§ 70. Теорема об устойчивости при постоянно действующих возмущениях.

В § 4 мы уже указывали, что большой практический интерес представляет исследование устойчивости движения не только по отношению к мгновенным возмущениям, но и по отношению к возмущениям, действие которых не прекращается. С точки зрения математической устойчивость по отношению к таким постоянно действующим возмущениям отличается от устойчивости по Ляпунову тем, что возмущаются не только начальные условия движения, но и самые дифференциальные уравнения движения.

Рассматривая невозмущенное движение какой-нибудь системы, составим по обычным правилам дифференциальные уравнения возмущенного движения. Пусть эти уравнения имеют вид

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(t, x_1, \ldots, x_n) \quad (s = 1, 2, \ldots, n). \tag{70.1}$$

Относительно правых частей этих уравнений мы будем предполагать, что они в области

$$t \geqslant 0, \quad |x_s| \leqslant H \tag{70.2}$$

непрерывны и допускают существование единственного решения при заданных начальных условиях. Разумеется, при этом выполняются обычные соотношения $X_s(t, 0, \ldots, 0) = 0$.

Наряду с уравнениями (70.1) рассмотрим уравнения

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(t, x_1, \ldots, x_n) + R_s(t, x_1, \ldots, x_n), \tag{70.3}$$

где функции R_s характеризуют постоянно действующие возмущающие факторы. Эти функции R_s также определены в области (70.2), где они также непрерывны и удовлетворяют условию, что уравнения (70.3), так же как и уравнения (70.1), имеют при заданных начальных условиях единственное решение.

Функции R_s в отличие от функций X_s практически никогда неизвестны. Относительно них можно лишь предполагать, что они удовлетворяют вышеуказанным общим условиям и достаточно малы. В частности, *эти функции не обращаются, вообще говоря, в нуль при* $x_1 = \ldots = x_n = 0$. Это объясняется тем, что невозмущенное движение является частным решением тех дифференциальных уравнений, которые не учитывают возмущающих факторов, т. е. уравнений (70.1) (если пользоваться переменными $x_1, \ldots, x_n$), а не уравнений (70.3).

Невозмущенное движение $x_1 = \ldots = x_n = 0$ будет устойчивым при постоянно действующих возмущениях, когда величины x_s остаются все время малыми при условии, что они были малыми в начальный момент времени и что возмущения R_s также малы. Более точное

определение было дано в § 4. Это определение в переменных x_s формулируется следующим образом.

Определение. *Невозмущенное движение* (тривиальное решение $x_1 = \ldots = x_n = 0$ уравнений (70.1)) *называется устойчивым при постоянно действующих возмущениях, если для всякого положительного* ε, *как бы мало оно ни было, существуют два других положительных числа* $\eta_1(\varepsilon)$ *и* $\eta_2(\varepsilon)$, *таких, что всякое решение уравнений* (70.3) *с начальными значениями* x_s^0 (при $t = t_0$), *удовлетворяющими неравенствам*

$$|x_s^0| \leqslant \eta_1(\varepsilon),$$

при произвольных R_s, *удовлетворяющих в области* $t \geqslant t_0$, $|x_s| \leqslant \varepsilon$, *неравенствам*

$$|R_s(t, x_1, \ldots, x_n)| \leqslant \eta_2(\varepsilon),$$

удовлетворяет при всех $t > t_0$ *неравенствам*

$$|x_s| < \varepsilon.$$

В § 46 была установлена основная теорема второго метода Ляпунова (теорема II) об асимптотической устойчивости. Согласно этой теореме невозмущенное движение будет асимптотически устойчиво в смысле Ляпунова, если для уравнений (70.1) существует функция Ляпунова V со знакоопределенной производной, допускающая бесконечно малый высший предел. Оказывается, что если последнее условие заменить условием, несколько более жестким, что функция V обладает ограниченными частными производными, то невозмущенное движение будет устойчиво при постоянно действующих возмущениях. Покажем, что имеет место следующая теорема [1]),

Теорема. *Если для дифференциальных уравнений возмущенного движения* (70.1) *существует определенно-положительная функция* $V(t, x_1, \ldots, x_n)$, *полная производная которой по времени, составленная в силу этих уравнений, есть функция определенно-отрицательная, и если в области* (70.2) *частные производные* $\frac{\partial V}{\partial x_s}$ *ограничены, то невозмущенное движение устойчиво при постоянно действующих возмущениях.*

Доказательство. Согласно условиям теоремы в области (70.2) выполняются неравенства

$$V(t, x_1, \ldots, x_n) \geqslant W_1(x_1, \ldots, x_n), \tag{70.4}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s} X_s \leqslant -W_2(x_1, \ldots, x_n), \tag{70.5}$$

---

[1]) Малкин И. Г., Об устойчивости при постоянно действующих возмущениях. ПММ, т. VIII, вып. 3, 1944.

где W_1 и W_2 — определенно-положительные функции, не зависящие от t. Кроме того, применяя теорему о среднем значении, мы можем написать:

$$V(t, x_1, \ldots, x_n) = x_1\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\right) + \ldots + x_n\left(\frac{\partial V}{\partial x_n}\right),$$

где производные вычислены в точке $(\theta x_1, \ldots, \theta x_n)$ $(0 < \theta < 1)$. Так как производные $\frac{\partial V}{\partial x_s}$ ограничены, то отсюда следует, что для всякого положительного числа h_1, как бы мало оно ни было, можно найти такое положительное число h_2, что

$$V(t, x_1, \ldots, x_n) < h_2 \quad \text{при} \quad t \geqslant t_0, \quad |x_s| \leqslant h_1, \tag{70.6}$$

т. е. что функция V допускает бесконечно малый высший предел. Пусть x — наибольшая из величин $|x_1|, \ldots, |x_n|$. Обозначим через α точный нижний предел функции $W_1(x_1, \ldots, x_n)$ при условии $H \geqslant x \geqslant \varepsilon$, где ε — произвольное положительное число, меньшее H. Имеем, следовательно, на основании (70.4)

$$V(t, x_1, \ldots, x_n) \geqslant \alpha \quad \text{при} \quad t \geqslant t_0, \quad x \geqslant \varepsilon. \tag{70.7}$$

Пусть l — положительное число, меньшее α. Рассмотрим в пространстве переменных $x_1, \ldots, x_n$ подвижную поверхность

$$V(t, x_1, \ldots, x_n) - l = 0. \tag{70.8}$$

Из (70.6) следует, что для всех точек этой поверхности выполняется условие $x \geqslant \lambda$, где λ — некоторое достаточно малое положительное число. Кроме того, из (70.7) следует, что во всех точках этой поверхности выполняется условие $x < \varepsilon$ и, следовательно, во всех этих точках и при всех значениях $t \geqslant t_0$ выполняется неравенство (70.5). Мы можем поэтому написать:

$$\left\{\frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s} X_s\right\}_{V=l} \leqslant -k^2,$$

где k^2, в силу того что $x \geqslant \lambda$, отлично от нуля.

Но тогда в силу ограниченности $\frac{\partial V}{\partial x_s}$, можно найти настолько малое число $\eta_2(\varepsilon)$, чтобы при

$$|R_s(t, x_1, \ldots, x_n)| \leqslant \eta_2(\varepsilon) \tag{70.9}$$

выполнялось неравенство

$$\left\{\frac{dV}{dt}\right\}_{V=l} = \left\{\frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n} (X_s + R_s)\frac{\partial V}{\partial x_s}\right\}_{V=l} < 0. \tag{70.10}$$

Будем теперь рассматривать величины x_s как функции времени, удовлетворяющие уравнениям (70.3) в предположении, что выполняются неравенства (70.9). Начальные значения x_s^0 величин x_s

(при $t = t_0$) выбираем согласно условиям

$$|x_s^0| \leqslant \eta_1(\varepsilon), \tag{70.11}$$

где положительное число $\eta_1(\varepsilon)$ настолько мало, что выполняются неравенства

$$\eta_1 < \varepsilon, \quad V(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0) < l \quad \text{при} \quad |x_s^0| < \eta_1. \tag{70.12}$$

Покажем, что при всех $t > t_0$ будем иметь:

$$|x_s| < \varepsilon. \tag{70.13}$$

В самом деле, функции x_s не могут перестать удовлетворять неравенствам (70.13) иначе, как достигнув таких значений, при которых выполняется неравенство $x \geqslant \varepsilon$. Но тогда на основании (70.7) функция $V(t, x_1(t), \ldots, x_n(t))$ станет большей, чем l, так как $l < a$. Так как в начальный момент эта функция меньше l, то должен быть и такой момент времени, при котором эта функция принимает значение l, переходя от значений, меньших l, к значениям, большим l. Но тогда в этот момент времени $\left(\frac{dV}{dt}\right)_{V=l} \geqslant 0$, что противоречит (70.10).

Следовательно, при условиях (70.9) и (70.11) выполняются условия (70.13), что и требовалось доказать.

Примечание. Покажем, что при условиях теоремы имеет место своего рода асимптотическая устойчивость.

Выбрав в неравенствах (70.9) число η_2 так, чтобы выполнялось неравенство (70.10), мы будем в силу непрерывности иметь также и неравенства

$$\left\{\frac{dV}{dt}\right\}_{V=c} = \left\{\frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n} (X_s + R_s)\frac{\partial V}{\partial x_s}\right\}_{V=c} < 0, \tag{70.14}$$

где $l_1 \leqslant c \leqslant l$, а $l_1 < l$ — положительное число, достаточно близкое к l. С уменьшением η_2 число l_1 будет также уменьшаться, и при $\eta_2 = 0$ это число может быть принято равным нулю. Таким образом, при всех $t > t_0$ производная $\frac{dV}{dt}$, составленная в силу системы (70.3), будет принимать отрицательные значения для всех значений переменных, лежащих в области, определяемой неравенствами $l_1 \leqslant v(t, x_1, \ldots, x_n) \leqslant l$. Для этой области выполняется неравенство $x > \mu$, где μ — достаточно малое положительное число. Вследствие этого мы можем написать, что в указанной области и при всех значениях $t > t_0$ выполняется неравенство

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s}(X_s + R_s) \leqslant -m^2, \tag{70.15}$$

где m — отличная от нуля постоянная. Что постоянная m получается отличной от нуля, несмотря на то, что t изменяется в бесконечном интервале, вытекает непосредственно из неравенств (70.5), (70.9) и условия теоремы, что для $\frac{\partial V}{\partial x_s}$ существуют не зависящие от t верхние пределы.

Из (70.15) вытекает, что точка $(x_1, \ldots, x_n)$, находившаяся согласно (70.12) в начальный момент внутри области $V < l$, попадает в некоторый момент времени в область $V < l_1$, где и будет затем оставаться. В самом деле, по доказанному выше, точка все время остается внутри области $V < l$, и если бы она все время находилась вне области $V < l_1$, то все время выполнялось бы неравенство (70.15), а отсюда бы следовало неравенство

$$V(t, x_1, \ldots, x_n) \equiv V(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0) + \int_{t_0}^{t} \frac{dV}{dt}\, dt \leqslant$$
$$\leqslant V(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0) - m^2(t - t_0),$$

что невозможно, так как левая часть положительна, а правая при достаточно большом t отрицательна, Таким образом, точка $(x_1, \ldots, x_n)$ непременно попадет в некоторый момент времени в область $V < l_1$. Но попав в эту область, точка $(x_1, \ldots, x_n)$ будет в ней все время оставаться, так как $\left(\frac{dV}{dt}\right)_{V=l_1} < 0$.

Таким образом, при достаточно малых начальных возмущениях точка $(x_1, \ldots, x_n)$ хотя и не будет асимптотически приближаться к началу координат, но будет отбрасываться в некоторую окрестность начала координат, которая может быть сделана сколь угодно малой, если постоянно действующие возмущения достаточно малы.

§ 71. Проблема существования функций Ляпунова.

