то из (39.1) получим для этих форм следующие уравнения:

$$\sum_{s=1}^{n}(p_{s1}x_1+\ldots+p_{sn}x_n)\frac{\partial w_i}{\partial x_s}=r_{i1}w_1+\ldots+r_{ik}w_k+\bar{u}_i$$
$$(i=1,\ 2,\ \ldots,\ k),$$

где $\bar{u}_i=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}u_j$ будут также известными формами m-го порядка. Коэффициенты r_{ij} связаны с коэффициентами q_{ij} соотношением

$$r=\alpha^{-1}q\alpha,$$

где r — матрица коэффициентов r_{ij}, q — матрица коэффициентов q_{ij}, а α — матрица коэффициентов α_{ij}. Отсюда следует, что уравнение

$$|r-\varkappa E|=\begin{vmatrix} r_{11}-\varkappa & r_{12} & \ldots & r_{1k} \\ r_{21} & r_{22}-\varkappa & \ldots & r_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_{k1} & r_{k2} & \ldots & r_{kk}-\varkappa \end{vmatrix}=0$$

(E — единичная матрица) имеет те же корни, что и уравнение (39.3). Действительно, имеем:

$$|r-\varkappa E|\equiv|\alpha^{-1}q\alpha-\varkappa E|\equiv|\alpha^{-1}(q-\varkappa E)\alpha|\equiv$$
$$\equiv|\alpha^{-1}|\cdot|q-\varkappa E|\cdot|\alpha|\equiv|q-\varkappa E|,$$

что и доказывает наше утверждение.

Установив это, допустим, что теорема доказана для системы с $k-1$ неизвестными функциями, и покажем, что она останется справедливой и для системы с k неизвестными функциями. С этой целью рассмотрим систему линейных однородных уравнений

$$q_{1i}\alpha_1+\ldots+(q_{ii}-\varkappa_1)\alpha_i+\ldots+q_{ki}\alpha_k=0\quad(i=1,\ 2,\ \ldots,\ k).$$

Так как определитель этой системы равен нулю, то она имеет решение, в котором хотя бы одна из величин α_i отлична от нуля. Допустим для определенности, что $\alpha_1\neq0$. Тогда, вводя вместо формы v_1 форму w, определяемую равенством

$$w=\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\ldots+\alpha_kv_k,$$

мы вместо первого уравнения (39.1) получим уравнение

$$\sum_{s=1}^{n}(p_{s1}x_1+\ldots+p_{sn}x_n)\frac{\partial w}{\partial x_s}=\varkappa_1w+\bar{u}_1, \tag{39.8}$$

где $\bar{u}_1=\sum_{i=1}^{k}\alpha_iu_i$ — известная форма m-го порядка.

Остальные уравнения (39.1) примут вид

$$\sum_{s=1}^{n}(p_{s1}x_1+\ldots+p_{sn}x_n)\frac{\partial v_j}{\partial x_s}=r_{j2}v_2+\ldots+r_{jk}v_k+r_jw+u_j \quad (39.9)$$

$$(j=2,\ \ldots,\ k),$$

где r_{ij} — некоторые постоянные, которые нам нет необходимости выписывать явно.

Уравнение (39.3) для преобразованной системы имеет вид

$$\begin{vmatrix} \varkappa_1-\varkappa & 0 & \ldots & 0 \\ r_1 & r_{22}-\varkappa & \ldots & r_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_k & r_{k2} & \ldots & r_{kk}-\varkappa \end{vmatrix}=(\varkappa_1-\varkappa)\begin{vmatrix} r_{22}-\varkappa & \ldots & r_{ik} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ r_{k2} & \ldots & r_{kk}-\varkappa \end{vmatrix}=0,$$

и так как по доказанному оно инвариантно относительно неособенного линейного преобразования, то корнями уравнения

$$\begin{vmatrix} r_{22}-\varkappa & \ldots & r_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ r_{k2} & \ldots & r_{kk}-\varkappa \end{vmatrix}=0$$

будут величины $\varkappa_2,\ \ldots,\ \varkappa_k$.

Величина $\varkappa_1$, как и остальные корни уравнения (39.3), не связана, по условию, с величинами $\rho_1,\ \ldots,\ \rho_n$ никакими соотношениями вида (39.4), и поэтому, по доказанному, уравнение (39.8) допускает одно и только одно решение для w в виде формы m-го порядка. Подставив это решение в уравнения (39.9), мы получим для определения $v_2,\ \ldots,\ v_k$ систему вида (39.1) с $k-1$ неизвестными функциями. Эта система, по предположению, допускает одно и только одно решение для $v_2,\ \ldots,\ v_k$. Переходя к первоначальным переменным $v_1,\ \ldots,\ v_k$, мы получим, таким образом, одно и только одно решение системы (39.1).

Итак, допустив, что теорема справедлива при $k-1$ неизвестных функциях, мы доказали, что она остается справедливой и при k неизвестных функциях, и так как она доказана для $k=1$, то она справедлива для всякого k.

Пример. Пусть предложена следующая система:

$$\sum_{s=1}^{n}(p_{s1}x_1+\ldots+p_{sn}x_n)\frac{\partial v_j}{\partial x_s}=\lambda(k-j+1)v_{j-1}-j\lambda v_{j+1}+u_j \quad (39.10)$$

$$(j=1,\ 2,\ \ldots,\ k;\ v_0=v_{k+1}=0),$$

где $u_1, \ldots, u_k$ — заданные формы произвольного порядка m, а λ — положительное число. Предположим, что все корни уравнения (39.2) имеют отрицательные вещественные части. В этом случае система (39.10) имеет одно и только одно решение для $v_1, \ldots, v_k$ в виде форм m-го порядка.

Действительно, корни уравнения (39.3), как можно показать, в рассматриваемом случае будут

$$\pm \lambda i, \quad \pm 3\lambda i, \ \ldots, \ \pm (k-3)\lambda i, \ \pm (k-1)\lambda i,$$

если k — число четное, и

$$0, \ \pm 2\lambda i, \ \pm 4\lambda i, \ \ldots, \ \pm (k-1)\lambda i,$$

если k — число нечетное. Очевидно, что в этом случае соотношения (39.4) не могут иметь место ни при каких целых неотрицательных $m_1, \ldots, m_n$, не равных нулю одновременно, и потому теорема применима при любом m.

§ 40. Исследование системы $(n+2)$-го порядка в частном случае.

Мы переходим теперь к рассмотрению системы $(n+2)$-го порядка при $n > 0$. Дифференциальные уравнения возмущенного движения, как мы видели в § 35, имеют вид

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= -\lambda y + X(x, y, x_1, \ldots, x_n),\\
\frac{dy}{dt} &= \lambda x + Y(x, y, x_1, \ldots, x_n),\\
\frac{dx_s}{dt} &= p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + p_s x +\\
&\qquad + q_s y + X_s(x, y, x_1, \ldots, x_n)\\
&\qquad (s = 1, 2, \ldots, n),
\end{aligned}\right\} \tag{40.1}$$

причем коэффициенты p_{sj} таковы, что уравнение

$$\begin{vmatrix}
p_{11}-\rho & p_{12} & \ldots & p_{1n}\\
p_{21} & p_{22}-\rho & \ldots & p_{2n}\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
p_{n1} & p_{n2} & \ldots & p_{nn}-\rho
\end{vmatrix} = 0 \tag{40.2}$$

имеет корни только с отрицательными вещественными частями.

В этом параграфе мы дадим решение задачи устойчивости для системы (40.1) при некотором частном предположении. Как мы увидим в следующем параграфе, к этому частному случаю приводится задача и в общем случае.

Обозначим через $X^0(x, y)$, $Y^0(x, y)$, $X_s^0(x, y)$ функции переменных x и y, в которые обращаются функции X, Y и X_s, если в них отбросить все члены, зависящие от $x_1, \ldots, x_n$, так что

$$X^0(x, y) = X(x, y, 0, \ldots, 0),$$
$$Y^0(x, y) = Y(x, y, 0, \ldots, 0),$$
$$X_s^0(x, y) = X_s(x, y, 0, \ldots, 0).$$

Рассмотрим систему второго порядка

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda y + X^0(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = \lambda x + Y^0(x, y). \tag{40.3}$$

Решая задачу устойчивости для этой системы, мы встретимся с одним из двух случаев: с общим случаем, когда задача решается конечным числом первых членов в разложениях функций X^0 и Y^0 (случай фокуса), и особенным случаем, когда требуется рассмотрение членов сколь угодно высоких порядков (случай центра). Предположим, что мы имеем дело с первым из этих случаев. Пусть $2N-1$ — наивысший порядок членов разложений функций X^0 и Y^0, от которых зависит решение задачи устойчивости для системы (40.3). Как мы видели (§ 37, примечание), этот порядок всегда нечетный. Тогда мы будем предполагать, что для уравнений (40.1) выполняются следующие два условия:

1) все постоянные p_s и q_s равны нулю;

2) разложения функций X_s^0 начинаются членами не ниже $(2N-1)$-го порядка.

Покажем, что если эти условия выполняются, то задача устойчивости для системы $(n+2)$-го порядка (40.1) решается системой второго порядка (40.3), а именно: если для системы (40.3) получается неустойчивость, то и для системы (40.1) будет иметь место неустойчивость и, наоборот, устойчивость для системы (40.3) обусловливает устойчивость и для системы (40.1).

Таким образом, при выполнении указанных условий для решения задачи устойчивости мы попросту отбрасываем все уравнения, соответствующие некритическим корням, а в уравнениях, соответствующих критическим корням, отбрасываем все члены, содержащие некритические переменные.

Для доказательства справедливости наших предложений поступим так же, как и в случае одного нулевого корня. Попытаемся построить для уравнений (40.1) функцию Ляпунова в виде суммы функций Ляпунова, построенных отдельно для системы (40.3) и для системы последних n уравнений (40.1).

Задача заключается в построении функции $V(x, y, x_1, \ldots, x_n)$, обладающей знакоопределенной производной.

Как было показано в § 37, функция Ляпунова для системы (40.3) имеет вид

$$U = x^2 + y^2 + f_3(x, y) + f_4(x, y) + \ldots + f_{2N-1}(x, y),$$

где f_i — формы i-го порядка переменных x и y. Для производной этой функции, составленной в силу уравнений (40.3), будем иметь:

$$\frac{\partial U}{\partial x}(-\lambda y + X^0) + \frac{\partial U}{\partial y}(\lambda x + Y^0) =$$
$$= G(x^2 + y^2)^N + \sum_{\alpha+\beta=2N} \varphi_{\alpha\beta}(x, y)\, x^\alpha y^\beta,$$

где $\varphi_{\alpha\beta}(x, y)$ обращаются в нуль при $x = y = 0$. Задача устойчивости для системы (40.3) решается при этом знаком G. Невозмущенное движение будет неустойчиво при $G > 0$ и асимптотически устойчиво при $G < 0$. Нам нужно показать, что то же самое будет и для системы (40.1).

Пусть $W(x_1, \ldots, x_n)$—квадратичная форма переменных $x_1, \ldots, x_n$, удовлетворяющая уравнению

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial W}{\partial x_s}(p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n) = \sum_{s=1}^{n} x_s^2. \tag{40.4}$$

Так как все корни уравнения (40.2) имеют отрицательные вещественные части, то форма W будет определенно-отрицательная.

Рассмотрим функцию

$$V = G[x^2 + y^2 + f_3(x, y) + \ldots + f_{2N-1}(x, y)] + W(x_1, \ldots, x_n) =$$
$$= \varphi(x, y) + W(x_1, \ldots, x_n) \tag{40.5}$$

и составим ее производную по t в силу уравнений (40.1). Для этой производной имеем:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}[-\lambda y + X^0(x, y) + X'(x, y, x_1, \ldots, x_n)] +$$
$$+ \frac{\partial \varphi}{\partial y}[\lambda x + Y^0(x, y) + Y'(x, y, x_1, \ldots, x_n)] +$$
$$+ \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial W}{\partial x_s}[p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + X_s^0(x, y) + X_s'(x, y, x_1, \ldots, x_n)],$$

где функции X', Y', X_s' обращаются в нуль при $x_1 = \ldots = x_n = 0$ и обозначают совокупности тех членов в разложениях X, Y и X_s, которые зависят от $x_1, \ldots, x_n$.

Если бы функции X', Y', а также функции X_s^0 обращались тождественно в нуль, то производная имела бы вид

$$G^2(x^2+y^2)^N+G\sum_{\alpha+\beta=2N}\varphi_{\alpha\beta}x^\alpha y^\beta+\sum_{s=1}^{n}x_s^2+\sum_{i,j=1}^{n}f_{ij}x_ix_j,$$

где f_{ij} — аналитические функции переменных x, y, $x_1, \ldots, x_n$, обращающиеся в нуль при $x=y=x_1=\ldots=x_n=0$. Эта производная была бы, очевидно, определенно-положительной функцией $n+2$ переменных x, y, x_s. Но так как вышеуказанные соотношения, вообще говоря, не выполняются, то производная $\frac{dV}{dt}$ не получится определенно-положительной. Эта производная будет иметь вид

$$\frac{dV}{dt}=G^2(x^2+y^2)^N+\sum_{\alpha+\beta=2N}\varphi_{\alpha\beta}x^\alpha y^\beta+$$
$$+\sum_{s=1}^{n}x_s^2+\sum_{i,j=1}^{n}f_{ij}x_ix_j+P(x,\ y,\ x_1,\ \ldots,\ x_n), \qquad (40.6)$$

где теперь уже $\varphi_{\alpha\beta}$ содержат и переменные $x_1, \ldots, x_n$ и обращаются в нуль при $x=y=x_1=\ldots=x_n=0$, а P — совокупность всех членов, которые не могут быть отнесены ни к группе

$$G^2(x^2+y^2)^N+\sum_{\alpha+\beta=2N}\varphi_{\alpha\beta}x^\alpha y^\beta, \qquad (40.7)$$

ни к группе

$$\sum_{i,j=1}^{n}f_{ij}x_ix_j.$$

Исследуем подробнее функцию P. Эта функция не будет содержать члены ниже третьего порядка, так как единственными членами второго порядка в выражении $\frac{dV}{dt}$ будут члены (40.4). Функция P не содержит в своем разложении членов, свободных от $x_1, \ldots, x_n$, так как все такие члены в $\frac{dV}{dt}$ содержатся в выражении

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(-\lambda y+X^0)+\frac{\partial\varphi}{\partial y}(\lambda x+Y^0)$$

и, следовательно, могут быть включены в группу (40.7).

Из членов, линейных относительно $x_1, \ldots, x_n$, в функции P будут содержаться лишь такие, порядок которых относительно x и y меньше $2N$. Остальные члены этого типа могут быть включены в группу (40.7). Члены, имеющие относительно $x_1, \ldots, x_n$ второй и более высокие порядки, могут быть все включены в (40.7) и поэтому в P не содержатся.

Таким образом, функция P имеет вид

$$P = P_2(x_1, \ldots, x_n, x, y) + P_3(x_1, \ldots, x_n, x, y) + \ldots$$
$$\ldots + P_{2N-1}(x_1, \ldots, x_n, x, y), \qquad (40.8)$$

где P_k — формы k-го порядка относительно x и y, коэффициентами которых являются линейные формы переменных $x_1, \ldots, x_n$.

