разложение функций $x_s(x)$ начинаются членами не ниже второго порядка. Вообще, если во всех функциях $p_s x + X_s(x, 0, \ldots, 0)$ нет членов до k-го порядка включительно, но хотя бы в одной из этих функций имеются члены $(k+1)$-го порядка, то разложения (32.1) начнутся членами $(k+1)$-го порядка.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Исследуем устойчивость регулируемой системы, описываемой дифференциальными уравнениями

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_s}{dt} &= -\rho_s x_s + f(\sigma) \quad (s = 1, 2, \ldots, n), \\ \frac{d\sigma}{dt} &= \beta_1 x_1 + \ldots + \beta_n x_n - f(\sigma), \end{aligned}\right\} \tag{32.4}$$

где ρ_s и β_s — постоянные, причем ρ_s положительны, а $f(\sigma)$ — некоторая непрерывная функция, удовлетворяющая условию

$$\sigma f(\sigma) > 0. \tag{32.5}$$

В § 12 были установлены достаточные условия устойчивости положения равновесия $\sigma = x_1 = \ldots = x_n = 0$ рассматриваемой системы при любых начальных возмущениях и при любом выборе функции $f(\sigma)$, удовлетворяющей условию (32.5). При этом было показано, что для выполнимости этих условий необходимо, чтобы удовлетворялось неравенство (12.9):

$$\frac{\beta_1}{\rho_1} + \frac{\beta_2}{\rho_2} + \ldots + \frac{\beta_n}{\rho_n} - 1 < 0. \tag{32.6}$$

Покажем сейчас[1]), что если $f(\sigma)$ является аналитической функцией, разложение которой начинается членами не ниже второго порядка, то условие (32.6) является необходимым для устойчивости. Более того, если требуется, чтобы равновесие было устойчиво при достаточно малых начальных возмущениях, то это условие является также и достаточным.

---

[1]) Лурье А. И., Об устойчивости одного класса регулируемых систем. ПММ, т. XV, вып. 5, 1951.

В самом деле, пусть

$$f(\sigma) = a_m\sigma^m + a_{m+1}\sigma^{m+1} + \ldots,$$

где $m \geqslant 2$.

Из (32.5) вытекает, что число m является обязательно нечетным и $a_m > 0$.

Характеристическое уравнение системы первого приближения имеет n отрицательных корней $-\rho_s$ и один корень, равный нулю. Эта система первого приближения имеет первый интеграл

$$x = \sigma + \frac{\beta_1}{\rho_1}x_1 + \ldots + \frac{\beta_n}{\rho_n}x_n = \text{const}.$$

Приняв его за новую переменную вместо σ, мы приведем уравнения (32.4) к виду (28.6):

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{\beta_1}{\rho_1} + \frac{\beta_2}{\rho_2} + \ldots + \frac{\beta_n}{\rho_n} - 1\right) f\left(x - \frac{\beta_1}{\rho_1}x_1 - \ldots - \frac{\beta_n}{\rho_n}x_n\right),$$

$$\frac{dx_s}{dt} = -\rho_s x_s + f\left(x - \frac{\beta_1}{\rho_1}x_1 - \ldots - \frac{\beta_n}{\rho_n}x_n\right).$$

Здесь

$$X^{(0)}(x) = \left(\frac{\beta_1}{\rho_1} + \ldots + \frac{\beta_n}{\rho_n} - 1\right) f(x), \quad X_s^{(0)}(x) = f(x), \quad p_s = 0;$$

следовательно, разложения функций $X_s^{(0)}(x)$ начинаются членами того же порядка, что и разложение функции $X^{(0)}(x)$. Поэтому мы имеем дело с частным случаем, рассмотренным в § 30, и в дальнейших преобразованиях уравнений нет необходимости.

Для того чтобы движение было устойчиво, необходимо, чтобы младший член в разложении $X^{(0)}(x)$ был нечетного порядка и имел отрицательный коэффициент. Первое из этих условий выполняется, а второе приводит к неравенству (32.6).

Пример 2[1]). Пусть предложена система дифференциальных уравнений возмущенного движения вида

$$\frac{dx}{dt} = (3m-1)x^2 - (m-1)y^2 - (n-1)z^2 + \\ + (3n-1)yz - 2mzx - 2nxy = X(x, y, z),$$

$$\frac{dy}{dt} = -y + x + (x - y + 2z)(y + z - x) = -y + x + Y(x, y, z),$$

$$\frac{dz}{dt} = -z + x - (x + 2y - z)(y + z - x) = -z + x + Z(x, y, z).$$

Характеристическое уравнение системы первого приближения имеет корни -1, -1 и 0. Система уже приведена к виду (28.6). Усло-

[1]) Ляпунов А. М., Общая задача об устойчивости движения., Гостехиздат, 1950.

вия § 30 здесь не выполнены, и мы должны поэтому воспользоваться общим приемом предыдущего параграфа.

Полагая

$$-y+x+Y=-z+x+Z=0, \tag{32.7}$$

попытаемся удовлетворить этим уравнениям относительно y и z рядами, расположенными по степеням x. Коэффициенты при первой степени x будут, очевидно, равны единице, и мы можем написать:

$$\left.\begin{aligned} y(x)&=x+A_2x^2+A_3x^3+\ldots,\\ z(x)&=x+B_2x^2+B_3x^3+\ldots.\end{aligned}\right\} \tag{32.8}$$

Подставляя эти ряды в функцию X, получим, что член второго порядка в ней выпадает, и функция эта примет вид

$$X(x,\ y(x),\ z(x))=(n-2m+1)(A_2+B_2)x^3+Cx^4+Dx^5+\ldots \tag{32.9}$$

Следовательно, в рассматриваемом случае необходимо подсчитать коэффициенты A_2 и B_2. Для их вычисления приравняем нулю коэффициенты при x^2 в уравнениях (32.7) после подстановки в них рядов (32.8). Тогда легко получим, что $A_2=2$, $B_2=-2$. Но тогда в выражении (32.9) обратится в нуль коэффициент при x^3 и необходимо поэтому вычислить C, а для этого придется вычислить коэффициенты A_3 и B_3. Приравнивая нулю в (32.7) коэффициенты при x^3, найдем: $A_3=B_3=-6$, после чего получим $C=4(5m-7n)$. Если этот коэффициент отличен от нуля, то невозмущенное движение неустойчиво, так как разложение функции (32.9) начинается четным порядком. Допустим, что $5m=7n$. Тогда, вычисляя A_4 и B_4, найдем $A_4=-30$, $B_4=30$, после чего получим $D=24(m-n)$. Этот коэффициент будет отрицательным при m и n отрицательных и положительным при m и n положительных. В первом случае невозмущенное движение асимптотически устойчиво, а во втором случае оно неустойчиво.

Если $m=n=0$, то требуется рассмотреть дальнейшие приближения. Однако в этом случае справедливо тождество

$$2X=(z-2y-x)(-y+x+Y)+(y-2z-2x)(-z+x+Z),$$

следовательно, на основании (32.7) $X(x,\ y(x),\ z(x))=0$, и имеет место особенный случай.

Пример 3[1]). Пусть система уравнений возмущенного движения имеет вид

$$\frac{dx}{dt}=ax^2+bxy+cy^2=X(x,\ y),$$

$$\frac{dy}{dt}=-y+kx+lx^2+mxy+ny^2=-y+kx+Y(x,\ y),$$

где a, b, c, k, l, m, n — постоянные.

[1]) Ляпунов А. М., Общая задача об устойчивости движения, Гостехиздат, 1950.

Составляя уравнение

$$-y+kx+lx^2+mxy+ny^2=0, \tag{32.10}$$

будем иметь:

$$y(x)=kx+B_2x^2+B_3x^3+\ldots$$

и, подставляя этот ряд в $X(x, y)$, получим:

$$X(x, y(x))=A_2x^2+A_3x^3+A_4x^4+\ldots,$$

где

$$A_2=a+bk+ck^2, \quad A_3=(b+2ck)B_2,$$

$$A_4=(b+2ck)B_3+cB_2^2.$$

Для того чтобы движение было устойчивым, необходимо, чтобы выполнялось условие

$$A_2=a+bk+ck^2=0. \tag{32.11}$$

Допустим, что это условие выполнено. Тогда необходимо рассмотреть коэффициент A_3, для определения которого нужно вычислить B_2. Вычисляя эту величину, найдем:

$$B_2=l+mk+nk^2. \tag{32.12}$$

Здесь необходимо рассмотреть два случая, в зависимости от того, будет ли величина B_2 равна нулю или нет. Допустим сначала, что B_2 не нуль. Тогда если $b+2ck\neq 0$, то невозмущенное движение асимптотически устойчиво при $B_2(b+2ck)<0$ и неустойчиво при $B_2(b+2ck)>0$. Если же $b+2ck=0$, то необходимо рассмотреть коэффициент A_4. Если $c\neq 0$, то невозмущенное движение неустойчиво. Если же $c=0$, то вследствие допущенных равенств будет $a=0$ и $b=0$. Следовательно, функция $X(x, y)$ обратится тождественно в нуль, и мы будем иметь дело с особенным случаем.

Допустим теперь, что $B_2=0$. Тогда на основании (32.12) уравнение (32.10) будет иметь решение $y=kx$, которое на основании (32.11) обратит функцию $X(x, y(x))$ тождественно в нуль. Следовательно, опять получится особенный случай.

§ 33. Особенный случай.

Рассмотрим теперь особенный случай. Допустим, следовательно, что при замене в функции $X(x, x_1, \ldots, x_n)$ величин x_s функциями $u_s(x)$, удовлетворяющими уравнениям (31.3), получится тождественно нуль. В этом случае при преобразовании уравнений (28.6) при помощи подстановки (31.4) мы будем иметь в полученных таким образом уравнениях (31.5) соотношения

$$\overline{X}^{(0)}(x, 0, \ldots, 0)=\overline{X}_s(x, 0, \ldots, 0)=0 \quad (s=1, 2, \ldots, n). \tag{33.1}$$

Эти соотношения непосредственно вытекают из (31.6).

Но при выполнении соотношений (33.1) уравнения (31.5) имеют решение

$$x = c, \quad \xi_1 = \ldots = \xi_n = 0,$$

где c — произвольная постоянная. Следовательно, уравнения (28.6) имеют решение

$$x = c, \quad x_s = u_s(c). \tag{33.2}$$

Тривиальное решение $x = x_1 = \ldots = x_n = 0$ содержится в семействе (33.2) и соответствует нулевому значению постоянной c [1]).

Тривиальному решению соответствует исследуемое невозмущенное установившееся движение рассматриваемой динамической системы. Точно так же решению (33.2) соответствуют другие установившиеся движения рассматриваемой системы. Таким образом, в особенном случае исследуемое невозмущенное движение принадлежит к семейству установившихся движений.

Справедливо и обратное. Пусть предложенная динамическая система описывается уравнениями

$$\frac{dy_l}{dt} = Y_l(y_1, \ldots, y_{n+1}) \qquad (l = 1, 2, \ldots, n+1), \tag{33.3}$$

где правые части не зависят явно от t, поскольку мы рассматриваем установившиеся движения. Допустим, что динамическая система имеет установившееся движение, т. е. что уравнения (33.3) имеют частное решение $y_l = a_l$, где a_l — постоянные. Эти постоянные определяются системой уравнений

$$Y_l(a_1, \ldots, a_{n+1}) = 0 \qquad (l = 1, 2, \ldots, n+1). \tag{33.4}$$

Может случиться, что уравнения (33.4) имеют не изолированное решение, а целое семейство решений, зависящее от одного произвольного параметра λ, так что эти уравнения удовлетворяются при $y_l = a_l(\lambda)$, где $a_l(\lambda)$ — некоторые функции от λ. Следовательно, рассматриваемая динамическая система имеет однопараметрическое семейство установившихся движений. Примем одно из движений этого семейства, соответствующее, например, значению λ_0 параметра, за невозмущенное и составим дифференциальные уравнения возмущенного движения. Покажем, что при этом один корень характеристического уравнения будет обязательно равен нулю, и если остальные корни будут иметь отрицательные вещественные части, то рассматриваемый случай будет обязательно особенным.

Мы предполагаем при этом, как во всей этой главе, что уравнения (33.3) аналитичны в некоторой области и что исследуемое невозмущенное движение лежит в этой области.

---

[1]) См. примечание в конце книги (стр. 521).

Искомые уравнения возмущенного движения получим, преобразуя (33.3) при помощи подстановки

$$x_i = y_i - a_i(\lambda_0).$$

Таким путем получаем:

$$\frac{dx_i}{dt} = q_{i1}x_1 + \ldots + q_{i,\,n+1}x_{n+1} + X_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n+1), \tag{33.5}$$

где X_i — аналитические функции переменных $x_1, \ldots, x_{n+1}$, разложения которых по степеням этих переменных начинаются членами не ниже второго порядка.

Рассмотрим уравнения

$$F_i = q_{i1}x_1 + \ldots + q_{i,\,n+1}x_{n+1} + X_i = 0 \tag{33.6}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n+1).$$

Эти уравнения удовлетворяются при $x_1 = \ldots = x_{n+1} = 0$. Если бы в этой точке функциональный определитель системы (33.6)

$$\left\{\frac{\partial(F_1, \ldots, F_{n+1})}{\partial(x_1, \ldots, x_{n+1})}\right\}_{x_1 = \ldots = x_{n+1} = 0} = \begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1,\,n+1} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2,\,n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q_{n+1,\,1} & q_{n+1,\,2} & \cdots & q_{n+1,\,n+1} \end{vmatrix} \tag{33.7}$$

был отличен от нуля, то никакого другого решения в окрестности начала координат уравнения (33.6) не имели бы. Однако в рассматриваемом случае это неверно. Действительно, поскольку дифференциальные уравнения (33.3) имеют решение $y_i = a_i(\lambda)$, то дифференциальные уравнения (33.5) должны иметь решение $x_i = a_i(\lambda) - a_i(\lambda_0)$. Поэтому уравнения (33.6) должны удовлетворяться при $x_i = a_i(\lambda) - a_i(\lambda_0)$. Это решение, зависящее от произвольного параметра, лежит при λ, достаточно близком к λ_0, в окрестности начала координат и переходит в тривиальное при $\lambda = \lambda_0$. Итак, решение $x_1 = \ldots = x_{n+1} = 0$ уравнений (33.6) не является изолированным, и поэтому определитель (33.7) необходимо равен нулю. Следовательно, характеристическое уравнение системы (33.5) имеет, по крайней мере, один нулевой корень.