Таким образом, условия теоремы II второго метода Ляпунова при некоторых небольших добавочных ограничениях (требование ограниченности частных производных вместо условия о бесконечно малом высшем пределе) обеспечивают не только асимптотическую устойчивость в смысле Ляпунова, но и устойчивость более сильную, а именно, устойчивость при постоянно действующих возмущениях. Отсюда, естественно, возникает вопрос, не являются ли условия теоремы II чрезмерно узкими. Другими словами, возникает вопрос об обратимости теоремы II. Этот вопрос представляет интерес не только в связи с разбираемой сейчас задачей, и он в равной степени относится как к теореме II, так и к остальным основным теоремам второго метода. Действительно, если вторым методом пользоваться как основным для решения задачи устойчивости, т. е. если эту задачу

сводить к попыткам построения функций Ляпунова, то должна быть уверенность, что такие функции каждый раз действительно существуют.

Поставленная таким образом проблема существования функций Ляпунова является очень трудной и до сих пор не получила полного разрешения[1]). Впервые занимаясь этой задачей, автор[2]) рассматривал только установившиеся движения для систем второго порядка. Было показано, что теорема I Ляпунова необратима, т. е. было показано, что невозмущенное движение может быть устойчиво и в то же время может не существовать знакоопределенной функции, для которой производная в силу уравнений возмущенного движения была бы знакопостоянной, противоположного знака. При этом речь шла о функциях, не зависящих от t. Было, однако, показано, что можно всегда найти функцию другого вида, являющуюся обобщением функций Ляпунова.

Обращением теоремы I занимался также К. П. Персидский[3]), который рассматривал произвольные системы уравнений возмущенного движения. К. П. Персидский показал, что в случае устойчивости для уравнений возмущенного движения всегда существуют особые функции, являющиеся обобщением функций Ляпунова.

Обращению теоремы II также посвящено несколько работ. Автором была показана[4]) обратимость этой теоремы для систем второго порядка с постоянными коэффициентами. Им же были установлены[5]) достаточные условия существования функций, удовлетворяющих всем условиям теоремы II для системы линейных уравнений с переменными коэффициентами. К. П. Персидский показал[6]), что эти условия являются также необходимыми. При этом установлено, что одной лишь асимптотической устойчивости недостаточно для существования указанной функции. Эти результаты, имеющие непосредственную связь с теорией устойчивости по первому приближению, излагаются ниже, в § 75.

И. Л. Массера[7]) подверг детальному анализу теоремы I и II Ляпунова, а также их различные обобщения. Им было, в частности, показано, что теорема II обратима для установившихся и периоди-

---

[1]) См. примечание в конце книги (стр. 523)

[2]) Малкин И. Г., Das Existenzproblem von Liapounoffschen Funktionen. Изв. Казанского физ.-матем. об-ва, т. IV, 1929—1930.

[3]) Персидский К. П., Об одной теореме Ляпунова. ДАН, т. XIV, № 9, 1937.

[4]) Малкин И. Г., Проблема существования функций Ляпунова. Изв. Казанского физ.-матем. об-ва, т. V, 1931.

[5]) Малкин И. Г., Об устойчивости по первому приближению. Сб. научных трудов Казанского авиац. ин-та, № 3, 1935.

[6]) Персидский К. П., К теории устойчивости интегралов систем дифференциальных уравнений. Изв. физ.-матем. об-ва при Казанском гос. ун-те, т. VIII, 1936—1937.

[7]) Massera I. L., On Liapounoff's condition of stability. Annals of Mathematics, т. 50, № 3, 1949.

ческих движений. Показано, более того, что при асимптотической устойчивости в указанных случаях существует функция V, удовлетворяющая не только условиям теоремы II, но и более жестким условиям теоремы предыдущего параграфа об устойчивости при постоянно действующих возмущениях, т. е. что функция V обладает ограниченными частными производными. Отсюда вытекает, что установившиеся и периодические движения резко отличаются в отношении обратимости теоремы II от общего случая неустановившихся движений, для которых, как указано выше, теорема не обратима даже для линейных уравнений.

Результаты И. Л. Массера относительно установившихся и периодических движений приводятся в двух следующих параграфах. Эти результаты, как мы увидим, позволяют установить некоторые важные общие предложения. Для случая установившихся движений результаты И. Л. Массера уточнены Е. А. Барбашиным [1]).

§ 72. Некоторые свойства установившихся и периодических движений.

Допустим, что правые части уравнений возмущенного движения

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(t, x_1, \ldots, x_n) \quad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{72.1}$$

являются по отношению к t периодическими функциями, периода ω. Мы не исключаем при этом из рассмотрения тот частный случай, когда X_s совсем не зависят от t. Мы будем предполагать, что в области $t \geqslant 0$, $|x_s| \leqslant H$ функции X_s обладают непрерывными частными производными первого порядка по переменным x_s.

Пусть

$$x_s = F_s(t, x_1^0, \ldots, x_n^0, t_0) \quad (s = 1, 2, \ldots, n),$$

— решение системы (72.1), определяемое начальными условиями

$$F_s(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0, t_0) = x_s^0.$$

Согласно известной теореме о зависимости решений дифференциальных уравнений от начальных условий [2]) функции F_s будут обладать непрерывными частными производными первого порядка по переменным t_0, $x_1^0, \ldots, x_n^0$ для всех значений этих переменных, лежащих в области $|t_0| \leqslant \omega$, $|x_s^0| \leqslant H' < H$, и при всех значениях t,

---

[1]) Барбашин Е. А., О существовании гладких решений некоторых линейных уравнений с частными производными. ДАН, т. XXII, № 3, 1950; см. также примечание в конце книги (стр. 524)

[2]) См., например, Степанов В. В., Курс дифференциальных уравнений, стр. 298, изд. 5-е, Гостехиздат, 1950.

при которых еще выполняются условия $|F_s| \leqslant H$. Далее, из самого определения функций F_s вытекает, что для всяких t_1 и $t_2 > t_1$ имеют место тождества

$$\left.\begin{aligned} x_s'' &= F_s(t_2, x_1', \ldots, x_n', t_1) = F_s(t_2, x_1^0, \ldots, x_n^0, t_0), \\ \text{где} \quad & \\ x_s' &= F_s(t_1, x_1^0, \ldots, x_n^0, t_0). \end{aligned}\right\} \quad (72.2)$$

В самом деле, точка $(x_1, \ldots, x_n)$, выходящая в момент времени t_0 из положения $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, достигнет в момент t_1 положения $(x_1', \ldots, x_n')$ и вместе с другой точкой, выходящей в этот же момент времени t_1 из этого же положения $(x_1', \ldots, x_n')$, достигнет к моменту времени t_2 положения $(x_1'', \ldots, x_n'')$, так как начальные условия однозначно определяют движение.

Кроме того, так как уравнения (72.1) не изменяются при замене t на $t + \omega$, то имеют также место тождества

$$F_s(t \pm m\omega, x_1^0, \ldots, x_n^0, t_0 \pm m\omega) = F_s(t, x_1^0, \ldots, x_n^0, t_0), \quad (72.3)$$

где m — произвольное целое число.

Допустим теперь, что невозмущенное движение асимптотически устойчиво. Тогда в области

$$|x_s^0| \leqslant \alpha, \quad (72.4)$$

где α — достаточно малое положительное число, выполняются предельные соотношения

$$\lim_{t \to \infty} F_s(t, x_1^0, \ldots, x_n^0, 0) = 0. \quad (72.5)$$

И. Л. Массера показал, что эти соотношения выполняются равномерно относительно x_j^0, т. е. что для всякого ε, как бы мало оно ни было, можно найти такое не зависящее от x_j^0 число $T(\varepsilon)$, что при всех $t > T$ будут выполняться неравенства $|F_s(t, x_1^0, \ldots, x_n^0, 0)| < \varepsilon$.

Чтобы это показать, определим прежде всего число $\eta(\varepsilon)$ из условия

$$|F_s(t, x_1^0, \ldots, x_n^0, 0)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad |x_j^0| < \eta(\varepsilon). \quad (72.6)$$

Это всегда возможно в силу устойчивости невозмущенного движения. Далее, допустим противное, что вышеуказанное число $T(\varepsilon)$ не существует. Тогда, как бы велико ни было целое число m, всегда найдется такое $t_m > m\omega$ и такая система начальных значений x_{sm}^0, лежащих в области (72.4), что

$$F = \max\{|F_1(t_m, x_{1m}^0, \ldots, x_{nm}^0, 0)|, \ldots, |F_n(t_m, x_{1m}^0, \ldots, x_{nm}^0, 0)|\} \geqslant \varepsilon. \quad (72.7)$$

Так как последовательность точек (x_{sm}^0) лежит в замкнутой области (72.4), то в той же области лежит и предельная точка указанной последовательности. Пусть это будет точка x_s^*. Для этой точки выполняются, следовательно, соотношения (72.5), из которых вытекает, что существует такое достаточно большое целое число N, что будут иметь место неравенства

$$|F_s(N\omega,\ x_1^*,\ \ldots,\ x_n^*,\ 0)| < \frac{1}{2}\eta(\varepsilon). \tag{72.8}$$

Но тогда найдутся сколь угодно большие значения m, для которых будут выполняться неравенства

$$|x_s^{(N)}| = |F_s(N\omega,\ x_{1m}^0,\ \ldots,\ x_{nm}^0,\ 0)| < \eta(\varepsilon). \tag{72.9}$$

Действительно, в последовательности (x_{sm}^0) найдутся точки со сколь угодно большим значением индекса m, которые будут настолько близки к предельной точке, что разности $F_s(N\omega,\ x_{jm}^0,\ 0) - F_s(N\omega,\ x_j^*,\ 0)$ в силу непрерывности F_s будут меньше $\frac{\eta}{2}$. Из (72.9) и (72.6) следует, что при всех $t > 0$

$$|F_s(t,\ x_1^{(N)},\ \ldots,\ x_n^{(N)},\ 0)| < \varepsilon,$$

или, принимая во внимание (72.3) и (72.2),

$$\varepsilon > |F_s(t,\ x_1^{(N)},\ \ldots,\ x_n^{(N)},\ 0)| \equiv |F_s(t+N\omega,\ x_1^{(N)},\ \ldots,\ x_n^{(N)},\ N\omega)| \equiv$$
$$\equiv |F_s(t+N\omega,\ x_{1m}^0,\ \ldots,\ x_{nm}^0,\ 0)|.$$

Полученные неравенства противоречат (72.7), так как существуют такие t_m, для которых $t_m > N\omega$. Полученное противоречие и доказывает справедливость предложения о том, что соотношения (72.5) выполняются равномерно относительно величин x_j^0.

Покажем теперь, что соотношения

$$\lim F_s(t,\ x_1^0,\ \ldots,\ x_n^0,\ t_0) = 0 \qquad (s = 1,\ 2,\ \ldots,\ n) \tag{72.10}$$

выполняются также равномерно относительно величин x_s^0 и t_0, лежащих в области

$$|x_s^0| \leqslant \beta, \qquad 0 \leqslant t_0 \leqslant \omega, \tag{72.11}$$

где β — достаточно малое число.

Действительно, имеем в силу (72.2) тождественно

$$F_s(t,\ x_1^0,\ \ldots,\ x_n^0,\ t_0) = F_s(t,\ x_1',\ \ldots,\ x_n',\ 0),$$

где величины x_s' определяются из уравнений

$$x_s^0 = F_s(t_0,\ x_1',\ \ldots,\ x_n',\ 0). \tag{72.12}$$

Поэтому справедливость интересующего нас сейчас предложения непосредственно вытекает из уже доказанного предложения о соотношениях (72.5), если только величину β в (72.11) взять настолько малой, чтобы величины x_s', определяемые уравнениями (72.12), лежали при всех $0 \leqslant t_0 \leqslant \omega$ в области (72.4).

§ 73. Теорема о существовании функций Ляпунова для периодических и установившихся движений в случае асимптотической устойчивости.

Мы переходим теперь к доказательству следующей теоремы И. Л. Массера.

Теорема. *Если дифференциальные уравнения возмущенного движения имеют вид* (72.1) *и если невозмущенное движение асимптотически устойчиво, то существует определенно-положительная функция* $V(t, x_1, \ldots, x_n)$, *производная которой* $\frac{dV}{dt}$, *составленная в силу этих уравнений, есть функция определенно-отрицательная. При этом* V *будет по отношению к* t *периодической функцией, периода* ω, *и не будет, в частности, совсем зависеть от* t, *если эта величина не содержится явно в функциях* X_s.