Наличие в $\frac{dV}{dt}$ слагаемого P нарушает ее знакоопределенность. Нам нужно будет поэтому функцию V изменить таким образом, чтобы в выражении ее производной не содержалось членов, входящих в P, т. е. линейных относительно x_j и имеющих порядок относительно x и y, меньший $2N$. С этой целью введем в функцию V добавочное слагаемое вида

$$Q_k(x_1, \ldots, x_n, x, y) =$$
$$= v_1 x^k + v_2 x^{k-1} y + \ldots + v_k x y^{k-1} + v_{k+1} y^k, \qquad (40.9)$$

где $2 \leqslant k \leqslant 2N-1$, а v_j — линейные формы переменных $x_1, \ldots, x_n$. Исследуем те новые члены, которые внесет это слагаемое в выражение $\frac{dV}{dt}$. Члены, свободные от $x_1, \ldots, x_n$, могут получиться лишь за счет производных от первых множителей, т. е. за счет функций X_s^0, и так как разложения этих функций начинаются членами не ниже $(2N-1)$-го порядка, то указанные члены будут иметь порядок не ниже $2N+k-1 \geqslant 2N+1$ и могут быть включены в группу (40.7). Новые члены, линейные относительно $x_1, \ldots, x_n$, будут иметь относительно x, y порядок, не меньший k, так как общий порядок членов, вносимых слагаемым (40.9) в производную, будет, очевидно, не меньше $k+1$.

Таким образом, производная от функции

$$V = \varphi(x, y) + W(x_1, \ldots, x_n) + Q_k$$

будет иметь вид

$$\frac{dV}{dt} = G^2(x^2+y^2)^N + \sum_{\alpha+\beta=2N} \varphi^*_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta + \sum_{s=1}^{n} x_s^2 + \sum_{i,\,j=1}^{n} f^*_{ij} x_i x_j +$$
$$+ P_2 + \ldots + P_{k-1} + P^*_k + P^*_{k+1} + \ldots + P^*_{2N-1},$$

где $\varphi^*_{\alpha\beta}$, f^*_{ij} — функции такого же вида, как и $\varphi_{\alpha\beta}$, f_{ij}, а P^*_k, $P^*_{k+1}, \ldots, P^*_{2N-1}$ — формы относительно x, y, порядок которых равен их индексу и коэффициенты которых являются линейными функциями от $x_1, \ldots, x_n$. Функции $P^*_k, \ldots, P^*_{2N-1}$ отличаются, вообще говоря, от функций $P_k, \ldots, P_{2N-1}$. Выпишем подробней функцию P^*_k. Пусть

$$P_k = u_1 x^k + u_2 x^{k-1} y + \ldots + u_k x y^{k-1} + u_{k+1} y^k,$$

где $u_i(x_1, \ldots, x_n)$ — линейные формы от $x_1, \ldots, x_n$. Тогда, как легко видеть, будем иметь:

$$P_k^* = f_1 x^k + f_2 x^{k-1} y + \ldots + f_k x y^{k-1} + f_{k+1} y^k,$$

где

$$f_j = \sum_{s=1}^{n} (p_{s1} x_1 + \ldots + p_{sn} x_n) \frac{\partial v_j}{\partial x_s} + \lambda j v_{j+1} - (k - j + 2) \lambda v_{j-1} + u_j$$

$$(j = 1, 2, \ldots, k+1, \quad v_0 = v_{k+2} = 0).$$

Выберем теперь функцию (40.9) таким образом, чтобы функция P_k^* обратилась в нуль. Для этого придется линейные формы $v_1, \ldots, v_{k+1}$ выбрать так, чтобы выполнялись уравнения

$$f_1 = f_2 = \ldots = f_{k+1} = 0. \tag{40.10}$$

Эти уравнения имеют как раз тот вид, который мы рассмотрели с качестве примера в предыдущем параграфе. Мы видели, что в рассматриваемом нами случае, когда уравнение (40.2) имеет корни только в отрицательными вещественными частями, уравнения (40.10) имеют одно и только одно решение для v_j.

Выбрав таким образом функцию (40.9), мы уничтожим в выражении $\frac{dV}{dt}$ то слагаемое функции P, которое является формой k-го порядка относительно x и y, не изменяя при этом тех слагаемых, которые имеют меньший порядок. Отсюда следует, что, добавляя к V последовательно слагаемые вида Q_k $(k = 2, 3, \ldots, 2N - 1)$, мы можем последовательно уничтожить в функции P все члены. Другими словами, мы можем так подобрать функции $Q_2, \ldots, Q_{2N-1}$, каждая из которых является формой соответствующего порядка относительно x и y и линейной относительно $x_1, \ldots, x_n$, что производная от функции

$$V = G(x^2 + y^2 + f_3 + \ldots + f_{2N-1}) + W(x_1, \ldots, x_n) + \\ + Q_2(x, y, x_1, \ldots, x_n) + \ldots + Q_{2N}(x, y, x_1, \ldots, x_n),$$

составленная в силу уравнений (40.1), будет иметь вид

$$\frac{dV}{dt} = G^2 (x^2 + y^2)^N + \sum_{\alpha+\beta=2N} \Phi_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta + \sum_{s=1}^{n} x_s^2 + \sum_{\alpha, \beta=1}^{n} F_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta,$$

где $\Phi_{\alpha\beta}$ и $F_{\alpha\beta}$ обращаются в нуль при $x = y = x_1 = \ldots = x_n = 0$.

Производная $\frac{dV}{dt}$ будет функцией определенно-положительной. Сама функция V имеет вид

$$V = G(x^2 + y^2) + W(x_1, \ldots, x_n) + F(x, y, x_1, \ldots, x_n),$$

где F — аналитическая функция переменных x, y, x_1, ..., x_n, разложение которой начинается членами не ниже третьего порядка.

Так как форма W определенно-отрицательна, то V будет определенно-отрицательной функцией всех $n+2$ переменных x, y, x_s, если $G<0$, и знакопеременной функцией, если $G>0$. Отсюда на основании теорем Б и В заключаем, что, так же как и для системы второго порядка (40.3), невозмущенное движение для полной системы (40.1) будет асимптотически устойчиво при $G<0$ и неустойчиво при $G>0$. Таким образом, наши утверждения доказаны.

§ 41. Исследование системы $(n+2)$-го порядка в общем случае.

В предыдущем параграфе мы рассмотрели систему (40.1) при некоторых частных предположениях. Чтобы решить задачу в общем случае, преобразуем эту систему к такому виду, чтобы для нее выполнялись ограничения предыдущего параграфа. Для этого необходимо систему преобразовать так, чтобы она сохранила вид (40.1), но чтобы разложения правых частей уравнений, соответствующих некритическим переменным, после того как в них отбросить все члены, содержащие эти переменные, начинались членами достаточно высокого порядка.

С этой целью введем в уравнениях (40.1) новые переменные $\xi_1, \ldots, \xi_n$ вместо переменных $x_1, \ldots, x_n$ при помощи подстановки

$$\xi_s = x_s - v_s(x, y) \qquad (s=1, \ldots, n), \tag{41.1}$$

где $v_s(x, y)$ — аналитические функции переменных x и y, обращающиеся в нуль при $x=y=0$. Преобразованные уравнения будут

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= -\lambda y + \overline{X}(x, y, \xi_1, \ldots, \xi_n) = \\
&= -\lambda y + X(x, y, \xi_1+v_1, \ldots, \xi_n+v_n), \\
\frac{dy}{dt} &= \lambda x + \overline{Y}(x, y, \xi_1, \ldots, \xi_n) = \\
&= \lambda x + Y(x, y, \xi_1+v_1, \ldots, \xi_n+v_n), \\
\frac{d\xi_s}{dt} &= \Xi_s(x, y, \xi_1, \ldots, \xi_n) = p_{s1}\xi_1 + \ldots + p_{sn}\xi_n + \\
&+ p_s x + q_s y + X_s(x, y, \xi_1+v_1, \ldots, \xi_n+v_n) - \\
&- \left[\frac{\partial v_s}{\partial x}(-\lambda y + \overline{X}) + \frac{\partial v_s}{\partial y}(\lambda x + \overline{Y})\right] + p_{s1}v_1 + \ldots + p_{sn}v_n.
\end{aligned}\right\} \tag{41.2}$$

Обозначим через $\Xi_s^{(0)}(x, y)$ совокупность всех членов в функциях Ξ_s, не зависящих от некритических переменных $\xi_1, \ldots, \xi_n$.

Будем, очевидно, иметь:

$$\Xi_s^{(0)}(x, y) = [p_{s1}v_1 + \ldots + p_{sn}v_n + p_s x + q_s y + \\ + X_s(x, y, v_1, \ldots, v_n) - \left\{ \frac{\partial v_s}{\partial x} [-\lambda y + X(x, y, v_1, \ldots, v_n)] + \right. \\ \left. + \frac{\partial v_s}{\partial y} [\lambda x + Y(x, y, v_1, \ldots, v_n)] \right\}. \quad (41.3)$$

Подберем теперь функции $v_1, \ldots, v_n$ таким образом, чтобы разложения функций $\Xi_s^{(0)}$ начинались членами не ниже m-го порядка, где m — достаточно большое число. Тогда система (41.2) будет иметь желаемый вид и для решения задачи устойчивости отбросим в первых двух уравнениях этой системы все члены, содержащие $\xi_1, \ldots, \xi_n$, и рассмотрим полученную таким образом систему второго порядка

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\lambda y + X(x, y, v_1(x, y), \ldots, v_n(x, y)), \\ \frac{dy}{dt} &= \lambda x + Y(x, y, v_1(x, y), \ldots, v_n(x, y)). \end{aligned}\right\} \quad (41.4)$$

Может случиться, что как бы велико ни было число m, задача устойчивости для системы (41.4) не решается членами порядка ниже m. Этот случай будет исключительным, особенным, и мы его рассмотрим в § 43.

Но может, однако, случиться, и это будет общим случаем, что при m достаточно большом задача устойчивости для системы (41.4) решается членами не выше m-го порядка (m при этом будет обязательно нечетным), так что члены порядка выше m на решении задачи не скажутся. В этом случае задача устойчивости и для исходной системы $(n+2)$-го порядка (40.1) решается системой второго порядка (41.4), а именно, если для системы (41.4) имеет место неустойчивость, то и для системы (40.1) имеет место неустойчивость, и если для системы (41.4) получается асимптотическая устойчивость, то и для системы (40.1) получится асимптотическая устойчивость.

Действительно, так как по условию задача устойчивости для системы (41.4) решается членами порядка не выше m и разложения функций (41.3) начинаются членами не ниже m-го порядка, то система (41.2) удовлетворяет всем ограничениям предыдущего параграфа. Согласно полученным там результатам система (41.4) полностью решает задачу устойчивости для системы (41.2) и, следовательно, для эквивалентной ей системы (40.1).

Остается показать, как определить функции $v_s(x, y)$, обращающие в нуль в выражениях (41.3) все члены до порядка $m-1$ включительно. С этой целью положим:

$$v_s(x, y) = v_s^{(1)}(x, y) + v_s^{(2)}(x, y) + \ldots \quad (s = 1, 2, \ldots, n), \quad (41.5)$$

где $v_s^{(k)}(x, y)$ — формы k-го порядка переменных x и y. Тогда члены первого порядка в (41.3) будут

$$\Xi_{s1}^{(0)} = -\lambda\left(\frac{\partial v_s^{(1)}}{\partial y}x - \frac{\partial v_s^{(1)}}{\partial x}y\right) + p_{s1}v_1^{(1)} + \ldots + p_{sn}v_n^{(1)} + p_s x + q_s y$$
$$(s = 1, 2, \ldots, n), \tag{41.6}$$

а совокупность членов какого-нибудь k-го порядка имеет вид

$$\Xi_{sk}^{(0)} = -\lambda\left(\frac{\partial v_s^{(k)}}{\partial y}x - \frac{\partial v_s^{(k)}}{\partial x}y\right) + p_{s1}v_1^{(k)} + \ldots + p_{sn}v_n^{(k)} + u_s^{(k)}(x, y)$$
$$(s = 1, 2, \ldots, n). \tag{41.7}$$

Здесь $u_s^{(k)}(x, y)$ — формы k-го порядка, зависящие от форм $v_s^{(1)}, \ldots, v_s^{(k-1)}$.

Для того чтобы в функциях (41.3) не было членов первого порядка, необходимо линейные формы $v_s^{(1)}(x, y)$ выбрать так, чтобы удовлетворялись уравнения $\Xi_{s1}^{(0)} = 0$, а для того чтобы разложения функций (41.3) начинались членами не ниже m-го порядка, необходимо, чтобы выполнялись уравнения

$$\lambda\left(\frac{\partial v_s^{(k)}}{\partial y}x - \frac{\partial v_s^{(k)}}{\partial x}y\right) = p_{s1}v_1^{(k)} + \ldots + p_{sn}v_n^{(k)} + u_s^{(k)}(x, y) \tag{41.8}$$
$$(s = 1, 2, \ldots, n; \quad k = 1, 2, \ldots, m-1).$$

Так как функции $u_s^{(k)}$ зависят только от тех $v_s^{(j)}$, для которых $j < k$, то уравнения (41.8) дают возможность последовательно определять формы $v_s^{(k)}$, начиная с $k = 1$, причем для определения $v_s^{(1)}$ получаются уравнения с известными правыми частями, так как на основании (41.6) $u_s^{(1)} = p_s x + q_s y$. Всего в рядах (41.5) нужно определить члены до $(m-1)$-го порядка, если мы желаем, чтобы разложения (41.3) начинались членами не ниже m-го порядка.

Допустим, что все функции $v_s^{(1)}, v_s^{(2)}, \ldots, v_s^{(k-1)}$ уже определены. Тогда для нахождения $v_s^{(k)}$ мы получим уравнения (41.8) с известными правыми частями. Уравнения (41.8) имеют вид уравнений (39.1), рассмотренных нами в § 39. Корнями уравнения (39.2) являются сейчас величины $\pm\lambda i$, а корнями уравнения (39.3) — корни $\rho_1, \ldots, \rho_n$ уравнения (40.2). Соотношение (39.4) принимает сейчас вид

$$(m_1 - m_2)\lambda i = \rho_j,$$

и так как оно не выполняется ни при каких целых неотрицательных m_1, m_2, то на основании теоремы § 39 система (41.8) имеет

решение для $v_s^{(k)}$, каков бы ни был индекс k. Это решение нужно искать в виде форм с неопределенными коэффициентами, для определения которых получатся линейные неоднородные алгебраические уравнения.

Выясним теперь, сколько членов нужно определить в рядах (41.5) при практическом решении задачи. Для этого вспомним, что если задача устойчивости для системы второго порядка решается членами не свыше какого-нибудь конечного порядка, то этот порядок всегда нечетный. В простейшем случае, который на практике и будет наиболее частым, задача решается членами третьего порядка. Следовательно, нужно, чтобы в разложениях (41.3) отсутствовали члены первого и второго порядков, для чего в функциях v_s нужно взять лишь линейные члены $v_s^{(1)}(x, y)$ и члены второго порядка $v_s^{(2)}(x, y)$. Определив эти члены, подставим полученные таким образом функции v_s в уравнения (41.4) и решаем для них задачу устойчивости. Если при этом окажется, что задача членами третьего порядка не решается и требует, следовательно, рассмотрения членов, по крайней мере, четвертого и пятого порядка, то придется определить также формы $v_s^{(3)}$ и $v_s^{(4)}$, а может быть и формы более высоких порядков, если окажется, что и члены пятого порядка не решают задачи устойчивости для системы (41.4).

Заметим, наконец, что уравнения (41.4) получаются из первых двух уравнений (40.1) заменой переменных x_s функциями $v_s(x, y)$, а уравнения (41.8) мы получим, если попытаемся найти решение системы уравнений с частными прозводными

$$\frac{\partial v_s}{\partial x}(-\lambda y + X(x, y, v_1, \ldots, v_n)) + \frac{\partial v_s}{\partial y}(\lambda x + Y(x, y, v_1, \ldots, v_n)) =$$

$$= p_{s1}v_1 + \ldots + p_{sn}v_n + p_s x + q_s y + X_s(x, y, v_1, \ldots, v_n) \qquad (41.9)$$

в виде рядов (41.5). Поэтому все вышесказанное приводит нас к следующему правилу.

