решений $x_{sj}(t)$. Следовательно, имеем:

$$x_{sj}(t+\omega) = a_{1j}x_{s1}(t) + a_{2j}x_{s2}(t) + \ldots + a_{nj}x_{sn}(t), \quad (50.2)$$

где $a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj}$ — некоторые постоянные. Меняя j от 1 до n, мы получим n^2 величин a_{sj}.

Составим уравнение

$$D(\rho) = \begin{vmatrix} a_{11}-\rho & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\rho & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\rho \end{vmatrix} = 0. \quad (50.3)$$

Это уравнение, играющее основную роль в теории линейных уравнений с периодическими коэффициентами, называется *характеристическим уравнением, соответствующим периоду* ω, или, короче, *характеристическим уравнением.*

Установим некоторые основные свойства характеристического уравнения.

1. *Характеристическое уравнение не зависит от выбранной фундаментальной системы.*

Выберем вместо фундаментальной системы x_{sj} другую фундаментальную систему y_{sj}. Для нее будем иметь:

$$y_{sj}(t+\omega) = c_{1j}y_{s1}(t) + c_{2j}y_{s2}(t) + \ldots + c_{nj}y_{sn}(t), \quad (50.4)$$

где c_{sj}, вообще говоря, отличны от a_{sj}. Покажем, однако, что корни характеристического уравнения, составленного из коэффициентов c_{sj}, совпадают с корнями уравнения (50.3).

В самом деле, так как величины y_{sj} образуют фундаментальную систему, то должно быть:

$$y_{sj}(t) = b_{1j}x_{s1}(t) + b_{2j}x_{s2}(t) + \ldots + b_{nj}x_{sn}(t) \quad (50.5)$$
$$(s,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

где b_{sj} — некоторые постоянные, причем определитель матрицы $\{b_{sj}\}$ отличен от нуля. Обозначим через $x(t)$ матрицу функций $x_{sj}(t)$, через $y(t)$ — матрицу функций $y_{sj}(t)$ и, соответственно, через a, b, c — матрицы коэффициентов a_{sj}, b_{sj}, c_{sj}. Тогда зависимости (50.2), (50.4) и (50.5) могут быть представлены следующим образом:

$$x(t+\omega) = x(t)\,a, \quad y(t+\omega) = y(t)\,c, \quad y(t) = x(t)\,b.$$

Далее имеем:

$$y(t+\omega) = x(t+\omega)\,b = x(t)\,ab = y(t)\,b^{-1}ab$$

и, следовательно,

$$c \equiv b^{-1}ab.$$

Поэтому, если E — единичная матрица, то характеристический определитель из коэффициентов c_{sj} может быть представлен следующим образом:

$$|c-\rho E| \equiv |b^{-1}ab-\rho E| \equiv |b^{-1}(a-\rho E)\,b| \equiv$$
$$\equiv |b^{-1}|\cdot|a-\rho E|\cdot|b| \equiv |a-\rho E|,$$

что и доказывает наше предложение.

2. *Характеристическое уравнение не изменится, если систему* (50.1) *подвергнуть неособенному линейному преобразованию с периодическими коэффициентами периода* ω.

В самом деле, преобразуем уравнения (50.1) при помощи подстановки

$$y_s = q_{s1}(t)\,x_1 + \ldots + q_{sn}(t)\,x_n \qquad (s=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \quad (50.6)$$

где q_{sj} — непрерывные и дифференцируемые периодические функции t периода ω и притом такие, что определитель $|q_{sj}|$ отличен от нуля при всех значениях t на отрезке $[0,\ \omega]$.

Подставляя в (50.6) фундаментальную систему $x_{sj}(t)$, мы получим следующую фундаментальную систему решений преобразованных уравнений:

$$y_{sj}(t) = q_{s1}(t)\,x_{1j}(t) + q_{s2}(t)\,x_{2j}(t) + \ldots + q_{sn}(t)\,x_{nj}(t),$$

или в матричном обозначении

$$y(t) = q(t)\,x(t),$$

где q — матрица коэффициентов q_{sj}. Отсюда находим, что

$$x(t) = q^{-1}(t)\,y(t),$$
$$y(t+\omega) = q(t+\omega)\,x(t+\omega) = q(t)\,x(t)\,a = q(t)\,q^{-1}(t)\,y(t)\,a = y(t)\,a$$

и, следовательно, характеристическое уравнение преобразованной системы совпадает с характеристическим уравнением исходной системы.

Допустим, что рассматриваемая фундаментальная система определяется начальными условиями

$$x_{sj}(0) = \begin{cases} 1 & (s=j), \\ 0 & (s\neq j). \end{cases}$$

Тогда, полагая в (50.2) $t=0$, будем иметь:

$$x_{sj}(\omega) = a_{sj} \qquad (s,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

и следовательно, характеристическое уравнение может быть представлено в следующем виде:

$$\begin{vmatrix} x_{11}(\omega)-\rho & x_{12}(\omega) & \dots & x_{1n}(\omega) \\ x_{21}(\omega) & x_{22}(\omega)-\rho & \dots & x_{2n}(\omega) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1}(\omega) & x_{n2}(\omega) & \dots & x_{nn}(\omega)-\rho \end{vmatrix} = 0. \qquad (50.7)$$

Этим видом характеристического уравнения мы будем часто пользоваться в дальнейшем.

Воспользуемся им, в частности, для вывода важной формулы, дающей выражение свободного члена характеристического уравнения. С этой целью рассмотрим детерминант Вронского

$$\Delta(t) = \begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \dots & x_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{vmatrix}.$$

Как известно, при любых t_0 и t справедливо соотношение

$$\Delta(t) = \Delta(t_0) \exp \int_{t_0}^{t} \sum_{s=1}^{n} p_{ss}\, dt.$$

Полагая в этом соотношении $t_0 = 0$, $t = \omega$, получим:

$$\Delta(\omega) = \exp \int_{0}^{\omega} \sum_{s=1}^{n} p_{ss}\, dt.$$

Сравнивая с (50.7), найдем, что если характеристическое уравнение представить в виде

$$\rho^n + A_1\rho^{n-1} + \dots + A_{n-1}\rho + A_n = 0,$$

то свободный член A_n определяется формулой

$$(-1)^n A_n = \exp \int_{0}^{\omega} \sum_{s=1}^{n} p_{ss}\, dt. \qquad (50.8)$$

§ 51. Аналитический вид решений в случае простых корней характеристического уравнения.

Система (50.1) не интегрируется в замкнутой форме. Можно, однако, указать общий аналитический вид ее решений.

Пользуясь каким-нибудь определением логарифмов, рассмотрим величины

$$\alpha_k = \frac{1}{\omega} \ln \rho_k, \qquad (51.1)$$

где ρ_k — корни характеристического уравнения. Эти величины называются *характеристическими показателями* системы (50.1).

Покажем, что для каждого корня ρ_k характеристического уравнения можно подобрать частное решение уравнений (50.1) вида

$$x_s(t) = e^{\alpha_k t}\varphi_s(t) \qquad (s = 1, 2, \ldots, n,), \tag{51.2}$$

где φ_s — некоторые периодические функции времени периода ω.

Это решение обладает тем свойством, что для него выполняются соотношения

$$x_s(t+\omega) = \rho_k x_s(t). \tag{51.3}$$

В самом деле, имеем:

$$x_s(t+\omega) = e^{\alpha_k t}\cdot e^{\alpha_k \omega}\varphi_s(t+\omega) = \rho_k e^{\alpha_k t}\varphi_s(t).$$

Наоборот, если для какого-нибудь решения $x_s(t)$ выполняются соотношения (51.3), то это решение необходимо имеет вид (51.2). Это непосредственно следует из того, что при выполнении (51.3) функции $x_s e^{-\alpha_k t}$ будут периодическими и, следовательно, функции x_s будут иметь вид (51.2).

Таким образом, задача сводится к определению решения, удовлетворяющего соотношениям (51.3). Это решение, если оно существует, должно являться линейной комбинацией фундаментальной системы. Таким образом, имеем:

$$x_s(t) = \beta_1 x_{s1}(t) + \beta_2 x_{s2}(t) + \ldots + \beta_n x_{sn}(t),$$

где $\beta_1, \ldots, \beta_n$ — некоторые постоянные. Подставляя (51.3), получим

$$\sum_{l=1}^{n} \beta_l x_{sl}(t+\omega) = \rho_k \sum_{l=1}^{n} \beta_l x_{sl}(t)$$

и, следовательно, на основании (50.2)

$$\sum_{l,\, l=1}^{n} \beta_l a_{ll} x_{sl}(t) = \rho_k \sum_{l=1}^{n} \beta_l x_{sl}(t).$$

Приравнивая коэффициенты при $x_{sl}(t)$, получим, что постоянные $\beta_1, \ldots, \beta_n$ удовлетворяют системе линейных однородных уравнений

$$a_{l1}\beta_1 + \ldots + (a_{ll} - \rho_k)\beta_l + \ldots + a_{ln}\beta_n = 0. \tag{51.4}$$

Так как ρ_k является корнем характеристического уравнения, то система (51.4) допускает, по крайней мере, одно решение, отличное от тривиального $\beta_1 = \ldots = \beta_n = 0$. Таким образом, каждому корню характеристического уравнения отвечает, по крайней мере, одно частное решение дифференциальных уравнений (50.1), имеющее вид (51.2). Корню ρ_k может отвечать более чем одно решение вида (51.2). Этих решений будет, очевидно, столько, сколько независимых реше-

ний имеет линейная алгебраическая система (51.4). Следовательно, этих решений будет $n-p$, если ранг определителя $D(\rho_k)$ равен p. Ранг указанного определителя может быть меньше чем $n-1$ лишь только в том случае, когда корень ρ_k является кратным. Поэтому каждому простому корню характеристического уравнения отвечает одно и только одно решение вида (51.2).

Установив это, допустим сначала, что все корни характеристического уравнения являются простыми. Тогда каждому такому корню будет отвечать одно и только одно решение вида (51.2). Рассматривая все корни характеристического уравнения, мы получим n различных частных решений уравнений (50.1). Эти решения будут, очевидно, независимыми и образуют, следовательно, фундаментальную систему.

§ 52. Аналитический вид решений в случае кратных корней характеристического уравнения.

Рассмотрим теперь случай, когда характеристическое уравнение имеет кратные корни. Допустим для определенности, что кратность корня ρ_k равна μ. Если этот корень не обращает в нуль, по крайней мере, одного из миноров $(n-1)$-го порядка характеристического определителя, т. е. если ранг этого определителя равен $n-1$, то, как мы сейчас покажем, для этого корня может быть построено μ независимых частных решений уравнений (50.1) вида

$$x_{si}(t)=e^{\alpha_k t}P_{si}(t) \qquad (s=1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ \mu). \tag{52.1}$$

Здесь P_{si} — полиномы относительно t с периодическими (периода ω) коэффициентами. При этом степени полиномов P_{s1} не превосходят $\mu-1$, и степень хотя бы одного из них равна $\mu-1$. Таким образом, можно написать:

$$P_{s1}=\frac{t^{\mu-1}}{(\mu-1)!}\varphi_{s1}(t)+\frac{t^{\mu-2}}{(\mu-2)!}\varphi_{s2}(t)+\ \ldots\ +t\varphi_{s,\,\mu-1}(t)+\varphi_{s\mu}(t),$$

где $\varphi_{sj}(t)$ — периодические функции t, причем хотя бы одна из функций φ_{s1} не равна тождественно нулю.

Что же касается полиномов $P_{s2},\ \ldots,\ P_{s\mu}$, то они могут быть получены из P_{s1} последовательным дифференцированием по t в предположении, что φ_{sj} являются постоянными. Имеем:

$$P_{s2}=\frac{t^{\mu-2}}{(\mu-2)!}\varphi_{s1}(t)+\ \ldots\ +\varphi_{s,\,\mu-1},$$

$$P_{s3}=\frac{t^{\mu-3}}{(\mu-3)!}\varphi_{s1}(t)+\ \ldots\ +\varphi_{s,\,\mu-2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$P_{s\mu}=\varphi_{s1}(t).$$

Пусть

$$P = t^m\varphi_1(t) + t^{m-1}\varphi_2(t) + \ldots + t\varphi_m(t) + \varphi_{m+1}(t)$$

— произвольный полином с периодическими коэффициентами $\varphi_i(t)$. Обозначим через $\frac{D}{Dt}$ оператор, определяемый соотношением

$$\frac{DP}{Dt} = mt^{m-1}\varphi_1(t) + (m-1)t^{m-2}\varphi_2(t) + \ldots + 2t\varphi_{m-1}(t) + \varphi_m(t).$$

Тогда решения (52.1) могут быть записаны в виде

$$x_{si}(t) = e^{\alpha_k t}\frac{D^{(i-1)}P_s}{Dt^{i-1}} \qquad (s = 1, 2, \ldots, n;\ i = 1, 2, \ldots, \mu), \quad (52.2)$$

где $P_s = P_{s1}$. Мы будем говорить, что решения (52.2) образуют одну группу и что в рассматриваемом случае кратному корню отвечает одна группа решений.

Допустим теперь, что кратный корень ρ_k обращает в нуль все миноры характеристического определителя до порядка $n-p+1$ включительно, не обращая в нуль хотя бы один из миноров $(n-p)$-го порядка, так что ранг характеристического определителя равен $n-p$. В этом случае рассматриваемому корню будет по-прежнему соответствовать μ решений, но эти решения разбиваются на p самостоятельных групп. И если мы обозначим через n_j число решений в j-й группе $(n_1 + n_2 + \ldots + n_p = \mu)$, то решения этой группы имеют вид

$$x_{si}^{(j)}(t) = e^{\alpha_k t}\frac{D^{(i-1)}P_s^{(j)}}{Dt^{i-1}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n_j;\ s = 1, 2, \ldots, n), \quad (52.3)$$

где

$$P_s^{(j)} = \frac{t^{n_j-1}}{(n_j-1)!}\varphi_{s1}^{(j)} + \frac{t^{n_j-2}}{(n_j-2)!}\varphi_{s2}^{(j)} + \ldots + \varphi_{sn_j}^{(j)}$$

и $\varphi_{si}^{(j)}$ — периодические функции t периода ω, причем хотя бы одна из функций $\varphi_{s1}^{(j)}$ не обращается тождественно в нуль.

Число p не может, очевидно, превзойти кратности μ рассматриваемого корня, но может этого предела достигать. В последнем случае каждая группа будет состоять из одного решения. Каждое такое решение будет при этом иметь вид (51.2).

Все эти утверждения можно считать доказанными при $\mu = 1$.

Поэтому, чтобы доказать их в общем случае, мы можем применить метод индукции, а именно: мы допустим, что все эти утверждения справедливы, если кратность корня равна $\mu - 1$, и покажем, что они остаются справедливыми, если эта кратность равна μ.

С этой целью заметим прежде всего, что корню ρ_k соответствует по доказанному, по крайней мере, одно решение системы (50.1)

вида

$$x_s(t) = e^{\alpha_k t}\varphi_s(t) \qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{52.4}$$

где φ_s — периодические функции. Эти функции не могут одновременно обратиться в нуль ни при каких значениях t. Действительно, если бы при каком-нибудь значении $t = T$ все функции φ_s обратились в нуль, то, принимая это значение t за начальное, мы имели бы два различных частных решения уравнений (50.1) с нулевыми начальными значениями: решение (52.4) и тривиальное решение $x_1 = \ldots = x_n = 0$, что невозможно.

Перейдем теперь в уравнениях (50.1) от переменных x_s к переменным y_s при помощи подстановки

$$x_s = \varphi_s y_1 + b_{s2}y_2 + \ldots + b_{sn}y_n, \tag{52.5}$$

где $b_{s\alpha}$ — произвольные непрерывные периодические функции t периода ω, подчиненные лишь условию, что подстановка (52.5) не является особенной, т. е. что определитель

$$\begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \ldots & \varphi_n \\ b_{12} & b_{22} & \ldots & b_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{1n} & b_{2n} & \ldots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

ни при каких значениях t не обращается в нуль. В силу того, что функции φ_s не могут обращаться в нуль одновременно, такой выбор функций $b_{s\alpha}$ может быть сделан бесчисленным множеством способов.