Доказательство. Обозначим через $\varphi(t)$, где $t \geqslant t_0$ — точный верхний предел функции

$$F(t, x_1^0, \ldots, x_n^0, t_0) = \sum_{s=1}^{n} F_s^2(t, x_1^0, \ldots, x_n^0, t_0) = \sum_{s=1}^{n} x_s^2$$

по переменным x_j^0 и t_0 в области (72.11), так что

$$F(t, x_1^0, \ldots, x_n^0, t_0) \leqslant \varphi(t) \text{ при } |x_j^0| \leqslant \beta,\ 0 \leqslant t_0 \leqslant \omega,\ t_0 \leqslant t. \quad (73.1)$$

Функция $\varphi(t)$ будет, очевидно, положительной. Кроме того,

$$\lim_{t \to \infty} \varphi(t) = 0. \quad (73.2)$$

В самом деле, пусть ε — сколь угодно малое положительное число. Выберем $T(\varepsilon)$ настолько большим, чтобы при $t > T$ и всех значениях x_j^0 и β, лежащих в области (72.11), выполнялось неравенство

$$F(t, x_1^0, \ldots, x_n^0, t_0) < \varepsilon, \quad (73.3)$$

что по доказанному в предыдущем параграфе всегда возможно. Так как $\varphi(t)$ является точным нижним пределом непрерывной функции в замкнутой области, то оно будет одним из значений, которое эта функция в указанной области принимает. Другими словами, в

области (72.11) существует система чисел $\bar{x}_j^0$ и $\bar{t}_0$, для которой

$$F(t, \bar{x}_1^0, \ldots, \bar{x}_n^0, \bar{t}_0) = \varphi(t)$$

и, следовательно, на основании (73.3) $\varphi(t) < \varepsilon$ при $t > T$, что и доказывает наше утверждение.

Рассмотрим теперь функцию, определяемую равенством

$$V(x_1, \ldots, x_n, t) = \int_t^\infty G[F(\tau, x_1, \ldots, x_n, t)]\, d\tau. \tag{73.4}$$

Здесь $G(\eta)$ — некоторая функция от η, определенная при $\eta \geqslant 0$, принимающая при $\eta > 0$ только положительные значения и обращающаяся в нуль вместе со своей производной $G'(\eta)$ при $\eta = 0$. Кроме того, эта функция обладает тем свойством, что интеграл

$$\int_0^\infty G[\varphi^*(t)]\, dt \tag{73.5}$$

сходится для любой положительной функции $\varphi^*(t)$, удовлетворяющей неравенству $\varphi^*(t) < \varphi(t)$, причем сходимость будет равномерной относительно выбора функции $\varphi^*(t)$. Ниже мы покажем, что такая функция $G(\eta)$ может быть действительно построена.

Покажем прежде всего, что функция V во всех точках области

$$|x_s| \leqslant \beta, \qquad t \geqslant 0, \tag{73.6}$$

действительно существует и непрерывна.

В самом деле, пусть x_j и t лежат в области (73.6), $\tau \geqslant t$, $\tau' = \tau - m\omega \geqslant t - m\omega$, где m — такое целое число, что $0 \leqslant t - m\omega < \omega$. Тогда на основании (72.3) мы можем написать:

$$F(\tau, x_1, \ldots, x_n, t) = F(\tau', x_1, \ldots, x_n, t - m\omega) = \varphi^*(\tau'),$$

причем функция $\varphi^*(\tau')$ при любом t и x_j и области (73.6) удовлетворяет на основании (73.1) неравенству $\varphi^*(\tau') \leqslant \varphi(\tau')$. Вводя в (73.4) вместо переменной интегрирования τ переменную τ', будем иметь:

$$V(x_1, \ldots, x_n, t) = \int_{t-m\omega}^\infty G[\varphi^*(\tau')]\, d\tau'. \tag{73.7}$$

Но согласно выбору функции G интеграл, стоящий в (73.7), сходится равномерно относительно $\varphi^*(\tau')$, т. е. равномерно относительно x_j и t в области (73.6). Отсюда вытекает, что в области (73.6) функция V существует и непрерывна.

Найдем теперь частные производные от V по t и x_s, выполняя дифференцирование под знаком интеграла. Будем иметь:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial x_s} &= \int_t^\infty G'[F(\tau, x_1, \ldots, x_n, t)]\frac{\partial F(\tau, x_1, \ldots, x_n, t)}{\partial x_s}\,d\tau,\\ \frac{\partial V}{\partial t} &= -G[F(t, x_1, \ldots, x_n, t)] + \\ &+ \int_t^\infty G'[F(\tau, x_1, \ldots, x_n, t)\frac{\partial F(\tau, x_1, \ldots, x_n, t)}{\partial t}\,d\tau.\end{aligned}\right\} \quad (73.8)$$

Однако, для того чтобы эти выражения действительно представляли частные производные функции V в области (73.6), необходимо, чтобы входящие в них интегралы сходились и притом равномерно для всех значений x_s и t в указанной области. Для этого необходимо на функцию G наложить еще одно условие, которое может быть получено следующим образом.

В силу условий, наложенных на правые части уравнений (72.1), частные производные

$$\frac{\partial F(t, x_1^0, \ldots, x_n^0, t_0)}{\partial x_s^0}, \quad \frac{\partial F(t, x_1^0, \ldots, x_n^0, t_0)}{\partial t_0}$$

будут существовать и будут непрерывными при всех значениях переменных в области $|x_j^0| \leqslant \beta$, $0 \leqslant t_0 \leqslant \omega$, $t_0 \leqslant t$, так как в силу устойчивости при указанных значениях переменных функции F_s будут оставаться в области определения функций X_s. Мы можем поэтому для всякого t назначить для этих производных некоторый положительный верхний предел $M(t)$. Мы можем при этом предполагать, что функция $M(t)$ непрерывна и не убывает при возрастании t. Тогда, если потребовать, чтобы интеграл

$$\int_0^\infty G'[\varphi^*(\tau)]\,M(\tau)\,d\tau \quad (73.9)$$

сходился при любом выборе функции $\varphi^*(\tau)$, для которой $\varphi^*(\tau) < \varphi(\tau)$, и чтобы сходимость была равномерной относительно $\varphi^*(\tau)$, то интегралы, входящие в выражения (73.8), будут равномерно сходиться в области (73.6). Мы будем предполагать, что функция $G(\eta)$ действительно удовлетворяет указанному условию. Тогда функция V будет определенной и непрерывной вместе со своими частными производными первого порядка во всех точках области (73.6).

Рассмотрим подробнее свойства функции V. В силу (72.3) имеем:

$$V(x_1, \ldots, x_n, t+\omega) = \int_{t+\omega}^{\infty} G[F(\tau, x_1, \ldots, x_n, t+\omega)]\,d\tau =$$

$$= \int_{t}^{\infty} G[F(\tau+\omega, x_1, \ldots, x_n, t+\omega)]\,d\tau =$$

$$= \int_{t}^{\infty} G[F(\tau, x_1, \ldots, x_n, t)]\,d\tau = V(x_1, \ldots, x_n, t),$$

т. е. функция V является периодической относительно t с периодом ω. Если X_s не содержат явно t, то функция V совсем не будет зависеть от t. Это непосредственно вытекает из того обстоятельства, что в этом случае ω можно считать произвольным числом.

Функция V положительна во всех точках области (73.6) и обращается в нуль только при $x_1 = \ldots = x_n = 0$. Будучи же по отношению к t периодической, она необходимо является определенно-положительной, так как мы можем писать:

$$V(x_1, \ldots, x_n, t) \geqslant W(x_1, \ldots, x_n),$$

где W — определенно-положительная функция, представляющая собой точный нижний предел функции $V(x_1, \ldots, x_n, t)$ по переменной t на отрезке $0 \leqslant t \leqslant \omega$.

Составим производную от V по t в силу уравнений (72.1). Мы будем иметь, что $\frac{dV}{dt} = \frac{d\overline{V}}{dt}$, где $\overline{V}$ — результат подстановки в функцию V произвольного решения уравнений (72.1). Но

$$\overline{V} = \int_{t}^{\infty} G\left[F\left(\tau, x_1^0, \ldots, x_n^0, t_0\right)\right] d\tau,$$

так как в силу (72.2)

$$F\left[\tau, F_1\left(t, x_1^0, \ldots, x_n^0, t\right), \ldots, F_n\left(t, x_1^0, \ldots, x_n^0, t_0\right), t\right] \equiv$$
$$\equiv F\left(\tau, x_1^0, \ldots, x_n^0, t_0\right).$$

Следовательно,

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d\overline{V}}{dt} = -G\left[F\left(t, x_1^0, \ldots, x_n^0, t\right)\right] =$$
$$= -G\left[\sum_{s=1}^{n} F_s^2\left(t, x_1^0, \ldots, x_n^0, t_0\right)\right] = -G\left[\sum_{s=1}^{n} x_s^2\right],$$

т. е. $\frac{dV}{dt}$ есть функция определенно-отрицательная.

Таким образом, функция V удовлетворяет всем условиям теоремы, и для того чтобы последняя была полностью доказана, необходимо еще показать, что существует функция G, удовлетворяющая всем указанным для нее условиям. Необходимо, следовательно, показать, что существует положительная функция $G(\eta)$, определенная для $\eta \geqslant 0$, обращающаяся вместе со своей производной $G'(\eta)$ в нуль при $\eta = 0$ и обладающая тем свойством, что интегралы (73.5) и (73.9) сходятся при любом выборе функций $\varphi^*(\tau)$, удовлетворяющих условию $\varphi^*(\tau) \leqslant \varphi(\tau)$, причем сходимость является равномерной относительно $\varphi^*(\tau)$. Фигурирующая в (73.9) величина $M(\tau)$ является положительной, неубывающей, непрерывной функцией τ, определенной при всех $\tau \geqslant 0$. Функция $G(\eta)$ может быть построена следующим образом.

Выберем последовательность чисел t_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ таким образом, чтобы при $t \geqslant t_n$ выполнялось соотношение $\varphi(t) \leqslant \frac{1}{n+1}$. В силу (73.2) такая последовательность существует. Мы будем при этом предполагать, что $t_1 \geqslant 1$, $t_{n+1} \geqslant t_n + 1$. Далее строим функцию $\eta(t)$, полагая $\eta(t_n) = \frac{1}{n}$; $\eta(t)$ линейна в каждом интервале между t_n и t_{n+1} и $\eta(t) = \left(\frac{t_1}{t}\right)^p$ при $0 \leqslant t \leqslant t_1$, где p — целое число,

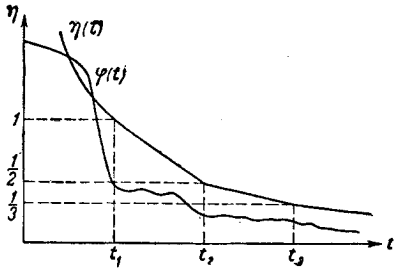

Рис. 18.

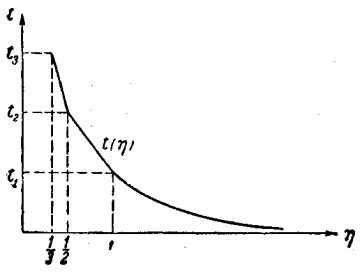

Рис. 19.

выбранное настолько большим, что $\eta'(t_1 - 0) < \eta'(t_1 + 0)$. Очевидно, что $\lim\limits_{t=\infty} \eta(t) = \lim\limits_{\eta \to \infty} t(\eta) = 0$ и $\varphi(t) \leqslant \eta(t)$ при $t \geqslant t_1$. График функции $\eta(t)$ изображен на рис. 18.