Для того чтобы решить задачу устойчивости для системы (40.1), составляем систему уравнений с частными производными (41.9), которой стараемся удовлетворить рядами (41.5). Такие ряды (формальные) всегда найдутся и будут единственными. Этими рядами заменяем величины x_s в первых двух уравнениях (40.1), после чего получим систему второго порядка (41.4). Допустим, что задача устойчивости для этой системы решается конечным числом членов. Тогда если для системы (41.4) получается неустойчивость, то и для системы (40.1) будет иметь место неустойчивость, а если для системы (41.4) получится асимптотическая устойчивость, то и для системы (40.1) будет иметь место асимптотическая устойчивость.

О количестве членов, которые необходимо взять в рядах (41.5) для решения задачи устойчивости, мы уже говорили выше[1]).

Поясним выкладки примерами.

Пример 1. Пусть предложена система:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -y+\alpha xz, \quad \frac{dy}{dt} = x+\alpha yz, \\ \frac{dz}{dt} &= -z+x^2+y^2+f(x, y, z), \end{aligned}\right\} \tag{41.10}$$

где разложение функции $f(x, y, z)$ начинается членами не ниже третьего порядка. Составим уравнение с частными производными

$$(-y+\alpha xv)\frac{\partial v}{\partial x}+(x+\alpha yv)\frac{\partial v}{\partial y} = -v+x^2+y^2+f(x, y, v),$$

которому стараемся удовлетворить рядом

$$v = v_1(x, y)+v_2(x, y)+\ldots,$$

где $v_j(x, y)$ — формы j-го порядка. Сначала определим формы v_1 и v_2. Формы более высоких порядков будем определять лишь в том случае, если в этом будет необходимость. Для v_1 и v_2 имеем уравнения

$$-y\frac{\partial v_1}{\partial x}+x\frac{\partial v_1}{\partial y} = -v_1,$$

$$-y\frac{\partial v_2}{\partial x}+x\frac{\partial v_2}{\partial y} = -v_2+x^2+y^2-\alpha yv_1\frac{\partial v_1}{\partial y}-\alpha xv_1\frac{\partial v_1}{\partial x}.$$

Первое уравнение дает $v_1=0$, после чего второе уравнение принимает вид

$$-y\frac{\partial v_2}{\partial x}+x\frac{\partial v_2}{\partial y} = -v_2+x^2+y^2. \tag{41.11}$$

Полагая

$$v_2 = Ax^2+2Bxy+Cy^2,$$

мы получим из (41.11) уравнения

$$-A+B+C=0, \quad A+2B=1, \quad -2B+C=1,$$

откуда находим, что $v_2 = x^2+y^2$.

---

[1]) Решение задачи устойчивости в критическом случае пары чисто мнимых корней, а также в случае одного нулевого корня, когда уравнения возмущенного движения не аналитичны, дано в работе: Ведров В. С., Об устойчивости движения. Труды ЦАГИ, вып. 327, 1937.

Подставляя теперь в первые два уравнения (41.10) вместо z величину $v = v_1 + v_2 + \ldots$, получим систему второго порядка

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -y + \alpha x (x^2 + y^2) + \varphi(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= x + \alpha y (x^2 + y^2) + \psi(x, y), \end{aligned}\right\} \tag{41.12}$$

где разложения φ и ψ начинаются членами не ниже четвертого порядка. Будем теперь решать задачу устойчивости для системы (41.12). Здесь лучше всего воспользоваться методом § 37. При этом сразу видно, что система (41.12) допускает функцию Ляпунова $2V = x^2 + y^2$, производная которой, имеющая вид

$$\frac{dV}{dt} = \alpha (x^2 + y^2)^2 + x\varphi + y\psi,$$

будет функцией знакоопределенной, если только $\alpha \neq 0$. Невозмущенное движение для системы (41.12), а вместе с ней и для системы (41.10) будет неустойчиво при $\alpha > 0$ и асимптотически устойчиво при $\alpha < 0$.

При $\alpha = 0$ задача устойчивости для системы (41.12) членами третьего порядка не решается. Однако вычисление форм v_3, v_4 и членов более высоких порядков в разложении функции v излишне, так как при $\alpha = 0$ первые два уравнения (41.10) не содержат переменной z. Этот случай, очевидно, принадлежит к числу особенных.

Пример 2. В качестве второго примера рассмотрим одну из задач устойчивости систем автоматического регулирования, исследованную А. И. Лурье[1]).

Допустим, что дифференциальные уравнения движения системы (регулируемого объекта, измерительных органов, сервоприводов и т. д.) имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\eta_i}{dt} &= \sum_{\alpha=1}^{n+2} b_{i\alpha}\eta_\alpha + h_i f(\sigma), \\ \sigma &= \sum_{\alpha=1}^{n+2} j_\alpha \eta_\alpha \\ (i &= 1, 2, \ldots, n+2), \end{aligned}\right\} \tag{41.13}$$

где $b_{i\alpha}$, h_i, j_α — постоянные, а $f(\sigma)$ — некоторая нелинейная функция, обращающаяся в нуль при $\sigma = 0$. Рассмотренные нами ранее в §§ 12 и 26 уравнения систем регулирования являются, очевидно, частным случаем системы (41.13).

---

[1]) Лурье А. И., О характере границ области устойчивости регулируемых систем. ПММ, т. XV, вып. 2, 1951.

Предположим, что $f(\sigma)$ является аналитической функцией σ и имеет вид

$$f(\sigma) = c\sigma + \psi_2\sigma^2 + \psi_3\sigma^3 + \ldots$$

Рассмотрим систему первого приближения

$$\frac{d\eta_i}{dt} = \sum_{\alpha=1}^{n+2} a_{i\alpha}\eta_\alpha, \qquad a_{i\alpha} = b_{i\alpha} + h_i j_\alpha c \tag{41.14}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n+2).$$

Для того чтобы положение равновесия $\eta_1 = \ldots = \eta_{n+2} = 0$ рассматриваемой системы было устойчивым, достаточно, чтобы вещественные части всех корней уравнения

$$\Delta(\rho) = \begin{vmatrix} a_{11}-\rho & a_{12} & \ldots & a_{1,\,n+2} \\ a_{21} & a_{22}-\rho & \ldots & a_{2,\,n+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n+2,\,1} & a_{n+2,\,2} & \ldots & a_{n+2,\,n+2}-\rho \end{vmatrix} = 0 \tag{41.15}$$

имели отрицательные вещественные части. При этом величина области устойчивости, как это легко усмотреть из рассуждений § 26, зависит от величины этих вещественных частей. Если вещественные части хотя бы некоторых корней уравнения (41.15) численно малы, то область устойчивости может оказаться слишком малой и с точки зрения практической исследуемое положение равновесия надо будет рассматривать как неустойчивое. Как будет показано в § 44, вопрос о поведении системы в такого рода случаях будет зависеть от того, будет ли иметь место устойчивость или неустойчивость в предельном случае, когда указанные вещественные части будут равны нулю. Таким образом, задача приводится к исследованию критических случаев. Мы рассмотрим эту задачу для системы (41.13) в предположении, что уравнение (41.15) имеет пару чисто мнимых корней $\pm\lambda_i$ при остальных корнях с отрицательными вещественными частями.

Допустим, что все корни $\rho_1, \ldots, \rho_{n+2}$ уравнения (41.15) являются простыми. Рассмотрим линейную подстановку

$$x_i = A_{i1}\eta_1 + A_{i2}\eta_2 + \ldots + A_{i,\,n+2}\eta_{n+2} \; (i = 1, 2, \ldots, n+2), \tag{41.16}$$

где A_{ij} определяются уравнениями

$$a_{1s}A_{i1} + a_{2s}A_{i2} + \ldots + a_{n+2,\,s}A_{i,\,n+2} = \rho_i A_{is}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n+2, \; s = 1, 2, \ldots, n+2)$$

и, следовательно,

$$A_{ij} = C_i\,\Delta_{ij}(\rho_i),$$

где $\Delta_{\alpha\beta}$ — алгебраическое дополнение элемента β-й строки и α-го столбца определителя (41.15), а C_i — произвольные постоянные. Подстановка (41.16) преобразует уравнения (41.14) к виду

$$\frac{dx_i}{dt} = \rho_i x_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+2),$$

а уравнения (41.13) — к виду

$$\frac{dx_i}{dt} = \rho_i x_i + \psi_2\sigma^2 + \psi_3\sigma^3 + \ldots,$$

если только постоянные C_i выбраны согласно условиям

$$\frac{1}{C_i} = \sum_{\alpha=1}^{n+2} \Delta_{1\alpha}(\rho_i)\, h_\alpha,$$

что мы и будем предполагать. Переменная σ примет при этом вид

$$\sigma = \sum_{\alpha=1}^{n+2} a_\alpha x_\alpha,$$

где a_α — некоторые постоянные, явное выражение которых мы здесь не приводим.

Пусть $\rho_{n+1} = i\lambda$, $\rho_{n+2} = -i\lambda$, а остальные корни ρ_s имеют отрицательные вещественные части. Тогда, полагая

$$x_{n+1} = x + iy, \quad x_{n+2} = x - iy,$$

мы приведем уравнения движения к следующему окончательному виду:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\lambda y + \psi_2\sigma^2 + \psi_3\sigma^3 + \ldots, \\ \frac{dy}{dt} &= \lambda x, \\ \frac{dx_s}{dt} &= \rho_s x_s + \psi_2\sigma^2 + \psi_3\sigma^3 + \ldots, \\ \sigma &= ax - by + a_1x_1 + \ldots + a_nx_n, \end{aligned}\right\} \tag{41.17}$$

где a и b — вещественная и мнимая части коэффициента $2a_{n+1}$ (коэффициент a_{n+2} будет, очевидно, комплексно сопряжен с a_{n+1}).

Составляя уравнения

$$\lambda x \frac{\partial v_s}{\partial y} + (-\lambda y + \psi_2\sigma^2 + \psi_3\sigma^3 + \ldots)\frac{\partial v_s}{\partial x} = \rho_s v_s + \psi_2\sigma^2 + \psi_3\sigma^3 + \ldots$$

$$(s = 1, 2, \ldots, n),$$

пытаемся им удовлетворить рядами

$$v_s = v_s^{(1)} + v_s^{(2)} + \ldots \qquad (s = 1, 2, \ldots, n). \tag{41.18}$$

Для функций $v_s^{(1)}$ получаем уравнения

$$\lambda\left(x\frac{\partial v_s^{(1)}}{\partial y} - y\frac{\partial v_s^{(1)}}{\partial x}\right) = \rho_s v_s^{(1)},$$

откуда $v_s^{(1)} = 0$. Вследствие этого уравнения для $v_s^{(2)}$ имеют вид

$$\lambda\left(x\frac{\partial v_s^{(2)}}{\partial y} - y\frac{\partial v_s^{(2)}}{\partial x}\right) = \rho_s v_s^{(2)} + \psi_2(ax - by)^2.$$

Полагая в этих уравнениях

$$v_s^{(2)} = \frac{1}{2}(M_s x^2 + 2P_s xy + N_s y^2),$$

приравнивая коэффициенты при xy, x^2, y^2 и решая полученные таким образом уравнения, для M_s, P_s, N_s найдем:

$$\frac{1}{2}M_s = -\frac{\psi_2}{4\lambda^2 + \rho_s^2}\left[-2ab\lambda + \frac{1}{2}\rho_s(a^2 - b^2)\right] - \frac{\psi_2(a^2 + b^2)}{2\rho_s},$$

$$P_s = \frac{\psi_2}{4\lambda^2 + \rho_s^2}[2\lambda(a^2 - b^2) + 2ab\rho_s],$$

$$\frac{1}{2}N_s = -\frac{\psi_2}{4\lambda^2 + \rho_s^2}\left[2ab\lambda - \frac{1}{2}\rho_s(a^2 - b^2)\right] - \frac{\psi_2(a^2 + b^2)}{2\rho_s}.$$

Имея в виду решать в дальнейшем задачу методом § 36, положим в форме $v_s^{(2)}$ $x = r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta$. Тогда, принимая во внимание значения коэффициентов M_s, P_s, N_s, получим:

$$v_s^{(2)} = r^2(\alpha_s + \beta_s\cos 2\vartheta + \gamma_s\sin 2\vartheta),$$

где

$$\left.\begin{aligned} \alpha_s &= -\frac{\psi_2(a^2 + b^2)}{2\rho_s}, \\ \beta_s &= -\frac{\psi_2[\rho_s(a^2 - b^2) - 4\lambda ab]}{2(4\lambda^2 + \rho_s^2)}, \\ \gamma_s &= \frac{\psi_2[2\lambda(a^2 - b^2) + 2ab\rho_s}{2(4\lambda^2 + \rho_s^2)}. \end{aligned}\right\} \tag{41.19}$$

Подставляя в первые два уравнения (41.17) вместо x_s ряды (41.18), переходя к полярным координатам и исключая t, получим:

$$\frac{dr}{d\vartheta} = R_2 r^2 + R_3 r^3 + \ldots, \tag{41.20}$$

где

$$R_2 = \frac{\psi_2}{\lambda}(a\cos\vartheta - b\sin\vartheta)^2\cos\vartheta,$$

$$R_3 = \frac{\psi_2^2}{\lambda_2}(a\cos\vartheta - b\sin\vartheta)^4\sin\vartheta\cos\vartheta +$$
$$+\frac{1}{\lambda}\{2\psi_2(a\cos\vartheta - b\sin\vartheta)(\alpha + \beta\cos 2\vartheta + \gamma\sin 2\vartheta) +$$
$$+\psi_3(a_3\cos\vartheta - b\sin\vartheta)^3\}\cos\vartheta.$$

Здесь введены обозначения

$$\alpha = \sum_{s=1}^{n} a_s\alpha_s, \quad \beta = \sum_{s=1}^{n} a_s\beta_s, \quad \gamma = \sum_{s=1}^{n} a_s\gamma_s$$

и, следовательно, на основании (41.19)

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= -\frac{1}{2}\psi_2(a^2+b^2)S_1, \\ \beta &= 2\lambda ab\psi_2 S_2 - \frac{1}{2}(a^2-b^2)\psi_2 S_3, \\ \gamma &= \lambda(a^2-b^2)\psi_2 S_2 + ab\psi_2 S_3, \end{aligned}\right\} \tag{41.21}$$

где

$$S_1 = \sum_{\alpha=1}^{n}\frac{a_\alpha}{\rho_\alpha}, \quad S_2 = \sum_{\alpha=1}^{n}\frac{a_\alpha}{4\lambda^2+\rho_\alpha^2}, \quad S_3 = \sum_{\alpha=1}^{n}\frac{a_\alpha\rho_\alpha}{4\lambda^2+\rho_\alpha^2}.$$

Полагая в (41.20)

$$r = c + r_2(\vartheta)c^2 + r_3(\vartheta)c^3 + \ldots,$$

найдем:

$$r_2 = \int_0^\vartheta R_2\,d\vartheta, \quad r_3 = \int_0^\vartheta (R_3 + 2R_2r_2)\,d\vartheta.$$

Функция $r_2(\vartheta)$ получится, очевидно, периодической. Но тогда то же самое будет и для функции

$$\int_0^\vartheta R_2r_2\,d\vartheta = \int_0^\vartheta r_2\,dr_2 = \frac{1}{2}r_2^2.$$

Вследствие этого постоянная g, фигурирующая в соотношении

$$r_3 = g\vartheta + \text{периодическая функция},$$

определяется формулой

$$g = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} R_3\,d\vartheta,$$

которая дает:

$$g = -\frac{ab(a^2+b^2)}{4\lambda^2}\psi_2^2 + \frac{1}{2\lambda}(2a\alpha + a\beta - b\gamma)\psi_2 + \frac{3(a^2+b^2)}{8\lambda}\psi_3,$$

или, принимая во внимание (41.21),

$$g = \frac{a^2+b^2}{4\lambda^2}\left[\psi_2^2(-ab - 2\lambda a S_1 + 2\lambda^2 b S_2 - a\lambda S_3) - \frac{3}{2}a\lambda\psi_3\right].$$

Если теперь входящие сюда величины выразить через коэффициенты исходной системы (41.13) и опустить несущественный положительный множитель $\frac{1}{2\lambda}(a^2+b^2)$, то, как показал А. И. Лурье, получим:

$$g = Re\,\frac{D(i\lambda)}{\Delta'(i\lambda)}\left\{\left(\frac{\psi_2}{c}\right)^2\left[\frac{D(2i\omega)}{\Delta(2i\omega)} - 3 + 2\frac{D(0)}{\Delta(0)}\right] + \frac{3}{2}\frac{\psi_3}{c}\right\}, \quad (41.22)$$

где $D(\rho)$ — значение определителя (41.15) при $c = 0$.