Преобразованная система примет вид

$$\frac{dy_s}{dt} = q_{s1}y_1 + q_{s2}y_2 + \ldots + q_{sn}y_n \qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{52.6}$$

где $q_{s\alpha}$ — периодические функции t периода ω. Так как система (50.1) допускает частное решение (52.4), то преобразованная система должна допускать частное решение

$$y_1 = e^{\alpha_k t}, \quad y_2 = \ldots = y_n = 0. \tag{52.7}$$

Подставляя это решение в (52.6), найдем, что все коэффициенты $q_{21}, q_{31}, \ldots, q_{n1}$ равны нулю, а коэффициент q_{11} равен α_k. Следовательно, система (52.6) распадается на систему

$$\frac{dy_s}{dt} = q_{s2}y_2 + q_{s3}y_3 + \ldots + q_{sn}y_n \quad (s = 2, 3, \ldots, n), \tag{52.8}$$

состоящую из $n - 1$ уравнений, и на одно уравнение

$$\frac{dy_1}{dt} = \alpha_k y_1 + q_{12}y_2 + \ldots + q_{1n}y_n. \tag{52.9}$$

Уравнения (52.8) образуют самостоятельную систему, определяющую $n-1$ функций $y_2, \ldots, y_n$. После того как эти функции будут найдены, мы сумеем найти y_1 из уравнения (52.9) при помощи простой квадратуры. В частности, если мы найдем q ($q \leqslant n-1$) линейно независимых решений $y_{2i}(t), \ldots, y_{ni}(t)$ ($i=1, 2, \ldots, q$) уравнений (52.8), то функции $y_{1i}(t), y_{2i}(t), \ldots, y_{ni}(t)$, где y_{1i} определяются формулами

$$y_{1i} = e^{\alpha_k t} \int_0^t e^{-\alpha_k t} (q_{12} y_{2i} + \ldots + q_{1n} y_{ni})\, dt, \tag{52.10}$$

определяют q независимых решений полной системы (52.8) и (52.9). Присоединяя к ним уже известное решение (52.7), мы получим $q+1$ решений этой системы, которые будут, очевидно, также независимыми.

Составим характеристическое уравнение полной системы (52.8) и (52.9). Рассмотрим с этой целью фундаментальную систему решений $y_{2i}(t), y_{3i}(t), \ldots, y_{ni}(t)$ ($i=1, 2, \ldots, n-1$) уравнений (52.8), определяемую начальными условиями

$$y_{si}(0) = \begin{cases} 1 & (s = i+1), \\ 0 & (s \neq i+1). \end{cases}$$

Тогда система функций $y_{1i}(t), y_{2i}(t), \ldots, y_{ni}(t)$, где $y_{1i}(t)$ определяются формулами (52.10), вместе с решением (52.7) образуют фундаментальную систему решений системы (52.8) и (52.9) как раз того вида, который фигурирует в форме (50.7) характеристического уравнения. Поэтому характеристическое уравнение системы (52.8) и (52.9) может быть представлено в виде

$$D(\rho) = \begin{vmatrix} \rho_k - \rho & 0 & \ldots & 0 \\ y_{11}(\omega) & y_{21}(\omega) - \rho & \ldots & y_{n1}(\omega) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{1,\,n-1}(\omega) & y_{2,\,n-1}(\omega) & \ldots & y_{n,\,n-1}(\omega) - \rho \end{vmatrix} =$$

$$= (\rho_k - \rho)\, D'(\rho) = 0, \tag{52.11}$$

где $D'(\rho)$ — характеристический определитель системы (52.8).

Как было показано в § 50, характеристическое уравнение остается инвариантным при линейном преобразовании переменных. Поэтому уравнение (52.11) совпадает с характеристическим уравнением исходной системы (50.1). Что же касается последнего, то для него ρ_k является корнем μ-й кратности. Следовательно, из (52.11) вытекает, что ρ_k является корнем $(\mu-1)$-й кратности характеристического уравнения системы (52.8).

Но тогда, по предположению, этому корню отвечает $\mu-1$ частных решений уравнений (52.8), распадающихся на группы вышеуказанного типа. Допустим для определенности, что имеются две такого

рода группы. Все наши рассуждения останутся, однако, справедливыми при любом числе групп. Пусть первая группа состоит из l решений

$$y_{s\alpha} = e^{\alpha_k t} \frac{D^{(\alpha-1)}}{Dt^{\alpha-1}} \left(\frac{t^{l-1}}{(l-1)!} u_{s1} + \ldots + t u_{s,\, l-1} + u_{sl} \right)$$
$$(s = 2, \ldots, n;\ \alpha = 1, 2, \ldots, l), \tag{52.12}$$

а вторая группа из m решений

$$y^*_{s\beta} = e^{\alpha_k t} \frac{D^{(\beta-1)}}{Dt^{\beta-1}} \left(\frac{t^{m-1}}{(m-1)!} v_{s1} + \ldots + t v_{s,\, m-1} + v_{sm} \right) \tag{52.13}$$
$$(s = 2, \ldots, n;\ \beta = 1, 2, \ldots, m).$$

Здесь u_{sj}, v_{sj} — периодические функции t и $l + m = \mu - 1$. Как было указано выше, функции (52.12) и (52.13) вместе с функциями

$$\left.\begin{aligned} y_{1\alpha} &= e^{\alpha_k t} \int_0^t e^{-\alpha_k t} (q_{12} y_{2\alpha} + \ldots + q_{1n} y_{n\alpha})\, dt, \\ y^*_{1\beta} &= e^{\alpha_k t} \int_0^t e^{-\alpha_k t} (q_{12} y^*_{2\beta} + \ldots + q_{2n} y^*_{n\beta})\, dt \\ &(\alpha = 1, 2, \ldots, l;\ \beta = 1, 2, \ldots, m) \end{aligned}\right\} \tag{52.14}$$

образуют систему $\mu - 1$ независимых решений уравнений (52.8) и (52.9).

На основании (52.12) и (52.13) подинтегральные выражения в функциях (52.14) не содержат показательных функций, и мы можем написать:

$$\left.\begin{aligned} y_{1\alpha} &= e^{\alpha_k t} \int_0^t \frac{D^{(\alpha-1)}}{Dt^{\alpha-1}} \left(\frac{t^{l-1}}{(l-1)!} u_1 + \ldots + t u_{l-1} + u_l \right) dt, \\ y^*_{1\beta} &= e^{\alpha_k t} \int_0^t \frac{D^{(\beta-1)}}{Dt^{\beta-1}} \left(\frac{t^{m-1}}{(m-1)!} v_1 + \ldots + t v_{m-1} + v_m \right) dt \\ &(\alpha = 1, 2, \ldots, l;\ \beta = 1, 2, \ldots, m), \end{aligned}\right\} \tag{52.15}$$

где u_j, v_j — периодические функции периода ω.

Пусть $\varphi(t)$ — произвольная непрерывная периодическая функция с периодом ω. Как мы уже знаем, справедливо соотношение

$$\int_0^t \varphi(t)\, dt = gt + \psi(t),$$

где $\psi(t)$ — некоторая периодическая функция, а g есть постоянная, определяемая соотношением

$$g=\frac{1}{\omega}\int_0^{\omega}\varphi(t)\,dt \tag{52.16}$$

и представляющая собой среднее значение функции φ за период.

Интегрируя по частям, легко находим:

$$\int_0^t \frac{t^p}{p!}\varphi(t)\,dt=\frac{gt^{p+1}}{(p+1)!}+\frac{t^p}{p!}\psi(t)-\int_0^t\frac{t^{p-1}}{(p-1)!}\psi(t)\,dt,$$

откуда вытекает, что если $P(t)$ — полином p-й степени с периодическими коэффициентами

$$P(t)=\frac{t^p}{p!}\varphi(t)+\frac{t^{p-1}}{(p-1)!}\varphi_2(t)+\ldots+\varphi_p(t),$$

то квадратура от него будет полиномом $(p+1)$-й степени вида

$$Q(t)=\int_0^t P(t)\,dt=\frac{gt^{p+1}}{(p+1)!}+\frac{t^p}{p!}\psi_2+\ldots+\psi_{p+1}, \tag{52.17}$$

где $\psi_2, \ldots, \psi_{p+1}$ — некоторые периодические функции, а g — постоянная, определяемая формулой (52.16), т. е. среднее значение коэффициента при старшей степени полинома $P(t)$.

Докажем, что имеет место тождество

$$\frac{D^s}{Dt^s}\int_0^t P(t)\,dt-\int_0^t\frac{D^sP}{Dt^s}\,dt=A, \tag{52.18}$$

где A — некоторая постоянная. В самом деле, дифференцируя левую часть (52.18) по времени и принимая во внимание, что операторы $\frac{d}{dt}$ и $\frac{D^s}{Dt^s}$, очевидно, переместимы, будем иметь:

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{D^s}{Dt^s}\int_0^t P(t)\,dt-\int_0^t\frac{D^sP}{Dt^s}\,dt\right\}=\frac{D^s}{Dt^s}\left\{\frac{d}{dt}\int_0^t P(t)\,dt\right\}-\frac{D^sP}{Dt^s}\equiv 0,$$

откуда и вытекает справедливость (52.18).

Принимая во внимание (52.17) и (52.18), находим, что выражения (52.15) могут быть представлены в виде

$$y_{1\alpha}=e^{\alpha_k t}\frac{D^{(\alpha-1)}}{Dt^{\alpha-1}}\left(G\frac{t^l}{l!}+\overline{U}(t)\right)+Ae^{\alpha_k t},$$

$$y^*_{1\beta}=e^{\alpha_k t}\frac{D^{(\beta-1)}}{Dt^{\beta-1}}\left(G^*\frac{t^m}{m!}+\overline{U}^*(t)\right)+A^*e^{\alpha_k t}$$

$$(\alpha=1,\ 2,\ \ldots,\ l;\quad \beta=1,\ 2,\ \ldots,\ m),$$

где A, A^* — постоянные, G и G^* — также постоянные, определяемые формулами

$$G = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega u_1(t)\,dt,$$

$$G^* = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega v_1(t)\,dt,$$

а $\bar{U}$ и $\bar{U}^*$ суть полиномы с периодическими коэффициентами, причем степень первого не превосходит $l-1$, а степень второго не превосходит $m-1$. Но так как

$$A = \frac{D^{(\alpha-1)}}{Dt^{\alpha-1}}\left(A\,\frac{t^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}\right), \quad A^* = \frac{D^{(\beta-1)}}{Dt^{\beta-1}}\left(A^*\,\frac{t^{\beta-1}}{(\beta-1)!}\right),$$

то мы можем написать:

$$\left.\begin{aligned} y_{1\alpha} &= e^{\alpha_k t}\frac{D^{(\alpha-1)}}{Dt^{\alpha-1}}\left(G\,\frac{t^l}{l!} + U(t)\right), \\ y^*_{1\beta} &= e^{\alpha_k t}\frac{D^{(\beta-1)}}{Dt^{\beta-1}}\left(G^*\,\frac{t^m}{m!} + U^*(t)\right) \\ &(\alpha = 1,\ 2,\ \ldots,\ l;\ \beta = 1,\ 2,\ \ldots,\ m), \end{aligned}\right\} \tag{52.19}$$

где U и U^* — также полиномы с периодическими коэффициентами, степени которых не превосходят, соответственно, $l-1$ и $m-1$.

Подставляя (52.12), (52.13) и (52.19) в (52.5), мы получим для системы (50.1) l решений вида

$$x_{s\alpha} = e^{\alpha_k t}\frac{D^{(\alpha-1)}}{Dt^{\alpha-1}}\left(G\varphi_s\,\frac{t^l}{l!} + X_s(t)\right) \quad (\alpha = 1,\ 2,\ \ldots,\ l) \tag{52.20}$$

и m решений вида

$$x^*_{s\beta} = e^{\alpha_k t}\frac{D^{(\beta-1)}}{Dt^{\beta-1}}\left(G^*\varphi_s\,\frac{t^m}{m!} + X^*_s(t)\right) \quad (\beta = 1,\ 2,\ \ldots,\ m), \tag{52.21}$$

где $X_s(t)$ и $X^*_s(t)$ — некоторые полиномы с периодическими коэффициентами, степени которых не превосходят, соответственно, $l-1$ и $m-1$. Вместе с решением (52.4) мы получаем, таким образом, для рассматриваемого корня $l+m+1=\mu$ независимых решений системы (50.1).

Допустим сначала, что обе величины G и G^* отличны от нуля. Допустим также для определенности, что $l \geqslant m$. Тогда, если мы к решениям (52.20) присоединим решение (52.4), умножив его предварительно на G, то получим $l+1$ решений, составляющих группу.

Действительно, очевидно, имеем:

$$Ge^{\alpha_k t}\varphi_s(t) = e^{\alpha_k t}\frac{D^{(l)}}{Dt^l}\left(C\varphi_s\frac{t^l}{l!} + X_s(t)\right),$$

а следовательно, решение (52.4), умноженное на G, принадлежит группе (52.20) и соответствует $\alpha = l+1$. Что же касается решений (52.21), то, комбинируя их с m последними решениями (52.20), мы получим m новых решений:

$$\bar{x}_{s\beta} = Gx_{s,\,l-m+\beta} - Gx^*_{s\beta} = e^{\alpha_k t}\frac{D^{(\beta-1)}}{Dt^{\beta-1}}\left(G^*\frac{D^{(l-m)}}{Dt^{l-m}}X_s - GX^*_s\right)$$

$$(\beta = 1,\ 2,\ \ldots,\ m),$$

также образующих группу. В самом деле, степень хотя бы одного из полиномов, заключенных в скобках, в выражении для $\bar{x}_{s\beta}$ равна $m-1$, ибо, если бы все указанные полиномы имели меньшие степени, то во всяком случае имели бы место тождества

$$\bar{x}_{sm} = G^*x_{sl} - Gx^*_{sm} \equiv 0 \qquad (s = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

и, следовательно, не все решения (52.20) и (52.21) были бы независимыми, что противоречит условию.

Таким образом, в рассматриваемом случае наше утверждение о виде решений, отвечающих кратному корню характеристического уравнения, справедливо.

Допустим теперь, что $G = 0$, но G^* отлично от нуля. В этом случае степень хотя бы одного из полиномов $X_s(t)$ равна $l-1$, так как в противном случае все функции x_{sl} равнялись бы нулю и, следовательно, в (52.20) содержалось бы меньше чем l решений. Поэтому уравнения (52.20) образуют группу нужного нам вида. Присоединяя решение (52.4), умноженное предварительно на G^*, к решениям (52.21), мы получим еще одну группу. Следовательно, так же как и в предыдущем случае, мы будем иметь μ решений, разбивающихся на две группы. Если, наконец, G^* также равно нулю, то решения (52.21) также образуют группу, и решение (52.4) следует рассматривать как отдельную третью группу, состоящую из одного решения.

Таким образом, во всех случаях наши утверждения об аналитическом виде решений системы (50.1) можно считать доказанными.

Нам остается еще только показать, что число групп решений, отвечающих кратному корню, в точности равно p, где $n-p$ — ранг характеристического определителя для рассматриваемого корня. Это утверждение легко доказать следующим образом.

Число групп решений, отвечающих рассматриваемому кратному корню, равно, очевидно, числу независимых решений вида (52.4) (так как в каждой группе имеется по одному такому решению),

которыми этот корень обладает, а это число, как мы видели в предыдущем параграфе, равно числу независимых решений однородной системы линейных алгебраических уравнений (51.4), т. е. $n-p$.