Пусть $t(\eta)$ — функция, обратная $\eta(t)$. График этой функции показан на рис. 19. Тогда полагаем:

$$G(\eta) = \int_0^{\eta} \frac{e^{-t(\eta)}}{M[t(\eta)]} d\eta. \tag{73.10}$$

Функция $G(\eta)$, очевидно, положительна при любом $\eta > 0$, и для нее $G(0) = G'(0) = 0$. Далее имеем:

$$G'[\varphi^*(t)] = \frac{e^{-t[\varphi^*(t)]}}{M[t(\varphi^*(t))]}. \tag{73.11}$$

При $t \geqslant t_1$ справедлива оценка $\varphi^*(t) \leqslant \varphi(t) \leqslant \eta(t)$, и, так как $t(\eta)$ — функция убывающая, $t(\varphi^*(t)] \geqslant t[\eta(t)] = t$. Поэтому, учитывая, что $M(t)$ — функция неубывающая, из (73.11) находим:

$$G'[\varphi^*(t)] \leqslant \frac{e^{-t}}{M(t)},$$

откуда сразу получается равномерная сходимость интеграла (73.9). Что же касается интеграла (73.5), то, заменяя в нем нижний предел числом t_1, что для вопроса о сходимости не имеет значения, получим для него выражение

$$I = \int_{t_1}^{\infty} dt \int_0^{\varphi^*(t)} \frac{e^{-t(\eta)}}{M[t(\eta)]} d\eta,$$

для которого справедлива оценка

$$I < \int_{t_1}^{\infty} dt \int_0^{\eta(t)} \frac{e^{-t(\eta)}}{M(0)} d\eta.$$

Заменяя во внутреннем интеграле переменную η переменной $t(\eta)$, найдем:

$$I < \int_{t_1}^{\infty} dt \int_{\infty}^{t} \eta'(t) \frac{e^{-t}}{M(0)} dt.$$

Полученный интеграл, очевидно, сходится, так как, по крайней мере при $t \geqslant t_1$, имеем $|\eta'(t)| < 1$. Отсюда вытекает равномерная относительно $\varphi^*(t)$ сходимость интеграла (73.5).

Таким образом, функция V обладает всеми необходимыми свойствами, и теорема полностью доказана.

§ 74. Основная теорема об устойчивости при постоянно действующих возмущениях для периодических и установившихся движений. Приложение к вопросу об «опасных» и «безопасных» границах области устойчивости.

Построенная в предыдущем параграфе функции V, будучи периодической относительно t, не только допускает бесконечно малый высший предел, но обладает ограниченными частными производными по переменным $x_1, \ldots, x_n$. Следовательно, эта функция удовлетворяет

всем условиям теоремы § 70. Это приводит сразу к следующей теореме.

Теорема. *Для того чтобы установившееся или периодическое движение было устойчиво при постоянно действующих возмущениях, достаточно, чтобы оно было устойчиво асимптотически в смысле Ляпунова. При этом предполагается, что правые части уравнений возмущенного движения (без членов, характеризующих постоянные возмущения) обладают непрерывными частными производными первого порядка.*

Эта теорема показывает, какое важное значение имеет устойчивость в смысле Ляпунова не только в задачах устойчивости, но и во всякой другой задаче, когда точные уравнения по тем или иным причинам приходится заменять приближенными и когда независимое переменное изменяется в бесконечном интервале. Действительно, по крайней мере для уравнений с постоянными и периодическими коэффициентами, рассматриваемое решение приближенных уравнений будет мало отличаться от решения точных уравнений, если оно асимптотически устойчиво в смысле Ляпунова.

Рассмотрим частный случай. Допустим, что уравнения возмущенного движения (72.1) имеют вид

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + X_s(t, x_1, \ldots, x_n), \qquad (74.1)$$

где X_s — аналитические функции, начинающиеся членами не ниже второго порядка. Если характеристические показатели первого приближения имеют отрицательные вещественные части, то невозмущенное движение будет асимптотически устойчиво и, следовательно, устойчиво при постоянно действующих возмущениях. Этот результат для случая, когда уравнения (74.1) не содержат явно t, установлен Г. Н. Дубошиным [1]), а для общего случая периодических коэффициентов — И. А. Артемьевым [2]).

В качестве приложения теоремы об устойчивости при постоянно действующих возмущениях для установившихся и периодических движений рассмотрим вопрос об «опасных» и «безопасных» границах области устойчивости, на котором мы уже останавливались в § 44. Допустим, что уравнения возмущенного движения (72.1) имеют вид

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + \eta(r_{s1}x_1 + \ldots r_{sn}x_n) + \\ + X_s(t, x_1, \ldots, x_n) \qquad (74.2)$$

$$(s = 1, 2, \ldots, n),$$

---

[1]) Дубошин Г. Н.. К вопросу об устойчивости движения относительно постоянно действующих возмущений. Труды ГАИШ, т. XIV, вып. 1, 1940.

[2]) Артемьев И. А., Осуществимые движения. Изв. АН СССР, сер. матем., № 3, 1939.

где μ — малый параметр, p_{sj} и r_{sj} — периодические функции времени, периода ω (в частности, постоянные), а X_s — функции, удовлетворяющие общим условиям § 72 и имеющие порядок малости выше первого. Мы будем предполагать, что система первого приближения при $\mu = 0$ не имеет характеристических показателей с положительной вещественной частью, но имеет характеристические показатели с вещественными частями, равными нулю. Таким образом, при $\mu = 0$ система находится на границе области устойчивости[1]), а при $\mu \neq 0$ она находится вблизи этой границы. Величина параметра μ и характеризует степень близости системы к границе области устойчивости. Мы предполагаем при этом, что коэффициенты r_{sj} таковы, что система первого приближения при $\mu \neq 0$ может иметь характеристические показатели с положительной вещественной частью, так что система может находиться в области неустойчивости.

Допустим, что при $\mu = 0$ невозмущенное движение асимптотически устойчиво в смысле Ляпунова. Тогда оно, по доказанному, будет устойчиво при постоянно действующих возмущениях. Следовательно, при μ, достаточно малом, величины $|x_s|$ будет оставаться малыми, если они были малы в начальный момент времени. При этом, как было показано в примечании в § 70, точка $(x_1, \ldots, x_n)$ будет отбрасываться в некоторую окрестность начала координат, которая, может быть сделана сколь угодно малой при μ, достаточно малом, т. е. если система находится достаточно близко от границы области устойчивости.

Таким образом, если пользоваться терминологией § 44, мы можем сказать, что участки границы области устойчивости, на которых невозмущенное движение асимптотически устойчиво, являются «безопасными». При этом не имеет никакого значения, сколько критических характеристических показателей имеет система первого приближения на границе области устойчивости.

§ 75. Условия существования функций Ляпунова для линейных уравнений в случае асимптотической устойчивости.

Мы переходим теперь к вопросу об обратимости теоремы II для уравнений вида

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}(t)\,x_1 + \ldots + p_{sn}(t)\,x_n \quad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{75.1}$$

где p_{sj} — произвольные непрерывные и ограниченные при $t \geqslant 0$ функции времени. Задача заключается в определении условий, необходимых и достаточных, при которых существует допускающая бесконечно малый высший предел определенно-положительная функция

[1]) Определение границы области устойчивости дано в § 44.

$V(t, x_1, \ldots, x_n)$, производная которой, составленная в силу уравнений (75.1), есть функция определенно-отрицательная. Эти условия даются двумя нижеследующими теоремами, из которых первая установлена К. П. Персидским[1]), а вторая — автором[2]).

Обозначим через $x_{1j}(t, t_0), \ldots, x_{nj}(t, t_0)$ $(j=1, 2, \ldots, n)$ фундаментальную систему решений уравнений (75.1), определяемую начальными условиями:

$$\left.\begin{aligned} x_{sj}(t_0, t_0) &= 0 \quad (s \neq j), \\ x_{ss}(t_0, t_0) &= 1, \end{aligned}\right\} \tag{75.2}$$

где $t_0 \geqslant 0$ — произвольная постоянная. Эти решения мы рассматриваем как функции t и t_0. Пусть a и b — произвольные положительные величины. Тогда n^2 функций $x_{sj}(t, a)$ и n^2 функций $x_{sj}(t, b)$ образуют две фундаментальные системы решений уравнений (75.1). Следовательно, между ними существуют линейные соотношения

$$x_{sk}(t, a) = \sum_{\alpha=1}^{n} c_{\alpha k} x_{s\alpha}(t, b) \qquad (s, k = 1, 2, \ldots, n),$$

где $c_{\alpha k}$ — некоторые постоянные. Полагая в этих соотношениях $t=b$ и принимая во внимание (75.2), находим:

$$x_{sk}(b, a) = c_{sk}$$

и, следовательно, имеют место следующие тождества:

$$x_{sk}(t, a) = \sum_{\alpha=1}^{n} x_{s\alpha}(t, b)\, x_{\alpha k}(b, a). \tag{75.3}$$

Докажем теперь следующие теоремы.

Теорема 1. *Если для уравнений* (75.1) *существует определенно-положительная функция* $V(t, x_1, \ldots, x_n)$, *допускающая бесконечно малый высший предел, производная которой по времени, составленная в силу этих уравнений, есть функция определенно-отрицательная, то при всех* $t \geqslant t_0$ и $t_0 \geqslant 0$ *выполняются неравенства*

$$|x_{sj}(t, t_0)| < Be^{-\alpha(t-t_0)}, \tag{75.4}$$

где B *и* α — *некоторые не зависящие от* t_0 *положительные постоянные.*

Доказательство. Согласно условиям теоремы существует такое достаточно малое положительное число h, что в области

$$t \geqslant 0, \quad |x_s| \leqslant h \tag{75.5}$$

---

[1]) См. сноску [6]) на стр. 306.

[2]) Малкин И. Г., Об устойчивости по первому приближению. Сб. научных трудов Казанского авиац. ин-та, № 3, 1935.

выполняются неравенства

$$V(t, x_1, \ldots, x_n) \geqslant W_1(x_1, \ldots, x_n), \tag{75.6}$$

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s}(p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n) + \frac{\partial V}{\partial t} \leqslant -W_2(x_1, \ldots, x_n), \tag{75.7}$$

где W_1 и W_2 — не зависящие от t определенно-положительные функции.

Так как согласно теореме II невозмущенное движение во всяком случае устойчиво, то при ρ, достаточно малом, для любого решения $x_s(t, t_1)$ уравнений (75.1), начальные значения $x_s^0 = x_s(t_1, t_1)$ которого связаны соотношением

$$\sum_{s=1}^{n} x_s^{02} = \sum_{s=1}^{n} x_s^2(t_1, t_1) = \rho^2, \tag{75.8}$$

будут при всех $t > t_1$ выполняться неравенства $|x_s| < h$. Здесь t_1 — произвольное положительное число. Следовательно, для этого решения все время будет выполняться условие (75.7), из которого вытекает, что функция $V[t, x_1(t, t_1), \ldots, x_n(t, t_1)]$ будет убывающей, и можем поэтому для всех $t > t_1$ написать неравенство

$$W_1[x_1(t, t_1), \ldots, x_n(t, t_1)] \leqslant V[t, x_1(t, t_1), \ldots, x_n(t, t_1)] < \\ < V(t_1, x_1^0, \ldots, x_n^0) \leqslant l(\rho). \tag{75.9}$$

Здесь l есть верхний предел $V(t_1, x_1^0, \ldots, x_n^0)$ при условии (75.8). Это число не зависит от t_1, так как функция V, допуская бесконечно малый высший предел, будет во всяком случае ограниченной. Так как W_1 есть функция определенно-положительная, то из (75.9) вытекает, что при всех $t > t_1$ выполняются неравенства

$$|x_s(t, t_1)| < C^*(\rho), \tag{75.10}$$

где C^* — некоторая не зависящая от t_1 постоянная.