§ 42. Другой способ решения задачи.

Решение задачи устойчивости в критическом случае пары чисто мнимых корней по методам, изложенным в предыдущих параграфах, приводит обычно к очень громоздким вычислениям. Уже для системы второго порядка, если, например, решать задачу приемом § 36, приводящим обычно к наиболее простым вычислениям, приходится определять при помощи квадратур коэффициенты r_i из уравнений (36.8), имеющих вид

$$\frac{dr_i}{dt} = F_i(\vartheta, r_2, \ldots, r_{i-1}),$$

где F_i являются полиномами относительно $r_2, \ldots, r_{i-1}$. Хотя функции F_i будут получаться полиномами от $\cos\vartheta$ и $\sin\vartheta$, вычисление указанных квадратур приводит к громоздким выкладкам, в особенности когда задача устойчивости решается членами порядка выше третьего, ввиду быстрого усложнения функций F_i по мере возрастания i.

Задача значительно усложняется для систем $(n+2)$-го порядка. В этом случае приходится проделывать дополнительные громоздкие вычисления, связанные с необходимостью действительного определения форм $v_s^{(k)}(x, y)$, удовлетворяющих уравнениям (41.8). Для каждого k эти формы содержат $n(k+1)$ коэффициентов, для нахождения которых мы получим из (41.8) систему из $n(k+1)$ линейных неоднородных уравнений. Даже в простейшем случае, когда задача устойчивости решается членами не выше третьего порядка, необходимо, как мы видели, определить формы $v_s^{(1)}$ и $v_s^{(2)}$ и,

следовательно, решать две системы линейных уравнений, содержащих, соответственно, $2n$ и $3n$ неизвестных.

Определение форм $v_s^{(k)}$ значительно упрощается, если, следуя Ляпунову, уже в уравнениях (41.9) ввести вместо x и y полярные координаты r и ϑ, имея в виду решать затем задачу для системы второго порядка методом § 36. Еще больших упрощений можно добиться приемом, указанным автором[1]). Однако, вся задача значительно упрощается, если ее решать иным приемом[2]), к рассмотрению которого мы сейчас и переходим.

Рассмотрим сначала систему второго порядка. Во всех вышеизложенных приемах мы приводили уравнения возмущенного движения к виду (36.1). Мы будем сейчас исходить из другого вида уравнений возмущенного движения, а именно: мы будем предполагать, что эти уравнения преобразованы к виду

$$\frac{dx}{dt} = i\lambda x + X(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = -i\lambda y + Y(x, y), \tag{42.1}$$

что всегда может быть выполнено при помощи линейного преобразования. Если уравнения, как это часто бывает на практике, были сразу заданы в виде (36.1), то для приведения их к виду (42.1) достаточно в качестве новых переменных принять величины $x + iy$ и $x - iy$.

Если уравнения движения приведены к виду (42.1), то переменные x и y будут комплексно сопряженными, и поэтому второе из этих уравнений может быть получено из первого заменой i на $-i$, x на y и y на x.

Для решения задачи устойчивости введем в уравнения (42.1) вместо переменных x и y переменные u и v при помощи подстановки

$$\left.\begin{aligned} x &= u + x^{(2)}(u, v) + x^{(3)}(u, v) + \ldots, \\ y &= v + y^{(2)}(u, v) + y^{(3)}(u, v) + \ldots, \end{aligned}\right\} \tag{42.2}$$

где $x^{(j)}$ и $y^{(j)}$ — некоторые формы j-го порядка, которыми мы постараемся распорядиться таким образом, чтобы уравнения для u и v приняли вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= i\lambda u + A_3u^2v + A_5u^3v^2 + \ldots + A_{2k+1}u^{k+1}v^k + \ldots, \\ \frac{dv}{dt} &= -i\lambda v + \bar{A}_3uv^2 + \bar{A}_5u^2v^3 + \ldots + \bar{A}_{2k+1}u^kv^{k+1} + \ldots \end{aligned}\right\} \tag{42.3}$$

---

[1]) Малкин И. Г., О решении задачи устойчивости в критическом случае пары чисто мнимых корней. ПММ, т. XV, вып. 2, 1951.

[2]) Малкин И. Г., Об одном способе решения задачи устойчивости в критическом случае пары чисто мнимых корней, ПММ, т. XV, вып. 4, 1951.

Здесь A_j и $\bar{A}_j$ — некоторые подлежащие определению постоянные, причем $\bar{A}_j$ комплексно сопряжены с A_j. При таком условии второе уравнение (42.3) получится из первого заменой i на $-i$, u на v и v на u, вследствие чего переменные u и v будут также комплексно сопряженными.

Подставляя в уравнения (42.1) вместо x и y их выражения (42.2) и принимая во внимание (42.3), получим:

$$\left(1+\frac{\partial x^{(2)}}{\partial u}+\frac{\partial x^{(3)}}{\partial u}+\ldots\right)(i\lambda u+A_3u^2v+\ldots)+$$
$$+\left(\frac{\partial x^{(2)}}{\partial v}+\frac{\partial x^{(3)}}{\partial v}+\ldots\right)(-i\lambda v+\bar{A}_3uv^2+\ldots)=$$
$$=i\lambda(u+x^{(2)}+\ldots)+X(u+\ldots,\ v+\ldots),$$
$$\left(\frac{\partial y^{(2)}}{\partial u}+\frac{\partial y^{(3)}}{\partial u}+\ldots\right)(i\lambda u+A_3u^2v+\ldots)+$$
$$+\left(1+\frac{\partial y^{(2)}}{\partial v}+\frac{\partial y^{(3)}}{\partial v}+\ldots\right)(-i\lambda v+\bar{A}_3uv^2+\ldots)=$$
$$=-i\lambda(v+y^{(2)}+\ldots)+Y(u+\ldots,\ v+\ldots).$$

Приравнивая в обеих частях совокупности членов одинаковых порядков, получим для нахождения форм $x^{(j)}$ и $y^{(j)}$ следующие уравнения:

$$\left.\begin{aligned}-i\lambda x^{(j)}+i\lambda\left(\frac{\partial x^{(j)}}{\partial u}u-\frac{\partial x^{(j)}}{\partial v}v\right)&=-A_ju^{\frac{1}{2}(j+1)}v^{\frac{1}{2}(j-1)}+X^{(j)}(u,v),\\ i\lambda y^{(j)}+i\lambda\left(\frac{\partial y^{(j)}}{\partial u}u-\frac{\partial y^{(j)}}{\partial v}v\right)&=-\bar{A}_ju^{\frac{1}{2}(j-1)}v^{\frac{1}{2}(j+1)}+Y^{(j)}(u,v).\end{aligned}\right\}\quad(42.4)$$

Здесь A_j при j четном равно нулю и $X^{(j)}(u,\ v)$, $Y^{(j)}(u,\ v)$ — формы j-го порядка, зависящие от форм $X^{(b)}$ и $Y^{(b)}$ и постоянных A_b, для которых $b<j$. Уравнения (42.4) дают возможность без всяких вычислений последовательно определять как формы $x^{(j)}$ и $y^{(j)}$, так и постоянные A_j.

В самом деле, допустим, что все формы $x^{(b)}$, $y^{(b)}$ и постоянные A_b, для которых $b<j$, уже определены. Тогда $X^{(j)}(u,\ v)$ будет известной формой. Пусть

$$X^{(j)}=\sum_{p+q=j}A_{pq}u^pv^q,\quad x^{(j)}=\sum_{p+q=j}a_{pq}u^pv^q,$$

где A_{pq} — известные коэффициенты, а a_{pq} — подлежащие определению. Тогда, приравнивая в первом уравнении (42.4) коэффициенты при u^pv^q, получим, что при j четном коэффициент a_{pq} определяется по

формуле

$$(p-q-1)\,i\lambda a_{pq}=A_{pq}. \tag{42.5}$$

Той же формулой определяются коэффициенты и при нечетном j, за исключением коэффициента a_{pq}, для которого $p=\frac{1}{2}(j+1)$, $q=\frac{1}{2}(j-1)$. Для этого коэффициента получается уравнение

$$0\cdot a_{pq}=-A_j+A_{pq}\quad\left(p=\frac{1}{2}(j+1),\ q=\frac{1}{2}(j-1)\right). \tag{42.6}$$

Следовательно, коэффициент a_{pq}, для которого $p=\frac{1}{2}(j+1)$, $q=\frac{1}{2}(j-1)$, остается произвольным. Мы положим его равным нулю. Вместе с тем уравнение (42.6) однозначно определяет величину A_j, для которой находим:

$$A_j=A_{pq}\quad\left(p=\frac{1}{2}(j+1),\quad q=\frac{1}{2}(j-1)\right). \tag{42.7}$$

Точно таким же путем определяются коэффициенты форм $y^{(j)}$. Однако ни в вычислении этих коэффициентов, ни в составлении для них уравнений нет необходимости, так как в силу сопряженности переменных x, y, а также переменных u и v, мы можем сразу писать:

$$y^{(j)}=\sum_{p+q=j}\bar{a}_{pq}u^q v^p.$$

Таким путем можно подсчитать любое число форм $x^{(j)}$ и $y^{(j)}$, а также постоянных A_j. Вычисления нужно производить до тех пор, пока мы не придем к постоянной A_j с отличной от нуля вещественной частью. Дело в том, что знаком этой вещественной части и решается задача устойчивости.

В самом деле, пусть A_k — первая из постоянных A_3, A_5, ..., вещественная часть которой отлична от нуля, так что

$$A_3=iB_3,\ A_5=iB_5,\ \ldots,\ A_{k-2}=iB_{k-2},\quad A_k=g+iB_k, \tag{42.8}$$

где постоянные B_3, ..., B_k, g вещественны. Покажем, что при $g>0$ невозмущенное движение неустойчиво, а при $g<0$ оно устойчиво асимптотически. Преобразуем с этой целью уравнения (42.3) при помощи подстановки

$$u=r(\cos\vartheta+i\sin\vartheta),\quad v=r(\cos\vartheta-i\sin\vartheta).$$

Будем иметь:

$$\frac{dr}{dt}(\cos\vartheta+i\sin\vartheta)+i(\cos\vartheta+i\sin\vartheta)\,r\frac{d\vartheta}{dt}=$$
$$=i\lambda r(\cos\vartheta+i\sin\vartheta)+A_3r^3(\cos\vartheta+i\sin\vartheta)+\ldots$$
$$\ldots+A_kr^k(\cos\vartheta+i\sin\vartheta)+\ldots,$$

где ненаписанные члены имеют порядок, больший k. При этом мы предполагаем, что в подстановке (42.2) ряды оборваны на членах k-го порядка. Выделяя в полученном уравнении вещественные и мнимые части, найдем:

$$\frac{dr}{dt}=gr^k+\ldots,\quad \frac{d\vartheta}{dt}=\lambda+B_3r^3+\ldots+B_kr^k+\ldots \tag{42.9}$$

Все сделанные нами преобразования таковы, что задача устойчивости для исходных уравнений эквивалентна той же задаче для уравнений (42.9). Что же касается последней задачи, то она, очевидно, решается знаком величины g. Таким образом, наше предложение доказано.

Если бы $\operatorname{Re}(A_k)=0$ при любом k, то это свидетельствовало бы о том, что задача устойчивости не решается конечным числом членов. В этом случае начало координат было бы центром, невозмущенное движение было бы устойчиво, но не асимптотически.

Приведенный способ решения задачи устойчивости требует только составления уравнения (42.4) для последовательных приближений. Это может оказаться утомительным, если задача устойчивости решается членами высоких порядков. Однако такие выкладки приходится делать при любом способе решения задачи, после чего в других способах приходится либо вычислять громоздкие квадратуры (метод § 36), либо разрешать сложные системы линейных алгебраических уравнений (метод § 37).

Рассмотрим теперь систему $(n+2)$-го порядка. Уравнения возмущенного движения берем не в форме (40.1), как в предыдущем параграфе, а в форме

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dx}{dt}=i\lambda x+X(x,\ y,\ x_1,\ \ldots,\ x_n),\\
&\frac{dy}{dt}=-i\lambda y+Y(x,\ y,\ x_1,\ \ldots,\ x_n),\\
&\frac{dx_s}{dt}=p_{s1}x_1+\ldots+p_{sn}x_n+p_sx+q_sy+X_s(x,\ y,\ x_1,\ \ldots,\ x_n),\\
&\qquad\qquad (s=1,\ 2,\ \ldots,\ n).
\end{aligned}\right\} \tag{42.10}$$

Для решения задачи устойчивости мы можем теперь воспользоваться изложенным в предыдущем параграфе методом Ляпунова и привести систему (42.10) к системе второго порядка. Для этого нужно будет взять только первые два уравнения (42.10) и заменить в них величины x_s формальными решениями $v_s(x,\ y)$ уравнений с частными производными (41.9). При этом, вследствие того что уравнения возмущенного движения взяты в виде (42.10), а не в виде (40.1), вычисления значительно упрощаются.

В самом деле, уравнения (41.9) принимают сейчас вид

$$\frac{\partial v_s}{\partial x}(i\lambda x+X)+\frac{\partial v_s}{\partial y}(-i\lambda y+Y)=p_{s1}v_1+\ldots+p_{sn}v_n+p_s x+q_s y+X_s,$$

и вследствие этого уравнения (41.8), определяющие формы $v_s^{(k)}(x, y)$, имеют теперь вид

$$i\lambda\left(\frac{\partial v_s^{(k)}}{\partial x}x-\frac{\partial v_s^{(k)}}{\partial y}y\right)=p_{s1}v_1^{(k)}+\ldots+p_{sn}v_n^{(k)}+X_s^{(k)}(u, v).$$

Если в этих уравнениях положить:

$$x_s^{(k)}=\sum_{p+q=k}b_{pq}^{(s)}x^p y^q,\quad X_s^{(k)}=\sum_{p+q=k}B_{pq}^{(s)}x^p y^q,$$

где $B_{pq}^{(s)}$ — известные, а $b_{pq}^{(s)}$ — подлежащие определению коэффициенты, то будем иметь:

$$p_{s1}b_{pq}^{(1)}+\ldots+[p_{ss}-(p-q)i\lambda]b_{pq}^{(s)}+\ldots+p_{sn}b_{pq}^{(n)}+B_{pq}^{(s)}=0$$
$$(s=1, 2, \ldots, n).$$

Таким образом, для определения коэффициентов $b_{pq}^{(s)}$ мы получаем не систему из $n(k+1)$ уравнений, как это было бы, если бы мы пользовались уравнениями (40.1), а $k+1$ самостоятельных систем, состоящих из n уравнений каждая. Это, разумеется, вносит существенные упрощения в вычисления. Но этим дело не ограничивается. Если пользоваться уравнениями в форме (40.1), то определители систем $n(k-1)$-го порядка, определяющих коэффициенты $b_{pq}^{(s)}$, будут разными для форм разных порядков, т. е. они будут зависеть от индекса k. Если же пользоваться уравнениями (42.10), то придется все время решать системы одного и того же порядка n, определители которых отличаются лишь диагональными членами. И если

$$C_s(\mu)=\sum_{j=1}^{n}c_{js}(i\mu)a_j$$

является решением уравнений

$$p_{s1}C_1+\ldots+(p_{ss}-i\mu)C_s+\ldots+p_{sn}C_n+a_s=0, \quad (42.11)$$

выраженным явно через μ, то для формы $v_s^{(k)}$ любого порядка k можно сразу писать:

$$v_s^{(k)}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{p+q=k}c_{js}[(p-q)i\lambda]B_{pq}^{(s)}x^p y^q.$$

Таким образом, для нахождения всех форм $v_s^{(k)}$ достаточно разрешить лишь одну систему n-го порядка (42.11), т. е. вычислить

определитель

$$D(i\mu)=\begin{vmatrix} p_{11}-i\mu & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22}-i\mu & \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn}-i\mu \end{vmatrix}$$

и его миноры.