Допустим, что остальные n корней характеристического уравнения отличны от нуля. Преобразуем систему (33.5) к виду (28.6):

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = X(x, x_1, \ldots, x_n), \\ &\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + p_s x + X_s(x, x_1, \ldots, x_n) \\ &\qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \end{aligned}\right\} \tag{33.8}$$

где уравнение

$$D(\lambda)=\begin{vmatrix} p_{11}-\lambda & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22}-\lambda & \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0 \qquad (33.9)$$

не имеет нулевого корня. При этом система (33.8) должна иметь решение $x_s=f_s(\lambda)$ $(s=1, 2, \dots, n)$, $x=f(\lambda)$, в которое переходит решение $x_i=a_i(\lambda)-a_i(\lambda_0)$ $(i=1, 2, \dots, n+1)$ системы (33.5). Здесь все функции f, f_s обращаются в нуль при $\lambda=\lambda_0$ и $f_s(\lambda)=a_s(\lambda)-a_s(\lambda_0)$ $(s=1, 2, \dots, n)$.

Следовательно, уравнения

$$\left.\begin{aligned} X(x, x_1, \dots, x_n)=0, \\ p_{s1}x_1+\dots+p_{sn}x_n+p_sx+X_s(x, x_1, \dots, x_n)=0 \\ (s=1, 2, \dots, n) \end{aligned}\right\} \qquad (33.10)$$

должны удовлетворяться решением $x=f(\lambda)$, $x_s=f_s(\lambda)$, содержащим тривиальное решение $x=x_1=\dots=x_n=0$.

Но так как $D(0)\neq 0$, то последние n уравнений (33.10) могут быть разрешены относительно x_s и дадут $x_s=u_s(x)$, где u_s — функции, рассмотренные в § 31. Подставляя эти функции в первое уравнение (33.10), мы получим одно уравнение для определения x. Это уравнение должно удовлетворяться при $x=f(\lambda)$, т. е. иметь бесчисленное множество решений, соответствующих различным значениям λ, что, очевидно, возможно лишь только тогда, когда $X(x, u_1(x), \dots, u_n(x))\equiv 0$. Если при этом все корни уравнения (33.9) имеют отрицательные вещественные части, то мы будем иметь особенный случай.

Примером динамической системы, имеющей семейство установившихся движений, зависящее от произвольного параметра, может служить твердое тело, вращающееся по инерции вокруг закрепленной точки. Уравнения движения такого тела

$$A\frac{dp}{dt}+(C-B)qr=0,$$

$$B\frac{dq}{dt}+(A-C)rp=0,$$

$$C\frac{dr}{dt}+(B-A)pq=0,$$

где p, q, r — проекции вектора мгновенной угловой скорости на оси координат, направленные по главным осям инерции в закрепленной точке, а A, B, C — моменты инерции относительно этих осей, имеют три семейства решений:

$$p=\omega, \quad q=r=0; \quad q=\omega, \quad r=p=0; \quad r=\omega, \quad p=q=0,$$

зависящих каждое от произвольной постоянной ω. Дифференциальные уравнения возмущенного движения, когда за невозмущенное движение принято одно из движений первого семейства, имеют вид (23.1)

$$\left.\begin{aligned} A\frac{dx}{dt}+(C-B)\,yz&=0,\\ B\frac{dy}{dz}+(A-C)(x+\omega)\,z&=0,\\ C\frac{dz}{dt}+(B-A)(x+\omega)\,y&=0.\end{aligned}\right\}\qquad(33.11)$$

Характеристическое уравнение первого приближения действительно имеет один нулевой корень (см. § 22), и так как в переменных x, y, z рассматриваемому семейству движений отвечают нулевые значения переменных y и z, то уравнения (33.11) уже имеют форму (31.5). Действительно, правые части всех трех уравнений обращаются в нуль при $y=z=0$.

Необходимо, однако, указать, что вещественные части остальных двух корней характеристического уравнения не могут быть одновременно отрицательными, и потому уравнения (33.11) не принадлежат к типу сейчас рассматриваемых. Напомним, что полное решение задачи устойчивости для системы (33.11) дано в § 23.

§ 34. Решение задачи устойчивости в особенном случае.

Итак, в особенном случае невозмущенное движение принадлежит к семейству установившихся движений, которое в переменных x, x_s определяется формулами (33.2), а в переменных x, ξ_s, приводящих уравнения возмущенного движения к виду (31.5), — формулами

$$x=c,\quad \xi_1=\ldots=\xi_n=0.\qquad(34.1)$$

В особенном случае невозмущенное движение *всегда устойчиво*. Устойчивость при этом не будет асимптотической. Однако всякое возмущенное движение, достаточно близкое к невозмущенному, не стремясь при $t\to\infty$ к невозмущенному движению, стремится все же к одному из установившихся движений вышеуказанного семейства. Другими словами, если пользоваться переменными x, ξ_s, то для всякого решения $x(t)$, $\xi_s(t)$ уравнений возмущенного движения, для которого начальные значения x^0 и ξ_s^0 достаточно малы, справедливы равенства

$$\lim_{t\to\infty} x(t)=\alpha,\qquad \lim_{t\to\infty}\xi_s(t)=0,$$

где α — некоторая определенная постоянная (зависящая от взятого возмущенного движения).

Точно такими же свойствами, как и невозмущенное движение, обладают все движения семейства (34.1), достаточно близкие к невозмущенному.

Это предложение является частным случаем более общей теоремы Ляпунова, которую мы здесь и приводим [1]).

Допустим, что дифференциальные уравнения возмущенного движения имеют вид

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy_i}{dt} = Y_i(t, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k) \\ &\qquad\qquad (i = 1, 2, \ldots, k), \\ &\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + X_s(t, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k) \\ &\qquad\qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \end{aligned}\right\} \tag{34.2}$$

где Y_i, X_s — ограниченные функции t при всех $t \geqslant 0$ и аналитические функции переменных y_i, x_s в некоторой не зависящей от t окрестности начала координат, разложения которых по степеням этих переменных начинаются членами не ниже второго порядка. При этом имеют место соотношения

$$Y_i(t, 0, \ldots, 0, y_1, \ldots, y_k) = X_s(t, 0, \ldots, 0, y_1, \ldots, y_k) = 0,$$

т. е. функции Y_i, X_s обращаются в нуль при равенстве нулю одних лишь переменных x_s.

Коэффициенты p_{sj} таковы, что уравнение

$$\begin{vmatrix} p_{11} - \lambda & p_{12} & \ldots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} - \lambda & \ldots & p_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{n1} & p_{n2} & \ldots & p_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{34.3}$$

имеет корни только с отрицательными вещественными частями.

Уравнения (34.2) допускают частное решение:

$$y_1 = c_1, \ldots, y_k = c_k, \quad x_1 = \ldots = x_n = 0, \tag{34.4}$$

определяющее семейство установившихся движений, зависящее от k произвольных постоянных c_i и содержащее исследуемое невозмущенное движение. Если X_s и Y_i не содержат t и $k = 1$, то система (34.2) переходит в систему вида (31.5) в особенном случае.

Теорема. *Если уравнения возмущенного движения имеют вид* (34.2), *то невозмущенное движение устойчиво. При этом всякое возмущенное движение, достаточно близкое к невозмущенному, стремится с неограниченным возрастанием времени к одному из установившихся движений семейства* (34.4).

---

[1]) См. Малкин И. Г., Об устойчивости движения в смысле Ляпунова, Матем. сб., т. 3, вып. 1, 1938. Теорема Ляпунова обобщена нами в этой работе, из которой мы заимствуем приводимое здесь доказательство, совершенно отличающееся от доказательства Ляпунова.

Теми же свойствами обладают все движения семейства (34.4), если только численные значения параметров c_i достаточно малы.

Доказательство. Исследуем сначала невозмущенное движение.

По свойству корней уравнения (34.3) существует определенно-положительная квадратичная форма $V(x_1, \ldots, x_n)$ переменных x_s, удовлетворяющая уравнению

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s}(p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n) = -\sum_{s=1}^{n} x_s^2.$$

Преобразуем вторую группу уравнений (34.2) при помощи подстановки

$$\xi_s = e^{\alpha t} x_s, \tag{34.5}$$

где α — достаточно малая положительная постоянная. Преобразованная система примет вид

$$\frac{d\xi_s}{dt} = p_{s1}\xi_1 + \ldots + (p_{ss} + \alpha)\xi_s + \ldots + p_{sn}\xi_n + \\ + e^{\alpha t} X_s(t, e^{-\alpha t}\xi_1, \ldots, e^{-\alpha t}\xi_n, y_1, \ldots, y_k) \tag{34.6}$$
$$(s = 1, 2, \ldots, n).$$

Составим полную производную по времени функции $V(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ в силу уравнений (34.6). Будем иметь:

$$\frac{dV}{dt} = -\sum_{s=1}^{n} \xi_s^2 + 2\alpha V(\xi_1, \ldots, \xi_n) + \\ + e^{\alpha t} \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial \xi_s} X_s(t, e^{-\alpha t}\xi_1, \ldots, e^{-\alpha t}\xi_n, y_1, \ldots, y_k).$$

Положительную постоянную α можно выбрать настолько малой, чтобы форма

$$-\sum_{s=1}^{n} \xi_s^2 + 2\alpha V(\xi_1, \ldots, \xi_n)$$

была определенно-отрицательной. С другой стороны, так как функции X_s обращаются в нуль при $x_1 = \ldots = x_n = 0$ и по отношению к t они ограничены, то в области

$$t \geqslant 0, \ |\xi_s| \leqslant \beta, \ |y_i| \leqslant \beta \quad (i = 1, 2, \ldots, k; \ s = 1, 2, \ldots, n) \tag{34.7}$$

будет выполняться неравенство

$$\left| e^{\alpha t} \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial \xi_s} X_s(t, e^{-\alpha t}\xi_1, \ldots, e^{-\alpha t}\xi_n, y_1, \ldots, y_k) \right| < \\ < P\{|\xi_1| + \ldots + |\xi_n|\}^2, \tag{34.8}$$

если только число β достаточно мало. При этом число β можно выбрать настолько малым, чтобы число P было сколь угодно малым. Это вытекает из того обстоятельства, что функции X_s не содержат в своих разложениях членов ниже второго порядка, и поэтому все члены левой части неравенства (34.8), имея по крайней мере второй порядок относительно ξ_s, будут иметь общий порядок не ниже третьего.

Поэтому на основании леммы 2 § 7 число β можно выбрать настолько малым, чтобы в области (34.7) функция $\frac{dV}{dt}$ принимала только отрицательные значения. Мы будем предполагать, что число β действительно выбрано указанным образом.

Установив это, рассмотрим произвольное решение $\xi_s(t)$, $y_i(t)$ уравнений возмущенного движения с начальными значениями (при $t=0$) ξ_s^0, y_i^0, удовлетворяющими неравенствам

$$|\xi_s^0| \leqslant \eta, \quad |y_i^0| \leqslant \eta \quad (s=1, 2, \ldots, n;\ i=1, 2, \ldots, k), \tag{34.9}$$

где $\eta < \beta$.

Для этого решения условия

$$|\xi_s(t)| \leqslant \beta, \quad |y_i(t)| \leqslant \beta \tag{34.10}$$

будут выполняться по крайней мере для значений t, близких к начальному. Пусть t — такой момент времени, для которого условия (34.10) еще выполняются. Тогда во всем промежутке $(0, t)$ выражение $\frac{dV}{dt}$ будет отрицательным, и мы можем написать:

$$V(\xi_1, \ldots, \xi_n) = V(\xi_1^0, \ldots, \xi_n^0) + \int_0^t \frac{dV}{dt}\,dt < V(\xi_1^0, \ldots, \xi_n^0). \tag{34.11}$$

Так как форма V определенно-положительна, то из (34.11) вытекает, что в рассматриваемом промежутке времени выполняются неравенства

$$|\xi_s(t)| < A \quad (s=1, 2, \ldots, n), \tag{34.12}$$

причем число A можно сделать сколь угодно малым подходящим выбором величин $\xi_1^0, \ldots, \xi_n^0$, т. е. если число η в неравенствах (34.9) взять достаточно малым.

Из (34.12) вытекает, что в указанном промежутке времени переменные x_s удовлетворяют неравенствам

$$|x_s(t)| < Ae^{-\alpha t} \quad (s=1, 2, \ldots, n). \tag{34.13}$$

Эти неравенства показывают, что для функций Y_i в указанном промежутке справедливы оценки

$$|Y_i(t, x_1(t), \ldots, x_n(t), y_1(t), \ldots, y_k(t))| < AMe^{-\alpha t}, \tag{34.14}$$

где M — некоторое положительное число, так как эти функции обращаются в нуль при $x_1 = \ldots = x_n = 0$ и ограничены относительно t.

Следовательно, первая группа уравнений (34.2), из которой вытекает

$$y_i(t) = y_i^0 + \int_0^t Y_i(t, x_1(t), \ldots, x_n(t), y_1(t), \ldots, y_k(t))\,dt,$$

дает:

$$|y_i(t)| < |y_i^0| + AM \int_0^t e^{-\alpha t}\,dt =$$

$$= |y_i^0| + \frac{AM(-e^{-\alpha t}+1)}{\alpha} < |y_i^0| + \frac{AM}{\alpha} \qquad (34.15)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, k).$$

Пусть теперь ε — произвольное сколь угодно малое число, которое мы во всяком случае будем считать меньше β. Выберем число η в неравенствах (34.9) таким образом, чтобы число A было меньше ε и чтобы правая часть неравенств (34.15) была также меньше ε. Тогда из (34.12) и (34.15) вытекает, что во всем промежутке времени, в течение которого выполняются неравенства (34.10), будут также выполняться неравенства

$$|\xi_s(t)| < \varepsilon, \quad |y_i(t)| < \varepsilon \quad (s = 1, 2, \ldots, n;\ i = 1, 2, \ldots, k). \qquad (34.16)$$

Но так как $\varepsilon < \beta$, то отсюда следует, что неравенства (34.10), а вместе с ними и неравенства (34.16) выполняются при всех значениях t. Действительно, если бы условия (34.10), которые в начальный момент времени выполняются со знаками неравенства, когда-нибудь нарушились, то в некоторый момент времени хотя бы одна из величин $|y_i(t)|$, $|\xi_s(t)|$ достигла бы значения β. Это, однако, невозможно, так как в этот момент времени условия (34.16) еще оставались бы в силе и, следовательно, все величины $|\xi_s(t)|$, $|y_i(t)|$ были бы меньше ε.