Таким образом, все наши утверждения полностью доказаны.

§ 53. Обратное предложение.

Справедливо также обратное предложение. Если для системы (50.1) удалось найти μ частных решений, разбивающихся на p групп вида (52.3), то величина ρ_k является корнем характеристического уравнения, кратность которого не менее μ, причем этот корень обращает в нуль все миноры характеристического определителя до порядка, по крайней мере, $n-p+1$.

Допустим для определенности, что имеются две такого рода группы, состоящие, соответственно, из l и m решений. Все наши рассуждения останутся, однако, справедливыми при любом числе групп. Пусть эти решения будут

$$\left.\begin{aligned} x_{s\alpha}^{(1)} &= e^{\alpha_k t}\frac{D^{(\alpha-1)}P_s^{(1)}}{Dt^{\alpha-1}} \qquad (\alpha=1,\ 2,\ \ldots,\ l),\\ x_{s\beta}^{(2)} &= e^{\alpha_k t}\frac{D^{(\alpha-1)}P_s^{(2)}}{Dt^{\alpha-1}} \qquad (\beta=1,\ 2,\ \ldots,\ m),\end{aligned}\right\} \tag{53.1}$$

где

$$P_s^{(1)} = \frac{t^{l-1}}{(l-1)!}\varphi_{1s}(t)+\frac{t^{l-2}}{(l-2)!}\varphi_{2s}(t)+\ldots+\varphi_{ls}(t),$$

$$P_s^{(2)} = \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}\psi_{1s}(t)+\frac{t^{m-2}}{(m-2)!}\psi_{2s}(t)+\ldots+\psi_{ms}(t)$$

и $\varphi_{1s}, \ldots, \varphi_{ls}, \psi_{1s}, \ldots, \psi_{ms}$ — периодические функции периода ω. Нам нужно показать, что величина ρ_k является корнем характеристического уравнения, кратность которого не менее $l+m$, и что этот корень обращает в нуль, по крайней мере, все миноры $(n-1)$-го порядка характеристического уравнения.

С этой целью возьмем для составления характеристического уравнения такую фундаментальную систему решений $x_{sj}(t)$ уравнений (50.1), которая содержит все решения (53.1). Мы предположим при этом, что решения (53.1) являются первыми $l+m$ решениями рассматриваемой фундаментальной системы и примем следующий порядок нумерации:

$$x_{s1}=x_{sl}^{(1)},\quad x_{s2}=x_{s,\,l-1}^{(1)},\quad \ldots,\quad x_{sl}=x_{s1}^{(1)},$$

$$x_{s,\,l+1}=x_{sm}^{(2)},\quad x_{s,\,l+2}=x_{s,\,m-1}^{(2)},\quad \ldots,\quad x_{s,\,l+m}=x_{s1}^{(2)}.$$

Тогда, принимая во внимание, что для всякого полинома

$$P(t)=\frac{t^q}{q!}f_1(t)+\frac{t^{q-1}}{(q-1)!}f_2(t)+\ldots+f_{q+1}(t)$$

с периодическими периода ω коэффициентами f_l справедливо очевидное соотношение

$$P(t+\omega)=\frac{(t+\omega)^q}{q!}f_1(t)+\ldots+f_{q+1}(t)=$$
$$=P(t)+\omega\frac{DP}{Dt}+\frac{\omega^2}{2!}\frac{D^2P}{Dt^2}+\ldots+\frac{\omega^q}{q!}\frac{D^qP}{Dt^q},$$

а также, что на основании (51.1)

$$e^{\alpha_k(t+\omega)}=e^{\omega\alpha_k}e^{\alpha_k t}=\rho_k e^{\alpha_k t},$$

легко находим:

$$\begin{aligned}
&x_{s1}(t+\omega)=\rho_k x_{s1}(t),\\
&x_{s2}(t+\omega)=\rho_k\omega x_{s1}(t)+\rho_k x_{s2}(t),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&x_{sl}(t+\omega)=\rho_k\frac{\omega^{l-1}}{(l-1)!}x_{s1}(t)+\rho_k\frac{\omega^{l-2}}{(l-2)!}x_{s2}(t)+\ldots+\rho_k x_{sl}(t),\\
&x_{s,\,l+1}(t+\omega)=\rho_k x_{s,\,l+1}(t),\\
&x_{s,\,l+2}(t+\omega)=\rho_k\omega x_{s,\,l+1}(t)+\rho_k x_{s,\,l+2}(t),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&x_{s,\,l+m}(t+\omega)=\rho_k\frac{\omega^{m-1}}{(m-1)!}x_{s,\,l+1}(t)+\\
&\qquad+\rho_k\frac{\omega^{m-2}}{(m-2)!}x_{s,\,l+2}(t)+\ldots+\rho_k x_{s,\,l+m}(t).
\end{aligned}$$

Сравнивая с (50.2), получим:

$$\left.\begin{aligned}
&a_{11}=\rho_k,\quad a_{21}=a_{31}=\ldots=a_{n1}=0,\\
&a_{12}=\rho_k\omega,\quad a_{22}=\rho_k,\quad a_{32}=\ldots=a_{n2}=0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&a_{1l}=\rho_k\frac{\omega^{l-1}}{(l-1)!},\quad a_{2l}=\rho_k\frac{\omega^{l-2}}{(l-2)!},\quad\ldots,\quad a_{ll}=\rho_k,\\
&a_{l+1,\,l}=\ldots=a_{nl}=0,\\
&a_{1,\,l+1}=\ldots=a_{l,\,l+1}=0,\quad a_{l+1,\,l+1}=\rho_k,\\
&a_{l+2,\,l+1}=\ldots=a_{n,\,l+1}=0,\\
&a_{1,\,l+2}=\ldots=a_{l,\,l+2}=0,\quad a_{l+1,\,l+2}=\rho_k\omega,\\
&a_{l+2,\,l+2}=\rho_k,\quad a_{l+3,\,l+2}=a_{n,\,l+2}=0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&a_{l+1,\,l+m}=\rho\frac{\omega^{m-1}}{(m-1)!},\\
&a_{l+2,\,l+m}=\rho_k\frac{\omega^{m-2}}{(m-2)!},\quad\ldots,\quad a_{l+m,\,l+m}=\rho_k,\\
&a_{s,\,l+m}=0\quad(s=1,\,2,\,\ldots,\,l,\;\;l+m+1,\,\ldots,\,n).
\end{aligned}\right\}\qquad(53.2)$$

Следовательно, характеристическое уравнение (50.3) имеет вид

$$D(\rho)=\begin{vmatrix} \rho_k-\rho & 0 & \dots & 0 \\ \rho_k\omega & \rho_k-\rho & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_k\frac{\omega^{l-1}}{(l-1)!} & \rho_k\frac{\omega^{l-2}}{(l-2)!} & \dots & \rho_k-\rho \end{vmatrix}\times$$

$$\times\begin{vmatrix} \rho_k-\rho & 0 & \dots & 0 \\ \rho_k\omega & \rho_k-\rho & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_k\frac{\omega^{m-1}}{(m-1)!} & \rho_k\frac{\omega^{m-2}}{(m-2)!} & \dots & \rho_k-\rho \end{vmatrix}\times$$

$$\times\begin{vmatrix} a_{l+m+1,\,l+m+1}-\rho & \dots & a_{l+m+1,\,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n,\,l+m+1} & \dots & a_{nn}-\rho \end{vmatrix}=$$

$$=(\rho_k-\rho)^l(\rho_k-\rho)^m\begin{vmatrix} a_{l+m+1,\,l+m+1}-\rho & \dots & a_{l+m+1,\,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n,\,l+m+1} & \dots & a_{nn}-\rho \end{vmatrix}=0.$$

Отсюда непосредственно вытекает, что величина ρ_k является корнем характеристического уравнения с кратностью, не меньшей $l+m$. Кроме того, как это видно из (53.2), все элементы 1-й и $(l+1)$-й колонок характеристического уравнения обращаются в нуль при $\rho=\rho_k$. Следовательно, корень ρ_k обращает в нуль, по крайней мере, все миноры $(n-1)$-го порядка характеристического уравнения.

Таким образом, предложение полностью доказано.

§ 54. Теорема Ляпунова о приводимости линейных уравнений с периодическими коэффициентами.

А. М. Ляпунов показал, что всякую систему линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами можно преобразовать при помощи линейной подстановки с периодическими коэффициентами в систему уравнений с постоянными коэффициентами.

Для выполнения этого преобразования рассмотрим систему линейных уравнений

$$\frac{dy_s}{dt}+p_{1s}y_1+p_{2s}y_2+\dots+p_{ns}y_n=0 \quad (s=1,\ 2,\ \dots,\ n), \qquad (54.1)$$

сопряженную с системой (50.1). Если $y_s(t)$ — какое-нибудь решение системы (54.1), то линейная форма

$$y_1(t)\,x_1 + y_2(t)\,x_2 + \ldots + y_n(t)\,x_n \tag{54.2}$$

переменных x_s определяет, как известно, первый интеграл уравнений (50.1). Подставляя в эту форму вместо $y_s(t)$ какие-нибудь n независимых частных решений уравнений (54.1), мы получим n независимых первых интегралов системы (50.1).

Пусть $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m$ — корни характеристического уравнения системы (54.1)[1]) и $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ — соответствующие характеристические показатели. При этом каждый кратный корень мы выписываем столько раз, сколько групп решений ему соответствует. Таким образом, среди чисел ρ_j могут быть и равные, но каждому из них соответствует только одна группа решений.

Обозначим через n_p число решений в группе, отвечающей корню ρ_p. При этом, очевидно,

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_m = n.$$

Тогда, как было показано в § 52, система (54.1) имеет n независимых решений следующего вида:

$$\left.\begin{aligned}
&y_{s1}^{(p)} = e^{\alpha_p t}\,\varphi_{s1}^{(p)}(t),\\
&y_{s2}^{(p)} = e^{\alpha_p t}\left(t\varphi_{s1}^{(p)}(t) + \varphi_{s2}^{(p)}(t)\right),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&y_{sn_p}^{(p)} = e^{\alpha_p t}\left(\frac{t^{n_p-1}}{(n_p-1)!}\,\varphi_{s1}^{(p)}(t) + \ldots + t\varphi_{s,\,n_p-1}^{(p)} + \varphi_{s,\,n_p}^{(p)}(t)\right)\\
&\qquad (s = 1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ p = 1,\ 2,\ \ldots,\ m),
\end{aligned}\right\} \tag{54.3}$$

где $\varphi_{sj}^{(p)}(t)$ — периодические функции t периода ω. Мы придерживаемся при этом следующей системы обозначения решений: верхний индекс в $y_{sj}^{(p)}$ обозначает номер группы (номер корня), к которой принадлежит решение, а второй нижний индекс — номер решения в группе. Положим

$$y_j^{(p)} = \varphi_{1j}^{(p)}x_1 + \varphi_{2j}^{(p)}x_2 + \ldots + \varphi_{nj}^{(p)}x_n$$

$$(p = 1,\ 2,\ \ldots,\ m;\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n_p). \tag{54.4}$$

---

[1]) Обращаем внимание читателя, что в отличие от предыдущих параграфов через ρ_j обозначены корни характеристического уравнения системы (54.1), а не системы (50.1).

Тогда, подставляя решения (54.3) в (54.2), мы получим следующие n первых интегралов уравнений (50.1):

$$\left.\begin{aligned} e^{\alpha_p t}\, y_1^{(p)} &= \text{const.}, \\ e^{\alpha_p t}\left(t y_1^{(p)} + y_2^{(p)}\right) &= \text{const.}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ e^{\alpha_p t}\left(\frac{t^{n_p-1}}{(n_p-1)!}\, y_1^{(p)} + \frac{t^{n_p-2}}{(n_p-2)!}\, y_2^{(p)} + \ldots + y_{n_p}^{(p)}\right) &= \text{const.} \\ (p = 1,\ 2,\ \ldots,\ m). \end{aligned}\right\} \tag{54.5}$$

Соотношения (54.4) определяют линейную подстановку с периодическими коэффициентами, которая ни при каких значениях t не является особенной. В самом деле, определитель, составленный из n^2 функций (54.3), отличен от нуля, так как эти функции образуют фундаментальную систему решений линейных уравнений. Но этот определитель, как легко видеть, отличается никогда не обращающимся в нуль множителем

$$e^{(n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 + \ldots + n_p\alpha_p)\,t}$$

от определителя подстановки (54.4), и следовательно, подстановка (54.4) не является особенной ни при каких значениях t.

Установив это, преобразуем систему (50.1) при помощи подстановки (54.4). Учтем, что выражения (54.5) являются первыми интегралами системы (50.1). Дифференцируя эти интегралы по t и приравнивая производные нулю, легко получим следующие дифференциальные уравнения:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1^{(p)}}{dt} &= -\alpha_p y_1^{(p)}, \\ \frac{dy_2^{(p)}}{dt} &= -\alpha_p y_2^{(p)} - y_1^{(p)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{dy_{n_p}^{(p)}}{dt} &= -\alpha_p y_{n_p}^{(p)} - y_{n_p-1}^{(p)} \\ (p = 1,\ 2,\ \ldots,\ m). \end{aligned}\right\} \tag{54.6}$$

Это и будут преобразованные уравнения, обладающие постоянными коэффициентами. Таким образом, при помощи неособенной линейной подстановки с периодическими коэффициентами (54.4) система уравнений (50.1) преобразована в систему уравнений с постоянными коэффициентами.

Полученная система (54.6) будет иметь комплексные коэффициенты, так как величины α_p будут, вообще говоря, комплексными.

Поэтому, если мы желаем иметь дело только с вещественными уравнениями, то необходимы будут дальнейшие преобразования. Покажем, как это сделать.

Величина α_p будет комплексной либо тогда, когда соответствующий корень ρ_p характеристического уравнения является комплексным, либо когда этот корень является вещественным, но отрицательным.