Отметим в заключение, что изложенный сейчас метод можно видоизменить таким образом, что можно будет сразу исходить из системы (35.1), не приводя ее предварительно к виду (42.10), т. е. не выделяя критических корней. Мы не останавливаемся, однако, на этом вопросе, отсылая интересующихся к уже цитированной работе [1]).

Пример. Рассмотрим снова уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2}+x=\alpha\left(\frac{dx}{dt}\right)^{2n+1}+F\left[x,\ \left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right],$$

исследованное уже в § 36. Здесь F — аналитическая функция своих аргументов, разложение которой не имеет членов ниже второго порядка относительно x и $\frac{dx}{dt}$. Полагая $\xi=x-i\frac{dx}{dt}$, $\eta=x+i\frac{dx}{dt}$, получим систему

$$\frac{d\xi}{dt}=i\xi+\frac{(-1)^n\alpha}{2^{2n+1}}(\xi-\eta)^{2n+1}+iF^*(\xi,\ \eta),$$

$$\frac{d\eta}{dt}=-i\eta-\frac{(-1)^n\alpha}{2^{2n+1}}(\xi-\eta)^{2n+1}-iF^*(\eta,\ \xi),$$

где F^* — вещественная функция.

Делая подстановку

$$\xi=u+\xi^{(2)}(u,\ v)+\xi^{(3)}(u,\ v)+\dots,$$

$$\eta=v+\eta^{(2)}(u,\ v)+\eta^{(3)}(u,\ v)+\dots,$$

будем на основании (42.3) иметь:

$$\left(1+\frac{\partial\xi^{(2)}}{\partial u}+\dots\right)(i\lambda u+A_3u^2v+\dots)+$$
$$+\left(\frac{\partial\xi^{(2)}}{\partial v}+\dots\right)(-i\lambda v+\overline{A}_3uv^2+\dots)=i(u+\xi^{(2)}+\dots)+$$
$$+\frac{(-1)^n\alpha}{2^{2n+1}}(u-v+\dots)^{2n+1}+iF^*(u+\dots,\ v+\dots).$$

Отсюда сразу видно, что все формы $\xi^{(2)},\dots,\xi^{(2n)}$ получатся вещественными, а все числа $A_3,\ A_5,\ \dots,\ A_{2n-1}$ — чисто мнимыми. То же самое будет справедливо для форм $\xi^{(k)}$ и чисел A_k при

---

[1]) См. сноску [2]) на стр. 170.

любом k, если только $\alpha=0$. Поэтому при $\alpha=0$ будем иметь устойчивость, но не асимптотическую.

Допустим, что $\alpha\neq 0$. Тогда уравнение для $\xi^{(2n+1)}$ будет:

$$i\left(u\frac{\partial\xi^{(2n+1)}}{\partial u}-v\frac{\partial\xi^{(2n+1)}}{\partial v}\right)=i\xi^{(2n+1)}+iF^{(2n+1)}(u,\ v)-$$
$$-A_{2n+1}u^{n+1}v^n+\frac{(-1)^n\alpha}{2^{2n+1}}(u-v)^{2n+1},$$

где $F^{(2n+1)}$ — вещественная форма $(2n+1)$-го порядка. Приравнивая коэффициент при $u^{n+1}v^n$, найдем:

$$\operatorname{Re}(A_{2n+1})=A_{2n+1}=\frac{(2n+1)\,2n\ldots(n+2)}{2^{2n+1}\cdot n!}\alpha.$$

Следовательно, при $\alpha>0$ невозмущенное движение неустойчиво, а при $\alpha<0$ оно устойчиво асимптотически.

§ 43. Особенный случай.

Мы переходим теперь к рассмотрению особенного случая. Пусть

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=-\lambda y+X(x,\ y,\ x_1,\ \ldots,\ x_n),\\ \frac{dy}{dt}&=\lambda x+Y(x,\ y,\ x_1,\ \ldots,\ x_n),\\ \frac{dx_s}{dt}&=p_{s1}x_1+\ \ldots\ +p_{sn}x_n+p_sx+q_sy+X_s\\ &\qquad(s=1,\ 2,\ \ldots,\ n)\end{aligned}\right\}\tag{43.1}$$

суть дифференциальные уравнения возмущенного движения. Следуя установленному правилу решения задачи устойчивости, составляем уравнения с частными производными

$$(-\lambda y+X(x,\ y,\ v_1,\ \ldots,\ v_n))\frac{\partial v_s}{\partial x}+(\lambda x+Y(x,\ y,\ v_1,\ \ldots,\ v_n))\frac{\partial v_s}{\partial y}=$$
$$=p_{s1}v_1+\ldots+p_{sn}v_n+p_sx+q_sy+X_s(x,\ y,\ v_1,\ \ldots,\ v_n).\tag{43.2}$$

Этим уравнениям можно удовлетворить формальными рядами

$$v_s(x,\ y)=v_s^{(1)}(x,\ y)+v_s^{(2)}(x,\ y)+\ \ldots\tag{43.3}$$

Ограничившись в этих рядах членами $(m-1)$-го порядка, заменим полученными таким образом целыми рациональными функциями $v_s(x,\ y)$ величины x_s в первых двух уравнениях (43.1) и рассмотрим систему

второго порядка:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=-\lambda y+X(x,\ y,\ v_1,\ \ldots,\ v_n),\\ \frac{dy}{dt}&=\lambda x+Y(x,\ y,\ v_1,\ \ldots,\ v_n).\end{aligned}\right\}\qquad(43.4)$$

Может оказаться, что при m достаточно большом задача устойчивости для системы (43.4) решается членами не выше m-го порядка. Это будет общий случай, рассмотренный выше. В этом случае задача устойчивости для системы (43.1) решается системой (43.4).

Но может случиться, что как бы велико ни было число m и, следовательно, как бы велико ни было число членов, взятых в рядах (43.3), задача устойчивости для системы (43.4) не решается членами порядка, не превосходящего m, т. е. что, изменив в этих уравнениях члены выше m-го порядка, можно получить по желанию как устойчивость, так и неустойчивость. Этот случай и является особенным. В особенном случае правило решения задачи устойчивости, установленное в § 41, неприменимо.

Однако, как мы сейчас покажем, и в особенном случае задача устойчивости для системы (43.1) эквивалентна задаче устойчивости для системы второго порядка (43.4). При этом предполагается, что в уравнениях (43.4) функции $v_s(x,\ y)$ обозначают не конечное число первых членов в рядах (43.3), а эти ряды целиком. Но тогда, очевидно, эти уравнения лишь тогда имеют смысл, когда указанные ряды сходятся. Будут ли эти ряды действительно сходиться?

Вопрос о сходимости рядов (43.3) разрешен А. М. Ляпуновым. Он показал, что эти ряды могут быть расходящимися. Об этом свидетельствует уравнение

$$\left[-\lambda y-\frac{1}{2}x(x^2+y^2)\right]\frac{\partial v}{\partial x}+\left[\lambda x-\frac{1}{2}y(x^2+y^2)\right]\frac{\partial v}{\partial y}=-v+x^2+y^2,$$

для которого формальный ряд (43.3) имеет вид

$$v=x^2+y^2+(x^2+y^2)^2+2!\,(x^2+y^2)^3+3!\,(x^2+y^2)^4+\ \ldots$$

Этот ряд, очевидно, расходится.

Отсюда, однако, не следует, что ряды (43.3) всегда расходятся. Напротив, Ляпунов показал, что когда мы имеем дело с особенным случаем, то ряды (43.3) будут обязательно получаться сходящимися. Это замечательное предложение Ляпунова мы здесь приводим без доказательства.

На основании предложения Ляпунова уравнения (43.4) будут вполне определенными. И так как для них задача устойчивости не решается конечным числом членов, то на основании результатов §§ 36—38, точка $x=y=0$ для уравнений (43.4) будет центром. Невозмущенное движение для уравнений (43.4) будет при этом

устойчивым (не асимптотически), а их общее решение будет периодическим.

Это периодическое решение может быть представлено в виде

$$\left.\begin{aligned} \tau &= \lambda(1 + h_2c^2 + h_3c^3 + \ldots)^{-1}t, \\ x &= c\cos\tau + c^2x^{(2)}(\tau) + \ldots, \\ y &= c\sin\tau + c^2y^{(2)}(\tau) + \ldots, \end{aligned}\right\} \tag{43.5}$$

где $x^{(k)}(\tau)$, $y^{(k)}(\tau)$ — периодические функции τ периода 2π, обращающиеся в нуль при $\tau = 0$, h_j — некоторые вполне определенные постоянные, а c — произвольная постоянная, являющаяся начальным значением величины x. Все фигурирующие в (43.5) ряды сходятся при достаточно малом c.

Аналогичные обстоятельства имеют место в особенном случае и для полной системы (43.1), а именно: эта система также допускает периодическое решение, зависящее от одного произвольного постоянного[1]), являющегося начальным значением величины x, и невозмущенное движение $x = y = x_1 = \ldots = x_n = 0$ для этой системы также устойчиво. При этом в указанном периодическом решении величины x и y определяются формулами (43.5), а для величин x_s будем иметь:

$$x_s = v_s(x, y) \qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{43.6}$$

где $v_s(x, y)$ — функции (43.3).

Для доказательства заметим прежде всего, что если функции $x = x(t)$, $y = y(t)$ являются каким-нибудь частным решением уравнений (43.4), то функции $x = x(t)$, $y = y(t)$, $x_s = v_s[x(t), y(t)]$ определяют частное решение уравнений (43.1). Действительно, подставляя эти функции в уравнения (43.1), мы на основании (43.2) и (43.4) убедимся, что они тождественно удовлетворяются. Отсюда непосредственно вытекает, что уравнения (43.1) обладают периодическим решением, определяемым формулами (43.5) и (43.6).

Покажем теперь, что для полной системы (43.1) имеет место устойчивость. С этой целью введем в этой системе вместо переменных x, y, x_s переменные ρ, φ, ξ_s при помощи подстановки

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho\cos\varphi + \rho^2x^{(2)}(\varphi) + \ldots, \\ y &= \rho\sin\varphi + \rho^2y^{(2)}(\varphi) + \ldots, \\ x_s &= \xi_s + v_s(x, y). \end{aligned}\right\} \tag{43.7}$$

---

[1]) Заменив в этом решении t на $t + h$, где h — произвольное постоянное, мы получим периодическое решение, зависящее от двух произвольных постоянных.

Тогда первые два уравнения (43.1) примут вид

$$\left.\begin{aligned}&[\cos\varphi+2\rho x^{(2)}(\varphi)+\ldots]\frac{d\rho}{dt}+\\&\qquad+\left[-\sin\varphi+\frac{dx^{(2)}(\varphi)}{d\varphi}\rho+\ldots\right]\rho\frac{d\varphi}{dt}=R_1(\rho,\ \varphi,\ \xi_s),\\&[\sin\varphi+2\rho y^{(2)}(\varphi)+\ldots]\frac{d\rho}{dt}+\\&\qquad+\left[\cos\varphi+\rho\frac{dy^{(2)}(\varphi)}{d\varphi}+\ldots\right]\rho\frac{d\varphi}{dt}=R_2(\rho,\ \varphi,\ \xi_s),\end{aligned}\right\}\qquad(43.8)$$

где R_1, R_2 — аналитические функции переменных ρ, $\xi_1, \ldots, \xi_n$, разложения которых не содержат свободных членов. Коэффициенты этих разложений являются периодическими функциями φ периода 2π.

Разрешим уравнения (43.8) относительно $\frac{d\rho}{dt}$ и $\rho\frac{d\varphi}{dt}$. Определитель Δ этих линейных относительно указанных величин уравнений имеет вид

$$\Delta=1+\rho\left[\cos\varphi\frac{dy^{(2)}(\varphi)}{d\varphi}+2\cos\varphi x^{(2)}(\varphi)-\sin\varphi\frac{dx^{(2)}(\varphi)}{d\varphi}+\right.$$
$$\left.+2\sin\varphi y^{(2)}(\varphi)\right]+\rho^2(\ldots)+\ldots,$$

откуда вытекает, что величина $\frac{1}{\Delta}$ будет аналитической функцией ρ, разложение которой по степеням этой переменной имеет периодические относительно φ коэффициенты. Следовательно, имеем:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\rho}{dt}&=R(\rho,\ \varphi,\ \xi_1,\ \ldots,\ \xi_n),\\ \rho\frac{d\varphi}{dt}&=\Phi(\rho,\ \varphi,\ \xi_1,\ \ldots,\ \xi_n),\end{aligned}\right\}\qquad(43.9)$$

где R и Φ — функции такого же вида, как и R_1, R_2, т. е. аналитические относительно ρ и ξ_s, периодические относительно φ и обращающиеся в нуль при $\rho=\xi_1=\ldots=\xi_n=0$.

Последние n уравнений (43.1) после подстановки (43.7) примут вид

$$\frac{d\xi_s}{dt}=p_{s1}\xi_1+\ldots+p_{sn}\xi_n+P_s(\varphi)\rho+\Xi_s(\rho,\ \varphi,\ \xi_1,\ \ldots,\ \xi_n),\qquad(43.10)$$

где $P_s(\varphi)$ — некоторые периодические функции φ периода 2π, а Ξ_s — аналитические функции переменных ρ, $\xi_1, \ldots, \xi_n$, разложения которых начинаются членами не ниже второго порядка. Коэффициенты этих разложений являются периодическими функциями φ периода 2π.

Периодическое решение (43.5) и (43.6) уравнений (43.1) в переменных ρ, φ, ξ_s принимает, очевидно, вид

$$\rho=c,\quad \varphi=\tau,\quad \xi_s=0\qquad (s=1,\ 2,\ \ldots,\ n).\qquad(43.11)$$

Следовательно, уравнения (43.9) и (43.10) имеют частное решение (43.11), а для этого, очевидно, необходимо, чтобы выполнялись равенства

$$P_s(\varphi) \equiv 0, \quad R(\rho, \varphi, 0, \ldots, 0) = \Xi_s(\rho, \varphi, 0, \ldots, 0) = 0$$
$$(s = 1, 2, \ldots, n).$$

Но в таком случае система $(n+1)$-го порядка, состоящая из первого уравнения (43.9) и уравнений (43.10), в которых τ является некоторой неизвестной функцией времени, является частным случаем систем (34.2), рассмотренных нами в § 34. Согласно результатам этого параграфа невозмущенное движение $\rho = \xi_1 = \ldots = \xi_n = 0$ вышеуказанной системы $(n+1)$-го порядка устойчиво. Но тогда по характеру подстановки (43.7) устойчивым будет и невозмущенное движение $x = y = x_1 = \ldots = x_n = 0$ системы (43.1).

Итак, мы показали, что в особенном случае невозмущенное движение устойчиво и уравнения возмущенного движения допускают периодическое решение, определяемое формулами (43.5) и (43.6).