Итак, если в начальный момент времени выполняются условия (34.9), то в дальнейшем все время будут выполняться условия (34.16). Следовательно, невозмущенное движение устойчиво по отношению к переменным ξ_s, y_i. Но тогда оно и подавно устойчиво по отношению к переменным x_s, y_i.

Покажем теперь, что всякое возмущенное движение, достаточно близкое к невозмущенному, асимптотически приближается при $t = \infty$ к одному из движений семейства (34.4), т. е. что

$$\lim_{t\to\infty} x_s(t) = 0, \qquad \lim_{t\to\infty} y_i(t) = \alpha_i, \qquad (34.17)$$

где α_i — некоторые постоянные.

Первая группа соотношений (34.17) непосредственно вытекает из (34.13). Для доказательства второй группы замечаем, что

$$\lim_{t\to\infty} y_i(t) = y_i^0 + \int_0^\infty Y_i(t, x_1(t), \ldots, x_n(t), y_1(t), \ldots, y_k(t))\,dt. \quad (34.18)$$

Интегралы, стоящие в правых частях (34.18), сходятся на основании оценок (34.14), которые остаются справедливыми, по доказанному, при всех значениях t. Отсюда непосредственно следует справедливость второй группы соотношений (34.17), причем величины α_i равны правым частям равенств (34.18).

Докажем теперь, что такими же свойствами, как и невозмущенное движение, обладают все движения семейства (34.4), если только величины $|c_i|$ достаточно малы. С этой целью, приняв какое-нибудь движение семейства (34.4) за невозмущенное, составим соответствующие дифференциальные уравнения возмущенного движения, положив в (34.2)

$$u_i = y_i - c_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

где u_i — новые переменные. Тогда получим:

$$\left.\begin{aligned} \frac{du_i}{dt} &= U_i(t, x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_k) + \alpha_{i1}x_1 + \ldots + \alpha_{in}x_n, \\ \frac{dx_s}{dt} &= (p_{s1} + c_{s1})x_1 + \ldots + (p_{sn} + c_{sn})x_n + \\ &\qquad + \overline{X}_s(t, x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_k), \end{aligned}\right\} \quad (34.19)$$

где U_i, $\overline{X}_s$ — функции такого же типа, как и Y_i, X_s, а величины α_{ij} и $c_{s\sigma}$ являются функциями от t и $c_1, \ldots, c_k$. По отношению к t функции α_{ij} и $c_{s\sigma}$ ограничены, а по отношению к $c_1, \ldots, c_k$ они аналитичны и обращаются в нуль при $c_1 = \ldots = c_k = 0$. Поэтому при $|c_i|$ достаточно малых величины α_{ij} и $p_{s\sigma}$ будут сколь угодно малы.

Уравнения (34.19) отличаются от уравнений (34.2) только тем, что в их правых частях добавились новые члены, линейные относительно x_s. Присутствие этих членов в правых частях первой группы уравнений (34.19) ничего не меняет в предыдущих рассуждениях, так как мы в них нигде не пользовались тем обстоятельством, что разложения функций Y_i не содержат линейных членов. Важно было только, чтобы функции Y_i обращались в нуль при равенстве нулю одних лишь переменных x_s, что для первой группы уравнений (34.19) по-прежнему выполняется.

Присутствие новых линейных относительно x_s членов во второй группе уравнений (34.19) также ничего не изменит, если только

квадратичная форма

$$-\sum_{s=1}^{n} x_s^2 + 2\alpha V + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s}(c_{s1}x_1 + \ldots + c_{sn}x_n)$$

будет по-прежнему определенно-отрицательной, а это действительно будет иметь место, если только величины $|c_i|$ достаточно малы, что мы и будем предполагать.

Таким образом, к уравнениям (34.19) применимы все предыдущие рассуждения, и следовательно, при достаточно малых $|c_i|$ для движений (34.4) справедливы те же заключения, что и для первоначального невозмущенного движения $x_1 = \ldots = x_n = y_1 = \ldots = y_k = 0$. Таким образом, теорема доказана.

Доказанная теорема полностью исчерпывает исследование особенного случая, вместе с ним исследование критического случая одного нулевого корня характеристического уравнения. В следующем параграфе мы начнем рассмотрение второго критического случая, когда характеристическое уравнение имеет пару чисто мнимых корней при остальных корнях с отрицательными вещественными частями.

§ 35. Случай пары чисто мнимых корней. Приведение уравнений возмущенного движения к специальному виду.

Рассмотрим систему $(n+2)$-го порядка

$$\frac{dz_j}{dt} = q_{j1}z_1 + \ldots + q_{j,\,n+2}z_{n+2} + Z_j(z_1, \ldots, z_{n+2}) \qquad (35.1)$$
$$(j = 1, 2, \ldots, n+2),$$

где Z_j — функции переменных $z_1, \ldots, z_{n+2}$, аналитические в некоторой окрестности начала координат, разложения которых по степеням этих переменных начинаются членами не ниже второго порядка. Мы будем предполагать, что характеристическое уравнение

$$D(\rho) = \begin{vmatrix} q_{11}-\rho & q_{12} & \cdots & q_{1,\,n+2} \\ q_{21} & q_{22}-\rho & \cdots & q_{2,\,n+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q_{n+2,\,1} & q_{n+2,\,2} & \cdots & q_{n+2,\,n+2}-\rho \end{vmatrix} = 0 \qquad (35.2)$$

системы первого приближения

$$\frac{dz_j}{dt} = q_{j1}z_1 + \ldots + q_{j,\,n+2}z_{n+2} \qquad (35.3)$$

имеет пару чисто мнимых корней $\pm\lambda i$ и n корней с отрицательными вещественными частями.

Введем в уравнения (35.3) вместо двух каких-нибудь переменных z_j две новые переменные x и y при помощи подстановки:

$$x = a_1 z_1 + a_2 z_2 + \ldots + a_{n+2} z_{n+2},$$
$$y = b_1 z_1 + b_2 z_2 + \ldots + b_{n+2} z_{n+2},$$

где a_j и b_j — некоторые постоянные. Мы постараемся эти постоянные подобрать таким образом, чтобы два уравнения системы (35.3) приняли вид

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda y, \quad \frac{dy}{dt} = \lambda x.$$

Мы должны, следовательно, иметь:

$$\sum_{j=1}^{n+2} a_j (q_{j1} z_1 + \ldots + q_{j,\, n+2} z_{n+2}) = -\lambda \sum_{j=1}^{n+2} b_j z_j,$$
$$\sum_{j=1}^{n+2} b_j (q_{j1} z_1 + \ldots + q_{j,\, n+2} z_{n+2}) = \lambda \sum_{j=1}^{n+2} a_j z_j.$$

Приравнивая в обеих частях этих равенств коэффициенты при z_k, мы получим для определения a_j и b_j систему $2n+4$ линейных однородных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &q_{1k} a_1 + q_{2k} a_2 + \ldots + q_{n+2,\, k} a_{n+2} + \lambda b_k = 0, \\ &q_{1k} b_1 + q_{2k} b_2 + \ldots + q_{n+2,\, k} b_{n+2} - \lambda a_k = 0 \\ &\qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n+2). \end{aligned}\right\} \tag{35.4}$$

Эту систему легко привести к системе из $n+2$ уравнений, если ввести вместо неизвестных a_j и b_j комплексные неизвестные $c_j = a_j + ib_j$. Действительно, умножая уравнения второй группы системы (35.4) на i и складывая с соответствующими уравнениями первой группы, получим однородную систему из $n+2$ уравнений

$$q_{1k} c_1 + q_{2k} c_2 + \ldots + q_{n+2,\, k} c_{n+2} - \lambda i c_k = 0 \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n+2).$$

Определитель этой системы, равный $D(\lambda i)$, обращается в нуль, так как уравнение (35.2) имеет, по условию, корень λi. Следовательно, эта система допускает нетривиальное решение для c_j. Выделяя в нем вещественные и мнимые части, мы получим решение системы (35.4).

Приняв найденные таким образом переменные x и y вместо двух каких-нибудь переменных z_j и обозначив остальные переменные z_j через x_j, мы приведем систему (35.3) к виду

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda y, \quad \frac{dy}{dt} = \lambda x,$$
$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1} x_1 + \ldots + p_{sn} x_n + p_s x + q_s y \quad (s = 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

где p_{sj}, p_s, q_s — некоторые постоянные. Если указанную подстановку сделать в уравнениях (35.1), то они примут вид

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dx}{dt}=-\lambda y+X(x,\ y,\ x_1,\ \ldots,\ x_n),\\
&\frac{dy}{dt}=\lambda x+Y(x,\ y,\ x_1,\ \ldots,\ x_n),\\
&\frac{dx_s}{dt}=p_{s1}x_1+\ldots+p_{sn}x_n+p_sx+q_sy+X_s(x,\ y,\ x_1,\ \ldots,\ x_n)\\
&\qquad\qquad (s=1,\ 2,\ \ldots,\ n),
\end{aligned}\right\}\qquad(35.5)$$

где X, Y, X_s — функции такого же вида, как и Z_j.

Полученный вид дифференциальных уравнений возмущенного движения будет исходным для дальнейшего исследования.

Так как характеристическое уравнение любой линейной системы не изменяется при линейном преобразовании, то характеристическое уравнение линейной части системы (35.5) должно совпадать с характеристическим уравнением (35.2). Но характеристическое уравнение линейной части системы (35.5) распадается на уравнение $\rho^2+\lambda^2=0$, дающее корни $\pm\lambda i$, и уравнение

$$\begin{vmatrix}
p_{11}-\rho & p_{12} & \ldots & p_{1n}\\
p_{21} & p_{22}-\rho & \ldots & p_{2n}\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
p_{n1} & p_{n2} & \ldots & p_{nn}-\rho
\end{vmatrix}=0.\qquad(35.6)$$

Следовательно, все корни уравнения (35.6) имеют отрицательные вещественные части.

§ 36. Системы второго порядка. Первый способ решения задачи.

Прежде чем исследовать общий случай, рассмотрим подробно частный случай, когда $n=0$ и когда, следовательно, дифференциальные уравнения возмущенного движения образуют систему второго порядка вида

$$\frac{dx}{dt}=-\lambda y+X(x,\ y),\quad \frac{dy}{dt}=\lambda x+Y(x,\ y),\qquad(36.1)$$

где X и Y начинаются членами не ниже второго порядка.

В рассматриваемом случае можно не только исследовать характер невозмущенного движения, но и дать общую картину поведения интегральных кривых уравнений (36.1) в окрестности начала координат[1]).

---

[1]) Вид интегральных кривых, определяемых уравнениями (36.1), изучил впервые Пуанкаре. (См. Пуанкаре А., О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями, Гостехиздат, 1947).

С этой целью введем в рассмотрение полярные координаты r и ϑ при помощи подстановки

$$x = r\cos\vartheta, \quad y = r\sin\vartheta. \tag{36.2}$$

Уравнения (36.1) примут при этом вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= X(r\cos\vartheta,\ r\sin\vartheta)\cos\vartheta + Y(r\cos\vartheta,\ r\sin\vartheta)\sin\vartheta = \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = rR(r,\ \vartheta), \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \lambda + \frac{1}{r}\{Y(r\cos\vartheta,\ r\sin\vartheta)\cos\vartheta - \\ &\qquad - X(r\cos\vartheta,\ r\sin\vartheta)\sin\vartheta\} = \lambda + \theta(r,\ \vartheta), \end{aligned}\right\} \tag{36.3}$$

где $R(r,\ \vartheta)$, $\theta(r,\ \vartheta)$ — функции переменных r и ϑ, разлагающиеся в ряды по степеням r, сходящиеся при r, достаточно малом, и обращающиеся в нуль при $r = 0$. Коэффициенты этих разложений являются периодическими функциями ϑ периода 2π, причем каждый из них является простым полиномом относительно $\cos\vartheta$ и $\sin\vartheta$ и может быть поэтому представлен конечной суммой синусов и косинусов целых кратностей ϑ.

Для получения уравнения интегральных кривых исключим из (36.3) время t. Будем иметь:

$$\frac{dr}{d\vartheta} = \frac{Rr}{\lambda + \theta} = r^2R_2(\vartheta) + r^3R_3(\vartheta) + \ldots \tag{36.4}$$

Ряд, стоящий в правой части уравнения (36.4), сходится при r достаточно малом, причем коэффициенты $R_2(\vartheta)$, $R_3(\vartheta)$, ... также представляют собой полиномы относительно $\cos\vartheta$ и $\sin\vartheta$.

Уравнение (36.4) имеет тривиальное решение $r = 0$. Следовательно, одной из интегральных кривых является начало координат. Так как правая часть уравнения (36.4) аналитична в окрестности начала координат, то через каждую точку этой окрестности на основании теоремы существования решений дифференциальных уравнений проходит одна и только одна интегральная кривая. Отсюда следует, что ни одна интегральная кривая, выходящая из какой-нибудь точки окрестности начала координат, не пересекает этой точки.

Из аналитичности правой части уравнения (36.4) вытекает также, что любое решение $r = r(\vartheta,\ c)$ этого уравнения, определяемое начальным условием

$$r(0,\ c) = c, \tag{36.5}$$

может быть разложено в ряд по степеням c:

$$r(\vartheta,\ c) = r_1(\vartheta)c + r_2(\vartheta)c^2 + \ldots, \tag{36.6}$$

сходящийся, если c достаточно мало. Радиус сходимости этого ряда зависит от интервала изменения ϑ. Но как бы велик ни был этот

интервал, для него всегда найдется такое достаточно малое число γ, что ряд (36.6) будет сходиться при всех $|c| \leqslant \gamma$. Мы будем предполагать число γ настолько малым, чтобы ряд (36.6) сходился при $|\vartheta| \leqslant 2\pi$.