Рассмотрим сначала первый случай. Допустим, что корень ρ_i является комплексным. Так как коэффициенты уравнений (50.1) вещественны, то все комплексные корни характеристического уравнения и все комплексные решения системы (54.1) распадаются на пары сопряженных. Пусть ρ_l комплексно сопряжен с ρ_i. Тогда решения системы (54.1), отвечающие корню ρ_l, т. е. функции $y_{sj}^{(l)}$, будут комплексно сопряженными с решениями $y_{sj}^{(i)}$ и, следовательно, $n_l = n_i$ и переменные $y_j^{(l)}$ будут комплексно сопряжены с переменными $y_j^{(i)}$. Пусть

$$\alpha_i = \lambda_i + \sqrt{-1}\,\mu_i, \qquad \alpha_l = \lambda_i - \sqrt{-1}\,\mu_i,$$
$$y_j^{(i)} = u_j^{(i)} + \sqrt{-1}\,v_j^{(i)}, \quad y_j^{(l)} = u_j^{(i)} - \sqrt{-1}\,v_j^{(i)}$$
$$(j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

и примем $u_j^{(i)}$ и $v_j^{(i)}$ в качестве новых переменных вместо $y_j^{(i)}$ и $y_j^{(l)}$. Тогда, выделяя в i-й и l-й группах уравнений (54.6) вещественные и мнимые части, мы получим вместо двух указанных групп, состоящих из $n_i = n_l$ уравнений каждая и обладающих комплексными коэффициентами, одну группу, состоящую из $2n_i$ уравнений с вещественными коэффициентами следующего вида:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{du_1^{(i)}}{dt} = \lambda_i u_1^{(i)} - \mu_i v_1^{(i)}, \qquad \frac{dv_1^{(i)}}{dt} = \lambda_i v_1^{(i)} + \mu_i u_1^{(i)},\\
&\frac{du_j^{(i)}}{dt} = \lambda_i u_j^{(i)} - \mu_i v_j^{(i)} - u_{j-1}^{(i)},\\
&\frac{dv_j^{(i)}}{dt} = \lambda_i v_j^{(i)} + \mu_i v_j^{(i)} - v_{j-1}^{(i)}\\
&\qquad\qquad (j = 2,\ \ldots,\ n_i).
\end{aligned}\right\} \tag{54.7}$$

Допустим теперь, что ρ_i является отрицательным вещественным числом. В этом случае, взяв арифметическое значение логарифма, мы можем писать:

$$\alpha_i = \frac{1}{\omega}\ln(-\rho_i) + \frac{(2q+1)\pi\sqrt{-1}}{\omega} = \lambda_i + \frac{(2q+1)\pi\sqrt{-1}}{\omega},$$

где q — целое число и величина λ_i вещественна. Решения (54.3), отвечающие корню ρ_i, будут получаться комплексными. Но так как коэффициенты уравнений (54.1) вещественны, то вещественные части этих решений будут также являться решениями. Следовательно,

корню ρ_i отвечают решения

$$y_{s1}^{(i)} = e^{\lambda_i t}\,\psi_{s1}^{(i)}(t),$$

$$y_{s2}^{(i)} = e^{\lambda_i t}\left(t\psi_{s1}^{(i)}(t) + \psi_{s2}^{(i)}(t)\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_{sn_i}^{(i)} = e^{\lambda_i t}\left\{\frac{t^{n_i-1}}{(n_i-1)!}\,\psi_{s1}^{(i)}(t) + \ldots + t\psi_{s,\,n_i-1}^{(i)}(t) + \psi_{sn_i}^{(i)}(t)\right\},$$

где

$$\psi_{sj}^{(i)} = \operatorname{Re}\left\{\left(\cos\frac{(2q+1)\pi t}{\omega} + \sqrt{-1}\sin\frac{(2q+1)\pi t}{\omega}\right)\varphi_{sj}^{(i)}\right\}, \quad (54.8)$$

и мы получаем для этого корня дифференциальные уравнения с вещественными коэффициентами:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dz_1^{(i)}}{dt} &= \lambda_i z_1^{(i)}, \\ \frac{dz_j^{(i)}}{dt} &= \lambda_i z_j^{(i)} - z_{j-1}^{(i)} \\ &(j = 2, \ldots, n_i). \end{aligned}\right\} \quad (54.9)$$

Здесь переменные $z_j^{(i)}$ отличаются от переменных $y_j^{(i)}$, определяемых формулами (54.4), только тем, что функции $\varphi_{sj}^{(i)}$ заменены функциями $\psi_{sj}^{(i)}$.

Таким образом, можно считать доказанным, что систему уравнений (50.1) при помощи вещественной неособенной линейной подстановки можно привести к системе уравнений с постоянными коэффициентами. При этом, если характеристическое уравнение системы (54.1) не имеет вещественных отрицательных корней, то коэффициенты подстановки будут периодическими функциями периода ω. Если же указанное характеристическое уравнение имеет вещественные отрицательные корни, то коэффициенты подстановки будут также периодическими функциями, но период этих функций будет, вообще, равен 2ω. Это непосредственно вытекает из того обстоятельства, что период функции (54.8) будет, вообще говоря, 2ω, так как этим периодом обладает множитель

$$\left(\cos(2q+1)\frac{\pi t}{\omega} + \sqrt{-1}\sin(2q+1)\frac{\pi t}{\omega}\right).$$

Пусть предложена система линейных уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = q_{s1}x_1 + \ldots + q_{sn}x_n \quad (s = 1, 2, \ldots, n), \quad (54.10)$$

где q_{sj} — какие-нибудь непрерывные ограниченные функции t при всех $t \geqslant t_0$. Допустим, что эта система может быть преобразована

в систему линейных уравнений с постоянными коэффициентами при помощи линейного преобразования

$$y_s = f_{s1}x_1 + \ldots + f_{sn}x_n,$$

обладающего тем свойством, что его коэффициенты f_{sj}, так же как и коэффициенты обратного преобразования, являются непрерывными и ограниченными функциями t при всех $t \geqslant t_0$. В этом случае систему (54.10) А. М. Ляпунов предложил называть *приводимой*. Таким образом, любая линейная система уравнений с непрерывными периодическими коэффициентами является приводимой[1]).

§ 55. Определяющее уравнение приведенной системы. Теорема Ляпунова о корнях характеристических уравнений сопряженных систем.

Рассмотрим какую-нибудь систему линейных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\frac{dy_s}{dt} = a_{s1}y_1 + \ldots + a_{sn}y_n \quad (s = 1, 2, \ldots, n). \tag{55.1}$$

Составим ее характеристическое уравнение:

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{55.2}$$

Но система уравнений (55.1) может быть рассматриваема как частный случай системы уравнений с периодическими коэффициентами произвольного периода ω, и, следовательно, для нее может быть построено характеристическое уравнение в смысле § 50. Это уравнение будет отличаться от уравнения (55.2). Поэтому во избежание путаницы мы будем в дальнейшем, где эта путаница возможна, называть уравнение (55.2) *определяющим* уравнением.

В предыдущем параграфе мы показали, что систему уравнений с периодическими коэффициентами (50.1) можно неособенной линейной подстановкой с периодическими коэффициентами преобразовать в систему уравнений с постоянными коэффициентами (54.6). Так как при таком преобразовании корни характеристического уравнения не изменяются, то корни характеристического уравнения системы (50.1) совпадают с корнями *характеристического* уравнения системы (54.6). Найдем корни этого последнего уравнения.

---

[1]) Подробное исследование приводимых систем содержится в работе: Еругин Н. П., Приводимые системы. Труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова, т. XIII, 1946.

С этой целью заметим, что уравнения (54.6) допускают, очевидно, фундаментальную систему решений, распадающихся на m групп, таких, что первое решение в какой-нибудь p-й группе имеет вид

$$
\begin{gathered}
z_{11}^{(p)} = e^{-\alpha_p t}, \\
z_{21}^{(p)} = -te^{-\alpha_p t}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
z_{n_p 1}^{(p)} = \frac{(-t)^{n_p-1}}{(n_p-1)!} e^{-\alpha_p t}, \\
z_{11}^{(k)} = z_{21}^{(k)} = \ldots = z_{n_k 1}^{(k)} = 0 \\
(k = 1, 2, \ldots, p-1, p+1, \ldots, m),
\end{gathered}
$$

а остальные решения этой группы могут быть получены из первого последовательным применением оператора $\frac{D}{Dt}$ к коэффициентам при $e^{-\alpha_p t}$. Так, например, второе решение указанной группы имеет вид

$$
\begin{gathered}
z_{12}^{(p)} = 0, \\
z_{22}^{(p)} = -e^{\alpha_p t}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
z_{n_p 2}^{(p)} = \frac{(-t)^{n_p-2}}{(n_p-2)!} e^{-\alpha_p t}, \\
z_{12}^{(k)} = z_{22}^{(k)} = \ldots = z_{n_k 2}^{(k)} = 0 \\
(k = 1, 2, \ldots, p-1, p+1, \ldots, m).
\end{gathered}
$$

Всего решений в p-й группе будет n_p. Таким образом, для каждой величины $-\alpha_p$ получается группа с n_p решениями. При этом среди величин $-\alpha_1, \ldots, -\alpha_m$ могут быть и одинаковые, так как по условию каждая из величин α_p выписывается столько раз, сколько групп решений соответствует корню ρ_k характеристического уравнения системы (54.1).

Полученные решения системы (54.6) будут как раз такими, какие фигурируют в предложении, установленном в § 53. Поэтому на основании этого предложения мы можем утверждать, что величины $-\alpha_p$ являются характеристическими показателями и, следовательно, величины $\frac{1}{\rho_k}$ — корнями характеристического уравнения системы (54.6) и эквивалентной ей системы (50.1). Кроме того, из предложения § 53 вытекает также, что корень $\frac{1}{\rho_k}$ характеристического уравнения системы (50.1) имеет такую же кратность, как и корень ρ_k характеристического уравнения системы (54.1), и что этим корням в обеих системах отвечает одинаковое число групп с одинаковым числом

решений в каждой группе. Мы приходим, таким образом, к следующей теореме, установленной А. М. Ляпуновым.

Теорема. *Если ρ_k — корень характеристического уравнения системы линейных уравнений с периодическими коэффициентами, то величина $\frac{1}{\rho_k}$ будет корнем характеристического уравнения сопряженной системы. При этом кратности обоих корней, числа групп решений, им соответствующие, и числа решений в соответствующих группах одинаковы.*

Рассмотрим теперь *определяющее* уравнение системы (54.6). Оно, очевидно, имеет вид

$$D(\lambda)=\begin{vmatrix} M_1 & & & \\ & M_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & M_m \end{vmatrix}=0,$$

где

$$M_p=\underbrace{\begin{vmatrix} -\alpha_p-\lambda & 0 & \ldots 0 & 0 \\ -1 & -\alpha_p-\lambda & \ldots 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots -1 & -\alpha_p-\lambda \end{vmatrix}}_{n_p}.$$

Отсюда непосредственно убеждаемся в справедливости следующей теоремы.

Теорема. *При преобразовании системы линейных уравнений с периодическими коэффициентами в систему уравнений с постоянными коэффициентами корни определяющего уравнения преобразованной системы являются характеристическими показателями исходной системы.*

§ 56. Критерии устойчивости.

Переходим теперь к вопросу об устойчивости решений линейных уравнений с периодическими коэффициентами. Из общего вида этих решений, установленного в § 52, вытекает сразу, что если вещественные части всех характеристических показателей отрицательны, то все решения стремятся к нулю при $t\to\infty$ и, следовательно, имеет место асимптотическая устойчивость. Напротив, если вещественная часть хотя бы одного характеристического показателя положительна, то система имеет частные решения, неограниченно возрастающие при $t\to\infty$ и, следова-

тельно, будет иметь место неустойчивость. Если же вещественные части некоторых характеристических показателей отрицательны, а остальных равны нулю, то может иметь место как устойчивость, так и неустойчивость, а именно: если характеристические показатели с вещественными частями, равными нулю, являются простыми, то соответствующие им решения будут ограниченными и невозмущенное движение будет устойчиво, но не асимптотически. То же самое будет справедливо и в случае кратных характеристических показателей с нулевыми вещественными частями, если число групп решений, соответствующих таким показателям, равно их кратности. Но если имеется характеристический показатель с нулевой вещественной частью, кратность которого превышает число групп решений, ему соответствующих, то рассматриваемая система будет иметь решения, содержащие *вековые члены*. При этом *вековыми членами* мы называем члены вида $t^m\varphi(t)$, где $\varphi(t)$ — ограниченные функции времени. В рассматриваемом случае невозмущенное движение будет неустойчиво.

Но на основании (51.1) характеристическому показателю с отрицательной вещественной частью соответствует корень характеристического уравнения с модулем, меньшим единицы, характеристическому показателю с положительной вещественной частью соответствует корень с модулем, большим единицы, и характеристическому показателю с нулевой вещественной частью отвечает корень с модулем, равным единице. Поэтому условия устойчивости для линейных уравнений с периодическими коэффициентами могут быть выражены следующим образом: если все корни характеристического уравнения имеют модули, меньшие единицы, то невозмущенное движение устойчиво асимптотически; если имеется хоть один корень с модулем, большим единицы, то невозмущенное движение неустойчиво; если модули некоторых корней меньше единицы, а остальные равны единице, то невозмущенное движение может быть как устойчивым, так и неустойчивым. Устойчивость будет иметь место тогда, когда все корни с модулями, равными единице, будут простыми или когда они являются кратными, но кратность их равна числу отвечающих им групп решений. Если кратность хотя бы одного из корней с модулем, равным единице, превышает число соответствующих ему групп решений, то невозмущенное движение неустойчиво.

Пусть

$$\rho^n + A_1\rho^{n-1} + \ldots + A_{n-1}\rho + A_n = 0 \tag{56.1}$$

— характеристическое уравнение рассматриваемой системы. Мы выразили условия устойчивости через корни этого уравнения. Можно, однако, выразить эти условия непосредственно через коэффициенты A_i. С этой целью произведем в уравнении (56.1) подстановку

$$\rho = \frac{1+\lambda}{1-\lambda}. \tag{56.2}$$

Эта подстановка преобразует круг единичного радиуса с центром в начале координат плоскости комплексного переменного ρ в левую полуплоскость комплексного переменного λ. Поэтому условия устойчивости, выражающиеся в том, что модули всех корней уравнения (56.1) не должны превосходить единицы, могут быть выражены следующим образом: для устойчивости необходимо, чтобы вещественные части всех корней уравнения

$$\left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)^n + A_1\left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)^{n-1} + \ldots + A_{n-1}\left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right) + A_n = 0$$

не были положительными. При этом, если эти вещественные части все отрицательны, то устойчивость действительно будет иметь место и притом асимптотическая.

Таким образом, задача, так же как и для случая уравнений с постоянными коэффициентами, сводится к установлению условий отрицательности вещественных частей всех корней алгебраического уравнения. Эти условия даются теоремой Гурвица.

В отличие, однако, от случая уравнений с постоянными коэффициентами рассматриваемая сейчас задача значительно усложняется тем, что коэффициенты A_j, кроме коэффициента A_n, который дается формулой (50.8), неизвестны. Для их определения необходимо знать какую-нибудь фундаментальную систему решений исследуемых дифференциальных решений. Но как показывает форма (50.7) характеристического уравнения, нет необходимости знать эту фундаментальную систему для всех значений t, а лишь только для одного значения $t = \omega$. Кроме того, условия устойчивости определяются неравенствами, и поэтому достаточно знать лишь приближенные значения коэффициентов характеристического уравнения. Все это позволяет для определения указанных коэффициентов с успехом пользоваться различными приближенными приемами интегрирования. В нижеследующих параграфах мы подробно останавливаемся на некоторых основных приемах приближенного вычисления корней характеристического уравнения.

§ 57. Характеристическое уравнение канонических систем.

В некоторых случаях по самому виду дифференциальных уравнений можно сделать некоторые заключения о корнях характеристического уравнения. Одним из важнейших случаев такого рода будет тот, когда рассматриваемая система уравнений имеет канонический вид

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \tag{57.1}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n),$$

где $H(t_1, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ — квадратичная форма переменных $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$, коэффициенты которой являются непрерыв-

ными периодическими функциями t периода ω. Более подробно эта система может быть записана следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx_i}{dt} &= \sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial^2 H}{\partial y_i\,\partial x_\alpha}x_\alpha+\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial^2 H}{\partial y_i\,\partial y_\alpha}y_\alpha,\\ \frac{dy_i}{dt} &= -\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial^2 H}{\partial x_i\,\partial x_\alpha}x_\alpha-\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial^2 H}{\partial x_i\,\partial y_\alpha}y_\alpha.\end{aligned}\right\}\qquad(57.1')$$

Имеет место следующая теорема Ляпунова.

Теорема. *Пусть ρ — корень характеристического уравнения системы* (57.1). *Тогда если $\rho=\pm 1$, то кратность этого корня будет обязательно четная. Если $\rho\neq\pm 1$ и этот корень имеет кратность m и ему отвечает p групп решений, то величина $\frac{1}{\rho}$ будет также корнем характеристического уравнения и этот корень будет иметь ту же кратность m и ему будет отвечать то же число p групп решений.*

Доказательство. Рассмотрим линейную систему, сопряженную с (57.1). Эта система имеет вид

$$\left.\begin{aligned}\frac{du_i}{dt} &= -\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial^2 H}{\partial y_\alpha\,\partial x_i}u_\alpha+\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial^2 H}{\partial x_\alpha\,\partial x_i}v_\alpha,\\ \frac{dv_i}{dt} &= -\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial^2 H}{\partial y_\alpha\,\partial y_i}u_\alpha+\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial^2 H}{\partial x_\alpha\,\partial y_i}v_\alpha.\end{aligned}\right\}\qquad(57.2)$$

Пусть ρ — какой-нибудь корень m-й кратности характеристического уравнения системы (57.1). Допустим сначала, что $\rho\neq\pm 1$. На основании теоремы о корнях характеристических уравнений сопряженных систем (§ 55) величина $\frac{1}{\rho}$ будет корнем m-й кратности характеристического уравнения системы (57.2). Следовательно, эта система имеет m независимых решений вида

$$u_{ij}=e^{-\alpha t}U_{ij}(t),\quad v_{ij}=e^{-\alpha t}V_{ij}(t)\quad\left(\alpha=\frac{1}{\omega}\ln\rho\right),\quad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ m),$$

распадающихся на некоторое число групп известного вида. Здесь U_{ij} V_{ij} — некоторые полиномы относительно t с периодическими коэффициентами.