Пусть теперь L — произвольная сколь угодно малая постоянная. Рассмотрим множество значений x_s, лежащих в области (75.5) и удовлетворяющих неравенству $V(t, x_1, \ldots, x_n) \geqslant L$. Так как V допускает бесконечно малый высший предел, то при этом необходимо будет $x = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\} > \lambda(L)$, где $\lambda(L)$ — некоторая достаточно малая постоянная. Но тогда при этом условии мы будем также иметь $W_2(x_1, \ldots, x_n) > l_1(L)$, где $l_1(L)$ — также некоторая постоянная. Таким образом, мы можем писать:

$$\frac{dV}{dt} \leqslant -W_2 < -l_1(L) \text{ при } V(t, x_1, \ldots, x_n) \geqslant L. \tag{75.11}$$

Покажем теперь, что если $T=\frac{l}{l_1}$, то к моменту времени t_1+T мы будем иметь:

$$V[t,\ x_1(t,\ t_1),\ \ldots,\ x_n(t,\ t_1)]<L. \tag{75.12}$$

Допустим противное, что это неверно. Тогда на всем отрезке $[t_1,\ t_1+T]$ будет выполняться неравенство $V\geqslant L$, ибо если бы неравенство (75.12) выполнялось при каком-нибудь $t_1<t<t_1+T$, то оно выполнялось бы и при $t=t_1+T$, так как $V[t,\ x_1(t,\ t_1),\ldots$ $\ldots,\ x_n(t,\ t_1)]$ есть функция убывающая. Но если при всех $t_1\leqslant t\leqslant$ $\leqslant t_1+T$ выполняется $V\geqslant L$, то на основании (75. 11)

$$L\leqslant V[t_1+T,\ x_1(t_1+T,\ t_1),\ \ldots,\ x_n(t_1+T,\ t_1)]=$$
$$=V(t_1,\ x_1^0,\ \ldots,\ x_n^0)+\int\limits_{t_1}^{t_1+T}\frac{dV}{dt}dt<l-l_1T=0,$$

что невозможно, так как L — число положительное.

Таким образом, при $t=t_1+T$ выполняется условие (75.12). Выберем теперь L настолько малым, чтобы из (75.12) вытекало

$$|x_s(t,\ t_1)|<\frac{M\rho}{n}, \tag{75.13}$$

где M — положительное число, меньшее единицы. Это возможно, так как V допускает бесконечно малый высший предел. При этом число L не будет зависеть от t_1. Но тогда и $T=\frac{l}{l_1(L)}$ не будет зависеть от t_1. Мы приходим, таким образом, к следующему выводу: для любого решения $x_s(t,\ t_1)$ уравнений (75.1), для начальных значений которого выполняется условие (75.8), будут при всех $t>t_1$ выполняться неравенства (75.10) и при $t=t_1+T$, где T — некоторое не зависящее от t_1 число, — неравенства (75.13).

Установив это, положим $x_s(t,\ t_1)=\rho x_{sj}(t,\ t_1)$. Условие (75.8) при этом, очевидно, выполняется. Тогда из (75.10) и (75.13) находим, что при любом t_1 и $t>t_1$

$$|x_{sj}(t,\ t_1)|<\frac{C^*(\rho)}{\rho}=c\quad(s,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{75.14}$$

где c не зависит от t_1, и

$$|x_{sj}(t_1+T_1,\ t_1)|<\frac{M}{n}. \tag{75.15}$$

Покажем теперь, что если m — любое целое число, то

$$|x_{sj}(t_1+mT,\ t_1)|<M^m. \tag{75.16}$$

Так как эти неравенства во всяком случае выполняются при $m=1$, то нам достаточно показать их справедливость, предположив, что

$|x_{sj}[t_1+(m-1)T,\ t_1]| < M^{m-1}$. Но, сделав такое предположение и положив в тождествах (75.3) $t=mT+t_1$, $a=t_1$, $b=(m-1)T+t_1$, будем иметь:

$$|x_{sj}(mT+t_1,\ t_1)| =$$

$$= \left|\sum_{\alpha=1}^{n} x_{s\alpha}[mT+t_1,\ (m-1)T+t_1]\, x_{\alpha j}[(m-1)T+t_1,\ t_1]\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M}{n}\sum_{\alpha=1}^{n} |x_{\alpha j}[t_1+(m-1)T,\ t_1]| < M\cdot M^{m-1} = M^m,$$

что и доказывает наше предложение.

Рассмотрим теперь произвольные числа $t_0>0$ и $t>t_0$. Пусть $mT \leqslant t-t_0 = mT+\tau < (m+1)T$, где m — целое число. Полагая в (75.3) $a=t_0$, $b=t_0+mT$, получим:

$$x_{sj}(t,\ t_0) = \sum_{\alpha=1}^{n} x_{s\alpha}(t,\ t_0+mT)\, x_{\alpha j}(t_0+mT,\ t_0),$$

и так как $t \geqslant t_0+mT$, то, применяя (75.14) и (75.16), найдем:

$$|x_{sj}(t,\ t_0)| < ncM^m = ncM^{\frac{t-t_0-\tau}{T}} \leqslant \frac{nc}{M} M^{\frac{t-t_0}{T}}.$$

Отсюда, полагая $B=\frac{nc}{M}$, $M^{\frac{1}{T}}=e^{-\alpha}$, где $\alpha>0$, в силу того что $M<1$, окончательно найдем, что при всех t_0 и $t>t_0$ выполняются неравенства (75.4), что и доказывает теорему.

Теорема 2. *Если выполняются неравенства* (75.4), *то существует определенно-положительная функция* $V(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n)$, *допускающая бесконечно малый высший предел, производная которой, составленная в силу уравнений* (75.1), *есть функция определенно-отрицательная. При этом*[1]), *если* $W(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n)$ *есть произвольная определенно-положительная форма какого-нибудь порядка* m, *коэффициенты которой являются ограниченными и непрерывными функциями времени, то функция* V *может быть выбрана в виде формы того же порядка, для которой*

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s}(p_{s1}x_1+\ldots+p_{sn}x_n) + \frac{\partial V}{\partial t} = -W(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n). \tag{75.17}$$

---

[1]) Эта часть теоремы является уточнением формулировки, данной в работе, цитированной на стр. 318.

Доказательство. Обозначим через $x_s(t) = F_s(t, x_1^0, \ldots, \ldots, x_n^0, t_0)$ решение уравнений (75.1) с начальными условиями $x_s(t_0) = x_s^0$. Очевидно, имеем:

$$x_s(t) = F_s(t, x_1^0, \ldots, x_n^0, t_0) = \sum_{\alpha=1}^{n} x_{s\alpha}(t, t_0) x_\alpha^0. \qquad (75.18)$$

Пусть $W(t, x_1, \ldots, x_n)$ — произвольная форма m-го порядка переменных $x_1, \ldots, x_n$, коэффициенты которой являются непрерывными и ограниченными функциями времени. Рассмотрим форму m-го порядка, определяемую равенством

$$V(t, x_1, \ldots, x_n) =$$

$$= \int_t^\infty W[\tau, F_1(\tau, x_1, \ldots, x_n, t), \ldots, F_n(\tau, x_1, \ldots, x_n, t)]\, d\tau, \qquad (75.19)$$

и покажем, что эта форма удовлетворяет всем условиям теоремы.

В самом деле, коэффициенты формы V представляют собой суммы членов вида

$$P(t) = \int_t^\infty f(\tau) x_{s_1 j_1}^{m_1}(\tau, t) \ldots x_{s_n j_n}^{m_n}(\tau, t)\, d\tau, \qquad (75.20)$$

где $f(t)$ — некоторые непрерывные и ограниченные функции t, представляющие собой линейные комбинации с целочисленными коэффициентами коэффициентов формы $W(t, x_1, \ldots, x_n)$, а $m_1, \ldots, m_n$ — целые неотрицательные числа, для которых $m_1 + m_2 + \ldots + m_n = m$.

Из условий (75.4) сразу вытекает, что все интегралы (75.20) сходятся и, следовательно, форма V действительно существует. Более того, из этих неравенств сразу вытекает, что все функции (75.20) ограничены при $t \geqslant 0$. Действительно, имеем:

$$|P(t)| < B^m \int_t^\infty |f(\tau)| e^{-m\alpha(\tau - t)}\, dt < B^m M \int_t^\infty e^{-m\alpha(\tau - t)}\, d\tau = \frac{B^m M}{m\alpha},$$

где M — верхний предел функции $f(\tau)$. Таким образом, форма V обладает ограниченными коэффициентами, и, следовательно, допускает бесконечно малый высший предел.

Форма V, как это непосредственно следует из (75.19), будет во всяком случае положительной. Покажем, что она является определенно-положительной.

Обозначим с этой целью через $\Delta(\tau, t)$ определитель $|x_{sj}(\tau, t)|$, через $\Delta_{sj}(\tau, t)$ — его минор, соответствующий элементу x_{sj}, и рас-

смотрим форму m-го порядка переменных y_s:

$$W(\tau, y_1, \ldots, y_n) - \lambda^2 \sum_{\alpha=1}^{n} \left\{ \sum_{\beta=1}^{n} \Delta_{\beta\alpha}(\tau, t) y_\beta \right\}^m, \tag{75.21}$$

где λ — вещественное число. Из (75.4) следует, что для величин $\Delta_{\beta\alpha}$ при $\tau \geqslant t$ могут быть назначены некоторые, независящие ни от τ, ни от t, постоянные верхние пределы. И так как W есть форма определенно-положительная, то отсюда следует, что постоянную λ можно выбрать настолько малой, чтобы форма (75.21) была также определенно-положительной. Мы будем предполагать, что λ действительно выбрано согласно этому условию. Следовательно, если в выражение (75.21) подставим вместо y_s любые величины, то оно будет принимать положительные значения. В частности, если положим:

$$y_s = \sum_{\alpha=1}^{n} x_{s\alpha}(\tau, t) x_\alpha = F_s(\tau, x_1, \ldots, x_n, t),$$

то будем иметь:

$$W[\tau, F_1(\tau, x_1, \ldots, x_n, t), \ldots, F_n(\tau, x_1, \ldots, x_n, t)] - \\ - \lambda^2 \sum_{\alpha=1}^{n} \left\{ \sum_{\beta=1}^{n} \Delta_{\beta\alpha}(\tau, t) F_\beta(\tau, x_1, \ldots, x_n, t) \right\}^m > 0.$$

Но

$$\sum_{\beta=1}^{n} \Delta_{\beta\alpha}(\tau, t) F_\beta = \sum_{\beta, \gamma=1}^{n} \Delta_{\beta\alpha}(\tau, t) x_{\beta\gamma}(\tau, t) x_\gamma = \Delta(\tau, t) x_\alpha,$$

так как

$$\sum_{\beta=1}^{n} \Delta_{\beta\alpha} x_{\beta\gamma} = \delta_{\alpha\gamma} \Delta,$$

где $\delta_{\alpha\gamma}$ — символ Кронекера: $\delta_{\alpha\gamma} = 0$ при $\alpha \neq \gamma$ и $\delta_{\alpha\gamma} = 1$ при $\alpha = \gamma$. Следовательно,

$$W[\tau, F_1(\tau, x_1, \ldots, x_n, t), \ldots, F_n(\tau, x_1, \ldots, x_n, t)] - \\ - \lambda^2 \Delta^m(\tau, t) \sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha^m > 0,$$

откуда на основании (75.19) находим:

$$V(t, x_1, \ldots, x_n) > \lambda^2 Q(t) \sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha^m, \tag{75.22}$$

где

$$Q(t) = \int_t^\infty \Delta^m(\tau, t)\, d\tau = \int_t^\infty \exp\left(m \sum_{s=1}^{n} \int_t^\tau p_{ss}(t)\, dt \right) d\tau.$$

Далее имеем тождественно

$$\int_t^\infty \sum_{s=1}^n p_{ss}(\tau) \exp\left(m \int_t^\tau \sum_{s=1}^n p_{ss}(t)\,dt\right) d\tau = -\frac{1}{m}.$$

Применяя теорему о среднем значении, найдем:

$$\left(\sum_{s=1}^n p_{ss}\right)^* Q(t) = -\frac{1}{m}, \tag{75.23}$$

где $\left(\sum p_{ss}\right)^*$ — среднее значение функции $\sum p_{ss}$ в интервале (t, ∞).

Но так как функции p_{ss} ограничены, а функция $Q(t)$ положительна, то из (75.23) следует, что функция $Q(t)$ превосходит при любом $t \geqslant 0$ некоторую положительную постоянную a^2. Следовательно, из (75.22) находим:

$$V(t, x_1, \ldots, x_n) > \lambda^2 a^2 \sum_{\alpha=1}^n x_\alpha^m,$$

что показывает, что форма V определенно-положительна.