Для вычисления коэффициентов r_i подставим ряд (36.6) в обе части уравнения (36.4) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях c. Пусть F_i обозначает коэффициент при c^i в разложении по степеням c правой части уравнения (36.4) после подстановки в нее (36.6), так что имеем тождественно:

$$\{r^2R_2(\vartheta) + r^3R_3(\vartheta) + \ldots\}_{r=r_1(\vartheta)c+r_2(\vartheta)c^2+\ldots} = \\ = F_2c^2 + F_3c^3 + \ldots \qquad (36.7)$$

Функции F_i представляют собой, очевидно, полиномы от r_2, $r_3, \ldots, r_{i-1}$ с коэффициентами, зависящими от $R_2, R_3, \ldots, R_i$ и являющимися, следовательно, периодическими функциями ϑ периода 2π (полиномами относительно $\cos\vartheta$ и $\sin\vartheta$). В частности, имеем:

$$F_2 = R_2r_1^2, \quad F_3 = R_3r_1^3 + 2R_2r_1r_2.$$

Уравнения, определяющие функции r_i, имеют вид

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dr_1}{d\vartheta} = 0, \quad \frac{dr_2}{d\vartheta} = R_2r_1^2 = F_2, \quad \frac{dr_3}{d\vartheta} = R_3r_1^2 + 2R_2r_1r_2 = F_3, \\ &\frac{dr_i}{d\vartheta} = F_i \qquad (i = 4, 5, \ldots). \end{aligned}\right\} \qquad (36.8)$$

Кроме того, из (36.5) имеем начальные условия

$$r_1(0) = 1, \quad r_2(0) = r_3(0) = \ldots = 0. \qquad (36.9)$$

Следовательно,

$$r_1 = 1, \quad r_2 = \int_0^\vartheta R_2\,d\vartheta, \quad r_3 = \int_0^\vartheta (R_3 + 2R_2r_2)\,d\vartheta, \quad \ldots, \quad r_i = \int_0^\vartheta F_i\,d\vartheta. \qquad (36.10)$$

Таким образом, все функции $r_i(\vartheta)$ последовательно определяются простыми квадратурами. Для функции $r_2(\vartheta)$ мы имеем квадратуру периодической функции. Отметим здесь одно общее свойство такого рода квадратур, которым мы часто будем пользоваться в дальнейшем.

Пусть $f(\vartheta)$ — произвольная непрерывная периодическая функция какого-нибудь периода ω. Тогда

$$F(\vartheta) = \int_0^\vartheta f(\vartheta)\,d\vartheta = g\vartheta + \varphi(\vartheta), \qquad (36.11)$$

где $\varphi(\vartheta)$ — периодическая функция того же периода, а g — постоянная, определяемая формулой

$$g = \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} f(\vartheta)\, d\vartheta. \tag{36.12}$$

Эта формула совершенно очевидна, если $f(\vartheta)$ разлагается в ряд Фурье

$$f(\vartheta) = g + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{2\pi n}{\omega} \vartheta + B_n \sin \frac{2\pi n}{\omega} \vartheta \right),$$

где g определяется формулой (36.12).

Действительно, в этом случае мы имеем:

$$F(\vartheta) = g\vartheta + \frac{\omega}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{A_n}{n} \sin \frac{2\pi n}{\omega} \vartheta - \frac{B_n}{n} \cos \frac{2\pi n}{\omega} \vartheta \right).$$

Отсюда непосредственно вытекает справедливость (36.11) для рассматриваемого случая. Но и в общем случае эта формула выводится без всякого труда, на чем мы не будем останавливаться.

Установив это, рассмотрим коэффициент r_2. Так как функция R_2 периодическая, то r_2 будет либо иметь вид (36.11), либо будет периодической, если соответствующий коэффициент g обращается в нуль. Во втором случае функция $R_3 + 2R_2 r_2$ будет периодической, и поэтому коэффициент r_3 либо будет иметь вид (36.11), либо получится периодическим. Продолжая таким образом дальше, мы видим, что могут представиться два случая: либо все коэффициенты r_i, как бы велик ни был индекс i, являются периодическими функциями периода 2π, либо среди этих коэффициентов имеются непериодические. При этом, если r_m является первым непериодическим коэффициентом, то

$$r_m = g\vartheta + \varphi(\vartheta), \quad g = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_m\, d\vartheta, \tag{36.13}$$

где $\varphi(\vartheta)$ — периодическая функция периода 2π.

Допустим сначала, что все функции r_j являются периодическими. В этом случае решение (36.6) будет периодическим при всех значениях c (лежащих в области сходимости ряда). Следовательно, $r(2\pi, c) = r(0, c)$, и все интегральные кривые, расположенные в достаточно малой окрестности начала координат, замкнуты и окружают эту точку (рис. 8). Следуя Пуанкаре, начало координат называют в этом случае *центром*.

Допустим теперь, что не все коэффициенты r_i получаются периодическими. Пусть r_m — первый непериодический коэффициент в ряду $r_2, r_3, \ldots$, так что для него справедлива формула (36.13), где $g \neq 0$,

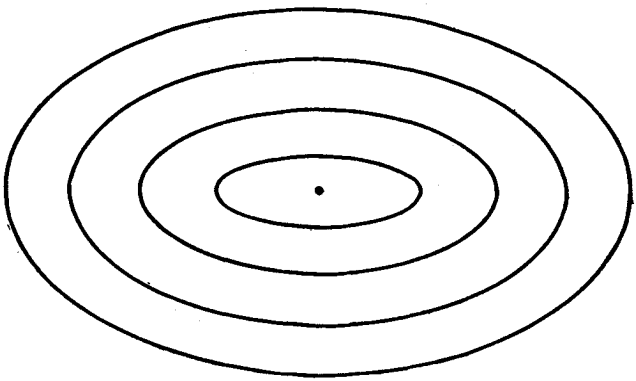

Рис. 8.

а все коэффициенты $r_2, r_3, \ldots, r_{m-1}$ периодичны. Преобразуем уравнение (36.4) при помощи подстановки

$$r = \rho + \rho^2 r_2(\vartheta) + \ldots + \rho^{m-1} r_{m-1}(\vartheta) + \rho^m \varphi(\vartheta) \equiv$$
$$\equiv \rho + \rho^2 r_2(\vartheta) + \ldots + \rho^{m-1} r_{m-1}(\vartheta) + \rho^m r_m(\vartheta) - g\vartheta\rho^m. \quad (36.14)$$

На основании (36.7) будем иметь:

$$\frac{d\rho}{d\vartheta}(1 + 2\rho r_2 + \ldots + m\rho^{m-1}\varphi) + \rho^2 \frac{dr_2}{d\vartheta} + \ldots + \rho^m \frac{dr_m}{d\vartheta} - g\rho^m =$$
$$= \rho^2 F_2 + \ldots + \rho^m F_m + \rho^{m+1} F_{m+1} + \ldots,$$

или, принимая во внимание (36.8),

$$\frac{d\rho}{d\vartheta}(1 + 2\rho r_2 + \ldots + m\rho^{m-1}\varphi) = g\rho^m + \rho^{m+1} F_{m+1} + \ldots$$

Отсюда находим:

$$\frac{d\rho}{d\vartheta} = g\rho^m + R^*_{m+1}(\vartheta)\rho^{m+1} + \ldots = \rho^m\left(g + \rho R^*_{m+1}(\vartheta) + \ldots\right), \quad (36.15)$$

где R^*_{m+n} — периодические функции ϑ периода 2π (так как коэффициенты преобразования (36.14) периодичны).

Из полученного уравнения вытекает, что в достаточно малой окрестности начала координат производная $\frac{d\rho}{d\vartheta}$ сохраняет постоянный знак, совпадающий со знаком g. Если $g < 0$, то при $\vartheta \to +\infty$ функция $\rho(\vartheta)$ непрерывно убывает и стремится к нулю. По характеру

подстановки (36.14) то же самое будет иметь место и для радиуса-вектора r. Следовательно, все интегральные кривые, расположенные в достаточно малой окрестности начала координат, будут спиралями, делающими вокруг начала координат бесчисленное множество оборотов, асимптотически приближаясь к этой точке наподобие логарифмических спиралей (рис. 9). По терминологии Пуанкаре начало координат в этом случае называется *фокусом*.

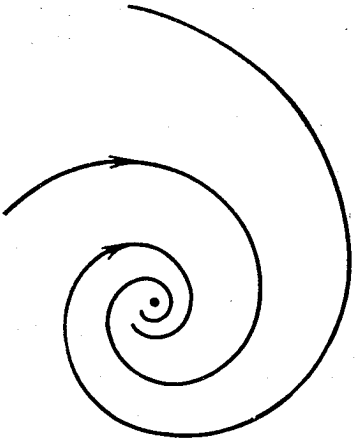

Рис. 9.

То же самое будет, очевидно, иметь место и при $g > 0$. Только в этом случае спирали будут приближаться к началу координат не при $\vartheta \to +\infty$, а при $\vartheta \to -\infty$.

Обращаемся теперь к вопросу устойчивости. Очевидно, что в случае центра невозмущенное движение устойчиво, так как r, а вместе с ним x и y будут оставаться сколь угодно малыми, если они были достаточно малы в начальный момент времени. Устойчивость при этом не будет асимптотической.

Рассмотрим теперь случай фокуса. Второе уравнение (36.3) показывает, что в достаточно малой окрестности начала координат, когда величина θ (обращающаяся в нуль при $r = 0$) меньше по модулю величины λ, производная $\frac{d\vartheta}{dt}$ будет больше некоторого положительного числа. Следовательно, с возрастанием t величина ϑ будет также возрастать, причем при $t \to \infty$ она будет возрастать неограниченно, если только при этом интегральная кривая остается в достаточно малой окрестности начала координат. Последнее будет как раз иметь место при $g < 0$. В этом случае при возрастании ϑ интегральные кривые приближаются к началу координат, стремясь к нему асимптотически при $\vartheta = +\infty$. Следовательно, при $g < 0$ невозмущенное движение асимптотически устойчиво.

При $g > 0$ интегральные кривые при возрастании ϑ, а следовательно, и t, удаляются от начала координат. Любая интегральная кривая покидает некоторую фиксированную не зависящую от начальных условий окрестность начала координат, как бы близка от него ни была точка, из которой она в начальный момент выходит. Мы имеем, очевидно, полную неустойчивость.

Итак, в случае центра невозмущенное движение устойчиво, но не асимптотически. В случае фокуса невозмущенное движение асимптотически устойчиво при $g < 0$ и неустойчиво при $g > 0$.

Таким образом, для решения задачи устойчивости в интересующем нас случае мы можем поступать следующим образом:

1) Преобразованием (36.2) и исключением t приводим уравнения возмущенного движения (36.1) к одному уравнению (36.4).

2) Этому уравнению пытаемся удовлетворить рядом

$$r = c + c^2 r_2(\vartheta) + c^3 r_3(\vartheta) + \ldots,$$

где $r_2(0) = r_3(0) = \ldots = 0$. Подставляя этот ряд в (36.4) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях c, мы получим уравнения, определяющие последовательно все функции $r_i(\vartheta)$ при помощи квадратур. При этом может оказаться, что либо все коэффициенты r_i являются периодическими, либо среди них имеются непериодические.

В первом случае невозмущенное движение будет устойчивым, но не асимптотически.

Во втором случае первый непериодический коэффициент в ряду $r_2, r_3, \ldots$, пусть это будет r_m, будет необходимо иметь вид (36.13). Тогда, если $g > 0$, то невозмущенное движение неустойчиво, а если $g < 0$, то оно устойчиво и притом асимптотически.

Определение коэффициентов r_i приводится, как мы видели, к вычислению квадратур. Последняя задача не представляет никаких трудностей, так как подинтегральные выражения всегда представляют собой полиномы относительно $\cos\vartheta$ и $\sin\vartheta$. И если мы имеем дело с тем случаем, когда среди коэффициентов r_i имеются непериодические, то мы всегда конечным числом простых действий придем к решению задачи устойчивости. Правда, вычисления могут оказаться очень громоздкими, если первый непериодический коэффициент r_m имеет слишком большой индекс. Однако практически такие случаи встречаются весьма редко.

Гораздо сложнее обстоит дело в случае, когда все коэффициенты r_i оказываются периодическими, т. е. когда начало координат является центром. В этом случае мы имеем бесчисленное множество условий, и мы не можем непосредственной проверкой убедиться в их выполнимости. Поэтому усилия исследователей были направлены к установлению некоторых общих признаков, которые позволяли бы, не прибегая к вычислению коэффициентов r_i, а непосредственно по виду уравнений (36.1) судить о том, имеем ли мы дело с центром или фокусом. В этом направлении достигнуты некоторые успехи. Так, например, задача полностью разрешена для того случая, когда уравнения (36.1) не имеют членов выше второго порядка. Однако полного решения задачи до сих пор не получено. Мы не имеем, однако, возможности останавливаться подробнее на этом вопросе [1]). Отме-

---

[1]) Отсылаем интересующихся к книге: Немыцкий В. В. и Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений (изд. 2-е, Гостехиздат, 1949), в которой дана и библиография вопроса. См. также примечание в конце книги (стр. 521).

тим здесь, однако, одно общее положение, имеющее важное значение.

Система первого приближения для уравнений (36.1) всегда имеет первый интеграл вида $x^2+y^2=\text{const}$. Может случиться, что система (36.1) с учетом нелинейных членов также имеет первый интеграл вида

$$F(x, y)=x^2+y^2+f(x, y)=\text{const}., \tag{36.16}$$

где $f(x, y)$ — аналитическая в окрестности начала координат функция от x и y, разложение которой по степеням этих переменных начинается членами не ниже третьего порядка. В этом случае начало координат будет центром. Действительно, интеграл (36.16) представляет уравнение интегральных кривых в окрестности начала координат, которые все будут замкнуты, так как функция $F(x, y)$ знакоопределенна.

Ляпунов доказал, что справедливо также обратное предложение: если начало координат для уравнений (36.1) является центром, то эти уравнения имеют первый интеграл вида (36.16).

Отметим также одно важное различие, которое получается в характере задачи в зависимости от того, имеем ли мы дело с фокусом или центром.

В выражение функции $F_i(\vartheta)$, определяющей коэффициент r_i и зависящей, как мы видели, от $r_2, \ldots, r_{i-1}, R_1, \ldots, R_i$, входят лишь те члены правой части уравнения (36.4), которые имеют порядок, не превышающий i, а эти члены в свою очередь, как это видно из (36.3), зависят лишь от тех членов уравнений (36.1), которые также имеют порядок, не превышающий i. Поэтому если r_m является первым непериодическим коэффициентом в ряду $r_2, r_3, \ldots$, то он останется первым непериодическим коэффициентом, как бы мы ни изменяли члены выше m-го порядка в уравнениях (36.1). Следовательно, коэффициент g, знак которого определяет устойчивость или неустойчивость, также не зависит от членов выше m-го порядка в уравнениях (36.1). Другими словами, в случае фокуса устойчивость или неустойчивость определяется конечным числом членов в уравнениях возмущенного движения. Члены достаточно высокого порядка никакого значения для задачи не имеют.