Но система (57.2), как это сразу видно из ее структуры, переходит в систему (57.1), если величины u_i заменить величинами y_i, а величины v_i — величинами $-x_i$. Следовательно, если $u_i(t)$, $v_i(t)$ являются решением системы (57.2), то функции $x_i=-v_i(t)$,

$y_i = u_i(t)$ определяют решение системы (57.1). Отсюда непосредственно следует, что система (57.1) имеет m независимых частных решений

$$x_{ij} = -e^{-\alpha t} V_{ij}(t), \qquad y_{ij} = e^{-\alpha t} U_{ij}(t)$$
$$(j = 1, 2, \ldots, m)$$

и, следовательно (§ 53), величина $-\alpha$ является характеристическим показателем, а $\frac{1}{\rho}$ — корнем характеристического уравнения этой системы с кратностью, не меньшей m. Эта кратность, очевидно, не может быть больше m, так как в противном случае, применяя только что доказанное предложение к корню $\frac{1}{\rho}$, мы получим, что вопреки предположению кратность корня ρ превосходит m.

Из наших рассуждений вытекает также сразу, что корню $\frac{1}{\rho}$ соответствует такое же число групп решений и такое же число решений в каждой группе, как и корню ρ.

Итак, теорема доказана для каждого корня, отличного от $+1$ или -1. Чтобы полностью доказать теорему, достаточно установить, что если характеристическое уравнение системы (57.1) имеет корень, равный $+1$, то кратность такого корня обязательно четная и что то же самое справедливо и для корня, равного -1. Для этого прежде всего заметим, что сумма кратностей корней, равных ± 1, будет обязательно четным числом, так как на основании доказанного сумма кратностей всех корней, отличных от ± 1, будет четной и порядок $2n$ характеристического уравнения является также четным.

Далее, произведение всех корней характеристического уравнения равно на основании (50.8) величине

$$\exp \int_0^{\omega} \sum_{s=1}^{n} p_{ss}\, dt.$$

Но в рассматриваемом случае

$$\sum p_{ss} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial y_i \partial x_i} - \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial y_i} \right) = 0,$$

и, следовательно, произведение всех корней характеристического уравнения равно 1. Но так как произведение всех корней, отличных от ± 1, по доказанному равно 1, то и произведение корней, равных ± 1, тоже равно 1. Следовательно, если характеристическое уравнение имеет корень, равный -1, то кратность этого корня будет обязательно четной. Но тогда то же самое будет справедливо

и по отношению к корню, равному $+1$, если такой корень существует.

Таким образом, теорема полностью доказана.

Из доказанной теоремы вытекает, что для уравнений вида (57.1) устойчивость может иметь место лишь только тогда, когда все корни характеристического уравнения имеют модули, равные единице.

§ 58. Вычисление корней характеристического уравнения методом разложения по степеням параметра.

Допустим, что коэффициенты системы линейных уравнений с периодическими коэффициентами

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n \qquad (s = 1, 2, \ldots, n) \qquad (58.1)$$

зависят от p параметров $\mu_1, \ldots, \mu_p$, по отношению к которым они голоморфны в области, определяемой неравенствами

$$|\mu_i| \leqslant E_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, p), \qquad (58.2)$$

где $E_1, \ldots, E_p$ — некоторые постоянные числа. Мы предполагаем при этом, что период ω от этих параметров не зависит.

Тогда, как известно, в любом решении $x_s = x_s(t, \mu_1, \ldots, \mu_p)$ уравнений (58.1), начальные значения которого не зависят от параметров, функции $x_s(t, \mu_1, \ldots, \mu_p)$ будут также голоморфными относительно $\mu_1, \ldots, \mu_p$ в области (58.2). Поэтому, принимая во внимание форму (50.7) характеристического уравнения, мы приходим сразу к следующей теореме Ляпунова.

Теорема. *Коэффициенты характеристического уравнения системы* (58.1) *являются в области* (58.2) *голоморфными функциями параметров* $\mu_1, \ldots, \mu_p$.

Здесь существенным является то обстоятельство, что область голоморфности коэффициентов характеристического уравнения совпадает с областью голоморфности коэффициентов исследуемых дифференциальных уравнений. В частности, если коэффициенты исследуемых уравнений являются целыми функциями параметров, то и коэффициенты характеристического уравнения являются также целыми функциями параметров.

Доказанную теорему можно использовать для приближенного вычисления коэффициентов характеристического уравнения. Покажем, как это сделать.

Допустим с этой целью, что коэффициенты системы (58.1) зависят только от одного параметра μ, так что можно написать:

$$p_{si} = q_{si}(t) + \mu p_{si}^{(1)}(t) + \mu^2 p_{si}^{(2)}(t) + \ldots,$$

где $q_{sl}(t)$, $p_{sl}^{(1)}(t)$, $p_{sl}^{(2)}(t)$, ... — непрерывные периодические функции t периода ω и ряды сходятся при $|\mu| \leqslant E$.

Рассмотрим фундаментальную систему решений $x_{sj}(t, \mu)$ системы (58.1), определяемую начальными условиями

$$x_{sj}(0, \mu) = \begin{cases} 1 & (s = j) \\ 0 & (s \neq j) \end{cases} \qquad (s, j = 1, 2, \ldots, n). \tag{58.3}$$

Как указывалось выше, мы можем написать:

$$x_{sj} = x_{sj}^{(0)}(t) + \mu x_{sj}^{(1)}(t) + \mu^2 x_{sj}^{(2)}(t) + \ldots, \tag{58.4}$$

где ряды при всех значениях t сходятся в области $|\mu| \leqslant E$. Начальные условия (58.3) дают:

$$\left.\begin{aligned} x_{sj}^{(0)}(0) &= \begin{cases} 1 & (s = j), \\ 0 & (s \neq j), \end{cases} \\ x_{sj}^{(1)}(0) &= x_{sj}^{(2)}(0) = \ldots = 0. \end{aligned}\right\} \tag{58.5}$$

Подставляя ряды (58.4) в уравнения (58.1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ, мы получим для определения неизвестных функций $x_{sj}^{(0)}$, $x_{sj}^{(1)}$, ... следующие системы дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_{sj}^{(0)}}{dt} &= q_{s1}x_{1j}^{(0)} + q_{s2}x_{2j}^{(0)} + \ldots + q_{sn}x_{nj}^{(0)}, \\ \frac{dx_{sj}^{(1)}}{dt} &= q_{s1}x_{1j}^{(1)} + q_{s2}x_{2j}^{(1)} + \ldots + q_{sn}x_{nj}^{(1)} + \sum_{\alpha=1}^{n} p_{s\alpha}^{(1)}x_{\alpha j}^{(0)}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dx_{sj}^{(k)}}{dt} &= q_{s1}x_{1j}^{(k)} + \ldots + q_{sn}x_{nj}^{(k)} + \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=0}^{k-1} p_{s\alpha}^{(k-\beta)}x_{\alpha j}^{(\beta)} \\ &\qquad (s = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned}\right\} \tag{58.6}$$

У всех этих систем линейных неоднородных уравнений одинаковая однородная часть. Допустим, что мы можем проинтегрировать в замкнутой форме однородную систему уравнений

$$\frac{dy_s}{dt} = q_{s1}y_1 + \ldots + q_{sn}y_n,$$

в которую переходит (58.1) при $\mu = 0$.

Тогда уравнения (58.6) дадут возможность последовательно определять все функции $x_{sj}^{(k)}$, начиная с $k = 0$. Начальные условия (58.5) делают их при этом вполне определенными.

Следовательно, решения (58.4) могут быть вычислены с какой угодно степенью точности. Полагая в этих решениях $t = \omega$ и под-

ставляя в (50.7), мы получим приближенные значения коэффициентов характеристического уравнения.

Мы получили, таким образом, способ приближенного вычисления коэффициентов характеристического уравнения для того частного случая, когда исследуемые уравнения содержат некоторый параметр μ, причем при $\mu=0$ уравнения интегрируются в замкнутой форме. Мы можем, однако, к этому частному случаю свести и самый общий.

Пусть нам необходимо вычислить коэффициенты характеристического уравнения заданной системы линейных уравнений

$$\frac{dx_s}{dt}=r_{s1}(t)\,x_1+\ \ldots\ +r_{sn}(t)\,x_n \tag{58.7}$$

с периодическими коэффициентами, не содержащими никаких параметров. Заменим систему (58.7) системой

$$\frac{dx_s}{dt}=p_{s1}(t,\ \mu)\,x_1+\ \ldots\ +p_{sn}(t,\ \mu)\,x_n, \tag{58.8}$$

где содержащие аналитически параметр μ функции $p_{sj}(t,\ \mu)$ выбраны таким образом, что при $\mu=0$ система (58.8) интегрируется в замкнутой форме (обращается, например, в систему с постоянными коэффициентами), а при $\mu=\mu^*$, где μ^* — некоторое фиксированное число, лежащее в области сходимости коэффициентов $p_{sj}(t,\ \mu)$, она обращается в заданную систему (58.7), т. е.

$$p_{sj}(t,\ \mu^*)=r_{sj}(t) \qquad (s,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Можно, например, положить:

$$p_{sj}=\mu r_{sj},\quad \mu^*=1.$$

Полученная таким образом система будет как раз того частного вида, который мы рассмотрели, и для нее могут быть вычислены коэффициенты характеристического уравнения вышеуказанным приемом. Положив затем $\mu=\mu^*$, мы получим коэффициенты характеристического уравнения заданной системы.

Приведенный прием особенно удобен тогда, когда величина μ^* мала, т. е. когда рассматриваемая система мало отличается от системы, интегрируемой в замкнутой форме. В этом случае для вычисления коэффициентов характеристического уравнения можно будет ограничиться небольшим числом приближений.

§ 59. Приложение к системе второго порядка.

Мы переходим теперь к подробному рассмотрению системы, описываемой одним уравнением второго порядка:

$$\frac{d^2y}{dt^2}+Q\frac{dy}{dt}+Py=0, \tag{59.1}$$

где Q и P — периодические функции t периода ω. Несмотря на частный характер этой системы, к ней приводятся многие важные технические задачи.

Заменой

$$y = \exp\left(-\frac{1}{2}\int Q\,dt\right)x$$

уравнение (59.1) приводится к виду

$$\frac{d^2x}{dt^2} + px = 0, \tag{59.2}$$

где

$$p = P - \frac{1}{4}Q^2 - \frac{1}{2}\frac{dQ}{dt}$$

— также периодическая функция периода ω. Мы будем поэтому в дальнейшем рассматривать только уравнения вида (59.2).

Записав уравнение (59.2) в виде системы

$$\frac{dx}{dt} = x', \quad \frac{dx'}{dt} = -px,$$

мы видим, что характеристическое уравнение в рассматриваемом случае имеет вид

$$\Delta(\rho) = \begin{vmatrix} f(\omega) - \rho & f'(\omega) \\ \varphi(\omega) & \varphi'(\omega) - \rho \end{vmatrix} = 0,$$

где $f(t)$ и $\varphi(t)$ — два частных решения уравнения (59.2), определяемых начальными условиями:

$$\left.\begin{aligned} f(0) = 1, \quad f'(0) = 0, \\ \varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = 1. \end{aligned}\right\} \tag{59.3}$$

Кроме того, свободный член характеристического уравнения на основании (50.8) обращается в единицу, и потому характеристическое уравнение может быть представлено в виде

$$\rho^2 - 2A\rho + 1 = 0, \tag{59.4}$$

где

$$A = \frac{1}{2}[f(\omega) + \varphi'(\omega)]. \tag{59.5}$$

Так как произведение корней характеристического уравнения равно единице, то либо оба корня имеют модули, равные единице, либо модуль одного из корней больше единицы, а модуль другого меньше этой величины, а именно: из соотношения

$$\rho = A \pm \sqrt{A^2 - 1}$$

мы видим, что если $A^2 \leqslant 1$, то оба корня будут комплексными и иметь модули, равные единице, а если $A^2 > 1$, то оба корня будут вещественны и один из них будет численно более, а другой численно менее единицы.

Таким образом, основная задача устойчивости для уравнения (59.2) сводится к установлению условий, при которых имеет место каждый из двух возможных случаев: 1) $A^2 \leqslant 1$ и 2) $A^2 > 1$.

Некоторые признаки наличия того или другого случая могут быть получены методом предыдущего параграфа. С этой целью рассмотрим вместо уравнения (59.2) уравнение

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \mu p y, \tag{59.6}$$

где μ — вспомогательный параметр, и найдем сначала коэффициент $A^*(\mu)$ для этого уравнения. Положив затем $\mu = -1$, мы получим коэффициент A для уравнения (59.2). Пусть $f(t, \mu)$ и $\varphi(t, \mu)$ — два частных решения уравнения (59.6), определяемые начальными условиями:

$$\left.\begin{aligned} f(0, \mu) = 1, \quad f'(0, \mu) = 0, \\ \varphi(0, \mu) = 0, \quad \varphi'(0, \mu) = 1. \end{aligned}\right\} \tag{59.7}$$

Мы можем написать:

$$\left.\begin{aligned} f(t, \mu) = f_0(t) + \mu f_1(t) + \mu^2 f_2(t) + \ldots, \\ \varphi(t, \mu) = \varphi_0(t) + \mu\varphi_1(t) + \mu^2\varphi_2(t) + \ldots \end{aligned}\right\} \tag{59.8}$$

Подставляя в (59.6), находим:

$$\frac{d^2 f_0}{dt^2} = 0, \qquad \frac{d^2\varphi_0}{dt^2} = 0,$$

$$\frac{d^2 f_n}{dt^2} = p f_{n-1}, \qquad \frac{d^2\varphi_n}{dt^2} = p\varphi_{n-1} \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{59.9}$$

Начальные условия (59.8) дают:

$$f_0(0) = 1, \quad f_0'(0) = 0, \quad \varphi_0(0) = 0, \quad \varphi_0'(0) = 1,$$

$$f_n(0) = f_n'(0) = \varphi_n(0) = \varphi_n'(0) = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} f_0(t) = 1, \qquad\qquad \varphi_0(t) = t, \\ f_n(t) = \int_0^t dt \int_0^t p f_{n-1}\, dt, \quad \varphi_n(t) = \int_0^t dt \int_0^t p\varphi_{n-1}\, dt \\ (n = 1, 2, \ldots). \end{aligned}\right\} \tag{59.10}$$

Следовательно, на основании (59.5) коэффициент $A^*(\mu)$ для уравнения (59.6) имеет вид

$$A^*(\mu) = 1 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[f_n(\omega) + \varphi_n'(\omega)\right]\mu^n. \tag{59.11}$$

На основании теоремы предыдущего параграфа ряд (59.11) сходится при всех значениях μ. Полагая $\mu = -1$, мы получим коэффициент A для уравнения (59.2) в виде сходящегося ряда

$$A = A^*(-1) = 1 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[f_n(\omega) + \varphi_n'(\omega)\right](-1)^n. \tag{59.12}$$

Установив это, допустим, что функция $p(t)$ может принимать только отрицательные или равные нулю значения, не обращаясь в нуль тождественно. Тогда все функции $f_n(t)$, $f_n'(t)$, $\varphi_n(t)$, $\varphi_n'(t)$ при n нечетном будут отрицательны, а при n четном — положительны. Вследствие этого все члены ряда (59.12) будут положительны, и мы приходим к следующей теореме Ляпунова.