Остается показать, что выполняется уравнение (75.17). С этой целью, поступая так же, как и в § 73, обозначим через $\overline{V}(t)$ функцию, в которую обратится V для произвольного решения уравнений (75.1), т. е. результат подстановки в V вместо x_s функций (75.18). Тогда будем иметь $\frac{dV}{dt} = \frac{d\overline{V}}{dt}$. Но имеем тождественно (см. § 72, формулы (72.2))

$$F_s\left[\tau, F_1(t, x_1^0, \ldots, x_n^0, t_0), \ldots, F_n(t, x_1^0, \ldots, x_n^0, t_0), t\right] = \\ = F_s(\tau, x_1^0, \ldots, x_n^0, t_0),$$

следовательно,

$$\overline{V}(t) = \int_t^\infty W\left[\tau, F_1(\tau, x_1^0, \ldots, x_n^0, t_0), \ldots, F_n(\tau, x_1^0, \ldots, x_n^0, t_0)\right] d\tau,$$

$$\frac{dV}{dt} = -W\left[t, F_1(t, x_1^0, \ldots, x_n^0, t_0), \ldots, F_n(t, x_1^0, \ldots, x_n^0, t_0)\right] = \\ = -W(t, x_1, \ldots, x_n),$$

что и доказывает наше предложение.

Справедливость (75.17) может быть, конечно, непосредственно проверена прямым дифференцированием. Для этого понадобится воспользоваться легко доказываемыми тождествами

$$\frac{dx_{sj}(\tau, t)}{dt} + \sum_{\alpha=1}^n p_{\alpha j}(t)\, x_{s\alpha}(\tau, t) \equiv 0. \tag{75.24}$$

Таким образом, теорема полностью доказана.

Теорема 1 и 2 показывают, что необходимым и достаточным условием существования для уравнений (75.1) функции Ляпунова, удовлетворяющей всем условиям теоремы II об асимптотической устойчивости, является выполнение неравенств (75.4). Это более жесткое требование, чем асимптотическая устойчивость, так как при выполнении неравенств (75.4) функции x_s будут с неограниченным возрастанием t стремиться к нулю как показательные функции, а между тем для уравнений с переменными коэффициентами функции x_s могут при $t \to \infty$ стремиться к нулю, не удовлетворяя этому условию. Это легко видеть хотя бы из уравнения

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{1+t}x,$$

для которого общее решение

$$x = \frac{x_0}{1+t}$$

стремится к нулю как степенная функция. Отсюда следует, что *теорема* II *А. М. Ляпунова необратима.*

Из доказанных теорем вытекает справедливость также и следующей теоремы.

Теорема 3. *Если для уравнений* (75.1) *существует какая-нибудь функция Ляпунова, удовлетворяющая всем условиям теоремы* II *об асимптотической устойчивости, то для них существует функция Ляпунова, обладающая такими же свойствами и представляющая собой форму заданного порядка.*

Б. ТЕОРИЯ ПЕРВОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ.

§ 76. Характеристичные числа Ляпунова.

В этом разделе мы занимаемся изучением с точки зрения устойчивости системы линейных уравнений с переменными коэффициентами, подобно тому как мы это делали для уравнений с постоянными и периодическими коэффициентами. Задача при этом делается, конечно, значительно сложнее. Тем не менее и здесь получены некоторые важные для практики и для теории общие результаты.

Для системы линейных уравнений с переменными коэффициентами можно подобрать некоторые числа, играющие для них такую же роль, как корни характеристического уравнения для систем с постоянными коэффициентами и характеристические показатели для систем с периодическими коэффициентами. Это — так называемые *характеристичные числа* решений, введенные Ляпуновым. Но прежде чем рассматривать характеристичные числа решений, дадим определение характеристичного числа функции.

Мы будем рассматривать вещественные или комплексные функции $f(t)$ вещественного переменного t, определенные на всей вещественной полуоси $t \geqslant 0$. Для простоты мы будем рассматривать только непрерывные функции. Функции $f(t)$ могут быть как ограниченные, так и неограниченные. В первом случае для всех $t \geqslant 0$ выполняется неравенство $|f(t)| < A$, где A — достаточно большое положительное число, а во втором случае, как бы велико ни было A, найдутся такие значения t, для которых $|f(t)| > A$, что, очевидно, может быть записано таким образом: $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}} |f(t)| = \infty$.

Ограниченную функцию $f(t)$, для которой $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = 0$, будем называть *исчезающей*.

Докажем прежде всего следующую лемму.

Лемма. *Допустим, что для функции $f(t)$ существуют два вещественных числа λ и μ, таких, что функция $f(t)e^{\mu t}$ является неограниченной, а функция $f(t)e^{\lambda t}$ — исчезающей. Тогда существует вещественное число a, такое, что при любом положительном числе ε, как бы мало оно ни было, функция $f(t)e^{(a+\varepsilon)t}$ будет неограниченной, а функция $f(t)e^{(a-\varepsilon)t}$ — исчезающей, так что*

$$\left.\begin{aligned} &\overline{\lim_{t\to\infty}} |f(t)| e^{(a+\varepsilon)t} = +\infty, \\ &\lim_{t\to\infty} f(t) e^{(a-\varepsilon)t} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{76.1}$$

Доказательство. Допустим сначала, что в интервале (λ, μ) имеется число a, такое, что функция $f(t)e^{at}$ является ограниченной, но не исчезающей. Тогда это число a и будет искомым, так как для него, очевидно, выполняются условия (76.1). Допустим теперь, что такого числа a не существует. Тогда для всякого числа λ_0 в интервале (λ, μ) функции $f(t)e^{\lambda_0 t}$ будет либо неограниченной, либо исчезающей. При этом очевидно, что число λ_0, для которого функция $f(t)e^{\lambda_0 t}$ является исчезающей, меньше любого λ_0, при котором эта функция является неограниченной. Мы можем поэтому в интервале (λ, μ) вставить две последовательности чисел $\lambda < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots$ и $\mu > \mu_1 > \mu_2 > \mu_3 > \ldots$ так, чтобы любое число первой последовательности было меньше любого числа второй последовательности, чтобы разность $\lambda_n - \mu_n$ стремилась с возрастанием n к нулю и чтобы при любом n функция $f(t)e^{\lambda_n t}$ была исчезающей, а функция $f(t)e^{\mu_n t}$ неограниченной. Полученные последовательности определяют сечение a, не меньшее ни одного из чисел λ_n и не большее ни одного из чисел μ_n. Это число a и будет искомым. Таким образом, лемма доказана.

Число a, удовлетворяющее условиям (76.1) т. е. условиям, что функция $f(t)e^{(a+\varepsilon)t}$ при любом сколь угодно малом положительном ε

будет неограниченной, а функция $f(t)\,e^{(a-\varepsilon)t}$ — исчезающей, называется по Ляпунову *характеристичным числом* функции $f(t)$.

Если функция $f(t)\,e^{\lambda t}$ является исчезающей при любом λ, то мы будем говорить, что характеристичное число $f(t)$ равно $+\infty$. Если же, напротив, $f(t)\,e^{\lambda t}$ есть функция, неограниченная при любом λ, то мы будем говорить, что характеристичное число $f(t)$ равно $-\infty$. При этом условии любая функция $f(t)$ имеет конечное или бесконечное характеристичное число.

Характеристичное число функции $f(t)$ мы будем в дальнейшем обозначать символом $X\{f\}$.

Покажем, что имеем тождественно

$$X\{f\} = -\overline{\lim_{t\to\infty}}\,\frac{\ln|f(t)|}{t}. \tag{76.2}$$

В самом деле, пусть $X\{f\} = a$, так что при сколь угодно малом положительном ε выполняются условия (76.1). Первое из этих условий показывает, что существует последовательность $t_1, t_2, \ldots \to\infty$, для которой $|f(t_n)|\,e^{(a+\varepsilon)t_n}\to\infty$, так что, начиная с достаточно большого n, будут во всяком случае выполняться неравенства

$$|f(t_n)|\,e^{(a+\varepsilon)t_n} > 1. \tag{76.3}$$

С другой стороны, из второго условия (76.1) вытекает, что при *всех* $t > T$, где T — достаточно большое число, выполняется

$$|f(t)|\,e^{(a-\varepsilon)t} < 1. \tag{76.4}$$

Из (76.3) находим:

$$\ln|f(t_n)| + (a+\varepsilon)\,t_n > 0,$$

или

$$\frac{\ln|f(t_n)|}{t_n} > -a-\varepsilon. \tag{76.5}$$

Точно так же из (76.4) получаем:

$$\frac{\ln|f(t)|}{t} < -a+\varepsilon. \tag{76.6}$$

Выполнение неравенства (76.6) при любом $t > T$ и одновременное существование последовательности, для которой выполняется неравенство (76.5), и показывают, что $\overline{\lim_{t\to\infty}}\,\frac{\ln|f(t)|}{t} = -a$, т. е. справедливость (76.2).

Формула (76.2) дает наиболее простой способ вычисления характеристичного числа заданной функции. В частности, она показывает, что если выражение $-\frac{1}{t}\ln|f(t)|$ стремится к определенному пределу при $t\to\infty$, то этот предел и будет характеристичным числом функции

$f(t)$. Отсюда между прочим следует, что *характеристичное число степенной функции при любом показателе степени равно нулю.*

В самом деле, имеем:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\ln t^m}{t}=\lim_{t\to\infty}\frac{m\ln t}{t}=0.$$

Приведем еще несколько примеров, заимствованных у А. М. Ляпунова. Имеем:

$$\left.\begin{aligned}
&1)\ X\left\{e^{t\cos\frac{1}{t}}\right\}&&=-1,\\
&2)\ X\left\{e^{-t\cos\frac{1}{t}}\right\}&&=+1,\\
&3)\ X\left\{e^{\pm t\sin t}\right\}&&=-1,\\
&4)\ X\left\{t^t\right\}&&=-\infty.
\end{aligned}\right\}\qquad(76.7)$$

В самом деле, имеем:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\ln e^{\pm t\cos\frac{1}{t}}}{t}=\lim_{t\to\infty}\left[\pm\cos\frac{1}{t}\right]=\pm 1,$$

откуда сразу вытекает справедливость первых двух примеров.

Далее,

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\ln e^{\pm t\sin t}}{t}=\overline{\lim_{t\to\infty}}\,[\pm\sin t]=+1,$$

откуда вытекает справедливость третьего примера. Точно так же легко убеждаемся и в справедливости четвертого примера.

Отметим в заключение, что если характеристичное число функции положительно, то функция стремится к нулю как показательная функция. Если же характеристичное число функции отрицательно, то эта функция будет неограниченной.

§ 77. Основные свойства характеристичных чисел.

Докажем сейчас некоторые основные свойства характеристичных чисел функций, установленные А. М. Ляпуновым.

Теорема 1. *Характеристичное число суммы двух функций равно наименьшему из характеристичных чисел этих функций, когда эти числа различны, и не менее их, когда они равны.*

Доказательство. Пусть $\lambda=X\{f\}$, $\mu=X\{\varphi\}$ и допустим сначала, что $\lambda<\mu$. Тогда для всякого положительного ε функция

$$(f+\varphi)\,e^{(\lambda-\varepsilon)t}=fe^{(\lambda-\varepsilon)t}+\varphi e^{(\lambda-\varepsilon)t}\qquad(77.1)$$

будет исчезающей, так как исчезающими будут оба слагаемых. Напротив, функция

$$(f+\varphi)\,e^{(\lambda+\varepsilon)\,t}=fe^{(\lambda+\varepsilon)\,t}+\varphi e^{(\lambda+\varepsilon)\,t} \tag{77.2}$$

будет неограниченной при $\varepsilon<\mu-\lambda$, так как первое слагаемое будет функцией неограниченной, а второе — исчезающей. Отсюда следует, что $X\{f+\varphi\}=\lambda$.

Допустим теперь, что $\lambda=\mu$. Тогда при любом ε сумма (77.1) будет по-прежнему исчезающей, так как исчезающими будут оба слагаемых этой суммы. Что же касается суммы (77.2), то теперь оба слагаемых будут неограниченными, вследствие чего сумма может оказаться исчезающей. Поэтому при $\lambda=\mu$ мы можем лишь утверждать, что $X\{f+\varphi\}\geqslant\lambda$.