Иначе обстоит дело в случае центра. В этом случае, как бы велико ни было число N, мы можем, очевидно, члены N-го порядка в уравнениях (36.1) изменить таким образом, чтобы функция r_N вышла непериодической и чтобы соответствующий коэффициент g был по желанию положительным или отрицательным. Следовательно, в случае центра членами сколь угодно высоких порядков в уравнениях возмущенного движения можно распорядиться таким образом, чтобы получить по желанию как асимптотическую устойчивость, так и неустойчивость.

Из этого следует, что если нам при исследовании уравнений вида (36.1) удалось каким-нибудь путем убедиться, что изменением членов сколь угодно высоких порядков можно добиться, чтобы невозмущенное движение было по желанию асимптотически устойчивым или неустойчивым, то начало координат является обязательно центром.

Когда начало координат является центром, то ряд (36.6) для r, представляющий общее решение уравнений (36.1), будет периодическим периода 2π. Подставляя это выражение для r в (36.2), мы получим решение уравнений (36.1), которое также будет периодическим по отношению к вспомогательному переменному ϑ с периодом 2π. Покажем, что если мы снова перейдем к переменной t и выразим через нее x и y, то полученные таким путем функции времени будут тоже периодическими, но период будет зависеть, и притом аналитически, от c.

С этой целью обращаемся ко второму уравнению (36.3), определяющему ϑ как функцию t. Подставляя в него выражение (36.6) для r, получим:

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \lambda\left[1 + \theta_1^*(\vartheta)\,c + \theta_2^*(\vartheta)\,c^2 + \ldots\right],$$

где $\theta_i^{(*)}(\vartheta)$ — некоторые периодические функции ϑ. Полагая, что ϑ и t одновременно обращаются в нуль, получим:

$$\lambda t(\vartheta) = \int_0^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{1 + \theta_1^* c + \ldots} = \int_0^{\vartheta} (1 + \theta_1(\vartheta)\,c + \theta_2(\vartheta)\,c^2 + \ldots)\,d\vartheta, \quad (36.17)$$

где $\theta_i(\vartheta)$ — также периодические функции ϑ.

Из (36.17) получаем:

$$\lambda t(\vartheta + 2\pi) - \lambda t(\vartheta) = \int_{\vartheta}^{\vartheta+2\pi} (1 + \theta_1 c + \theta_2 c^2 + \ldots)\,d\vartheta,$$

или, учитывая периодичность функций $\theta_i(\vartheta)$,

$$t(\vartheta + 2\pi) - t(\vartheta) = T, \quad (36.18)$$

где T — постоянная, определяемая формулой

$$T = \frac{2\pi}{\lambda}(1 + h_1 c + h_2 c^2 + \ldots), \quad h_i = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \theta_i(\vartheta)\,d\vartheta. \quad (36.19)$$

Соотношение (36.18) показывает, что при изменении t на постоянную величину T величина ϑ изменяется на 2π и, следовательно, величины x и y не изменяются. Следовательно, x и y являются периодическими функциями времени с периодом T, зависящим аналитически от c.

Полученное таким путем периодическое решение уравнений (36.1) будет содержать произвольную постоянную c. Эта произвольная постоянная является, по условию, начальным значением величины r. Но так как отсчет полярного угла ϑ выбран таким образом, что он обращается в нуль при $t=0$, то из (36.2) вытекает, что c является вместе с тем начальным значением величины x. Начальное значение величины y равно при этом нулю. Таким образом, полученное периодическое решение уравнений (36.1) характеризуется начальными условиями

$$x(0)=c, \quad y(0)=0, \tag{36.20}$$

где произвольная постоянная c подчинена единственному условию, что она численно достаточно мала.

Полученное периодическое решение, содержащее только одну произвольную постоянную, является частным решением уравнений (36.1). Но учитывая, что эти уравнения не зависят явно от t, мы можем получить их общее решение, зависящее от двух произвольных постоянных, если в указанном периодическом решении мы заменим t на $t+h$, где h — произвольная постоянная.

Практический способ вычисления вышеуказанного периодического решения (когда оно существует, т. е. в случае центра) будет указан в § 38. Сейчас мы рассмотрим примеры решения задачи устойчивости для уравнений типа (36.1).

Пример 1. Уравнение возмущенного движения имеет вид

$$\frac{d^2x}{dt^2}+x=\alpha\left(\frac{dx}{dt}\right)^3+\beta x^2+\gamma x\left(\frac{dx}{dt}\right)^2, \tag{36.21}$$

где α, β, γ — постоянные.

Записав это уравнение в виде системы

$$\frac{dx}{dt}=-y, \quad \frac{dy}{dt}=x-\beta x^2-\gamma xy^2+\alpha y^3, \tag{36.22}$$

положим:

$$x=r\cos\vartheta, \quad y=r\sin\vartheta.$$

Уравнения (36.22) примут вид

$$\frac{dr}{dt}=-\beta r^2\cos^2\vartheta\sin\vartheta+(\alpha\sin^4\vartheta-\gamma\cos\vartheta\sin^3\vartheta)r^3,$$

$$\frac{d\vartheta}{dt}=1-\beta\cos^3\vartheta\cdot r+(\alpha\sin^3\vartheta\cos\vartheta-\gamma\cos^2\vartheta\sin^2\vartheta)r^2.$$

Исключая t, будем иметь:

$$\frac{dr}{d\vartheta}=-\beta\cos^2\vartheta\sin\vartheta\cdot r^2+(\alpha\sin^4\vartheta-\gamma\cos\vartheta\sin^3\vartheta-\beta^2\cos^5\vartheta\sin\vartheta)r^3+\ldots$$

Этому уравнению стараемся удовлетворить рядом

$$r=c+r_2c^2+r_3c^3+\ldots$$

при условии $r_2(0) = r_3(0) = \ldots = 0$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях c, получим:

$$\frac{dr_2}{d\vartheta} = -\beta\cos^2\vartheta\sin\vartheta,$$

$$\frac{dr_3}{d\vartheta} = \alpha\sin^4\vartheta - \{\gamma\cos\vartheta\sin^2\vartheta + \beta^2\cos^5\vartheta + 2\beta\cos^2\vartheta\cdot r_2\}\sin\vartheta,$$

откуда

$$r_2 = \beta\left(\frac{\cos^3\vartheta}{3} - \frac{1}{3}\right),$$

$$r_3 = \alpha\int_0^{\vartheta}\sin^4\vartheta\,d\vartheta - \int_0^{\vartheta}\{\gamma\cos\vartheta\sin^2\vartheta + \beta^2\cos^5\vartheta + 2\beta\cos^2\vartheta\cdot r_2\}\sin\vartheta\,d\vartheta.$$

Функция r_2 вышла периодической. Функция же r_3 имеет, очевидно. вид

$$r_3 = g\vartheta + f(\vartheta),$$

где $f(\vartheta)$ — периодическая функция, а g определяется формулой

$$g = \frac{\alpha}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin^4\vartheta\,d\vartheta.$$

Следовательно, при $\alpha > 0$ невозмущенное движение неустойчиво, а при $\alpha < 0$ оно устойчиво асимптотически.

Пример 2. Уравнение (36.21) является частным случаем более общего уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = \alpha\left(\frac{dx}{dt}\right)^{2n+1} + F\left[x,\ \left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right],$$

исследованного А. М. Ляпуновым. Здесь n — целое положительное число, а F — аналитическая функция своих аргументов, не содержащая членов ниже второго порядка относительно x и $\frac{dx}{dt}$.

Полагая

$$x = r\cos\vartheta, \quad y = -\frac{dx}{dt} = r\sin\vartheta,$$

олучим:

$$\frac{dr}{dt} = \alpha\sin^{2n+2}\vartheta\cdot r^{2n+1} - F(r\cos\vartheta,\ r^2\sin^2\vartheta)\sin\vartheta,$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = 1 + \alpha\sin^{2n+1}\vartheta\cos\vartheta\cdot r^{2n} - \frac{1}{r}F(r\cos\vartheta,\ r^2\sin^2\vartheta)\cos\vartheta.$$

Допустим сначала, что $\alpha = 0$. Тогда, исключая t, получим:

$$\frac{dr}{d\vartheta} = -\frac{F(r\cos\vartheta,\ r^2\sin^2\vartheta)}{1-\frac{1}{r}F(r\cos\vartheta,\ r^2\sin^2\vartheta)\cos\vartheta}\sin\vartheta =$$

$$= f_2(\vartheta)\sin\vartheta\cdot r^2 + f_3(\vartheta)\sin\vartheta\cdot r^3 + \ldots, \qquad (36.23)$$

где $f_i(\vartheta)$ являются, очевидно, полиномами относительно только $\cos\vartheta$. Ищем решение уравнения (36.23) в виде ряда

$$r = c + r_2(\vartheta)c^2 + \ldots$$

при условии $r_2(0) = r_3(0) = \ldots = 0$. Для коэффициентов $r_i(\vartheta)$ получаем уравнения

$$\frac{dr_2}{d\vartheta} = f_2(\vartheta)\sin\vartheta, \quad \frac{dr_3}{d\vartheta} = [f_3(\vartheta) + 2f_2(\vartheta)r_2(\vartheta)]\sin\vartheta$$

и вообще

$$\frac{dr_i}{d\vartheta} = F_i(\vartheta)\sin\vartheta \qquad (i = 3,\ 4,\ \ldots), \qquad (36.24)$$

где $F_i(\vartheta)$ — полиномы относительно $r_2, r_3, \ldots, r_{i-1}$, коэффициенты которых являются полиномами относительно только $\cos\vartheta$.

Функция r_2 получается, очевидно, периодической и притом полиномом относительно $\cos\vartheta$. Но тогда такой же будет и функция r_3 и все остальные функции r_i, в чем убеждаемся методом индукции. Действительно, если все функции $r_2, r_3, \ldots, r_{i-1}$ вышли полиномами относительно $\cos\vartheta$, то такой же получится и функция $F_i(\vartheta)$, а следовательно, и функция r_i.

Таким образом, при $\alpha = 0$ мы имеем дело с центром, и невозмущенное движение будет устойчиво, но не асимптотически.

Допустим теперь, что $\alpha \neq 0$. Тогда будем, очевидно, иметь:

$$\frac{dr}{d\vartheta} = f_2(\vartheta)\sin\vartheta\cdot r^2 + \ldots + f_{2n}(\vartheta)\sin\vartheta\cdot r^{2n} +$$
$$+ \{f_{2n+1}(\vartheta)\sin\vartheta + \alpha\sin^{2n+2}\vartheta\}\, r^{2n+1} + \ldots,$$

где $f_2(\vartheta), f_3(\vartheta), \ldots, f_{2n+1}(\vartheta)$ — те же функции, что и в (36.23). Для коэффициентов r_i получаем теперь

$$\frac{dr_2}{d\vartheta} = F_2(\vartheta)\sin\vartheta, \ \ldots, \quad \frac{dr_{2n}}{d\vartheta} = F_{2n}(\vartheta)\sin\vartheta,$$

$$\frac{dr_{2n+1}}{d\vartheta} = F_{2n+1}(\vartheta)\sin\vartheta + \alpha\sin^{2n+2}\vartheta,$$

где $F_2, F_3, \ldots, F_n$ — те же функции, что и в (36.24). Следовательно, коэффициенты $r_2, \ldots, r_{2n}$ получаются периодическими, а для

коэффициента r_{2n+1} будем иметь:

$$r_{2n+1} = g\vartheta + \varphi(\vartheta), \quad g = \frac{\alpha}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin^{2n+2}\vartheta\, d\vartheta,$$

где $\varphi(\vartheta)$ — периодическая функция.

Следовательно, при $\alpha < 0$ невозмущенное движение асимптотически устойчиво, а при $\alpha > 0$ оно неустойчиво.

§ 37. Системы второго порядка. Второй способ решения задачи.

Изложим второй способ решения задачи устойчивости в интересующем нас случае, предложенный А. М. Ляпуновым. Этот способ основан на непосредственном построении для системы (36.1) функции Ляпунова.

Рассмотрим сначала следующую задачу. Пусть $u_m(x, y)$ — заданная форма m-го порядка переменных x и y. Будем искать другую форму $v_m(x, y)$ того же порядка, производная которой по времени, составленная в силу линейной части системы (36.1), т. е. уравнений

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda y, \quad \frac{dy}{dt} = \lambda x, \tag{37.1}$$

равнялась бы форме u_m. Другими словами, найдем форму v_m, удовлетворяющую уравнению

$$\lambda\left(x\frac{\partial v_m}{\partial y} - y\frac{\partial v_m}{\partial x}\right) = u_m. \tag{37.2}$$

Задача эта является частным случаем задачи, рассмотренной нами в общем виде в § 20. Согласно полученным там результатам, поступаем следующим образом.

Полагая

$$v_m = a_1x^m + a_2x^{m-1}y + \ldots + a_{m+1}y^m,$$
$$u_m = b_1x^m + b_2x^{m-1}y + \ldots + b_{m+1}y^m$$

и приравнивая в (37.2) коэффициенты при подобных членах, мы получим систему линейных уравнений

$$A_{i1}a_1 + A_{i2}a_2 + \ldots + A_{i,m+1}a_{m+1} = b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m+1), \tag{37.3}$$

определяющих коэффициенты a_j. Здесь A_{ij} — некоторые постоянные, которые нам нет необходимости выписывать.

Система (37.3) будет иметь решение и притом единственное, если определитель этой системы будет отличен от нуля, или, что то же

самое, если уравнение

$$D_m(\rho) = \begin{vmatrix} A_{11}-\rho & A_{12} & \dots & A_{1,\,m+1} \\ A_{21} & A_{22}-\rho & \dots & A_{2,\,m+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{m+1,\,1} & A_{m+1,\,2} & \dots & A_{m+1,\,m+1}-\rho \end{vmatrix} \tag{37.4}$$

не будет иметь нулевого корня.

Но на основании теоремы 1 § 20 все корни уравнения (37.4) определяются формулой

$$\rho = (m_1 - m_2)\, i\lambda, \tag{37.5}$$

где m_1 и m_2 — любые целые неотрицательные числа (в частности, нули), связанные соотношением

$$m_1 + m_2 = m. \tag{37.6}$$

Если m — число нечетное, то не существует никакой комбинации для чисел m_1 и m_2, связанных соотношением (37.6), при которой величина (37.5) обращалась бы в нуль. Следовательно, при m нечетном определитель системы (37.3) отличен от нуля, эта система имеет единственное решение, которое определяет одну и только одну форму v_m, удовлетворяющую уравнению (37.2).