Теорема. *Если в уравнении* (59.2) *функция p может принимать только отрицательные или равные нулю значения, не обращаясь в нуль тождественно, то соответствующее этому уравнению характеристическое уравнение имеет два вещественных корня, из которых один численно более, а другой численно менее единицы.*

Допустим теперь, что функция p может принимать только положительные или равные нулю значения, не обращаясь тождественно в нуль. Будут ли при этом корни характеристического уравнения иметь модули, равные единице? Этот вопрос естественно возникает, ибо в случае, когда p постоянно, ответ на него получается положительный. Однако, как мы увидим ниже, если функция p не обращается в постоянную, то ответ на указанный вопрос может получиться отрицательный. Может оказаться, что несмотря на то, что функция p может принимать только положительные значения, характеристическое уравнение будет иметь вещественные корни, из которых один более, а другой менее единицы. Имеет, однако, место следующая теорема, принадлежащая также Ляпунову.

Теорема. *Если функция p может принимать только положительные или равные нулю значения, не обращаясь в нуль тождественно, и если при этом выполняется неравенство*

$$\omega\int_0^{\omega} p\,dt \leqslant 4, \tag{59.13}$$

то характеристическое уравнение системы (59.2) *имеет комплексные корни, равные по модулю единице.*

Доказательство. Заметим прежде всего, что при $p \geqslant 0$ все функции f_n и φ_n, а также их производные f'_n и φ'_n положительны при всех $t \geqslant 0$. Докажем, что при всех $t \geqslant 0$ справедливы неравенства

$$S_n = (f_{n-1} + \varphi'_{n-1}) t \int_0^t p\,dt - 2n(f_n + \varphi'_n) > 0. \qquad (59.14)$$

Мы можем, очевидно, писать:

$$S_n = \int_0^t \frac{dS_n}{dt}\,dt,$$

откуда, учитывая (59.9), находим:

$$S_n = \int_0^t (F_n + p\Phi_n)\,dt,$$

где

$$F_n = tf'_{n-1} \int_0^t p\,dt + (f_{n-1} + \varphi'_{n-1}) \int_0^t p\,dt - 2nf'_n,$$

$$\Phi_n = t\varphi_{n-2} \int_0^t p\,dt + (f_{n-1} + \varphi'_{n-1}) t - 2n\varphi_{n-1}.$$

Если мы докажем, что при $t \geqslant 0$ имеют место неравенства

$$F_n > 0, \quad \Phi_n > 0, \qquad (59.15)$$

то этим самым, очевидно, будет доказано и неравенство (59.14). Чтобы доказать неравенства (59.15), запишем функции F_n и Φ_n через интегралы от их производных. Будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} F_n &= \int_0^t \left(2f'_{n-1} \int_0^t p\,dt + pu_n\right) dt, \\ \Phi_n &= \int_0^t (2pt\varphi_{n-2} + v_n)\,dt, \end{aligned}\right\} \qquad (59.16)$$

где

$$u_n = (\varphi_{n-2} + tf_{n-2}) \int_0^t p\,dt + \varphi'_{n-1} + tf'_{n-1} - (2n-1) f_{n-1},$$

$$v_n = (\varphi_{n-2} + t\varphi'_{n-2}) \int_0^t p\,dt + f_{n-1} + tf'_{n-1} - (2n-1) \varphi'_{n-1}.$$

Если функции u_n и v_n также представить в виде интегралов, то легко найдем:

$$\left.\begin{aligned} u_n &= \int_0^t [2p(\varphi_{n-2} + tf_{n-2}) + F_{n-1}]\,dt, \\ v_n &= \int_0^t \left(2f'_{n-1} + 2\varphi'_{n-2}\int_0^t p\,dt + p\Phi_{n-1}\right)dt. \end{aligned}\right\} \qquad (59.17)$$

Учитывая, что все функции f_n, f'_n, φ_n, φ'_n положительны, мы из (59.16) и (59.17) найдем, что если при всех $t \geqslant 0$ имеют место неравенства $F_{n-1} > 0$, $\Phi_{n-1} > 0$, то при тех же значениях t будут иметь место и неравенства (59.15). Таким образом, неравенства (59.15) будут доказаны для любого n, если мы их докажем для $n = 2$. Но для $n = 2$ выражения (59.16) дают:

$$F_2 = 2\int_0^t \left\{\left(\int_0^t p\,dt\right)^2 + 2p\varphi'_1\right\}dt, \quad \Phi_2 = 2\int_0^t (pt^2 + 2f_1)\,dt.$$

Величины F_2 и Φ_2, очевидно, положительны, и поэтому мы можем считать неравенства (59.15) доказанными.

Из этих неравенств, полагая $t = \omega$, находим:

$$f_n(\omega) + \varphi'_n(\omega) < [f_{n-1}(\omega) + \varphi'_{n-1}(\omega)]\frac{\omega}{2n}\int_0^\omega p\,dt.$$

Заменяя n на $2n$, получим:

$$f_{2n}(\omega) + \varphi'_{2n}(\omega) < [f_{2n-1}(\omega) + \varphi'_{2n-1}(\omega)]\frac{\omega}{4n}\int_0^\omega p\,dt, \qquad (59.18)$$

а заменяя n на $2n+1$ и обращая знаки неравенств, будем иметь:

$$-[f_{2n+1}(\omega) + \varphi'_{2n+1}(\omega)] > -[f_{2n}(\omega) + \varphi'_{2n}(\omega)]\frac{\omega}{4n+2}\int_0^\omega p\,dt. \qquad (59.19)$$

Установив это, рассмотрим коэффициент A, соответствующий уравнению (59.2), определяемый, как мы видели, рядом (59.12). Если в этом ряде заменить все четные члены правыми частями неравенств (59.18), то будем иметь:

$$A < 1 - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\omega}{4n}\int_0^\omega p\,dt\right)[f_{2n-1}(\omega) + \varphi'_{2n-1}(\omega)]. \qquad (59.20)$$

Если же воспользоваться неравенствами (59.19), то получим:

$$A > 1 - \frac{\omega}{2}\int_0^{\omega} p\,dt + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\omega}{4n+2}\int_0^{\omega} p\,dt\right)\left[f_{2n}(\omega) + \varphi'_{2n}(\omega)\right]. \tag{59.21}$$

Если теперь функция p удовлетворяет неравенству (59.13), то все члены, стоящие под знаком суммы в неравенствах (59.20) и (59.21), будут положительны, и эти неравенства дадут

$$-1 < A < 1,$$

что и доказывает теорему.

Если $p \geqslant 0$, но неравенство (59.13) не выполняется, то, как мы уже указывали, возможны оба случая: 1) $A^2 \leqslant 1$ и 2) $A^2 > 1$. Для выяснения, какой из них в каждой конкретной задаче будет иметь место, требуется более подробное исследование ряда (59.12). В специальной работе, посвященной этому вопросу, А. М. Ляпунов[1]) установил ряд признаков наличия того или другого случая. Этому же вопросу посвящена работа Н. Е. Жуковского[2]), в которой дается обобщение критерия (59.13). Некоторые другие обобщения этого критерия даны в работах Н. В. Адамова, Н. П. Еругина, Р. С. Гусаровой, В. А. Якубовича, М. Г. Нейгауз и В. Б. Лидского[3]). Случай, когда $p(t)$ может менять знак, рассмотрен в большой работе А. М. Ляпунова[4]).

---

[1]) Ляпунов А. М., Sur une série dans la théorie des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficientes periodiques. Зап. Акад. наук по физ.-мат. отделению, 8-я сер., т. XIII, № 2, 1902.

[2]) Жуковский Н. Е., Условия конечности интегралов уравнения $\frac{d^2y}{dx^2} + py = 0$. Матем. сборник, т. XVI, 1892. См. также: Жуковский Н. Е., Собрание сочинений, т. I, Гостехиздат, 1948.

[3]) Адамов Н. В., О колебаниях интегралов уравнения второго порядка с периодическими коэффициентами и некоторых условиях устойчивости. Матем. сборник, т. XLII, вып. 6, 1935.

Еругин Н. П., Обобщение одной теоремы Ляпунова. ПММ, т. XII, вып. 5, 1948.

Гусарова Р. С., Об ограниченности решения линейного дифференциального уравнения с периодическими коэффициентами. ПММ, т. XIV, вып. 3, 1950.

Якубович В. А., Об ограниченности решения уравнения $y'' + p(t)\,y = 0$, $p(t+\omega) = p(t)$. Докл. Акад. наук СССР, т. LXXIV, № 5, 1950.

Нейгауз М. Г. и Лидский В. Б., Об ограниченности решений линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Докл. Акад. наук СССР, т. LXXVII, № 2, 1951.

[4]) Ляпунов А. М., Об одном вопросе, касающемся линейных дифференциальных уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами. Сообщ. Харьк. матем. об-ва, 2-я сер., т. V, №№ 3—4 и 5—6, 1896. См. также примечание в конце книги (стр. 522).

§ 60. Некоторые технические задачи, приводящиеся к уравнению второго порядка с периодическими коэффициентами, и связанные с этим вопросы теории.

В предыдущем параграфе мы показали, как при помощи искусственного введения параметра можно найти приближенные значения корней характеристического уравнения. Однако во многих важных технических вопросах такого рода параметры содержатся в дифференциальных уравнениях по существу самой задачи, и при этом требуется определить, будет ли иметь место устойчивость или неустойчивость не при определенном значении параметра, а при любом его значении. Чтобы лучше уяснить, какого рода математические проблемы здесь возникают, рассмотрим некоторые вопросы, приводящиеся к исследованию устойчивости решений линейных уравнений с периодическими коэффициентами. Мы рассматриваем при этом только такие вопросы, которые приводятся к исследованию одного уравнения второго порядка вида (59.2).

Пример 1. *Маятник с колеблющейся точкой подвеса.* В качестве простейшего примера рассмотрим маятник длиной l, ось подвеса которого совершает вертикальные гармонические колебания с малой амплитудой a и частотой ω. Дифференциальное уравнение движения маятника имеет вид

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l}\left(1 + \frac{a\omega^2}{g}\sin\omega t\right)\sin\varphi, \tag{60.1}$$

где φ — угол отклонения от вертикали. Полагая $\omega t = \tau$ и отбрасывая нелинейные члены, получим:

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} = -\frac{g}{l\omega^2}\left(1 + \frac{a\omega^2}{g}\sin\tau\right)\varphi. \tag{60.2}$$

Так же как и для маятника с неподвижной осью подвеса, вертикаль является положением равновесия. Но в отличие от случая маятника с неподвижной осью это положение равновесия может быть как устойчивым, так и неустойчивым, а именно: в зависимости от значения ω величина A для уравнения (60.2) может удовлетворять как неравенству $A^2 < 1$, так и неравенству $A^2 > 1$. Задача заключается в том, чтобы выделить значения частоты ω, для которых получается первый из указанных случаев, и те критические значения этой частоты, для которых получается второй случай. В этом втором случае будут иметь место поперечные колебания маятника с неограниченно возрастающей амплитудой[1]). Говорят, что в этом случае имеет место *параметрический резонанс.*

---

[1]) В действительности амплитуда колебаний будет оставаться конечной, так как точное уравнение (60.1) этих колебаний не является линейным.

Пример 2. *Крутильные колебания коленчатых валов.* Рассмотрим крутильные колебания коленчатых валов силового двигателя с учетом инерции шатунов и поршней. Дифференциальные уравнения колебаний составлены Э. Треффтцом[1]). Эти колебания обстоятельно исследованы Н. Е. Кочиным[2]). Мы ограничиваемся здесь рассмотрением случая одноцилиндрового двигателя с маховиком (рис. 14).

Мы будем считать, что масса маховика достаточно велика, так что вращение вала можно считать равномерным. Пусть ω — угловая скорость маховика. Обозначим через φ угол вращения кривошипа. Тогда кинетическая энергия кривошипа вместе со связанными с ним движущимися массами (шатуном и поршнем) может быть представлена в виде

$$T = \frac{1}{2} J(\varphi) \dot{\varphi}^2.$$

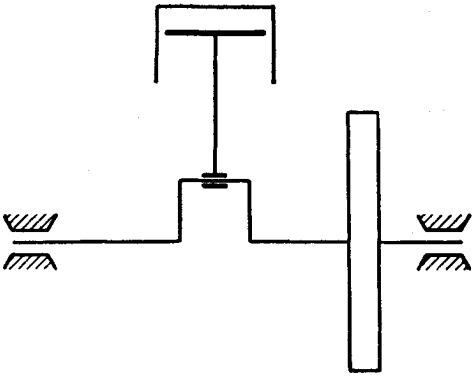

Рис. 14.

Функцию $J(\varphi)$ можно вычислить, если известны размеры и распределение масс кривошипа, шатуна и поршня. Это будет, очевидно, периодическая функция φ периода 2π. При приближенном вычислении принято величину J считать постоянной, равной ее среднему значению J_0 за период. При более точном расчете мы можем положить:

$$J = J_0(1 + \mu F(\varphi)),$$

где F — некоторая периодическая функция периода 2π, а μ — постоянная величина, которую мы будем считать малой.

Потенциальная энергия упругих сил, действующих на кривошип, равна

$$\Pi_1 = \frac{1}{2} c\psi^2 = \frac{1}{2} c(\varphi - \omega t)^2,$$

где ψ — угол закручивания, а c — коэффициент жесткости вала при кручении. Кроме того, на кривошип действует внешний крутящий

---

[1]) Trefftz E., Zur Berechnung der Schwingungen von Kurbelwellen. Vorträge aus dem Gebiete der Aerodynamik und verw. Gebiete, Berlin, 1930.

[2]) Кочин Н. Е., О крутильных колебаниях коленчатых валов. ПММ, II, вып. 1, 1934.

момент $M(\varphi)$ с потенциальной энергией

$$\Pi_2 = \int_0^{\varphi} M(\varphi)\, d\varphi.$$

Функция $M(\varphi)$ будет также периодической. Период этой функции равен 2π, если двигатель двухтактный, и 4π, если двигатель четырехтактный, так как в последнем случае рабочий ход поршня приходится на два оборота вала.