Таким образом, задача устойчивости в особенном случае решается просто. Но, к сожалению, у нас нет общего приема, который позволил бы нам заранее узнать, что рассматриваемый случай является особенным. В самом деле, если мы имеем особенный случай, то сколько бы членов в уравнениях (43.4) мы ни рассмотрели, у нас не будет уверенности, что, рассмотрев члены еще более высокого порядка, мы не придем к случаю фокуса.

Можно, однако, указать один общий признак, при выполнении которого можно не сомневаться, что рассматриваемый случай будет особенным.

Допустим, что уравнения (43.1) допускают первый интеграл вида

$$x^2 + y^2 + F(x, y, x_1, \ldots, x_n) = \text{const.}, \tag{43.12}$$

где F — аналитическая функция переменных x, y, x_s, разложение которой начинается членами не ниже третьего порядка. Покажем, что если это выполняется, то рассматриваемый случай будет особенным.

В самом деле, заменив в интеграле (43.12) величины x_s рядами (43.3), которые дают, по крайней мере, формальное решение системы (43.2), мы получим ряд, который, по крайней мере, формально является первым интегралом системы (43.4), т. е. все члены ряда

$$[-\lambda y + X(x, y, v_s)]\frac{\partial H}{\partial x} + [\lambda x + Y(x, y, v_s)]\frac{\partial H}{\partial y},$$

где

$$H = x^2 + y^2 + F(x, y, v_1(x, y), \ldots, v_n(x, y))$$

уничтожаются. Но в таком случае для системы (43.4), как это вытекает из рассуждений § 37, точка $x = y = 0$ является центром, что и доказывает наше предложение.

А. М. Ляпунов показал, что справедливо и обратное предложение, т. е. что в особенном случае система (43.1) необходимо имеет первый интеграл вида (43.12).

А. М. Ляпунов далее показал, что если уравнения (43.1) имеют первый интеграл вида (43.12), то эти уравнения обладают периодическим решением, определяемым формулами (43.5), (43.6), вне зависимости от того, будут ли вещественные части корней уравнения (40.2) отрицательными или нет. Важно только, чтобы ни один из этих корней не был вида $\pm N\lambda i$, где N — целое положительное число или нуль.

Указанные периодические решения играют большую роль в теории нелинейных колебаний. Мы не останавливаемся здесь на этом вопросе, отсылая читателей к нашей книге[1]), где он подробно освещен.

§ 44. «Опасные» и «безопасные» границы области устойчивости.

В заключение этой главы рассмотрим вопрос о так называемых «опасных» и «безопасных» границах области устойчивости. Этот вопрос непосредственно связан с тем понятием «практической» устойчивости, о котором мы говорили в § 4.

Пусть

$$\frac{dx_s}{dt} = q_{s1}x_1 + \ldots + q_{sn}x_n + X_s(x_1, \ldots, x_n) \quad (s = 1, 2, \ldots, n) \tag{44.1}$$

— дифференциальные уравнения возмущенного движения, где, как и обычно, разложения функций X_s начинаются членами не ниже второго порядка. Рассмотрим неравенства

$$\operatorname{Re}(\rho_s) < 0 \quad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{44.2}$$

где $\rho_1, \ldots, \rho_n$ — корни характеристического уравнения системы первого приближения. Эти корни являются функциями некоторых параметров, характеризующих рассматриваемую динамическую систему. Если рассматривать пространство этих параметров, то неравенства (44.2) определяют в этом пространстве некоторую область. Это будет область устойчивости системы по отношению к исследуемому невозмущенному движению, так как при выполнении (44.2) невозмущенное движение будет асимптотически устойчиво. Напротив, совокупность всех точек пространства параметров, в которых хотя бы один из корней ρ_s имеет положительную вещественную часть, определяет область неустойчивости.

Границей, отделяющей область устойчивости от области неустойчивости, является совокупность всех тех точек пространства параметров, в которых хотя бы одно из неравенств (44.2) переходит

---

[1]) Малкин И. Г., Некоторые задачи теории нелинейных колебаний, Гостехиздат, 1956.

в равенство, т. е. на границе хотя бы некоторые корни ρ_s являются критическими. При значениях параметров, соответствующих точкам границы, невозмущенное движение может быть как устойчивым, так и неустойчивым в зависимости от вида функций X_s.

Допустим, что параметры системы лежат в области устойчивости, так что вещественные части всех корней ρ_s отрицательны. Невозмущенное движение будет асимптотически устойчиво. При этом, если все функции X_s обращаются в нуль, то устойчивость будет иметь место, каковы бы ни были начальные возмущения. Но если хотя бы некоторые из функций X_s отличны от нуля, то устойчивость будет иметь место, вообще говоря, при начальных возмущениях, не превышающих некоторых пределов. В § 26 мы указали некоторые приемы, позволяющие оценить эти весьма важные для практики величины. Из рассуждений этого параграфа легко усмотреть, что если величины вещественных частей хотя бы некоторых из корней численно малы, другими словами, если система находится вблизи границы области устойчивости, то максимальные значения допускаемых начальных возмущений могут оказаться очень малыми. В справедливости этого мы сейчас убедимся и из других соображений. Если такое обстоятельство действительно имеет место, то рассматриваемую систему с точки зрения практической придется рассматривать как неустойчивую.

Аналогичные обстоятельства могут иметь место и в случае, когда система находится в области неустойчивости, но очень близко от границы. В этом случае, несмотря на то, что невозмущенное движение неустойчиво по Ляпунову, его иногда с точки зрения практической можно будет считать устойчивым, вследствие того что максимальные отклонения системы от невозмущенного движения могут оказаться очень малыми.

С такого рода практической устойчивостью, несмотря на неустойчивость по Ляпунову, мы встретились в § 4 на примере уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \alpha^2 x - x^3.$$

Корень характеристического уравнения первого приближения равен здесь α^2 и, следовательно, положителен. Невозмущенное движение неустойчиво по Ляпунову. Однако, каково бы ни было начальное значение величины x, эта величина, как было показано в § 4, с неограниченным возрастанием t стремится либо к $+\alpha$, либо к $-\alpha$, т. е. практически к положению равновесия $x = 0$, если α очень мало.

Напротив, если уравнение движения имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha^2 x + x^3,$$

то корень характеристического уравнения будет отрицателен и невозмущенное движение будет асимптотически устойчиво по Ляпунову.

Однако если величина α очень мала, то с точки зрения практической это движение нужно будет считать неустойчивым, так как $\lim\limits_{t\to\infty} x = \pm\infty$, если начальное значение x численно больше α. В этом сразу убеждаемся, если заметим, что при $|x| > \alpha$ справедливо неравенство $x\dfrac{dx}{dt} > 0$.

Таким образом, возникает практически важный вопрос о поведении динамической системы вблизи границ области устойчивости. Этот вопрос исследован Н. Н. Баутиным[1]), который рассматривал лишь такие участки границы области устойчивости, на которых либо только один корень, либо только два корня являются критическими, причем во втором случае предполагается, что оба корня отличны от нуля и, следовательно, являются чисто мнимыми. В первом случае, когда имеется один критический корень, он, очевидно, обращается в нуль. Н. Н. Баутин показал, что в этих случаях поведение динамической системы вблизи границы области устойчивости определяется их поведением на самой границе.

В обоих рассматриваемых случаях дифференциальные уравнения возмущенного движения могут быть представлены в виде

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + \mu(r_{s1}x_1 + \ldots + r_{sn}x_n) + X_s \qquad (44.3)$$
$$(s = 1, 2, \ldots, n).$$

Здесь $p_{s\sigma}$ и $r_{s\sigma}$ — некоторые постоянные, причем $p_{s\sigma}$ такие, что уравнение

$$\begin{vmatrix} p_{11}-\rho & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn}-\rho \end{vmatrix} = 0 \qquad (44.4)$$

имеет либо один нулевой корень, либо пару чисто мнимых корней при остальных корнях с отрицательными вещественными частями. Величина μ является малым параметром, характеризующим степень близости системы к границе области устойчивости. Этот параметр предполагается настолько малым, что характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} p_{11}+\mu r_{11}-\rho & p_{12}+\mu r_{12} & \cdots & p_{1n}+\mu r_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{n1}+\mu r_{n1} & p_{n2}+\mu r_{n2} & \cdots & p_{nn}+\mu r_{nn}-\rho \end{vmatrix} = 0$$

---

[1]) Баутин Н. Н., Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости, Гостехиздат, 1950. К рассматриваемому вопросу примыкает также работа: Кузьмин П. А., Замечание о смене устойчивости установившихся движений, Сборник трудов Казанского авиац. ин-та, № 10, 1939.

имеет столько же корней с отрицательными вещественными частями, как и уравнение (44.4), т. е. либо $n-1$, либо $n-2$. Остальные корни этого уравнения могут иметь как отрицательные, так и положительные вещественные части, т. е. система (44.3) может находиться как в области устойчивости, так и в области неустойчивости.

Допустим сначала, что на границе рассматриваемая система асимптотически устойчива. Другими словами, допустим, что невозмущенное движение для системы

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + X_s \tag{44.5}$$

асимптотически устойчиво. Тогда, как мы видели, будем ли мы иметь дело с одним нулевым корнем или с парой чисто мнимых корней, для уравнений (44.5) будет существовать функция Ляпунова, удовлетворяющая условиям теоремы Б. Обозначим эту функцию через $V(x_1, \ldots, x_n)$. Предполагая для определенности, что эта функция положительная, будем иметь, что выражение

$$W(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{s=1}^{n} (p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + X_s) \frac{\partial V}{\partial x_s} \tag{44.6}$$

представляет собой функцию определенно отрицательную. Воспользуемся геометрической интерпретацией теоремы Б, данной в § 11. Рассмотрим систему замкнутых поверхностей $V = h$. Поверхности этого семейства, расположенные достаточно близко от начала координат, пересекаются интегральными кривыми уравнений (44.5) снаружи во внутрь. Пусть $V = h_1$ и $V = h_2$ — две такого рода поверхности. При этом первую из этих поверхностей, которую мы предполагаем расположенной внутри второй (рис. 10), мы можем взять сколь угодно близкой к началу координат. Напротив, вторую поверхность мы можем взять сколь угодно близкой к наибольшей из поверхностей семейства, которая еще пересекается интегральными кривыми уравнений (44.5) во внутрь.

Составим теперь производную от функции V по t в силу уравнений (44.3). Будем иметь:

$$\frac{dV}{dt} = W + \mu \sum_{s=1}^{n} (r_{s1}x_1 + \ldots + r_{sn}x_n) \frac{\partial V}{\partial x_s}. \tag{44.7}$$

Так как функция W является определенно-отрицательной, то для всех точек, расположенных между поверхностями $V = h_1$ и $V = h_2$, выполняется неравенство $W < -l$, где l — отличное от нуля положительное число. Отсюда следует, что во всех этих точках выражение (44.7) будет принимать отрицательные значения, если только число μ достаточно мало. Следовательно, при достаточно малом μ

все поверхности $V = h$, расположенные между $V = h_1$ и $V = h_2$, пересекаются интегральными кривыми полной системы (44.3) снаружи во внутрь. И это будет иметь место независимо от того, находится ли система (44.3) в области неустойчивости или в области устойчивости.

Следовательно, если точка $x_1, \ldots, x_n$, изображающая систему (44.3), попадает в область между поверхностями $V = h_1$ и $V = h_2$, то она будет приближаться к началу координат, по крайней мере, до области, ограниченной поверхностью $V = h_1$. Эта область, однако, может быть сделана сколь угодно малой, если μ достаточно мало, т. е. если система находится достаточно близко от границы области устойчивости. И если даже при этом система находится в области неустойчивости, мы можем все же считать, что невозмущенное движение практически устойчиво, так как возмущения, будучи в начальный момент очень малыми, хотя и будут нарастать, все же останутся практически очень малыми (сколь угодно малыми при μ, достаточно малом). Более того, если начальные возмущения не будут очень малыми, то они будут уменьшаться, делаясь в конце концов очень малыми (сколь угодно малыми при μ, достаточно малом). И лишь только когда начальные возмущения достаточно велики и выходят за область, ограниченную поверхностью $V = h_2$, они могут в дальнейшем не уменьшаться.

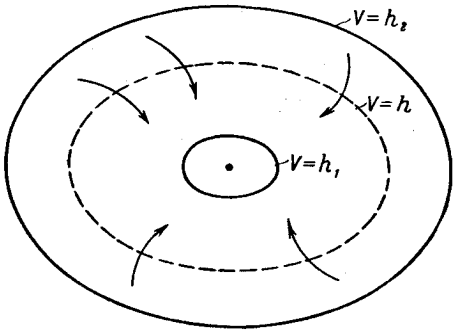

Рис. 10.

Если система находится в области устойчивости, то можно показать, что функцию V можно выбрать таким образом, чтобы не только выражение (44.6), но и выражение (44.7) было определенно-отрицательным [1]). Следовательно, можно положить $h_1 = 0$. Невозмущенное движение будет асимптотически устойчивым, причем для допускаемых возмущений будут существовать определенные конечные границы, не зависящие от μ, т. е. от степени близости системы к границе области устойчивости.

Таким образом, если на границе области устойчивости система асимптотически устойчива, то вблизи этой границы устойчивость,

[1]) Построенные нами функции Ляпунова для случая одного нулевого корня и для случая пары чисто мнимых корней останутся функциями Ляпунова для системы, которая получится, если, непрерывно меняя коэффициенты первого приближения, сделать вещественные части всех корней характеристического уравнения отрицательными. Для этого нужно будет только подходящим образом выбрать независимые переменные.

если она имеет место, не может перейти в «практическую» неустойчивость. Напротив, неустойчивость, если она имеет место, может рассматриваться с точки зрения практической как устойчивость.

Вышеприведенные геометрические соображения могут быть доказаны строго аналитически. Мы это сделаем в главе VI, где они получатся как частный случай более общей теоремы. Там же будет показано, что все вышеуказанное будет справедливо и в общем случае, когда на границе области устойчивости имеется любое число критических корней.

Допустим теперь, что на рассматриваемом участке границы области устойчивости невозмущенное движение неустойчиво. Тогда как в случае одного нулевого корня, так и в случае пары чисто мнимых корней для уравнений (44.5) будет существовать функция Ляпунова $V(x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющая условиям теоремы В. Следовательно, выражение (44.6) будет по-прежнему знакоопределенным. Что же касается самой функции V, то она в окрестности начала координат может принимать значения того же знака, что и (44.6).

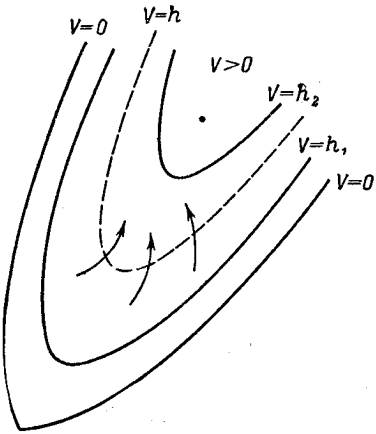

Рис. 11.

Примем для определенности, что выражение (44.6) определенно-положительно, и рассмотрим область, в которой $V > 0$ (рис. 11). Эта область ограничена поверхностью $V = 0$. Построим в этой области семейство поверхностей $V = h$, где $h > 0$. Так как производная (44.6) положительна, то эти поверхности пересекаются интегральными кривыми уравнений (44.5) в сторону возрастания V.

Выделим из семейства $V = h$ две поверхности $V = h_1$ и $V = h_2$, где h_1 можно взять сколь угодно малым, так что поверхность $V = h_1$ сколь угодно близка к поверхности $V = 0$. Так как функция (44.6) определенно-положительна, то в области, заключенной между поверхностями $V = h_1$ и $V = h_2$, она имеет отличный от нуля положительный нижний предел [1]). Но тогда в этой области производная (44.7) будет также положительной, если только величина μ достаточно мала. Следовательно, все поверхности $V = h$, заключенные между поверхностями $V = h_1$ и $V = h_2$, пересекаются интегральными кри-

[1]) Мы рассматриваем, разумеется, во всех наших рассуждениях только те точки, которые лежат в некоторой окрестности начала координат, в которой функция V обладает своими свойствами.