Допустим теперь, что m — число четное. В этом случае мы можем удовлетворить соотношению (37.6), полагая $m_1 = m_2 = \frac{m}{2}$. При такой комбинации, и очевидно, только при такой, выражение (37.5) обращается в нуль. Следовательно, уравнение (37.4) имеет один и только один нулевой корень, и определитель системы (37.3) обращается в нуль. Однако хотя бы один из миноров m-порядка этого определителя отличен от нуля. Действительно, если бы все указанные миноры равнялись нулю, то нулевой корень уравнения (37.4) был бы, по крайней мере, двукратным, так как он обращал бы в нуль не только $D_m(\lambda)$, но и $\frac{dD_m(\lambda)}{d\lambda}$.

Так как определитель системы (37.3) обращается в нуль, то эта система, вообще говоря, неразрешима. В этом случае левые части уравнений (37.3) связаны между собой линейным соотношением, т. е. существует такая система чисел $M_1, \dots, M_{m+1}$, из которых хотя бы одно отлично от нуля, что, умножая соответственно левые части (37.3) на эти числа и складывая их, мы получим тождественно нуль. Для того чтобы система (37.3) была разрешима, необходимо, чтобы и ее правые части были связаны тем же самым линейным соотношением, т. е. чтобы выполнялось тождество

$$M_1 b_1 + M_2 b_2 + \dots + M_{m+1} b_{m+1} = 0. \tag{37.7}$$

Этого условия будет также и достаточно для разрешимости системы (37.3), так как не все миноры m-го порядка определителя $D_m(0)$ равны нулю, и поэтому левые части этой системы связаны только одним линейным соотношением.

Таким образом, при m четном существует тогда и только тогда форма v_m, удовлетворяющая уравнению (37.2), когда коэффициенты формы u_m связаны соотношением (37.7).

В связи с этим при m четном изменим несколько постановку задачи, а именно: будем искать форму v_m таким образом, чтобы удовлетворялось не уравнение (37.2), а уравнение

$$\lambda\left(x\frac{\partial v_m}{\partial y}-y\frac{\partial v_m}{\partial x}\right)=u_m+G(x^2+y^2)^{\frac{m}{2}}, \tag{37.8}$$

где G — некоторая постоянная, которая должна быть подобрана таким образом, чтобы это уравнение имело решение.

Система (37.3) перейдет теперь в систему

$$A_{i1}a_1+\ldots+A_{i,m+1}a_{m+1}=b_i+k_iG,$$

где $k_1, k_2, \ldots, k_{m+1}$ — коэффициенты формы

$$(x^2+y^2)^{\frac{m}{2}},$$

а условие ее разрешимости примет вид

$$\sum_{i=1}^{m+1}M_ib_i+G\sum_{i=1}^{m+1}k_iM_i=0. \tag{37.9}$$

Это уравнение однозначно определяет постоянную G. Для действительного ее вычисления нет необходимости составлять уравнение (37.9). Гораздо проще непосредственно исходить из уравнения (37.8). Для этого допустим, что постоянная G и форма v_m уже вычислены. Подставляя их в (37.8), получим тождество, которое, следовательно, должно удовлетворяться при любых x и y. В частности, оно должно удовлетворяться, если мы положим $x=\cos\vartheta$, $y=\sin\vartheta$. Сделаем действительно в (37.8) указанную замену, помножим полученное тождество на $d\vartheta$ и проинтегрируем в пределах от 0 до 2π. Тогда, принимая во внимание, что

$$\frac{dv_m(\cos\vartheta,\sin\vartheta)}{d\vartheta}=\left\{-y\frac{\partial v_m(x,y)}{\partial x}+x\frac{\partial v_m(x,y)}{\partial y}\right\}_{x=\cos\vartheta,\ y=\sin\vartheta}$$

и, следовательно,

$$\int_0^{2\pi}\left\{x\frac{\partial v_m}{\partial y}-y\frac{\partial v_m}{\partial x}\right\}_{x=\cos\vartheta,\ y=\sin\vartheta}d\vartheta=v_m(\cos\vartheta,\sin\vartheta)\Big|_0^{2\pi}=0,$$

будем иметь:

$$2\pi G + \int_0^{2\pi} u_m(\cos\vartheta, \sin\vartheta)\, d\vartheta = 0. \tag{37.10}$$

Мы получили таким образом соотношение между постоянной G и коэффициентами формы u_m, которое должно необходимо выполняться, если уравнение (37.8) имеет решение, а так как по доказанному таких соотношений может быть только одно, то оно необходимо совпадает с (37.9).

Формула (37.10) дает возможность сразу определить постоянную G.

Установив это, переходим к нашей задаче. Запишем уравнения возмущенного движения (36.1) в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\lambda y + X_2(x, y) + X_3(x, y) + \ldots, \\ \frac{dy}{dt} &= \lambda x + Y_2(x, y) + Y_3(x, y) + \ldots, \end{aligned}\right\} \tag{37.11}$$

где X_k, Y_k — совокупности членов k-го порядка в функциях X и Y, и попытаемся подобрать для них функцию Ляпунова, удовлетворяющую теоремам Б или В, вида

$$V = x^2 + y^2 + f_3(x, y) + f_4(x, y) + \ldots, \tag{37.12}$$

где $f_k(x, y)$ — некоторые формы k-го порядка.

Для этого необходимо формы f_3, f_4, ... подобрать таким образом, чтобы производная от V в силу уравнений (37.11) была знакоопределенной.

Для этой производной имеем:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} = &\left(2x + \frac{\partial f_3}{\partial x} + \frac{\partial f_4}{\partial x} + \ldots\right)(-\lambda y + X_2 + X_3 + \ldots) + \\ &+ \left(2y + \frac{\partial f_3}{\partial y} + \frac{\partial f_4}{\partial y} + \ldots\right)(\lambda x + Y_2 + Y_3 + \ldots). \end{aligned} \tag{37.13}$$

Полученное выражение начинается членами третьего порядка. Совокупность этих членов имеет вид

$$V_3 = \lambda\left(x\frac{\partial f_3}{\partial y} - y\frac{\partial f_3}{\partial x}\right) + 2xX_2 + 2yY_2. \tag{37.14}$$

Для членов четвертого порядка имеем:

$$V_4 = \lambda\left(x\frac{\partial f_4}{\partial y} - y\frac{\partial f_4}{\partial x}\right) + X_2\frac{\partial f_3}{\partial x} + Y_2\frac{\partial f_3}{\partial y} + 2xX_3 + 2yY_3,$$

и вообще совокупность членов m-го порядка в выражении (37.13) представляется выражением

$$V_m = \lambda\left(x\frac{\partial f_m}{\partial y} - y\frac{\partial f_m}{\partial x}\right) + F_m(x, y),$$

где $F_m(x, y)$ — форма m-го порядка, зависящая от форм $f_3, f_4, \ldots, f_{m-1}$. Эта форма, следовательно, будет известной, если формы $f_3, f_4, \ldots, f_{m-1}$ из каких-нибудь условий определены.

Для того чтобы производная $\frac{dV}{dt}$ была функцией знакоопределенной, необходимо прежде всего, чтобы она начиналась членами четного порядка. Поэтому необходимо форму f_3 выбрать так, чтобы члены третьего порядка (37.14) обратились в нуль, т. е. чтобы выполнялось уравнение

$$\lambda\left(x\frac{\partial f_3}{\partial y} - y\frac{\partial f_3}{\partial x}\right) = -2xX_2 - 2yY_2.$$

Как было показано выше, такая форма f_3 всегда существует и будет единственной. Выбрав таким образом форму f_3, подберем теперь f_4 так, чтобы совокупность членов четвертого порядка в выражении $\frac{dV}{dt}$ была формой знакоопределенной, а именно, приравняем эту совокупность членов форме $G_4(x^2+y^2)^2$. Таким путем для определения формы f_4 получаем уравнение

$$\lambda\left(x\frac{\partial f_4}{\partial y} - y\frac{\partial f_4}{\partial x}\right) = -F_4(x, y) + G_4(x^2+y^2)^2.$$

Так как сейчас речь идет о форме четного порядка, удовлетворяющей уравнению типа (37.8), то, как было показано выше, для того чтобы эта форма существовала, необходимо, чтобы G_4 была определенной величиной, а именно, на основании (37.10)

$$G_4 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F_4(\cos\vartheta, \sin\vartheta)\,d\vartheta.$$

Допустим, что полученная таким путем величина G_4 отлична от нуля. Тогда производная от функции

$$V = x^2 + y^2 + f_3 + f_4,$$

имеющая вид

$$\frac{dV}{dt} = G_4(x^2+y^2)^2 + \text{члены более высоких порядков},$$

будет знакоопределенной, знак которой совпадает со знаком G_4. Сама же функция V будет определенно-положительной. Поэтому на основании теорем Б и В невозмущенное движение будет неустойчиво при $G_4 > 0$ и асимптотически устойчиво при $G_4 < 0$.

Может, однако, случиться, что величина G_4 равна нулю. В этом случае разложение функции (37.13) начнется членами пятого порядка, и чтобы эта функция была знакоопределенной, необходимо эти члены обратить в нуль, а для этого необходимо форму f_5 выбрать согласно

уравнению $V_5 = 0$, которое имеет вид (37.2), и так как речь идет о форме нечетного порядка, то это уравнение однозначно ее определяет.

Выбрав таким путем f_5, ищем f_6 из условия, что члены шестого порядка в выражении $\frac{dV}{dt}$ обращаются в знакоопределенную форму $G_6(x^2+y^2)^3$. Таким путем получаем для f_6 уравнение

$$\lambda\left(x\frac{\partial f_6}{\partial y} - y\frac{\partial f_6}{\partial x}\right) = -F_6(x, y) + G_6(x^2+y^2)^3,$$

а для G_6 величину

$$G_6 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F_6(\cos\vartheta, \sin\vartheta)\,d\vartheta.$$

Если $G_6 \neq 0$, то производная от (37.12) будет начинаться членами $G_6(x^2+y^2)^3$ и будет, следовательно, функцией знакоопределенной. Невозмущенное движение будет при этом неустойчиво при $G_6 > 0$ и асимптотически устойчиво при $G_6 < 0$.

Если $G_6 = 0$, то необходимо произвести дальнейшие определения форм f_k. Поступая подобно предыдущему, т. е. приравнивая в (37.13) члены нечетного порядка нулю, а члены четного порядка выражению $G_m(x^2+y^2)^{\frac{m}{2}}$ и определяя G_m по формуле

$$G_m = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F_m(\cos\vartheta, \sin\vartheta)\,d\vartheta, \tag{37.15}$$

мы можем встретиться с одним из двух возможных случаев: либо все коэффициенты G_m, как бы велик ни был индекс m, равны нулю, либо в конце концов мы придем к такому m, что $G_m \neq 0$.

Если мы имеем дело со вторым случаем, то задача устойчивости решается знаком G_m, а именно: при $G_m > 0$ невозмущенное движение неустойчиво, а при $G_m < 0$ оно устойчиво и притом асимптотически.

Допустим теперь, что все коэффициенты G_m равны нулю. Конечно, убедиться в этом непосредственным вычислением этих коэффициентов не представляется возможным, но если каким-нибудь путем нам удалось установить этот факт, то задача устойчивости разрешается просто. Действительно, нетрудно убедиться, что в рассматриваемом случае начало координат является центром. В самом деле, если все коэффициенты G_m равны нулю, то как бы велико ни было число $2n$, члены $(2n-1)$-го порядка в уравнениях (37.11) можно изменить таким образом, чтобы величина G_{2n} получилась отличной от нуля и имела наперед заданный знак. Это непосредственно вытекает из того обстоятельства, что в выражение $F_{2n}(x, y)$, определяющее согласно

(37.15) G_{2n}, входят члены $2xX_{2n-1}+2yY_{2n-1}$, и подбором X_{2n-1} и Y_{2n-1} мы можем, очевидно, сделать величину G_{2n} какой угодно. Следовательно, изменением членов сколь угодно высокого порядка в уравнениях (37.11) можно добиться, чтобы невозмущенное движение было по желанию устойчивым или неустойчивым, а это, как было показано в предыдущем параграфе, является признаком центра.

Итак, если все коэффициенты G_m равны нулю, то начало координат является центром и, следовательно, невозмущенное движение устойчиво, но не асимптотически. При этом общее решение уравнений (37.11) является периодическим с периодом, зависящим от начальных условий.

При практическом применении метода можно коэффициенты G_m определять либо по формуле (37.15), либо непосредственно применяя метод, которым эта формула выведена. Для этого, определив в выражении $\frac{dV}{dt}$ члены m-го порядка, приравниваем их $G_m(x^2+y^2)^{\frac{m}{2}}$, полагаем в полученном уравнении $x=\cos\vartheta$, $y=\sin\vartheta$ и интегрируем в пределах от 0 до 2π. При этом форма f_m исключится, и мы можем сразу не принимать ее в расчет при определении членов m-го порядка в $\frac{dV}{dt}$.

Примечание. Пусть G_{2N} — первая из величин G_m ($m=2, 4, 6, \ldots$), которая отлична от нуля. Как мы только что видели, наивысший порядок членов разложений функций X и Y, определяющих эту величину и решающих, таким образом, задачу устойчивости, есть $2N-1$. Следовательно, наивысший порядок членов, решающих задачу устойчивости, когда она решается конечным числом членов, всегда нечетный.

Пример. Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt}=-y,\quad \frac{dy}{dt}=x-\beta x^2-\gamma xy^2+\alpha y^3,$$

исследованную в предыдущем параграфе.

Полагая

$$V=x^2+y^2+f_3+f_4+\ldots,$$

подберем форму f_3 так, чтобы в выражении $\frac{dV}{dt}$ исчезли члены третьего порядка. Получим уравнение

$$x\frac{\partial f_3}{\partial y}-y\frac{\partial f_3}{\partial x}-2\beta yx^2=0.$$

Делая в нем

$$f_3=a_1x^3+a_2x^2y+a_3xy^2+a_4y^3$$

и приравнивая коэффициенты при подобных членах, получим уравнения

$$a_2=0,\quad 2a_3-3a_1-2\beta=0,\quad 3a_4-2a_2=0,\quad a_3=0$$

и, следовательно,

$$f_3 = -\frac{2}{3}\beta x^3.$$

Приравнивая члены четвертого порядка выражению $G_4(x^2+y^2)^2$, получим для определения f_4 уравнение

$$x\frac{\partial f_4}{\partial y} - y\frac{\partial f_4}{\partial x} - 2\gamma xy^3 + 2\alpha y^4 = G_4(x^2+y^2)^2. \qquad (37.16)$$

Прежде всего определяем постоянную G_4. Если она окажется отличной от нуля, то в определении f_4 не будет необходимости и все вычисления на этом закончатся. Если G_4 окажется равной нулю, то придется определять и f_4 и f_5 и, может быть, формы более высоких порядков. Для определения G_4 полагаем в (37.16) $x = \cos\vartheta$, $y = \sin\vartheta$ и интегрируем по ϑ в пределах от 0 до 2π. При этом члены $x\frac{\partial f_4}{\partial y} - y\frac{\partial f_4}{\partial x}$ можно не рассматривать, так как они при указанной операции выпадут. Таким путем получаем:

$$G_4 = \frac{\alpha}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin^4\vartheta\,d\vartheta - \frac{\gamma}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin^3\vartheta\cos\vartheta\,d\vartheta = \frac{\alpha}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin^4\vartheta\,d\vartheta.$$

Если $\alpha < 0$, то невозмущенное движение асимптотически устойчиво, а если $\alpha > 0$, то оно неустойчиво.