Составляя теперь дифференциальное уравнение Лагранжа, получим:

$$J(\varphi)\ddot{\varphi} + \frac{1}{2}\frac{dJ(\varphi)}{d\varphi}\dot{\varphi}^2 = -M(\varphi) - c(\varphi - \omega t). \qquad (60.3)$$

Для упрощения этого уравнения введем вместо обобщенной координаты φ обобщенную координату q при помощи соотношения

$$q = \int_{\omega t}^{\varphi} \sqrt{J(\varphi)}\, d\varphi.$$

Будем иметь:

$$\dot{q} = \sqrt{J(\varphi)}\,\dot{\varphi} - \omega\sqrt{J(\omega t)},$$

$$\ddot{q} = \sqrt{J(\varphi)}\,\ddot{\varphi} + \frac{1}{2\sqrt{J(\varphi)}}\frac{dJ(\varphi)}{d\varphi}\dot{\varphi}^2 - \frac{\omega^2}{2\sqrt{J(\omega t)}}\frac{dJ(\omega t)}{d(\omega t)}.$$

Следовательно, уравнение (60.3) может быть переписано в следующем виде:

$$\ddot{q} = -\frac{M(\varphi)}{\sqrt{J(\varphi)}} - \frac{c(\varphi - \omega t)}{\sqrt{J(\varphi)}} - \frac{\omega^2}{2\sqrt{J(\omega t)}}\frac{dJ(\omega t)}{d(\omega t)}.$$

Считая угол закручивания $\varphi - \omega t$ малым, примем:

$$q = \int_{\omega t}^{\varphi} \sqrt{J(\varphi)}\, d\varphi = (\varphi - \omega t)\sqrt{J(\omega t)},$$

$$\frac{M(\varphi)}{\sqrt{J(\varphi)}} = \frac{M(\omega t)}{\sqrt{J(\omega t)}}, \quad \frac{c(\varphi - \omega t)}{\sqrt{J(\varphi)}} = \frac{c(\varphi - \omega t)}{\sqrt{J(\omega t)}},$$

после чего получим:

$$\ddot{q} + \frac{c}{J(\omega t)}q = -\frac{M(\omega t)}{\sqrt{J(\omega t)}} - \frac{\omega^2}{2\sqrt{J(\omega t)}}\frac{dJ(\omega t)}{d(\omega t)}.$$

Таким образом, колебания описываются неоднородным линейным уравнением с периодическими коэффициентами. Поведение его решений в смысле устойчивости и неустойчивости определяется

однородным уравнением

$$\ddot{q}+\frac{c}{J(\omega t)}q=0.$$

Полагая в этом уравнении $\omega t=\tau$, окончательно найдем, что задача сводится к исследованию уравнения второго порядка

$$\frac{d^2q}{d\tau^2}+\frac{c}{\omega^2}p(\tau)q=0, \tag{60.4}$$

где

$$p(\tau)=\frac{1}{J(\tau)}$$

— периодическая функция периода 2π.

Уравнение (60.4), так же как и уравнение (60.2), содержит параметр ω — угловую скорость вращения вала. И так же как и в случае

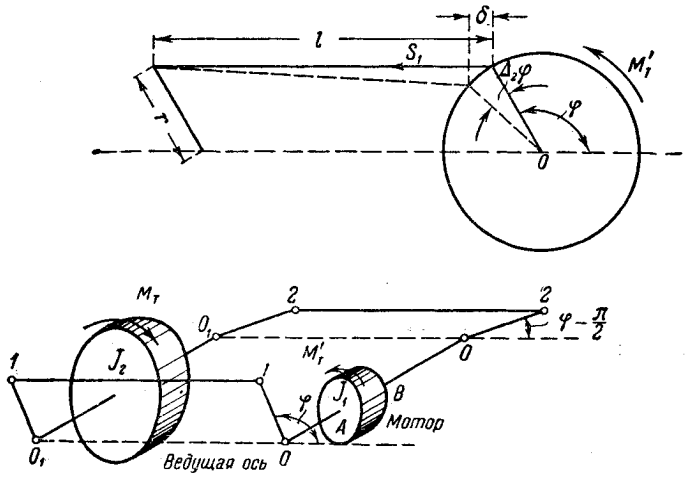

Рис. 15.

маятника, в зависимости от значений ω может иметь место параметрический резонанс. Задача как раз и заключается в определении критических значений угловой скорости, т. е. тех значений ω, при которых величина A для уравнения (60.4) будет иметь модуль, больший единицы.

Пример 3. *Колебания в спарниках электровозов*[1]). В качестве третьего примера рассмотрим колебания, обусловленные пара-

[1]) Мы излагаем здесь эту задачу по книге: Тимошенко С. П., Теория колебаний в инженерном деле, Гостехиздат, 1931. В этой книге приведена подробная литература вопроса.

метрическим резонансом, в электровозах с передачей вращения спарниками. Гибкость системы между валом мотора и ведущими осями является переменной, зависящей от положения валов и изменяющейся периодически с периодом, зависящим от угловой скорости вращения мотора. Это и дает возможность возникновения параметрического резонанса.

Рассмотрим простейший пример. Допустим, что крутящий момент M_T мотора передается на ведущую ось электровоза при помощи кривошипов $O-1$ и O_1-1, спарников $1-1$ и $2-2$ и кривошипов $O-2$ и O_1-2 (рис. 15). Кривошипы $O-2$ и O_1-2 повернуты по отношению к кривошипам $O-1$ и O_1-1 на угол $\frac{\pi}{2}$.

Обозначим через $\Delta\varphi$ угол поворота мотора по отношению к ведущей оси O_1-O_1. Мы можем написать:

$$M_T = \theta\,\Delta\varphi, \tag{60.5}$$

где θ — гибкость передачи. Определим эту величину.

Пусть $\Delta_1\varphi$ — угол поворота, вызванный скручиванием конца OA вала мотора, а $\Delta_2\varphi$ — угол поворота, вызванный сжатием δ спарника $1-1$. Тогда

$$\Delta\varphi = \Delta_1\varphi + \Delta_2\varphi, \tag{60.6}$$

причем, как это видно из чертежа,

$$\Delta_2\varphi = \frac{\delta}{r\sin\varphi}. \tag{60.7}$$

Обозначим через M_T' крутящий момент, передаваемый кривошипом $O-1$:

$$\Delta_1\varphi = \frac{M_T'}{k_1}, \tag{60.8}$$

где k_1 — характеристика пружинности конца OA вала. Далее, если S_1 — сила, сжимающая спарник $1-1$, то

$$\delta = \frac{S_1 l}{AE},$$

где A — площадь сечения спарника, а E — модуль упругости его материала. Но, очевидно,

$$S_1 = \frac{M_T'}{r\sin\varphi}$$

и, следовательно, на основании (60.7)

$$\Delta_2\varphi = \frac{M_T'}{k_2\sin^2\varphi}, \tag{60.9}$$

где

$$k_2 = \frac{AEr^2}{l}.$$

Формулы (60.6), (60.8) и (60.9) дают:

$$\Delta\varphi = M_T' \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2 \sin^2 \varphi}\right). \tag{60.10}$$

Точно так же, обозначая через M_T'' момент, передаваемый концом BO вала, и предполагая, что устройство симметрично относительно продольной оси электровоза, находим:

$$\Delta\varphi = M_T'' \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2 \cos^2 \varphi}\right). \tag{60.11}$$

Но

$$M_T = M_T' + M_T'',$$

и поэтому формулы (60.10) и (60.11) дают:

$$M_T = \Delta\varphi \frac{\frac{2}{k_1} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + \frac{1}{k_2}}{\left(\frac{1}{k_1} \sin^2 \varphi + \frac{1}{k_2}\right)\left(\frac{1}{k_1} \cos^2 \varphi + \frac{1}{k_2}\right)} = \Delta\varphi \frac{a - b \cos 4\varphi}{c - d \cos 4\varphi},$$

где

$$a = \frac{2}{k_1} + \frac{8}{k_2}, \quad b = \frac{2}{k_1}, \quad c = \frac{8}{k_2^2} + \frac{8}{k_1 k_2} + \frac{1}{k_1^2}, \quad d = \frac{1}{k_1^2}.$$

Таким образом, обозначая через ω угловую скорость вращения вала (считая приближенно эту скорость постоянной), мы получим для гибкости системы выражение

$$\theta = \frac{a - b \cos 4\omega t}{c - d \cos 4\omega t}. \tag{60.12}$$

Заметим, что если бы система не была симметрична относительно продольной оси, то коэффициенты в формуле (60.11) отличались бы от коэффициентов в формуле (60.10), и для гибкости получилось бы выражение вида

$$\theta = \frac{a + b \cos 2\omega t + c \cos 4\omega t}{p + q \cos 2\omega t + r \cos 4\omega t}. \tag{60.13}$$

Составим теперь дифференциальные уравнения колебаний. Пусть φ_1 и φ_2 — углы поворота оси мотора и ведущей оси, J_1 и J_2 — моменты инерции вращающихся вокруг этих осей масс, M_T и M_r — действующие на них внешние моменты. Тогда имеем:

$$\left.\begin{aligned} J_1 \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} &= -\theta(\varphi_1 - \varphi_2) + M_T, \\ J_2 \frac{d^2\varphi_2}{dt^2} &= \theta(\varphi_1 - \varphi_2) - M_r. \end{aligned}\right\} \tag{60.14}$$

Обозначая через x величину $\varphi_1 - \varphi_2$, из уравнений (60.14) находим:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \psi(\omega t)\, x = \frac{M_T}{J_1} + \frac{M_r}{J_2},$$

где $\psi(\omega t)$ в общем случае несимметричной системы определяется формулой

$$\psi(\omega t) = \frac{a + b\cos 2\omega t + c\cos 4\omega t}{p + q\cos 2\omega t + r\cos 4\omega t}\,\frac{J_1 + J_2}{J_1 J_2}. \qquad (60.15)$$

Характер колебаний с точки зрения устойчивости определяется однородной частью уравнения. Эта однородная часть может быть представлена в виде

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + \frac{1}{\omega^2}\psi(\tau)\, x = 0, \qquad (60.16)$$

где положено $\tau = \omega t$.

Мы опять получили линейное уравнение с периодическими коэффициентами, содержащее в качестве параметра величину ω. При тех значениях этого параметра, при которых величина A для уравнения (60.16) будет удовлетворять неравенству $A^2 > 1$, будет иметь место параметрический резонанс, т. е. будут возникать колебания с неограниченно возрастающей амплитудой. Это и будут критические значения угловой скорости. Таким образом, задача определения критических скоростей вращения вала сводится к определению значений параметра, при которых для уравнения (60.16) имеет место неустойчивость.

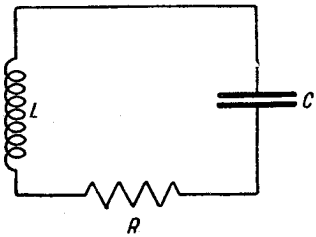

Рис. 16.

Пример 4. *Параметрический резонанс в электрическом колебательном контуре.*

Рассмотрим электрический колебательный контур (рис. 16), состоящий из емкости C, самоиндукции L и сопротивления R. Если через q обозначить заряд, то для него, как известно, имеет место дифференциальное уравнение

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = 0. \qquad (60.17)$$

Допустим теперь, что один из параметров системы, например емкость C, периодически изменяется. Пусть, например,

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_0}(1 + m\cos\omega t).$$

Тогда уравнение (60.17) примет вид

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C_0}(1 + m\cos\omega t)\, q = 0.$$

Полагая в этом уравнении

$$q = xe^{-\frac{R}{2L}t}, \quad t' = \omega t,$$

получим:

$$\frac{d^2x}{dt'^2} + \frac{4L - R^2C_0}{4L^2C_0\omega^2}(1 + \mu\cos t')\,x = 0, \tag{60.18}$$

где

$$\frac{4Lm}{4L - R^2C_0} = \mu.$$

Отсюда видно, что при подходящем выборе частоты ω изменения емкости, несмотря на отсутствие в системе внешних источников тока, в ней могут возникнуть интенсивные электрические колебания. Этим можно воспользоваться для устройства генератора электрического тока, совершенно отличающегося от обычного и основанного на механическом изменении емкости (или самоиндукции). Такого рода генератор был впервые осуществлен Л. И. Мандельштамом и Н. Д. Папалекси [1]).

Задача определения необходимой частоты изменения емкости C сводится к определению параметра ω в уравнении (60.18) таким образом, чтобы решения этого уравнения были неустойчивы, т. е. чтобы для него величина A удовлетворяла неравенству $A^2 > 1$.

Во всех рассмотренных примерах задача сводилась к исследованию уравнения второго порядка вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda p(t)\,x = 0, \tag{60.19}$$

где $p(t)$ — периодическая функция времени, а λ — некоторый параметр. Необходимо определить те значения параметра λ, при которых для этого уравнения будет иметь место устойчивость или неустойчивость. Так как условия устойчивости и неустойчивости определяются неравенствами, то значения λ, при которых будет иметь место устойчивость или неустойчивость, будут, вообще говоря, заполнять некоторые интервалы. Те интервалы значений λ, при которых имеет место устойчивость, мы будем называть *областями устойчивости* уравнения (60.19). Аналогично определяются и *области неустойчивости*.

Итак, во всех предыдущих примерах задача сводилась к определению областей устойчивости и неустойчивости для уравнения вида (60.19). К этой же задаче приводятся и многочисленные другие важнейшие вопросы техники, физики и астрономии. Решению этой задачи

---

[1]) Для того чтобы амплитуда колебаний в такого рода генераторах оставалась конечной, необходимо в систему ввести нелинейность.

посвящены работы А. М. Ляпунова [1]), в которых получен ряд очень важных результатов. Некоторые из этих результатов были повторены О. Хауптом [2]). Существенное обобщение результатов А. М. Ляпунова получено М. Г. Крейном [3]), который рассмотрел систему уравнений второго порядка. Этому же вопросу посвящены также работы И. М. Рапопорта [4]).

Мы рассмотрим подробно указанную задачу при некоторых частных предположениях, а именно, мы будем предполагать, что функция $p(t)$ в уравнении (60.19) мало отличается от своего среднего значения, так что мы можем писать:

$$p(t) = a(1 + \mu f(t)),$$

где $f(t)$ — периодическая функция периода ω, для которой

$$\int_0^\omega f(t)\,dt = 0,$$

a — постоянная, а μ — постоянная величина, численное значение которой мало по сравнению с единицей.

При указанном ограничении функция p будет принимать при всех t значения одного знака, совпадающего со знаком величины a. На основании первой из теорем, установленных в § 59, для уравнения (60.19) всегда имеет место неустойчивость, если $\lambda a < 0$. Поэтому нам предстоит исследовать только тот случай, когда $\lambda a > 0$. Мы можем поэтому уравнение (60.19) записать в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda^2(1 + \mu f(t))\,x = 0. \tag{60.20}$$

В нижеследующих параграфах мы занимаемся подробным исследованием уравнения (60.20). Можно считать с достаточной степенью точности, что все примеры параметрического резонанса, рассмотренные выше, описываются уравнением вида (60.20).

---

[1]) Liapounoff A., Sur une équation différentielle linéaire du second ordre. Comptes Rendus de l'Acad. de sciences. Paris, т. 128, 1899, стр. 910—913.

Liapounoff A., Sur une équation transcendente et les équations différentielles linéaires du second ordre á coefficients périodiques. Comptes rendus, Paris, т. 128, 1899, стр. 1085—1088.

[2]) См. по этому поводу: Коваленко К. Р. и Крейн М. Г., О некоторых исследованиях А. М. Ляпунова по дифференциальным уравнениям с периодическими коэффициентами. ДАН, т. LXXV, № 4, 1950.

[3]) Крейн М. Г., Обобщение некоторых исследований А. М. Ляпунова о линейных дифференциальных уравнениях с периодическими коэффициентами. ДАН, т. LXXIII, № 3, 1950.

[4]) Рапопорт И. М., О линейных дифференциальных уравнениях с периодическими коэффициентами. ДАН, т. LXXVI, № 6, 1951; Рапопорт И. М., К вопросу об устойчивости колебаний материальной системы. ДАН, т. LXXVII, № 1, 1951.

§ 61. Области устойчивости и неустойчивости для уравнений второго порядка.

Итак, рассмотрим уравнение второго порядка

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\lambda^2(1+\mu f)\,x=0, \tag{61.1}$$

где f — периодическая функция времени. Для удобства дальнейших выкладок мы будем предполагать, что период этой функции равен π, чего, очевидно, всегда можно добиться подходящим выбором единицы времени. Предположим для общности, что параметр μ входит не только в качестве множителя перед f, но и что от него зависит также сама функция f. Мы будем предполагать, что эта зависимость является аналитической, так что

$$f=f_1(t)+\mu f_2(t)+\mu^2 f_3(t)+\ldots, \tag{61.2}$$

где функции $f_i(t)$ не зависят от μ и являются периодическими с периодом π и ряд сходится при $|\mu|<a$, где a — некоторая постоянная величина.