выми не только уравнений (44.5), но и уравнений (44.3) в сторону возрастания V. Поэтому изображающая точка, попав в область между поверхностями $V = h_1$ и $V = h_2$, будет все дальше отбрасываться от начала координат, пока она не выйдет за пределы поверхности $V = h_2$, расположенной на конечном расстоянии от начала координат. Очевидно, мы имеем дело с неустойчивостью, по крайней мере, с точки зрения практической. В самом деле, если даже невозмущенное движение устойчиво, что будет иметь место, если система (44.3) находится в области устойчивости, то область допускаемых начальных возмущений должна быть во всяком случае настолько малой, чтобы поверхность $V = h_1$ была расположена вне ее. Что касается последней, то она при μ, достаточно малом, т. е. при достаточной близости системы к границе области устойчивости, будет расположена сколь угодно близко к началу координат.

Итак, когда на границе области устойчивости невозмущенное движение неустойчиво, то если система находится вблизи указанной границы, безразлично, в области неустойчивости или в области устойчивости, всегда найдутся очень малые (сколь угодно малые при достаточной близости к границе) начальные возмущения, которые будут с течением времени нарастать так, что соответствующее возмущенное движение будет значительно отличаться от невозмущенного.

Все предыдущие рассуждения показывают, что невозмущенное движение системы при близости к границе области устойчивости будет с точки зрения практической устойчивым или неустойчивым, в зависимости от того, будет ли это движение на самой границе устойчивым или неустойчивым в смысле Ляпунова.

В связи с этим те границы области устойчивости, на которых невозмущенное движение устойчиво, называют «безопасными», а те границы, на которых оно неустойчиво, — «опасными». Нахождение «опасных» и «безопасных» границ сводится к решению задачи устойчивости в критических случаях.

Пример. Рассмотрим в качестве примера систему дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + M\frac{d\varphi}{dt} + k\varphi = -N\eta,$$

$$\frac{d\eta}{dt} = F(\psi),$$

$$\psi = \varphi + \beta\frac{d\varphi}{dt} - \frac{1}{a}\eta,$$

описывающих при некоторых упрощающих предположениях движение самолета с автопилотом. Не останавливаясь на выводе этих уравнений [1]), укажем лишь значения входящих в эти уравнения величин.

---

[1]) Его можно найти, например, в работе: Бутенин Н. В., Автоколебания стенда с автопилотом. Труды Ленингр. воен.-возд. акад., т. 3, 1943.

Эти значения суть следующие: φ — угол рыскания самолета, η — угол поворота руля, ψ — аргумент сервомотора (например, открытие золотника), управляющего рулем, $F(\psi)$ — характеристика сервомотора. Все постоянные M, k, N, β, a положительны. При этом M характеризует естественное демпфирование самолета, N характеризует рулевое устройство, k характеризует статическую устойчивость самолета, β — коэффициент искусственного демпфирования, $\frac{1}{a}$ — коэффициент обратной связи.

Характеристику сервомотора примем в виде

$$F(\psi) = \alpha\psi + \gamma\psi^3.$$

Тогда, вводя переменные

$$\eta = x_1, \quad \varphi = x_2, \quad \frac{d\varphi}{dt} = x_3,$$

мы будем иметь следующие уравнения движения:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= F(\psi) = \alpha\psi + \gamma\psi^3, \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_3, \\ \frac{dx_3}{dt} &= -Nx_1 - kx_2 - Mx_3, \\ \psi &= -\frac{1}{a}x_1 + x_2 + \beta x_3. \end{aligned}\right\} \tag{44.8}$$

Характеристическое уравнение системы первого приближения имеет вид

$$\Delta(\rho) = \rho^3 + p\rho^2 + q\rho + r = 0, \tag{44.9}$$

где

$$p = \frac{\alpha}{a} + M, \quad q = k + \frac{M\alpha}{a} + N\alpha\beta, \quad r = \frac{\alpha k}{a} + N\alpha. \tag{44.10}$$

Для того чтобы это уравнение имело корни с отрицательными вещественными частями, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства (25.2) Гурвица:

$$p > 0, \quad q > 0, \quad r > 0, \quad R = pq - r > 0. \tag{44.11}$$

Эти неравенства определяют область устойчивости. На границе этой области хотя бы одно из неравенств (44.11) обращается в равенство. Из (44.10) видно, что это возможно лишь для последнего из указанных неравенств. Таким образом, граница области устойчивости определяется уравнением

$$R = pq - r = 0. \tag{44.12}$$

При выполнении этого условия уравнение (44.9) имеет, как легко видеть, пару чисто мнимых корней $\pm i\sqrt{q}$. Следовательно, чтобы выделить «опасные» и «безопасные» участки границы, необходимо

решить задачу устойчивости для системы (44.8) в критическом случае пары чисто мнимых корней.

Уравнения (44.8) представляют частный случай уравнений (42.11), рассмотренных А. И. Лурье (§ 41). Мы можем поэтому воспользоваться для определения g формулой (42.20). Так как в рассматриваемом случае

$$c=\alpha, \quad \psi_3=\gamma, \quad D(\rho)=\rho^3+M\rho^2+k\rho, \quad \lambda=\sqrt{q},$$

то указанная формула дает:

$$g=\frac{3\gamma}{4(p^2+q)}\left\{\frac{Mq}{\alpha}-p\left(\frac{M}{a}+N\beta\right)\right\}.$$

Вводя безразмерные параметры

$$A=M\beta, \quad B=\frac{M^2}{Na}, \quad \varkappa=\frac{k}{M^2}, \quad \sigma=\frac{N\alpha}{M^3},$$

найдем, что знак g совпадает со знаком величины

$$L=\gamma\left[\varkappa-\sigma^2B(A+B)\right].$$

Если $L<0$, то невозмущенное движение асимптотически устойчиво, а если $L>0$, то оно неустойчиво.

Для величины $R=pq-r$ находим:

$$R=M^3\left[\varkappa-\sigma+\sigma(A+B)(1+\sigma B)\right].$$

Фиксируя параметры $\varkappa$ и σ, рассмотрим плоскость параметров A и B. Нам достаточно при этом рассматривать только первую четверть, так как A и B могут принимать только положительные значения. Предположим, что $\sigma-\varkappa>0$. При этом условии кривая $R=0$, ограничивающая область устойчивости, имеет вид, изображенный на рис. 12. Кривая $L=0$ пересекает кривую $R=0$ в точке W, которая и отделяет «безопасные» участки границы от «опасных». При $\gamma>0$ величина L имеет отрицательные значения справа от кривой $L=0$. Поэтому при $\gamma>0$ участок границы WU является «безопасным», а участок WV — «опасным». При $\gamma<0$ «опасная» и «безопасная» части границы меняются местами.

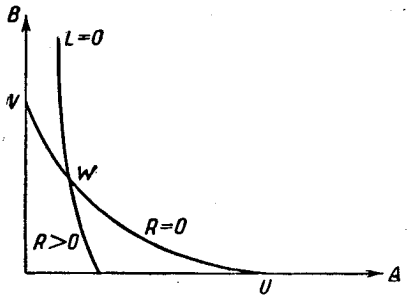

Рис. 12.

При $\sigma-\varkappa<0$ кривая $R=0$ не проходит в области положительных A и B.

ГЛАВА V.

УСТОЙЧИВОСТЬ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ.

А. ТЕОРЕМЫ ВТОРОГО МЕТОДА ДЛЯ НЕУСТАНОВИВШИХСЯ ДВИЖЕНИЙ.

§ 45. Некоторые определения.

Периодические движения, изучению которых посвящена настоящая глава, являются наиболее простым классом неустановившихся движений. Основным методом исследования устойчивости такого рода движений будет по-прежнему второй метод Ляпунова. Нам нужно будет поэтому изложить сначала основные теоремы второго метода Ляпунова в их общей формулировке, которую они имеют для неустановившихся движений.

Введем некоторые определения. Рассмотрим функцию $V(t, x_1, \ldots, x_n)$, заданную в области

$$t \geqslant t_0 > 0, \quad |x_s| \leqslant h, \tag{45.1}$$

где t_0 и h — постоянные. Мы будем предполагать, что функция V обладает в указанной области непрерывными частными производными по всем переменным и что она обращается в нуль при $x_1 = \ldots = x_n = 0$.

Следуя Ляпунову, будем говорить, что V допускает *бесконечно малый высший предел*, если для любого положительного числа λ можно найти другое положительное число μ, такое, что при всех значениях $t, x_1, \ldots, x_n$, удовлетворяющих неравенствам

$$t \geqslant t_0, \quad |x_s| \leqslant \mu,$$

будет выполняться неравенство

$$|V(t, x_1, \ldots, x_n)| \leqslant \lambda.$$

Другими словами, функция V допускает бесконечно малый высший предел, если она стремится к нулю при $\sum x_s^2 \to 0$ равномерно относительно t. Так, например, функция

$$V = (x_1 + \ldots + x_n) \sin t$$

допускает бесконечно малый высший предел, а функция

$$V = \sin[t(x_1 + \ldots + x_n)]$$

такого предела не допускает, несмотря на то, что она ограничена.

Функция V называется *знакопостоянной*, если при t_0 достаточно большом и h достаточно малом она не может принимать в области (45.1) значений какого-либо определенного знака.

Таким образом, знакопостоянство для функций, зависящих от t, определяется так же, как и для функций, не зависящих от t. Несколько иначе обстоит дело с понятием *знакоопределенности*, а именно: функция $V(t, x_1, \ldots, x_n)$ называется *определенно-положительной*, если она в области (45.1) при t_0 достаточно большом и h достаточно малом удовлетворяет неравенству

$$V(t, x_1, \ldots, x_n) \geqslant W(x_1, \ldots, x_n), \tag{45.2}$$

где $W(x_1, \ldots, x_n)$ — не зависящая от t определенно-положительная функция. Аналогично функция $V(t, x_1, \ldots, x_n)$ называется *определенно-отрицательной*, если она при тех же условиях удовлетворяет неравенству

$$V(t, x_1, \ldots, x_n) \leqslant -W(x_1, \ldots, x_n).$$

Таким образом, необращение в нуль в области (45.1) не является достаточным условием знакоопределенности для функций, зависящих от t, так что, например, функция

$$V = e^{-t}(x_1^2 + \ldots + x_n^2),$$

несмотря на то, что она обращается в нуль только при $x_1 = \ldots = x_n = 0$, не является знакоопределенной, так как она при фиксированных $x_1, \ldots, x_n$ стремится к нулю при $t \to \infty$ и, следовательно, для нее не может выполняться неравенство (45,2). Напротив, функции

$$V_1 = (2 + \sin t) \sum_{s=1}^{n} x_s^2, \quad V_2 = (-2 + \sin t) \sum_{s=1}^{n} x_s^2$$

будут знакоопределенными, причем первая из них будет определенно-положительной, а вторая определенно-отрицательной, так как

$$V_1 \geqslant \sum_{s=1}^{n} x_s^2, \quad V_2 \leqslant -\sum_{s=1}^{n} x_s^2.$$

Легко дать геометрическую интерпретацию знакоопределенных функций, зависящих от t. С этой целью рассмотрим пространство переменных $x_1, \ldots, x_n$ и построим систему поверхностей $V(t, x_1, \ldots, x_n) = c$, рассматривая t как параметр. Пусть c_1 — какое-нибудь достаточно малое значение c. Тогда уравнение $V = c_1$ представит при каждом значении t замкнутую поверхность, окружающую начало координат. Придавая t все возможные для него значения, мы получим

систему поверхностей, которую мы можем рассматривать как одну подвижную поверхность. Наряду с ней рассмотрим неподвижную поверхность $W(x_1, \ldots, x_n) = c_1$. Допустим, что V — функция определенно-положительная. Легко видеть, что поверхность $V = c_1$ при своем движении все время остается внутри поверхности $W = c_1$. Действительно, во всех точках, где W принимает значения c_1, функция V на основании (45.2) принимает значения, большие или равные c_1, и следовательно, все эти точки лежат вне поверхности $V = c_1$ или на ней.

Если функция V, будучи знакоопределенной, допускает еще бесконечно малый высший предел, то поверхность $V = c_1$ при своем движении будет все время оставаться вне некоторой достаточно малой окрестности начала координат. Действительно, если бы указанная поверхность в какой-нибудь момент времени пересекала сколь угодно малую окрестность начала координат, то это означало бы, что при указанном значении t на этой поверхности имеются точки, для которых выполняется неравенство

$$|x_s| \leqslant \mu, \tag{45.3}$$

где μ — сколь угодно малая положительная постоянная. Но так как V допускает бесконечно малый высший предел, то она при выполнении (45.3) и при любом значении $t \geqslant t_0$ будет сколь угодно малой, если только μ достаточно мало и, следовательно, будет меньше, чем c_1. Это и показывает, что все точки поверхности $V = c_1$ лежат вне области (45.3), если μ достаточно мало.

§ 46. Теоремы Ляпунова об устойчивости для неустановившихся движений.

Мы переходим теперь к изложению основных теорем второго метода Ляпунова для неустановившихся движений.

Рассмотрим дифференциальные уравнения возмущенного движения вида

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(t, x_1, \ldots, x_n) \qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{46.1}$$

где функции X_s определены в области

$$t \geqslant t_0, \quad |x_s| \leqslant H. \tag{46.2}$$

Мы будем предполагать, что в указанной области функции X_s являются непрерывными и удовлетворяют некоторым общим условиям, обеспечивающим существование для уравнений (46.1) единственного решения, удовлетворяющего заданным начальным условиям.

Первая основная теорема Ляпунова, которую мы в дальнейшем будем называть теоремой I, может быть сформулирована следующим образом.

Теорема I. *Если для дифференциальных уравнений возмущенного движения* (46.1) *можно найти знакоопределенную функцию* $V(t, x_1, \ldots, x_n)$, *для которой производная по времени, составленная в силу этих уравнений, т. е. выражение*

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s} X_s, \tag{46.3}$$

есть функция знакопостоянная, знака, противоположного с V, *или тождественно обращается в нуль, то невозмущенное движение устойчиво.*

Доказательство. Допустим для определенности, что V — функция положительная. Следовательно, существует такое достаточно большое число t_0 и такое достаточно малое число $h \leqslant H$, что в области

$$t \geqslant t_0, \quad |x_s| \leqslant h \tag{46.4}$$

выполняется неравенство

$$V(t, x_1, \ldots, x_n) \geqslant W(x_1, \ldots, x_n), \tag{46.5}$$

где W — некоторая не зависящая от t определенно-положительная функция. Кроме того, в этой же области выражение (46.3) может принимать только отрицательные или равные нулю значения.