Если $\alpha = 0$, то, как было показано в предыдущем параграфе, мы будем иметь случай центра.

§ 38. Системы второго порядка. Третий способ решения задачи.

Рассмотрим еще один способ решения задачи устойчивости для системы

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda y + X(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = \lambda x + Y(x, y), \qquad (38.1)$$

предложенный также Ляпуновым.

В § 36 было показано, что начало координат для уравнений (38.1) является либо центром, либо фокусом и что вопрос о том, какой из этих случаев имеет место, является основным для задачи устойчивости. Если начало координат является центром, то невозмущенное движение устойчиво; если оно является фокусом, то устойчивость или неустойчивость определяется знаком введенной в § 36 постоянной g, определяющим направление движения по спиралям, которыми являются в этом случае интегральные кривые. Далее было показано, что в случае центра, и только в этом случае, общее решение

уравнений (38.1) является периодическим. Поэтому для решения задачи устойчивости постараемся выяснить, будут ли решения уравнений (38.1) периодическими или нет. Если эти решения окажутся периодическими, то имеет место устойчивость, а если они окажутся непериодическими, то останется еще определить знак постоянной g.

Для выяснения этого вопроса рассмотрим решение $x(t)$, $y(t)$ уравнений (38.1), определяемое начальными условиями

$$x(0)=c, \quad y(0)=0, \tag{38.2}$$

где c — достаточно малая произвольная постоянная.

Если начало координат является центром, то это решение будет периодическим с периодом, определяемым формулой (36.19):

$$T=\frac{2\pi}{\lambda}(1+h_1c+h_2c^2+\ldots), \tag{38.3}$$

где h_1, h_2, ... — некоторые постоянные, и ряд сходится при c достаточно малом.

Допустим, что мы действительно имеем дело со случаем центра. Заменим в уравнениях (38.1) переменную t переменной τ при помощи подстановки

$$t=\frac{\tau}{\lambda}(1+h_1c+h_2c^2+\ldots). \tag{38.4}$$

Тогда для полученных таким образом уравнений

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{d\tau}&=\left(-y+\frac{1}{\lambda}X\right)(1+h_1c+h_2c^2+\ldots),\\ \frac{dy}{d\tau}&=\left(x+\frac{1}{\lambda}Y\right)(1+h_1c+h_2c^2+\ldots)\end{aligned}\right\} \tag{38.5}$$

решение с начальными условиями (38.2) будет периодическим с периодом 2π.

Уравнения (38.5) содержат аналитически параметр c. Поэтому любое решение этих уравнений будет, по известной теореме, аналитическим относительно c. Кроме того, каждое такое решение будет аналитическим относительно своих начальных значений x^0 и y^0. Применяя это к рассматриваемому периодическому решению, для которого $x^0=c$, $y^0=0$, придем к заключению, что это решение будет аналитическим относительно c.

Следовательно, это решение имеет вид

$$\left.\begin{aligned}x&=cx_1(\tau)+c^2x_2(\tau)+\ldots,\\ y&=cy_1(\tau)+c^2y_2(\tau)+\ldots,\end{aligned}\right\} \tag{38.6}$$

где ряды, стоящие в правых частях, сходятся при достаточно малом c. Так как это решение является периодическим с периодом 2π, то все

функции $x_m(\tau)$, $y_m(\tau)$ являются также периодическими периода 2π. Кроме того, начальные условия (38.2) дают:

$$x_1(0)=1,\ x_2(0)=x_3(0)=\ \ldots\ =y_1(0)=y_2(0)=\ \ldots\ =0. \quad (38.7)$$

Таким образом, если начало координат является центром, то уравнения (38.5), в которых h_i — некоторые определенные постоянные, имеют решение вида (38.6) с периодическими $x_m(\tau)$, $y_m(\tau)$. Если окажется, что как бы ни были выбраны постоянные h_i, система (38.5) решения вида (38.6) с периодическими $x_m(\tau)$, $y_m(\tau)$ не имеет, то это будет свидетельствовать о том, что начало координат является фокусом.

Подставляя (38.6) в (38.5) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях c, мы получим уравнения, которым должны удовлетворять функции x_m и y_m. Таким путем прежде всего получаем:

$$\frac{dx_1}{d\tau}=-y_1,\quad \frac{dy_1}{d\tau}=x_1,$$

откуда, принимая во внимание начальные условия (38.7), имеем:

$$x_1=\cos\tau,\quad y_1=\sin\tau.$$

После этого получим:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx_2}{d\tau}&=-y_2-h_1\sin\tau+\frac{1}{\lambda}X_2(\cos\vartheta,\ \sin\vartheta),\\ \frac{dy_2}{d\tau}&=x_2+h_1\cos\tau+\frac{1}{\lambda}Y_2(\cos\vartheta,\ \sin\vartheta),\end{aligned}\right\} \quad (38.8)$$

где $X_2(x,\ y)$ и $Y_2(x,\ y)$ — совокупность членов второго порядка в функциях X и Y.

Аналогичные уравнения мы получим и для функций X_k и Y_k $(k>2)$. Правые части этих уравнений будут содержать постоянные h_1, h_2, ..., h_{k-1}. Мы выпишем явно лишь те члены, которые содержат постоянную h_{k-1}. Тогда будем иметь:

$$\frac{dx_k}{d\tau}=-y_k-h_{k-1}\sin\tau+P_k,\quad \frac{dy_k}{d\tau}=x_k+h_{k-1}\cos\tau+Q_k, \quad (38.9)$$

где P_k и Q_k — некоторые полиномы относительно x_2, y_2, x_3, y_3, ..., x_{k-1}, y_{k-1}, коэффициенты которых зависят только от h_1, h_2, ..., h_{k-2}.

Уравнения (38.8) имеют вид

$$\frac{du}{d\tau}=-v+f(\tau),\quad \frac{dv}{d\tau}=u+F(\tau), \quad (38.10)$$

где $f(\tau)$ и $F(\tau)$ — периодические функции τ периода 2π. Задача состоит в определении периодических решений этих уравнений. Это — хорошо известная элементарная задача определения вынужденных

колебаний линейной системы с одной степенью свободы. В рассматриваемом случае имеет место резонанс, так как период свободных колебаний совпадает с периодом возмущающей силы. Поэтому уравнения (38.10) в общем случае не имеют периодического решения, и для того чтобы такое решение существовало, необходимо, чтобы функции f и F удовлетворяли некоторым условиям, которые легко установить.

Пусть

$$f = a_0 + a_1 \cos\tau + b_1 \sin\tau + \sum_{n=2}^{\infty} (a_n \cos n\tau + b_n \sin n\tau),$$

$$F = A_0 + A_1 \cos\tau + B_1 \sin\tau + \sum_{n=2}^{\infty} (A_n \cos n\tau + B_n \sin n\tau)$$

— разложения Фурье функций f и F, где, в частности,

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\tau)\cos\tau\, d\tau, \quad b_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\tau)\sin\tau\, d\tau, \\ A_1 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(\tau)\cos\tau\, d\tau, \quad B_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(\tau)\sin\tau\, d\tau. \end{aligned}\right\} \tag{38.11}$$

Пусть, далее,

$$u = c_0 + c_1 \cos\tau + d_1 \sin\tau + \sum_{n=2}^{\infty} (c_n \cos n\tau + d_n \sin n\tau),$$

$$v = C_0 + C_1 \cos\tau + D_1 \sin\tau + \sum_{n=2}^{\infty} (C_n \cos n\tau + D_n \sin n\tau)$$

— разложения Фурье искомого периодического решения. Подставляя эти разложения в (38.10), мы получим $C_0 = a_0$, $c_0 = -A_0$ и следующие уравнения для определения коэффициентов:

$$nd_n = -C_n + a_n, \qquad nc_n = D_n - b_n,$$
$$nD_n = c_n + A_n, \qquad -nC_n = d_n + B_n.$$

Эти уравнения дают вполне определенные решения для c_n, d_n, C_n, D_n при всех $n > 1$. При $n = 1$ эти уравнения неразрешимы, если только не выполняются соотношения

$$A_1 - b_1 = 0,$$
$$B_1 + a_1 = 0.$$

Если эти соотношения выполняются, то будем иметь:

$$D_1 = \alpha, \qquad d_1 = \beta,$$
$$C_1 = a_1 - \beta, \quad c_1 = \alpha - b_1,$$

где α и β — произвольные постоянные. Таким образом, принимая во внимание (38.11), мы приходим к следующему заключению.

Для того чтобы система (38.10) имела периодическое решение, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} [f(\tau)\cos\tau + F(\tau)\sin\tau]\,d\tau = 0, \\ &\int_0^{2\pi} [F(\tau)\cos\tau - f(\tau)\sin\tau]\,d\tau = 0. \end{aligned}\right\} \tag{38.12}$$

Если эти соотношения выполняются, то указанное периодическое решение имеет вид

$$\left.\begin{aligned} u &= \alpha\cos\tau + \beta\sin\tau + \bar{u}(\tau), \\ v &= \alpha\sin\tau - \beta\cos\tau + \bar{v}(\tau), \end{aligned}\right\} \tag{38.13}$$

где α и β — произвольные постоянные, а $\bar{u}(\tau)$, $\bar{v}(\tau)$ — периодические функции периода 2π. Это решение, содержащее две произвольные постоянные, является общим решением уравнений (38.10).

Если условия (38.12) не выполняются, то уравнения (38.10) не имеют периодического решения. Членам $a_1\cos\tau + b_1\sin\tau$ и $A_1\cos\tau + B_1\sin\tau$ будут соответствовать частные решения вида

$$u_1 = \frac{a_1 + B_1}{2}\tau\cos\tau + \frac{b_1 - A_1}{2}\tau\sin\tau - \frac{A_1 + b_1}{2}\cos\tau,$$

$$v_1 = \frac{A_1 - b_1}{2}\tau\cos\tau + \frac{a_1 + B_1}{2}\tau\sin\tau + \frac{a_1 - B_1}{2}\cos\tau,$$

и общее решение уравнений (38.10) будет иметь вид

$$\left.\begin{aligned} u &= \alpha\cos\tau + \beta\sin\tau + \frac{a_1 + B_1}{2}\tau\cos\tau + \frac{b_1 - A_1}{2}\tau\sin\tau + \bar{u}(\tau), \\ v &= \alpha\sin\tau - \beta\cos\tau + \frac{A_1 - b_1}{2}\tau\cos\tau + \frac{a_1 + B_1}{2}\tau\sin\tau + \bar{v}(\tau), \end{aligned}\right\} \tag{38.14}$$

где $\bar{u}(\tau)$ и $\bar{v}(\tau)$ — периодические функции, а α и β — произвольные постоянные.

Установив это, допустим, что все функции $x_2, y_2, \ldots, x_{k-1}, y_{k-1}$ оказались периодическими и что все постоянные $h_1, h_2, \ldots, h_{k-2}$

известны. Тогда правые части уравнений (38.9), определяющих x_k и y_k, будут известными периодическими функциями τ. Эти уравнения будут, таким образом, иметь вид (39.10). Поэтому, для того чтобы функции x_k и y_k оказались периодическими, необходимо и достаточно на основании (38.12), чтобы выполнялись соотношения

$$\left.\begin{aligned} 2\pi h_{k-1} + \int_0^{2\pi} (Q_k \cos\tau - P_k \sin\tau)\, d\tau = 0, \\ \int_0^{2\pi} (P_k \cos\tau + Q_k \sin\tau)\, d\tau = 0. \end{aligned}\right\} \tag{38.15}$$

Первое из этих соотношений однозначно определяет величину h_{k-1}. Что же касается второго соотношения, то оно может как выполняться, так и не выполняться. Если оно не выполняется, то уравнения (38.5) не будут иметь периодических решений, как бы ни были выбраны постоянные h_i. Следовательно, в этом случае начало координат является фокусом.

Таким образом, для того чтобы начало координат было центром, необходимо, чтобы второе условие (38.15) выполнялось для любого k. И если нам каким-нибудь образом удастся установить это обстоятельство, то все функции x_k, y_k получатся периодическими. Все эти функции будут вида (38.13) и входящие в каждую из них две произвольные постоянные будут однозначно определяться начальными условиями $x_k(0) = y_k(0) = 0$. Ряды (38.6) будут при этом, как было установлено выше, сходиться и действительно представят периодическое решение системы (38.1). Начало координат будет в этом случае центром и невозмущенное движение будет устойчиво.

Допустим, однако, что при вычислении функций $x_k(\tau)$, $y_k(\tau)$ мы пришли в конце концов к такому значению индекса k, что для него второе соотношение (38.15) не выполняется, В этом случае, как мы уже говорили, начало координат является фокусом. Поэтому для решения задачи устойчивости остается установить знак величины g, введенной в § 36. Покажем, что

$$g = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (P_k \cos\tau + Q_k \sin\tau)\, d\tau = \frac{a_1 + B_1}{2}, \tag{38.16}$$

где a_1 — коэффициент при $\cos\tau$ в P_k, а B_1 — коэффициент при $\sin\tau$ в Q_k.