Необходимо определить области устойчивости и неустойчивости для уравнения (61.1) в зависимости от значений параметра λ. Будем изменять этот параметр, придавая ему всевозможные вещественные значения. При этом достаточно рассматривать только положительные значения, так как уравнение (61.1) не изменится при замене λ на $-\lambda$ и, следовательно, распределение интересующих нас областей будет при $\lambda<0$ таким же, как и при $\lambda>0$. Областям устойчивости соответствуют те значения λ, при которых коэффициент A для уравнения (61.1) удовлетворяет неравенству $A^2<1$, а областям неустойчивости — те значения, для которых $A^2>1$. Отсюда непосредственно вытекает, что области устойчивости и неустойчивости разделяются теми значениями λ, для которых выполняются либо уравнение

$$A=+1, \tag{61.3}$$

либо уравнение

$$A=-1. \tag{61.4}$$

Исследуем подробней эти уравнения. Уравнение (61.1) содержит параметр λ^2, по отношению к которому оно аналитично (линейно) при всех значениях, и параметр μ, по отношению к которому оно аналитично в области $|\mu|<a$. Отсюда на основании теоремы § 58 коэффициент A является целой функцией параметра λ^2 и аналитической функцией параметра μ в области $|\mu|<a$. Для этого коэффициента мы имеем:

$$A=\frac{1}{2}\{x_1(\pi)+\dot{x}_2(\pi)\},$$

где $x_1(t)$, $x_2(t)$ — два частных решения уравнения (61.1), определяемых начальными условиями:

$$\left.\begin{aligned} x_1(0)=1, \quad \dot{x}_1(0)=0, \\ x_2(0)=0, \quad \dot{x}_2(0)=1. \end{aligned}\right\} \tag{61.5}$$

Эти решения являются целыми функциями λ^2 и аналитическими функциями μ в области $|\mu|<a$. Мы можем поэтому написать:

$$x_1 = x_1^{(0)}(t) + \mu x_1^{(1)}(t) + \ldots,$$
$$x_2 = x_2^{(0)}(t) + \mu x_2^{(1)}(t) + \ldots,$$

где ряды сходятся при $|\mu|<a$ и являются, кроме того, целыми функциями параметра λ^2. Подставляя эти ряды в (61.1) и принимая во внимание (61.2), получим для определения неизвестных функций $x_i^{(0)}$, $x_i^{(1)}$, ... $(i=1, 2)$ следующие уравнения:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x_i^{(0)}}{dt^2} &= -\lambda^2 x_i^{(0)}, \\ \frac{d^2x_i^{(1)}}{dt^2} &= -\lambda^2 x_i^{(1)} - \lambda^2 f_1(t)\, x_i^{(0)}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &(i=1,\ 2). \end{aligned}\right\} \tag{61.6}$$

Кроме того, начальные условия (61.5) дают:

$$\left.\begin{aligned} x_1^{(0)}(0)=1, \quad \dot{x}_1^{(0)}(0)=0, \quad x_2^{(0)}(0)=0, \quad \dot{x}_2^{(0)}(0)=1, \\ x_1^{(j)}(0)=\dot{x}_1^{(j)}(0)=x_2^{(j)}(0)=\dot{x}_2^{(j)}(0)=0 \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots). \end{aligned}\right\} \tag{61.7}$$

Уравнения (61.6) вместе с начальными условиями (61.7) однозначно определяют все функции $x_1^{(j)}$, $x_2^{(j)}$.

В частности, имеем:

$$x_1^{(0)} = \cos\lambda t, \quad x_2^{(0)} = \frac{1}{\lambda}\sin\lambda t,$$

и следовательно, для коэффициента A получаем:

$$A = \cos\lambda\pi + \frac{1}{2}\left\{x_1^{(1)}(\pi) + \dot{x}_2^{(1)}(\pi)\right\}\mu + \ldots \tag{61.8}$$

Установив это, рассмотрим уравнения (61.3) и (61.4). Из (61.8) сразу видно, что эти уравнения удовлетворяются при $\mu=0$ и $\lambda=n$, где n — целое число. При этом при n нечетном удовлетворяется уравнение (61.4). а при n четном — уравнение (61.3). Поэтому можно ожидать, что при $\mu\neq 0$, но достаточно малом уравнение (61.4) имеет решение относительно λ в окрестности любого целого нечетного числа, а уравнение (61.3) имеет решение в окрестности любого

четного числа, обращающиеся в эти целые числа при $\mu = 0$. Для выяснения вопроса о существовании этих решений положим в выражении для A:

$$\lambda = n + \alpha \tag{61.9}$$

и приравняем полученное выражение при n нечетном -1, а при n четном 1. Тогда мы получим следующее уравнение для величины α:

$$(-1)^{n+1}\left\{\frac{\alpha^2\pi^2}{2!} - \frac{\alpha^4\pi^4}{4!} + \ldots\right\} + \\ + \frac{1}{2}\left\{x_1^{(1)}(\pi) + \dot{x}_2^{(1)}(\pi)\right\}_{\lambda=n+\alpha} \cdot \mu + \ldots = 0. \tag{61.10}$$

Левая часть этого уравнения является аналитической функцией величин α и μ, обращающейся в нуль при $\alpha = \mu = 0$. Если бы производная от этой функции по α не обращалась в нуль при $\alpha = \mu = 0$, то на основании теоремы существования неявных функций уравнение (61.10) при μ, отличном от нуля, но достаточно малом, допускало бы одно и только одно решение $\alpha(\mu)$, обращающееся в нуль при $\mu = 0$. Однако производная от левой части (61.10) по α обращается при $\alpha = \mu = 0$ в нуль, и поэтому указанная теорема существования в рассматриваемом случае неприменима.

Но общая теория неявных функций, определяемых аналитическими уравнениями [1]), показывает, что в рассматриваемом случае уравнение (61.10) допускает два и только два решения, обращающихся в нуль при $\mu = 0$, и эти решения при μ, достаточно малом, являются аналитическими функциями либо величины μ, либо величины $\sqrt{\mu}$.

Эти предложения легко доказать следующим образом.

Выделив в уравнении (61.10) члены, свободные от α, члены, линейные относительно этой величины, и члены, содержащие эту величину в степени не ниже второй, мы можем указанное уравнение записать следующим образом:

$$\mu^m(M + \varphi(\mu)) + \alpha\mu^k(N + \psi(\mu)) + \alpha^2\left[(-1)^{n+1}\frac{\pi^2}{2} + F(\mu, \alpha)\right] = 0, \tag{61.11}$$

где $\varphi(\mu)$, $\psi(\mu)$, $F(\mu, \alpha)$ — аналитические функции своих аргументов, обращающиеся в нуль при $\alpha = \mu = 0$, а M и N — постоянные. Если постоянная M равна нулю, что означает, что уравнение (61.10) не содержит членов, свободных от μ, то это уравнение распадается на два: на уравнение $\alpha = 0$ и уравнение

$$\alpha\left[(-1)\frac{\pi^2}{2} + F(\mu, \alpha)\right] + \mu^k(N + \psi(\mu)) = 0.$$

Последнее уравнение имеет одно и только одно решение для $\alpha(\mu)$, обращающееся в нуль при $\mu = 0$, так как к нему применима обычная теорема существования неявных функций. Полученное решение будет при этом

---

[1]) См. Гурса Е., Курс математического анализа, т. II, глава XVII §§ 355, 356, стр. 241—248, ОНТИ, 1936.

аналитическим относительно μ. Присоединяя к нему решение $\alpha=0$, мы получим два и только два решения уравнения (61.10), и эти решения будут аналитическими относительно μ.

Таким образом, при $M=0$ интересующее нас предложение доказано. Допустим теперь, что $M\neq 0$. Здесь необходимо рассмотреть три случая:

1) $k>\frac{m}{2}$,

2) $k<\frac{m}{2}$,

3) $k=\frac{m}{2}$.

Допустим сначала, что имеет место случай 1). Тогда, полагая в уравнении (61.11)

$$\alpha=\mu^{\frac{m}{2}}\beta, \tag{61.12}$$

где β — новая неизвестная, и сокращая на μ^m, получим:

$$\Phi(\beta,\mu)=M+\varphi(\mu)+\beta\mu^{k-\frac{m}{2}}(N+\psi(\mu))+$$
$$+\beta^2\left[(-1)^{n+1}\frac{\pi^2}{2}+F\left(\mu,\beta\mu^{\frac{m}{2}}\right)\right]=0. \tag{61.13}$$

Это уравнение имеет при $\mu=0$ два простых корня $\beta=\frac{1}{\pi}\sqrt{(-1)^{n+1}2M}$ и $\beta=-\frac{1}{\pi}\sqrt{(-1)^{n+1}2M}$. Следовательно, производная $\frac{d\Phi}{d\beta}$ для каждого из этих корней при $\mu=0$ отлична от нуля. Поэтому на основании обычной теоремы неявных функций существует при μ, достаточно малом, два и только два решения уравнения (61.13), из которых одно обращается при $\mu=0$ в $\frac{1}{\pi}\sqrt{(-1)^{n+1}2M}$, а второе в $-\frac{1}{\pi}\sqrt{(-1)^{n+1}2M}$. Так как функция Φ аналитична либо относительно $\sqrt{\mu}$ (при m нечетном), либо относительно μ (при m четном), то и указанные решения будут аналитичны либо относительно $\sqrt{\mu}$, либо относительно μ. Подставляя эти решения в (61.12), мы получим два решения уравнения (61.11), обращающиеся в нуль при $\mu=0$, и эти решения будут аналитичны либо относительно $\sqrt{\mu}$, либо относительно μ.

Допустим теперь, что имеет место случай 2). Положим в уравнении (61.11)

$$\alpha=\mu^{m-k}\beta. \tag{61.14}$$

Тогда уравнение, определяющее β, будет иметь вид

$$M+\varphi(\mu)+\beta(N+\psi(\mu))+\beta^2\mu^{m-2k}\left[(-1)^{n+1}\frac{\pi^2}{2}+F(\mu,\beta\mu^{m-k})\right]=0.$$

Это уравнение имеет при $\mu=0$ простой корень $\beta=-\frac{M}{N}$ [1]), и следовательно, при μ, отличном от нуля, но достаточно малом, оно допускает одно

[1]) Величина N отлична от нуля, ибо если бы она равнялась нулю, что означало бы, что $k=\infty$, то мы имели бы случай 1).

и только одно решение для β, обращающееся в $-\frac{M}{N}$ при $\mu=0$. Это решение будет аналитическим относительно μ, так как таким является само уравнение. Подставляя это решение в (61.14), мы получим решение уравнения (61.11), обращающееся в нуль при $\mu=0$, и это решение будет аналитическим относительно μ. Полагая затем в (61.11)

$$\alpha=\mu^k\beta, \tag{61.15}$$

мы получим для β уравнение

$$\mu^{m-2k}(M+\varphi(\mu))+\beta(N+\psi(\mu))+\beta^2\left[(-1)^{n+1}\frac{\pi^2}{2}+F(\mu,\mu^k\beta)\right]=0,$$

которое имеет одно и только одно решение, обращающееся в $\frac{2(-1)^{n+1}N}{\pi^2}$ при $\mu=0$. Подставляя это решение в (61.15), мы получим второе решение уравнения (61.11), обращающееся в нуль при $\mu=0$. Это решение будет также аналитическим относительно μ.

Допустим, наконец, что имеет место случай 3). Положим:

$$\alpha=\mu^k\beta=\mu^{\frac{m}{2}}\beta.$$

Тогда уравнение, определяющее β, будет иметь вид

$$\Psi(\beta,\mu)=M+\varphi(\mu)+\beta(N+\psi(\mu))+\beta^2\left[(-1)^{n+1}\frac{\pi^2}{2}+F(\mu,\mu^k\beta)\right]=0. \tag{61.16}$$

Это уравнение при $\mu=0$ имеет два корня, определяемые квадратным уравнением

$$(-1)^{n+1}\frac{\pi^2}{2}\beta^2+N\beta+M=0. \tag{61.17}$$

Если это квадратное уравнение имеет простые корни, то уравнение (61.16) будет при $\mu=0$ иметь два решения, аналитических относительно μ и обращающихся, соответственно, при $\mu=0$ в указанные корни квадратного уравнения. Этим двум решениям уравнения (61.16) соответствуют два решения уравнения (61.11), также аналитических относительно μ и обращающихся в нуль при $\mu=0$.

Но если квадратное уравнение (61.17) имеет два равных корня $\beta=\beta^*$, то вопрос делается несколько сложнее, так как производная $\frac{d\psi}{d\beta}$ обращается в нуль при $\beta=\beta^*$, $\mu=0$, и обычная теорема существования для уравнения (61.16) неприменима. Для решения вопроса в этом особом случае положим в уравнении (61.16)

$$\beta=\gamma+\beta^*,$$

после чего мы получим уравнение для γ, которое будет аналитическим относительно γ и μ и которое будет допускать при $\mu=0$ двойной корень $\gamma=0$. Следовательно, это уравнение относительно γ будет такой же структуры, как и уравнение (61.11) для α. Прилагая к этому уравнению предыдущие рассуждения, мы получим два решения для γ, если только мы снова не встретимся со случаем 3), притом с тем его частным видом, который мы отметили как особенный. В последнем случае для неизвестной γ мы должны будем проделать такую же подстановку, как и с неизвестной β, и получить

для новой неизвестной, пусть это будет δ, уравнение вида (61.11). Если для неизвестной δ не получится особенного случая, то мы получим два решения для δ, которые дадут два решения для α нужного вида. Если же уравнение для δ будет принадлежать к числу особенных, то указанный процесс придется продолжить далее. Если этот процесс окажется конечным, то мы получим два решения уравнения (61.11) нужного вида. Может, однако, случиться, что процесс окажется бесконечным. Не останавливаясь на этом исключительном случае, укажем лишь, что в этом случае уравнение (61.11) будет иметь двойное решение, обращающееся в нуль при $\mu = 0$.

Итак, уравнение (61.11) при μ, достаточно малом, всегда имеет два корня, обращающихся в нуль при $\mu = 0$. Эти решения будут притом аналитическими либо относительно $\sqrt{\mu}$, либо относительно μ. Легко видеть, что при μ, достаточно малом, указанное уравнение не имеет других корней, обращающихся в нуль при $\mu = 0$. Действительно, если бы такие корни существовали, то, переходя к пределу при $\mu \to 0$, мы получили бы, что уравнение (61.11) имеет при $\mu = 0$ нулевой корень, кратность которого превышает два.

Подставляя решения для α в (61.9), мы получим решения уравнений (61.3) и (61.4). Придавая n всевозможные целые значения, мы получим все решения уравнений (61.3) и (61.4). При этом при n нечетном мы получим решения уравнения (61.4), а при n четном — решения уравнения (61.3).

Покажем теперь, что все полученные таким образом решения уравнений (61.3) и (61.4) являются вещественными. С этой целью заметим прежде всего, что если λ удовлетворяет уравнению (61.3), то уравнение (61.1) имеет периодическое решение с периодом, равным периоду коэффициента, т. е. π. Действительно, в этом случае корни характеристического уравнения равны единице, откуда непосредственно вытекает существование указанного решения. Если λ удовлетворяет уравнению (61.4), то корни характеристического уравнения будут равны -1 и, следовательно, будет существовать решение $x = \varphi(t)$, удовлетворяющее условию

$$\varphi(t + \pi) = -\varphi(t).$$

Функция $\varphi(t)$ будет также периодической, но с периодом 2π. Установив это, допустим, что $\lambda = \lambda^*$ является корнем уравнения (61.3) и пусть $\varphi(t)$ — соответствующее периодическое решение уравнения (61.1). Имеем:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \lambda^{*2}(1 + \mu f)\varphi \equiv 0.$$

Умножим это тождество на $\bar{\varphi}\,dt$, где $\bar{\varphi}$ — величина, комплексно сопряженная с φ, и проинтегрируем в пределах от 0 до π. Тогда, интегрируя по частям и принимая во внимание, что в силу периодичности

$$\Big|^{\pi} \bar{\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = 0,$$