Теорема 2. *Характеристичное число произведения двух функций не менее суммы их характеристичных чисел.*

Доказательство. Пусть $X\{f\}=\lambda$, $X\{\varphi\}=\mu$. Тогда для всякого положительного ε функция

$$\varphi e^{\left(\lambda-\frac{\varepsilon}{2}\right)t}\cdot fe^{\left(\mu-\frac{\varepsilon}{2}\right)t}=f\varphi e^{(\lambda+\mu-\varepsilon)\,t}$$

будет исчезающей. Отсюда следует, что $X\{f\varphi\}\geqslant\lambda+\mu$, что и требовалось доказать.

Что характеристичное число произведения может быть больше суммы характеристичных чисел множителей, легко видеть на следующем примере. Характеристичное число произведения двух функций $e^{t\sin t}e^{-t\sin t}$, равного единице, есть нуль. В то же время характеристичное число каждого из множителей, как это видно из (76.7), равно -1, и, следовательно, их сумма равна -2.

Следствие. *Сумма характеристичных чисел функций f и $\frac{1}{f}$ не более нуля.*

Теорема 3. *Для того чтобы сумма характеристичных чисел функций f и $\frac{1}{f}$ равнялась нулю, необходимо и достаточно, чтобы выражение $\frac{1}{t}\ln|f(t)|$ стремилось к определенному пределу при $t\to\infty$.*

Доказательство. Если по условию $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln|f(t)|=a$, то на основании (76.2)

$$X\{f\}=-a,\quad X\left\{\frac{1}{f}\right\}=a,$$

что доказывает достаточность высказанного в теореме условия.

Напротив, если $X\{f\}+X\left\{\frac{1}{f}\right\}=0$, то

$$0=-\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\ln|f(t)|}{t}-\overline{\lim_{t\to\infty}}\left[-\frac{\ln|f(t)|}{t}\right]=$$

$$=-\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\ln|f(t)|}{t}+\underline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\ln|f(t)|}{t},$$

что показывает, что функции $\frac{1}{t}\ln|f(t)|$ при $t\to\infty$ имеет определенный предел. Этим доказывается необходимость высказанного в теореме условия.

Теорема 4. *Если сумма характеристичных чисел функций f и $\frac{1}{f}$ равна нулю, то характеристичное число произведения из функции f и какой-либо функции φ равно сумме характеристичных чисел множителей.*

Доказательство. С одной стороны, имеем:

$$X\{f\varphi\}\geqslant X\{f\}+X\{\varphi\}.$$

С другой стороны, по условию теоремы

$$X\{\varphi\}=X\left\{f\varphi\cdot\frac{1}{f}\right\}\geqslant X\{f\varphi\}+X\left\{\frac{1}{f}\right\}=X\{f\varphi\}-X\{f\},$$

или

$$X\{f\varphi\}\leqslant X\{\varphi\}+X\{f\},$$

откуда

$$X\{\varphi f\}=X\{\varphi\}+X\{f\},$$

что и требовалось доказать.

Рассмотрим интеграл

$$F(t)=\int_a^t f(t)\,dt,$$

где a — произвольная постоянная, если характеристичное число функции $f(t)$ отрицательно или равно нулю, и интеграл

$$F(t)=\int_t^\infty f(t)\,dt,$$

если характеристичное число функции $f(t)$ положительно. При таком условии о пределах интегрирования имеет место следующая теорема.

Теорема 5. *Характеристичное число интеграла не менее характеристичного числа подынтегральной функции.*

Доказательство. Пусть $\lambda=X\{f\}$. Тогда при всяком положительном η функция $fe^{(\lambda-\mu)t}$ будет исчезающей и, следовательно, ограниченной. Пусть M — верхний предел модуля этой функции.

Допустим сначала, что $\lambda > 0$. Тогда, полагая $\eta < \lambda$, будем иметь:

$$|F(t)| < M \int_t^\infty e^{-(\lambda-\eta)t}\,dt = \frac{M}{\lambda-\eta} e^{-(\lambda-\eta)t},$$

откуда вытекает, что функция $F(t)\,e^{(\lambda-\varepsilon)t}$ есть исчезающая при любом $\varepsilon > \eta$ и, следовательно, при любом ε, так как η можно считать сколь угодно малым. Это показывает, что $X\{F\} \geqslant \lambda$.

Пусть теперь $\lambda \leqslant 0$. Тогда

$$|F(t)| < M \int_a^t e^{-(\lambda-\eta)t}\,dt = \frac{M}{\eta-\lambda} e^{-(\lambda-\eta)t} + \text{const.},$$

что показывает, что функция $F(t)\,e^{(\lambda-\varepsilon)t}$ будет исчезающей при любом $\varepsilon > \eta$ и, следовательно, при любом ε. Поэтому и в рассматриваемом случае $X\{F\} \geqslant \lambda$.

§ 78. Характеристичные числа решений линейных дифференциальных уравнений.

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n \qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{78.1}$$

где p_{sj} — вещественные, непрерывные и ограниченные функции t, определенные при всех $t \geqslant 0$. Пусть $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ — какое-нибудь решение уравнений (78.1). Мы будем называть характеристичным числом рассматриваемого решения наименьшее из характеристичных чисел функций $x_s(t)$. Вообще характеристичным числом какой-нибудь группы функций $f_1(t), \ldots, f_k(t)$ мы будем называть наименьшее из характеристичных чисел $X\{f_i\}$. Характеристичное число группы функций $f_1, \ldots, f_k$ мы будем обозначать символом $X\{f_1, \ldots, f_k\}$.

Докажем следующую теорему Ляпунова.

Теорема 1. *Всякое решение уравнений* (78.1), *отличное от* $x_1 = \ldots = x_n = 0$, *имеет конечное характеристичное число.*

Доказательство. Рассмотрим сначала вещественные решения уравнений (78.1). Преобразуем эти уравнения при помощи подстановки

$$y_s = x_s e^{\lambda t}, \tag{78.2}$$

где λ — некоторая постоянная. Преобразованные уравнения будут иметь вид

$$\frac{dy_s}{dt} = p_{s1}y_1 + \ldots + (p_{ss} + \lambda)\,y_s + \ldots + p_{sn}y_n.$$

Из этих уравнений находим:

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n} y_s^2 = \sum_{s=1}^{n}(p_{ss}+\lambda)\,y_s^2 + \sum_{i\neq k}(p_{ik}+p_{ki})\,y_i y_k = W. \quad (78.3)$$

Очевидно, что существует такое число $\lambda=\lambda_1$, при котором форма, стоящая в правой части (78.3), будет определенно-положительной, удовлетворяя неравенству

$$W > \frac{\alpha}{2}(y_1^2 + \ldots + y_n^2),$$

где α — некоторая положительная постоянная.

При $\lambda=\lambda_1$ будем иметь, что при $t>0$ для любого решения $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ выполняется неравенство

$$\sum_{s=1}^{n} y_s^2(t) > \sum_{s=1}^{n} y_s^2(0)\,e^{\alpha t}. \quad (78.4)$$

С другой стороны, существует и такое значение $\lambda=\lambda_2<\lambda_1$, при котором правая часть (78.3) будет формой определенно-отрицательной, удовлетворяя неравенству

$$W < -\frac{\alpha}{2}(y_1^2 + \ldots + y_n^2).$$

При $\lambda=\lambda_2$ будем иметь:

$$\sum_{s=1}^{n} y_s^2(t) < \sum_{s=1}^{n} y_s^2(0)\,e^{-\alpha t}. \quad (78.5)$$

Неравенства (78.4) и (78.5) показывают, что для любого нетривиального решения уравнений (78.1) все функции (78.2) будут исчезающими при $\lambda=\lambda_2$ и хотя бы одна из этих функций будет неограниченной при $\lambda=\lambda_1$. Отсюда следует, что характеристичное число любого нетривиального решения уравнений (78.1) заключено в интервале (λ_2, λ_1), что и доказывает теорему для вещественных решений.

Остается показать справедливость теоремы для комплексных решений. Для этого достаточно заметить, что всякое комплексное решение

$$u_s + iv_s$$

уравнений (78.1) складывается из двух вещественных решений u_s и v_s. Таким образом, теорема полностью доказана.

Рассмотрим какую-нибудь фундаментальную систему решений

$$x_{1j}(t),\ x_{2j}(t),\ \ldots,\ x_{nj}(t) \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

уравнений (78.1). Обозначим через λ_j характеристичное число решения x_{sj}. Допустим сначала, что все числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ различны.

Найдем характеристичное число решения

$$x_s = C_1 x_{si_1} + C_2 x_{si_2} + \ldots + C_k x_{si_k}, \tag{78.6}$$

являющегося линейной комбинацией с постоянными коэффициентами каких-нибудь k решений $x_{si_1}, \ldots, x_{si_k}$ рассматриваемой фундаментальной системы. Так как все числа $\lambda_{i_1}, \ldots, \lambda_{i_k}$ различны, то на основании теоремы о характеристичном числе суммы функций характеристичное число решения (78.6) будет равно наименьшему из чисел $\lambda_{i_1}, \ldots, \lambda_{i_k}$, т. е. характеристичному числу одного из решений, входящих в комбинацию. Таким образом, если все числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ различны, то характеристичное число любого решения уравнений (78.1) будет одним из чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Имеем, таким образом, теорему:

Теорема 2. *Система* (78.1) *не может иметь более n решений с различными характеристичными числами.*

Допустим теперь, что среди чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ имеются равные. Тогда может оказаться, что при комбинации решений с одинаковыми характеристичными числами характеристичное число нового решения окажется больше, чем характеристичные числа решений, входящих в комбинацию. Если это случится, то полученное новое решение мы включим в состав фундаментальной системы вместо одного из комбинируемых решений. Если новая фундаментальная система опять будет иметь решения, комбинация которых даст решение с характеристичным числом, большим характеристичных чисел группируемых решений, то с этой новой системой поступаем так же, как с первой. Так как число различных характеристичных чисел не превосходит n, то ясно, что, поступая вышеуказанным способом, мы в конце концов придем к такой фундаментальной системе, что характеристичное число решения, скомбинированного из каких угодно решений этой системы, будет совпадать с характеристичным числом одного из решений, входящих в комбинацию. Полученная таким образом фундаментальная система называется *нормальной*. Характеристичные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ нормальной системы решений (среди которых могут быть и равные) называются характеристичными числами системы дифференциальных уравнений. Характеристичное число любого решения этих уравнений равно одному из чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Действительно, каждое такое решение является линейной комбинацией решений, входящих в нормальную систему.

Из предыдущих рассуждений следует, что если характеристичные числа какой-нибудь фундаментальной системы решений все различны, то эта система является нормальной. Имеет также место и следующая теорема, дающая признак нормальности фундаментальной системы решений.

Теорема 3. *Всякая фундаментальная система решений, для которой сумма характеристичных чисел всех входящих*

в нее решений достигает своего высшего предела, есть нормальная.

В самом деле, если бы рассматриваемая фундаментальная система не была нормальной, то из некоторых ее решений можно было бы скомбинировать новые решения с большими характеристичными числами и, следовательно, получить фундаментальную систему с суммой характеристичных чисел большей, чем в рассматриваемой, что противоречит условию.

Допустим, что система уравнений (78.1) подвергнута линейному преобразованию

$$y_s = a_{s1}(t)\,x_1 + \ldots + a_{sn}(t)\,x_n, \qquad x_s = b_{s1}(t)\,y_1 + \ldots + b_{sn}(t)\,y_n, \tag{78.7}$$

обладающему следующими свойствами: 1) коэффициенты a_{sj} и их производные ограничены; 2) коэффициенты b_{sj} обратного преобразования также ограничены. Преобразования, обладающие этими свойствами, мы будем называть *преобразованиями Ляпунова*. При таких преобразованиях коэффициенты $q_{sj}(t)$ преобразованной системы

$$\frac{dy_s}{dt} = q_{s1}y_1 + \ldots + q_{sn}y_n, \tag{78.8}$$

определяемые формулами

$$q_{sj} = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{da_{s\alpha}}{dt} b_{\alpha j} + \sum_{\alpha,\,\beta=1}^{n} a_{s\alpha} p_{\alpha\beta} b_{\beta j}, \tag{78.9}$$

будут также ограниченными функциями времени.