С этой целью рассмотрим значение величины x при $t = T$ или, что то же самое, при $\tau = 2\pi$. Мы предполагаем при этом, что ряд (38.3), определяющий величину T, обрывается на члене $(k-1)$-го порядка. Общее решение уравнений для x_k и y_k имеет на

основании (38.14) вид

$$x_k = \alpha\cos\tau + \beta\sin\tau + \frac{1}{2\pi}\left\{\int_0^{2\pi}(P_k\cos\tau + Q_k\sin\tau)\,d\tau\right\}\tau\cos\tau -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\left\{2\pi h_{k-1} + \int_0^{2\pi}(Q_k\cos\tau - P_k\sin\tau)\,d\tau\right\}\tau\sin\tau + \bar{x}_k(\tau),$$

$$y_k = \alpha\sin\tau - \beta\cos\tau + \frac{1}{2\pi}\left\{2\pi h_{k-1} + \int_0^{2\pi}(Q_k\cos\tau - P_k\sin\tau)\,d\tau\right\}\tau\cos\tau +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\left\{\int_0^{2\pi}(P_k\cos\tau + Q_k\sin\tau)\,d\tau\right\}\tau\sin\tau + \bar{y}_k(\tau),$$

где $\bar{x}_k$, $\bar{y}_k$ — периодические функции. Для α и β из начальных условий (38.7) получаем:

$$\alpha + \bar{x}_k(0) = 0, \qquad -\beta + \bar{y}_k(0) = 0$$

и, следовательно,

$$\alpha + \bar{x}_k(2\pi) = 0, \qquad -\beta + \bar{y}_k(2\pi) = 0. \tag{38.17}$$

Отсюда, учитывая, что все функции $x_2, y_2, \ldots, x_{k-1}, y_{k-1}$ — периодические, а также учитывая начальные условия (38.7) и соотношения (38.17), из (38.6)[1]) получим:

$$(x)_{t=T} = c + c^k\int_0^{2\pi}(P_k\cos\tau + Q_k\sin\tau)\,d\tau + c^{k+1}(\ldots) + \ldots \tag{38.18}$$

Найдем теперь эту же величину, исходя из результатов § 36. Согласно этим результатам при $\vartheta = 2\pi$ на основании (36.6), (36.9) и (36.13) для величины r, а следовательно, также и для величины $x = r\cos\vartheta$, будем иметь:

$$(x)_{\vartheta=2\pi} = c + 2\pi g c^m + c^{m+1}(\ldots) + \ldots \tag{38.19}$$

В обеих формулах (38.18) и (38.19) c обозначает одну и ту же величину — значение r и x при $t = \vartheta = 0$. Сравнение этих формул показывает, что $m = k$, так как при $t = T$ полярный угол ϑ отличается от 2π на величину порядка (относительно c) не менее k, и что g действительно определяется формулой (38.16).

---

[1]) Так как мы ограничиваемся в подстановке (38.3) только конечным числом членов, то правые части уравнений (38.5) будут по-прежнему аналитическими (простыми полиномами) относительно c и ряды (38.6) будут сходиться на отрезке $0 \leqslant \tau \leqslant 2\pi$, если c достаточно мало.

Вопрос устойчивости решается знаком величины g. При $g > 0$ невозмущенное движение неустойчиво, а при $g < 0$ оно устойчиво асимптотически.

Таким образом, для решения задачи устойчивости мы можем руководствоваться следующим правилом.

Преобразуя уравнения (38.1) при помощи подстановки (38.4) к виду (38.5), пытаемся удовлетворить им рядами

$$\left.\begin{aligned} x &= c\cos\tau + c^2x_2(\tau) + c^3x_3(\tau) + \ldots, \\ y &= c\sin\tau + c^2y_2(\tau) + c^3y_3(\tau) + \ldots, \end{aligned}\right\} \tag{38.20}$$

где c — произвольная постоянная, а $x_j(\tau)$, $y_j(\tau)$ — периодические функции τ периода 2π, удовлетворяющие начальным условиям (38.7). Для определения функций x_k, y_k получим уравнения вида (38.9). Эти уравнения будут допускать периодические решения, если выполняются условия (38.15). Первое из этих условий однозначно определяет постоянную h_{k-1}, а второе условие может как выполняться, так и не выполняться. В первом случае уравнения (38.9) будут допускать периодическое решение, однозначно определяемое начальными условиями. И если это будет иметь место для всех значений k, как бы велико это число ни было, то невозмущенное движение будет устойчиво, ряды (38.20), а также ряд (38.3) будут сходиться и представят периодическое решение и период уравнений (38.1).

Если при вычислении функций x_k, y_k мы придем к такому значению индекса k, для которого второе условие (38.15) не выполняется, то невозмущенное движение будет неустойчиво, если величина g, определяемая формулой (38.16), будет положительна, и асимптотически устойчиво, если она будет отрицательна.

Приведенное правило дает очень удобный способ определения периодических решений уравнений (38.1), когда они существуют, и периода этих решений. Сами решения при этом представляются в очень удобной для практики форме. Эти решения имеют большое значение в теории нелинейных колебаний[1]).

Заметим в заключение, что величина h_1 всегда получается равной нулю. Это непосредственно вытекает из (38.15) и (38.8). Можно доказать, что вообще первая отличная от нуля величина h_j имеет четный индекс.

Пример 1. Рассмотрим снова систему

$$\frac{dx}{dt} = -y, \qquad \frac{dy}{dt} = x - \beta x^2 - \gamma xy^2 + \alpha y^3.$$

Полагая

$$t = \tau(1 + h_2c^2 + \ldots),$$

---

[1]) См., например, Малкин И. Г., Некоторые задачи теории нелинейных колебаний, Гостехиздат, 1956.

будем иметь:

$$\frac{dx}{d\tau} = -y(1 + h_2c^2 + \ldots),$$

$$\frac{dy}{d\tau} = (x - \beta x^2 - \gamma xy^2 + \alpha y^3)(1 - h_2c^2 + \ldots).$$

Этой системе пытаемся удовлетворить рядами (38.20). Для коэффициентов этих рядов получаем уравнения

$$\frac{dx_2}{d\tau} = -y_2, \qquad \frac{dy_2}{d\tau} = x_2 - \beta\cos^2\tau = x_2 - \frac{\beta}{2}(1 + \cos 2\tau),$$

$$\frac{dx_3}{d\tau} = -y_3 - h_2\sin\tau, \quad \frac{dy_3}{d\tau} = x_3 + h_2\cos\tau - \gamma\sin^2\tau\cos\tau + \alpha\sin^3\tau.$$

Уравнения для x_2 и y_2 не содержат резонирующих гармоник, и потому x_2 и y_2 получаются периодическими. Функции же x_3 и y_3 не получатся периодическими, так как для них постоянная g на основании (38.16) имеет вид

$$g = \frac{\alpha}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin^4\tau\,d\tau - \frac{\gamma}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin^3\tau\cos\tau\,d\tau = \frac{\alpha}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin^4\tau\,d\tau$$

и, следовательно, отлична от нуля. Вопрос устойчивости решается при этом знаком g, т. е. знаком α.

Пример 2. В качестве второго примера рассмотрим уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin x = -\lambda^2 x + \frac{\lambda^2}{3!}x^3 - \frac{\lambda^2}{5!}x^5 + \ldots \qquad (38.21)$$

$$\left(\lambda^2 = \frac{g}{l}\right),$$

определяющее, как известно, колебания математического маятника около его нижнего положения равновесия.

В рассматриваемом случае имеет место интеграл энергии

$$y^2 - 2(\cos x - 1) = x^2 + y^2 - \frac{1}{12}x^4 + \ldots = \text{const}$$

$$\left(y = -\frac{1}{\lambda}\frac{dx}{dt}\right),$$

и следовательно, начало координат $x = \frac{dx}{dt} = 0$ является центром. Равновесие, таким образом, устойчиво, и общее решение уравнения (38.21) будет периодическим. Найдем это решение.

Делая

$$t = \frac{\tau}{\lambda}(1 + h_2c^2 + h_4c^4 + \ldots), \qquad (38.22)$$

получим уравнение

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = \left(-x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120} + \ldots\right)(1 + h_2c^2 + h_4c^4 + \ldots),$$

которому стараемся удовлетворить рядом

$$x = c\cos\tau + c^3 x_3(\tau) + c^5 x_5(\tau) + \ldots, \tag{38.23}$$

где $x_k(\tau)$ — периодические функции τ периода 2π, удовлетворяющие условиям $x_k(0) = 0$. При этом ряд (38.22) содержит только четные степени c, а ряд (38.23) только нечетные степени c, так как уравнение (38.21) не изменяется при замене x на $-x$.

Имеем:

$$\frac{d^2x_3}{d\tau^2} = -x_3 - 2h_2\cos\tau + \frac{\cos^3\tau}{6} =$$
$$= -x_3 + \left(\frac{1}{8} - 2h_2\right)\cos\tau + \frac{1}{24}\cos 3\tau. \tag{38.24}$$

Для того чтобы это уравнение имело периодическое решение, необходимо, чтобы коэффициент при $\cos\tau$ обращался в нуль. Таким образом, получаем:

$$h_2 = \frac{1}{16},$$

после чего из уравнения (38.24), принимая во внимание начальные условия, будем иметь:

$$x_3 = \frac{1}{192}\cos\tau - \frac{1}{192}\cos 3\tau.$$

Для x_5 имеем уравнение

$$\frac{d^2x_5}{d\tau^2} = -x_5 + \left(-2h_4 + \frac{11}{1536}\right)\cos\tau + \frac{1}{384}\cos 3\tau - \frac{3}{256}\cos 5\tau,$$

из которого находим:

$$h_4 = \frac{11}{3072},$$
$$x_5 = -\frac{1}{6144}\cos\tau - \frac{1}{3072}\cos 3\tau + \frac{1}{2048}\cos 5\tau.$$

Этим приближением мы и ограничиваемся. Таким образом, периодическое решение уравнения (38.21) и его период определяются формулами:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{g}{l}}\left(1 + \frac{1}{16}c^2 + \frac{11}{3072}c^4 + \ldots\right),$$
$$x = c\cos\tau + c^3 x_3(\tau) + c^5 x_5(\tau) + \ldots,$$
$$x_3(\tau) = \frac{1}{192}\cos\tau - \frac{1}{192}\cos 3\tau,$$
$$x_5 = -\frac{1}{6144}\cos\tau - \frac{1}{3072}\cos 3\tau + \frac{1}{2048}\cos 5\tau,$$
$$t = \sqrt{\frac{g}{l}}\left(1 + \frac{1}{16}c^2 + \frac{11}{3072}c^4 + \ldots\right)\tau.$$

Здесь c — начальная амплитуда колебаний. Начальная скорость равна нулю. Заменяя t на $t+\alpha$, где α — произвольная постоянная, получим общее решение уравнения (38.21).

§ 39. Вспомогательное предложение.

Нам понадобится в дальнейшем одно вспомогательное предложение, являющееся непосредственным обобщением теоремы 2 § 20. Пусть $u_1, \ldots, u_k$ суть k заданных форм m-го порядка переменных $x_1, \ldots, x_n$. Требуется определить условия, при которых существуют k других форм $v_1, \ldots, v_k$ того же порядка, удовлетворяющих системе уравнений

$$\sum_{s=1}^{n}(p_{s1}x_1+\ldots+p_{sn}x_n)\frac{\partial v_l}{\partial x_s}=q_{l1}v_1+\ldots+q_{lk}v_k+u_l \quad (39.1)$$

$$(l=1,\ 2,\ \ldots,\ k),$$

где q_{ij} — некоторые постоянные.

Обозначим через $\rho_1, \ldots, \rho_n$ корни уравнения

$$\begin{vmatrix} p_{11}-\rho & p_{12} & \ldots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22}-\rho & \ldots & p_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{n1} & p_{n2} & \ldots & p_{nn}-\rho \end{vmatrix}=0, \quad (39.2)$$

а через $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_k$ — корни уравнения

$$\begin{vmatrix} q_{11}-\varkappa & q_{12} & \ldots & q_{1k} \\ q_{21} & q_{22}-\varkappa & \ldots & q_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q_{k1} & q_{k2} & \ldots & q_{kk}-\varkappa \end{vmatrix}=0. \quad (39.3)$$

Имеет место следующее предложение.

Теорема. *Если между корнями уравнений* (39.2) *и* (39.3) *не существует никаких соотношений вида*

$$m_1\rho_1+m_2\rho_2+\ldots+m_n\rho_n=\varkappa_i, \quad (39.4)$$

где $m_1, \ldots, m_n$ — *целые неотрицательные числа, связанные соотношением*

$$m_1+m_2+\ldots+m_n=m, \quad (39.5)$$

то существует одна и только одна система форм m-го порядка $v_1, \ldots, v_k$, *удовлетворяющих уравнениям* (39.1).

Доказательство. Имея в виду применить метод индукции, рассмотрим сначала случай $k=1$. Допустим, следовательно, что

предложено одно уравнение

$$\sum_{s=1}^{n}(p_{s1}x_1+\ldots+p_{sn}x_n)\frac{\partial v}{\partial x_s}=\varkappa v+u, \tag{39.6}$$

где u — форма m-го порядка. Число $\varkappa$ будет, очевидно, в рассматриваемом случае единственным корнем уравнения (39.3). Так как

$$\sum_{s=1}^{n}x_s\frac{\partial v}{\partial x_s}=mv,$$

то уравнение (39.6) можно переписать в виде

$$\sum_{s=1}^{n}\left(p_{s1}x_1+\ldots+\left(p_{ss}-\frac{\varkappa}{m}\right)x_s+\ldots+p_{sn}x_n\right)\frac{\partial v}{\partial x_s}=u.$$

Применяя теорему 2 § 20, мы можем утверждать, что это уравнение имеет решение и притом единственное, если не существует зависимостей вида

$$m_1\rho_1'+m_2\rho_2'+\ldots+m_n\rho_n'=0, \tag{39.7}$$

где $m_1, \ldots, m_n$ — целые неотрицательные числа, связанные соотношением (39.5), а ρ_s' — корни уравнения

$$\begin{vmatrix} p_{11}-\frac{\varkappa}{m}-\rho' & p_{12} & \ldots & p_{1n} \\ p_{22} & p_{22}-\frac{\varkappa}{m}-\rho' & \ldots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \ldots & p_{nn}-\frac{\varkappa}{m}-\rho' \end{vmatrix}=0.$$

Но, очевидно, имеем:

$$\rho_s'=\rho_s-\frac{\varkappa}{m},$$

и следовательно, соотношение (39.7) переходит в соотношение

$$m_1\rho_1+\ldots+m_n\rho_n=\frac{1}{m}(m_1+\ldots+m_n)\varkappa=\varkappa,$$

откуда и вытекает справедливость нашей теоремы для $k=1$.

Рассмотрим теперь случай $k>1$. Если мы введем в рассмотрение формы $w_1, \ldots, w_k$, связанные с формами $v_1, \ldots, v_k$ неособенной линейной подстановкой

$$w_i=\alpha_{i1}v_1+\alpha_{i2}v_2+\ldots+\alpha_{ik}v_k \qquad (i=1, 2, \ldots, k),$$