Пусть ε — произвольное сколь угодно малое положительное число. Мы будем предполагать, что во всяком случае $\varepsilon < h$. Рассмотрим совокупность всевозможных значений величин $x_1, \ldots, x_n$, связанных соотношением

$$x = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\} = \varepsilon, \tag{46.6}$$

и обозначим через l точный нижний предел функции W при этом условии. В силу знакоопределенности W число l положительно и отлично от нуля. В силу (46.5) имеем:

$$V(t, x_1, \ldots, x_n) \geqslant l \quad \text{при } x = \varepsilon. \tag{46.7}$$

Будем теперь рассматривать величины x_s как функции времени, удовлетворяющие дифференциальным уравнениям возмущенного движения. Предположим, что начальные значения x_s^0 этих функций при $t = t_0$ выбраны согласно неравенствам

$$|x_s^0| \leqslant \eta, \tag{46.8}$$

где η настолько мало, что

$$V(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0) < l. \tag{46.9}$$

В силу того, что $V(t_0, 0, \ldots, 0) = 0$, такой выбор числа η, очевидно, возможен. Мы будем предполагать, что число η во всяком случае меньше ε. Тогда неравенства

$$|x_s| < \varepsilon, \tag{46.10}$$

выполняясь в начальный момент времени, будут выполняться, по крайней мере, при $t - t_0$ достаточно малом, так как функции $x_s(t)$ изменяются с течением времени непрерывно. Покажем, что эти неравенства будут выполняться при всех $t > t_0$. В самом деле, если бы эти неравенства когда-нибудь нарушились, то должен был бы существовать такой момент времени $t = T$, для которого хотя бы одно из этих неравенств перешло бы в равенство. Другими словами, мы имели бы

$$x(T) = \max\{|x_1(T)|, \ldots, |x_n(T)|\} = \varepsilon$$

и, следовательно, на основании (46.7)

$$V(T, x_1(T), \ldots, x_n(T)) \geqslant l. \tag{46.11}$$

С другой стороны, так как $\varepsilon < h$, то во всем интервале времени (t_0, T) выполняются неравенства (46.4), а следовательно, во всем этом интервале $\frac{dV}{dt} \leqslant 0$. Это дает:

$$V(T, x_1(T), \ldots, x_n(T)) \leqslant$$
$$\leqslant V(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0),$$

что на основании (46.9) противоречит (46.11). Таким образом, неравенства (46.10) должны выполняться при всех $t > t_0$, откуда и вытекает устойчивость движения.

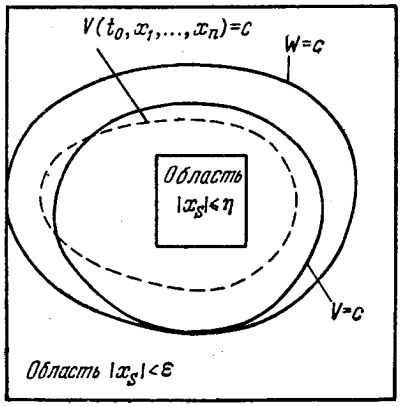

Рис. 13.

Доказанная теорема, так же как и в случае установившегося движения, допускает простое геометрическое истолкование. С этой целью рассмотрим в пространстве переменных $x_1, \ldots, x_n$ область $|x_s| \leqslant \varepsilon$ (рис. 13). Выберем c настолько малым, чтобы замкнутая поверхность $W(x_1, \ldots, x_n) = c$ целиком лежала в указанной области. Рассмотрим, далее, движущуюся поверхность $V(t, x_1, \ldots, x_n) = c$. Как было показано в предыдущем параграфе, эта поверхность все время лежит внутри поверхности $W = c$, а следовательно, и подавно внутри области $|x_s| \leqslant \varepsilon$. Допустим, что точка $(x_1, \ldots, x_n)$, движение которой определяется уравнениями (46.1), в какой-нибудь момент времени находилась внутри поверхности $V = c$. Тогда она будет все время оставаться внутри этой поверхности. Действительно, если бы она вышла наружу, то в тот момент времени, когда она пересекала бы указанную поверхность, производная $\frac{dV}{dt}$ в точке пересечения была бы

положительной, что противоречит условию теоремы. Отсюда непосредственно вытекает, что всякое движение, начавшееся в области $|x_s| \leqslant \eta$, целиком расположенной внутри поверхности $V(t_0, x_1, \ldots, x_n) = c$, будет всегда оставаться в области $|x_s| \leqslant \varepsilon$.

Переходим теперь к доказательству второй основной теоремы Ляпунова, являющейся обобщением теоремы Б. Эту теорему мы будем в дальнейшем называть теоремой II.

Теорема II. *Если при выполнении условий теоремы* I *производная* $\frac{dV}{dt}$ *является знакоопределенной, а сама функция* V *допускает бесконечно малый высший предел, то невозмущенное движение устойчиво асимптотически.*

Доказательство. Допустим, что V есть функция определенно-положительная и, следовательно, $\frac{dV}{dt}$ — определенно-отрицательная. Таким образом, в области (46.4) будет выполняться не только неравенство (46.5), но и неравенство

$$\frac{dV}{dt} \leqslant -W_1(x_1, \ldots, x_n), \tag{46.12}$$

где W_1 — не зависящая от t определенно-положительная функция.

Будем рассматривать величины x_s как функции времени, удовлетворяющие дифференциальным уравнениям возмущенного движения, предполагая, что начальные значения $x_s^0 = x_s(t_0)$ этих величин удовлетворяют неравенствам (46.8). Так как невозмущенное движение во всяком случае устойчиво, то величину η можно выбрать настолько малой, чтобы при всех $t > t_0$ величины x_s оставались в области (46.4). Тогда на основании (46.12) производная от функции $V(t, x_1(t), \ldots, x_n(t))$ будет все время отрицательной и, следовательно, эта функция с неограниченным возрастанием t будет стремиться к некоторому пределу, оставаясь все время больше этого предела. Покажем, что этот предел равен нулю. Допустим противное, что этот предел равен некоторой положительной величине α, отличной от нуля. Тогда при всех $t > t_0$ будет выполняться неравенство

$$V(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)) > \alpha. \tag{46.13}$$

Так как V допускает бесконечно малый высший предел, то из этого неравенства вытекает, что

$$x(t) = \max\{|x_1(t)|, \ldots, |x_n(t)|\} \geqslant \lambda, \tag{46.14}$$

где λ — некоторое достаточно малое положительное число. Действительно, если бы такого числа λ не существовало, т. е. если бы величина $x(t)$ была меньше любого сколь угодно малого числа, то и величина $V(t, x_1(t), \ldots, x_n(t))$, как это следует из определения

бесконечно малого высшего предела, была бы также сколь угодно малой, что противоречит (46.13).

Но если при всех $t > t_0$ выполняется неравенство (46.14), то (46.12) показывает, что все время будет также выполняться неравенство

$$\frac{dV}{dt} \leqslant -l_1,$$

где l_1 — отличное от нуля положительное число, являющееся точным нижним пределом функции $W_1(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ при условии (46.14). Следовательно, при всех $t > t_0$ будем иметь:

$$V(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)) = V(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0) + \int_{t_0}^{t} \frac{dV}{dt}\, dt \leqslant$$
$$\leqslant V(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0) - l_1(t - t_0),$$

что, очевидно, находится в противоречии с (46.13). Полученное противоречие показывает, что функция $V(t, x_1(t), \ldots, x_n(t))$ с неограниченным возрастанием t стремится к нулю. Следовательно, то же самое будет и для функции $W(x_1(t), \ldots, x_n(t))$, откуда непосредственно следует

$$\lim_{t \to \infty} x_s(t) = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, n),$$

что и доказывает теорему [1]).

§ 47. Теорема Ляпунова о неустойчивости для неустановившихся движений.

Переходим теперь к изложению третьей основной теоремы Ляпунова, дающей критерий неустойчивости.

Теорема III. *Если существует допускающая бесконечно малый высший предел функция $V(t, x_1, \ldots, x_n)$, производная которой по времени, составленная в силу уравнений возмущенного движения, есть функция знакоопределенная, а сама функция V при значениях x_s, сколь угодно малых, и при значениях t, сколь угодно больших, может принимать значения того же знака, что и производная, то невозмущенное движение неустойчиво.*

Доказательство. Примем для определенности, что производная $\frac{dV}{dt}$ положительна. Следовательно, в области

$$t \geqslant t_0 > 0, \quad |x_s| \leqslant h \tag{47.1}$$

выполняется неравенство

$$\frac{dV}{dt} \geqslant W(x_1, \ldots, x_n), \tag{47.2}$$

[1]) См. примечание в конце книги (стр. 522).

где $W(x_1, \ldots, x_n)$ — не зависящая от t определенно-положительная функция.

Пусть η — произвольное сколь угодно малое положительное число. Рассмотрим решение $x_s = x_s(t)$ уравнений возмущенного движения, для которого начальные значения $x_s^0 = x_s(t_0)$ выбраны согласно условиям

$$|x_s^0| \leqslant \eta, \quad V(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0) > 0.$$

Согласно условиям теоремы такой выбор величин x_s^0 возможен, как бы мало ни было число η. Покажем, что рассматриваемое решение обязательно выйдет в некоторый момент времени из области (47.1).

В самом деле, допустим, что это решение все время остается в области (47.1). Тогда на основании (47.2) производная от функции $V(t, x_1(t), \ldots, x_n(t))$ будет во всяком случае положительной, и мы, следовательно, имеем:

$$V(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)) > V(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0). \tag{47.3}$$

Так как V допускает бесконечно малый высший предел, то из (47.3) следует:

$$x(t) = \max\{|x_1(t)|, \ldots, |x_n(t)|\} \geqslant \lambda, \tag{47.4}$$

где λ — достаточно малое положительное число. Но тогда из (47.2) вытекает, что

$$\frac{dV(t, x_1(t), \ldots, x_n(t))}{dt} \geqslant l, \tag{47.5}$$

где отличное от нуля положительное число l есть точный нижний предел функции $W(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ при условии (47.4).

Неравенство (47.5) дает:

$$V(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)) = V(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0) + \int_{t_0}^{t} \frac{dV}{dt}\, dt \geqslant$$
$$\geqslant V(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0) + l(t - t_0),$$

что невозможно, так как функция V, допуская бесконечно малый высший предел, будет во всяком случае ограниченной.

Из полученного противоречия вытекает, что решение $x_s = x_s(t)$ в некоторый момент времени обязательно покинет не зависящую от начальных значений x_s^0 область (47.1), и так как эти начальные значения сколь угодно малы, то невозмущенное движение неустойчиво. Таким образом, теорема доказана.

Функции, удовлетворяющие теоремам I, II или III, мы будем, так же как и в случае установившихся движений, называть *функциями Ляпунова*.

§ 48. Теорема Н. Г. Четаева.

Доказанная в предыдущем параграфе теорема III, дающая критерий неустойчивости, обладает одним принципиальным недостатком. Этот недостаток заключается в том, что функция V должна обладать определенными свойствами во всей области (47.1). В частности, во всей этой области производная $\frac{dV}{dt}$ должна быть положительной, что обозначает, что все интегральные кривые, расположенные в области (47.1), должны пересекать поверхности $V=c$ в определенную сторону. Между тем, для того чтобы обнаружить неустойчивость движения в тех случаях, когда она действительно имеет место, достаточно обнаружить в сколь угодно малой окрестности начала координат хотя бы одну неустойчивую интегральную кривую, а для того чтобы обнаружить такого рода интегральную кривую, достаточно знать поведение интегральных кривых не во всей области (47.1), а только в некоторой ее части. В связи с этим необходимо, таким образом, обобщить теорему Ляпунова, чтобы приходилось рассматривать только некоторые части окрестности начала координат. Такого рода обобщение было дано Н. Г. Четаевым [1]).

Назовем областью $V>0$ какую-нибудь область окрестности

$$|x_s| \leqslant h \tag{48.1}$$

начала координат пространства переменных $x_1, \ldots, x_n$, ограниченную поверхностью $V=0$, в которой функция V принимает положительные значения.

Допустим, что функция V обладает следующими свойствами:

1) При сколь угодно больших значениях t в сколь угодно малой окрестности начала координат существует область $V>0$.

2) В области $V>0$ функция V ограничена.

3) В области $V>0$ производная $\frac{dV}{dt}$, составленная в силу уравнений возмущенного движения, принимает положительные значения и при этом для всех значений $t, x_1, \ldots, x_n$, связанных соотношением

$$V(t, x_1, \ldots, x_n) \geqslant \alpha,$$

где α — какое-нибудь положительное число, выполняется неравенство

$$\frac{dV}{dt} \geqslant l,$$

где l — также некоторое положительное число, зависящее от α.

Мы можем теперь теорему Н. Г. Четаева сформулировать следующим образом.

---

[1]) Четаев Н. Г., Одна теорема о неустойчивости. ДАН, т. I, № 9, 1934.

Теорема. *Если для дифференциальных уравнений возмущенного движения можно найти функцию, удовлетворяющую условиям* 1), 2), 3), *то невозмущенное движение неустойчиво.*

Доказательство. Зададимся окрестностью (48.1) начала координат. Согласно условию, если h достаточно мало, то в этой окрестности имеется область $V > 0$. При этом в указанной области при всяком значении t имеются точки, сколь угодно близкие к началу координат.

Рассмотрим решение $x_s = x_s(t)$ уравнений возмущенного движения с начальными значениями $x_s^0 = x_s(t_0)$, выбранными численно сколь угодно малыми и такими, что

$$V(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0) = V_0 > 0.$$

Так как в области $V > 0$ производная $\frac{dV}{dt}$ положительна, то функция $V(t, x_1(t), \ldots, x_n(t))$ будет возрастать и, следовательно, величины $x_s(t)$ будут оставаться в области $V > 0$, по крайней мере, до тех пор, пока не нарушаются неравенства (48.1). Покажем, что в некоторый момент времени неравенства (48.1) действительно нарушаются.

Допустим противное, что неравенства (48.1) никогда не нарушаются. Следовательно, все время выполняется условие

$$V(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)) > V_0,$$

откуда по свойству функции V вытекает, что

$$\frac{dV(t, x_1(t), \ldots, x_n(t))}{dt} \geqslant l, \tag{48.2}$$

где l — некоторое отличное от нуля положительное число. Из (48.2) находим:

$$V(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)) \geqslant V_0 + l(t - t_0),$$

что невозможно, так как в области $V > 0$ функция V ограничена.

Таким образом, в некоторый момент времени решение $x_s(t)$ непременно покинет область (48.1), и так как величины x_s^0 могут быть взяты сколь угодно малыми, то невозмущенное движение неустойчиво.

Б. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ.

§ 49. Постановка задачи.

Мы переходим теперь к рассмотрению устойчивости периодических движений. Мы будем предполагать, что правые части дифференциальных уравнений возмущенного движения (46.1) являются по отношению к t периодическими функциями некоторого заданного периода ω,

Мы будем, кроме того, предполагать, что эти уравнения могут быть представлены в виде

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + X'_s(t, x_1, \ldots, x_n) \qquad (49.1)$$
$$(s = 1, 2, \ldots, n),$$

где p_{si} — непрерывные периодические функции t периода ω, а функции X'_s в том или ином смысле малы по сравнению с линейными членами.

Так же как и в случае установившихся движений, нам предстоит разрешить три следующих вопроса:

1) установить критерии устойчивости и неустойчивости для системы линейных уравнений первого приближения;

2) установить необходимые и достаточные условия, при которых задача устойчивости для полной системы (49.1) решается первым приближением;

3) указать методы решения задачи устойчивости в критических случаях, когда рассмотрения одного лишь первого приближения недостаточно.

Мы начинаем с рассмотрения первого вопроса. Для этого нам придется изложить теорию линейных уравнений с периодическими коэффициентами. Так как эта теория имеет большое значение в различных вопросах техники и физики, то мы остановимся на ней подробно.

§ 50. Характеристическое уравнение системы линейных уравнений с периодическими коэффициентами.

Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n \quad (s = 1, 2, \ldots, n), \qquad (50.1)$$

где p_{sj} — непрерывные периодические функции t периода ω.

Пусть $x_{sj}(t)$ — фундаментальная система решений уравнений (50.1). Здесь, как и в дальнейшем, первый индекс обозначает номер функции в каком-нибудь решении, а второй индекс — номер решения. Если мы во всех функциях $x_{sj}(t)$ какого-нибудь j-го решения заменим t на $t + \omega$, то в силу периодичности коэффициентов p_{sj} мы снова получим решение, так как функции $x_{sj}(t + \omega)$ будут по-прежнему удовлетворять уравнениям (50.1), если им удовлетворяли функции $x_{sj}(t)$. Полученное решение не будет совпадать с первоначальным решением $x_{sj}(t)$, но как всякое решение уравнений (50.1) оно необходимо должно являться линейной комбинацией фундаментальной системы