Теорема 4. *Если систему уравнений* (78.1) *подвергнуть преобразованию Ляпунова, то группа характеристичных чисел преобразованной системы будет тождественной с группой характеристичных чисел первоначальной.*

Доказательство. Пусть $x_s(t)$ — какое-нибудь решение системы (78.1). Тогда формулы (78.7) определят решение $y_s(t)$ системы (78.8) из этих формул находим:

$$X\{y_1(t), \ldots, y_n(t)\} \geqslant X\{x_1(t), \ldots, x_n(t)\},$$

так как характеристичные числа ограниченных функций $a_{sj}(t)$ во всяком случае не менее нуля. С другой стороны, из (78.7) таким же путем находим:

$$X\{x_1(t), \ldots, x_n(t)\} \geqslant X\{y_1(t), \ldots, y_n(t)\},$$

так как функции $a_{sj}(t)$ также ограничены. Это дает:

$$X\{y_1(t), \ldots, y_n(t)\} = X\{x_1(t), \ldots, x_n(t)\}.$$

Таким образом, каждому решению одной системы соответствует решение другой системы с таким же точно характеристичным числом. Отсюда непосредственно следует, что группа характеристичных чисел одной системы совпадает с группой характеристичных чисел другой системы, что и доказывает теорему.

Допустим, что коэффициенты p_{sj} уравнений (78.1) являются постоянными. Пусть λ — корень характеристического уравнения

$$|p_{ik} - \delta_{ik}\lambda| = 0$$

этой системы. Если кратность этого корня равна l, то ему отвечает l независимых решений этой системы вида

$$x_{si}(t) = e^{\lambda t} P_{si}(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, l), \tag{78.10}$$

где P_{si} — некоторые полиномы относительно t с постоянными коэффициентами. Характеристичное число каждого из решений вида (78.10) равно — $\mathrm{Re}(\lambda)$. Таким же будет и характеристичное число решения, являющегося линейной комбинацией решений (78.10). Отсюда следует, что если решения вида (78.10) построить для каждого корня характеристического уравнения, то полученная фундаментальная система решений будет нормальной. Кроме того, получаем:

Характеристичные числа системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами равны взятым с обратными знаками вещественным частям корней ее характеристического уравнения.

Если коэффициенты p_{sj} системы (78.1) являются периодическими функциями времени с одним и тем же периодом ω, то решения этих уравнений имеют также вид (78.10) с той лишь разницей, что величины λ будут являться характеристичными показателями системы, а коэффициенты полиномов P_{sj} будут не постоянными, а периодическими функциями времени, что не влияет на характеристичное число. Поэтому имеем:

Характеристичными числами системы линейных уравнений с периодическими коэффициентами являются взятые с обратными знаками вещественные части ее характеристических показателей.

§ 79. Правильные и неправильные системы.

Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — характеристичные числа системы линейных уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n \tag{79.1}$$

с непрерывными и ограниченными при $t \geqslant 0$ коэффициентами p_{sj}. Докажем следующую теорему Ляпунова.

Теорема 1. *Сумма* $S=\lambda_1+\ldots+\lambda_n$ *характеристичных чисел системы* (79.1) *не превосходит характеристичного числа функции.*

$$\exp\int_0^t\sum_{s=1}^n p_{ss}\,dt. \tag{79.2}$$

Доказательство. Пусть $x_{1j},\ldots,x_{nj}$ $(j=1,2,\ldots,n)$ — нормальная система решений уравнений (79.1) и $|x_{sj}|=\Delta(t)$ — ее определитель Вронского. Имеем:

$$\Delta(t)=\Delta(0)\exp\int_0^t\sum_{s=1}^n p_{ss}\,dt.$$

Но, применяя к определителю Δ теоремы о характеристичном числе суммы и произведения, находим:

$$X\left\{e^{\int_0^t\sum p_{ss}\,dt}\right\}=X\{\Delta\}\geqslant\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n,$$

что и доказывает теорему.

Доказанная теорема устанавливает верхний предел для суммы характеристичных чисел системы линейных дифференциальных уравнений. Этот предел, действительно, достигается для многих систем. Это, например, всегда будет иметь место в случае уравнений с постоянными коэффициентами. Действительно, при p_{sj} постоянных имеем:

$$X\left\{\exp\sum\int_0^t p_{ss}\,dt\right\}=-\operatorname{Re}(p_{11}+\ldots+p_{nn})=-(a_1+\ldots+a_n),$$

где a_i — вещественные части корней характеристического уравнения, которые, как было показано в предыдущем параграфе, отличаются лишь знаками от характеристичных чисел.

Можно, однако, привести примеры, когда сумма характеристичных чисел решений не достигает указанного для них в теореме предела. Вот один из таких примеров, указанный Ляпуновым. Система уравнений имеет вид

$$\frac{dx_1}{dt}=x_1\cos\ln(t+1)+x_2\sin\ln(t+1),$$

$$\frac{dx_2}{dt}=x_1\sin\ln(t+1)+x_2\cos\ln(t+1).$$

Для нее

$$\exp\int_0^t\sum p_{ss}\,dt=\exp\{(t+1)[\sin\ln(t+1)+\cos\ln(t+1)]-1\}. \tag{79.3}$$

Характеристичное число этой функции равно $-\sqrt{2}$. С другой стороны, эти уравнения имеют фундаментальную систему решений

$$x_{11} = \exp[(t+1)\sin\ln(t+1)],$$
$$x_{12} = \exp[(t+1)\cos\ln(t+1)],$$
$$x_{21} = \exp[(t+1)\sin\ln(t+1)],$$
$$x_{22} = -\exp[(t+1)\cos\ln(t+1)],$$

которая, как нетрудно убедиться, является нормальной. Характеристичное число каждого из этих решений равно -1, и следовательно, их сумма менее характеристичного числа функции (79.3).

Системы линейных уравнений, для которых сумма характеристичных чисел равна характеристичному числу функции (79.2) и для которой, кроме того, выполняется условие

$$X\left\{\exp\left(\int_0^t \sum p_{ss}\,dt\right)\right\} + X\left\{\exp\left(-\int_0^t \sum p_{ss}\,dt\right)\right\} = 0, \quad (79.4)$$

называются, по Ляпунову, *правильными*.

Система уравнений с постоянными коэффициентами является правильной, так как для нее дополнительное условие (79.4), очевидно, также выполняется.

Если правильную систему подвергнуть линейному преобразованию, удовлетворяющему условиям Ляпунова (§ 78), то преобразованная система будет также правильной.

В самом деле, как было показано в предыдущем параграфе, при такого рода преобразовании характеристичные числа и, следовательно, их сумма не меняются. С другой стороны, если x_{sj} — фундаментальная система решений уравнений (79,1), $y_{sj}(t)$ — соответствующая ей фундаментальная система решений преобразованной системы, $D = |a_{sj}|$ — определитель преобразования, то

$$|y_{sj}| = D\,|x_{sj}|, \quad X\{|y_{sj}|\} = X\{|x_{sj}|\}, \quad (79.5)$$

так как по свойству преобразования функция D — ограниченная и не исчезающая. Применяя теорему Лиувилля, находим:

$$\left.\begin{aligned} |y_{sj}| &= C_1 \exp\int_0^t \sum q_{ss}\,dt, \\ |x_{sj}| &= C_2 \exp\int_0^t \sum p_{ss}\,dt, \end{aligned}\right\} \quad (79.6)$$

где C_1 и C_2 — постоянные и q_{sj} — коэффициенты преобразованной системы. Из (79.5) и (79.6) следует, что характеристичное число

функции (79.2) также инвариантно относительно рассматриваемого преобразования, что и показывает, что преобразованная система будет также правильной.

Из доказанного предложения вытекает, что всякая система, которая вышеуказанным преобразованием может быть преобразована в систему уравнений с постоянными коэффициентами, т. е. всякая приводимая (§ 54) система является правильной. В частности, на основании результатов § 54 имеем такое предложение:

Всякая система линейных уравнений с периодическими коэффициентами является правильной.

Для общих систем вида (79.1) нет критериев, которые позволяли бы во всех случаях по виду коэффициентов определить, является ли рассматриваемая система правильной или нет. Эта задача решена лишь для уравнений с треугольной матрицей коэффициентов, т. е. для уравнений вида

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{ss}x_s \qquad (s = 1, 2, \ldots, n). \tag{79.7}$$

Для этих уравнений имеет место следующее предложение, установленное Ляпуновым, которое мы здесь приводим без доказательства:

Для того чтобы система вида (79.7) *была правильной, необходимо и достаточно, чтобы все функции*

$$\frac{1}{t}\int_0^t p_{ss}\,dt \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

стремились к определенным пределам при $t \to \infty$.

Рассмотрим систему

$$\frac{dy_s}{dt} + p_{1s}y_1 + p_{ns}y_n = 0, \tag{79.8}$$

сопряженную с (79.1). Имеет место следующая теорема, установленная О. Перроном[1]):

Теорема 2. *Пусть* $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \ldots \leqslant \lambda_n$ — *характеристичные числа системы* (79.1), *а* $\mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \ldots \geqslant \mu_n$ — *характеристичные числа системы* (79.8), *ей сопряженной. Для того чтобы система* (79.1) *была правильной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства*

$$\lambda_s + \mu_s = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, n). \tag{79.9}$$

Доказательство. Докажем сначала достаточность условия. Допустим, следовательно, что выполняются условия (79.9), и дока-

---

[1]) Perron O., Die Ordnungszahlen der Differentialgleichungssysteme. Mathem. Zeitschrift, т. 31, 1929.

жем, что в этом случае система (79.1) является правильной. Пусть $S=\lambda_1+\ldots+\lambda_n$ и $S'=\mu_1+\ldots+\mu_n$. Применяя к обеим системам теорему 1, получим:

$$\left.\begin{aligned} S &\leqslant X\left\{\exp\left(\sum\int_0^t p_{ss}\,dt\right)\right\}, \\ S' &\leqslant X\left\{\exp\left(-\sum\int_0^t p_{ss}\,dt\right)\right\} \end{aligned}\right\} \tag{79.10}$$

и, следовательно, на основании (79.9)

$$0 \leqslant X\left\{\exp\left(\sum\int_0^t p_{ss}\,dt\right)\right\}+X\left\{\exp\left(-\sum\int_0^t p_{ss}\,dt\right)\right\}, \tag{79.11}$$

причем знак равенства возможен лишь тогда, когда оба соотношения (79.10) выполняются со знаками равенства. Но по теореме о характеристичных числах обратных функций

$$X\left\{\exp\left(\sum\int_0^t p_{ss}\,dt\right)\right\}+X\left\{\exp\left(-\sum\int_0^t p_{ss}\,dt\right)\right\}\leqslant 0,$$

откуда вытекает, что соотношение (79.11) и оба соотношения (79.10) выполняются со знаками равенства. Следовательно, обе системы (79.1) и (79.8) являются правильными.

Допустим теперь, что система (79.1) является правильной, и докажем справедливость соотношений (79.9). Рассмотрим с этой целью какую-нибудь нормальную систему решений $x_{1j}, \ldots, x_{nj}$ ($j=1, 2, \ldots, n$) уравнений (79.1) и пусть $\Delta=|x_{sj}|$ — ее определитель Вронского. Пусть, далее,

$$y_{sj}=\frac{\Delta_{sj}}{\Delta}, \tag{79.12}$$

где Δ_{sj} — минор элемента x_{sj} определителя Δ. Покажем, что

$$\frac{dy_{sj}}{dt}=-(p_{1s}y_{1j}+p_{2s}y_{2j}+\ldots+p_{ns}y_{nj}) \quad (s, j=1, 2, \ldots, n), \tag{79.13}$$

т. е. что функции y_{sj} образуют фундаментальную систему решений уравнений (79.8).

Имеем очевидные тождества

$$\sum_{\alpha=1}^{n} x_{\alpha i}y_{\alpha j}=\delta_{ij} \qquad (i, j=1, 2, \ldots, n),$$

где δ_{ij} — символ Кронекера.

Дифференцируя эти тождества по t и учитывая, что функции $x_{\alpha i}$ удовлетворяют уравнениям (79.1), получим:

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} p_{\alpha\beta} x_{\beta i} y_{\alpha j} + \sum_{\alpha=1}^{n} x_{\alpha i} \frac{dy_{\alpha j}}{dt} = 0 \qquad (i,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \qquad (79.14)$$

Отсюда однозначно определяются производные $\frac{dy_{sj}}{dt}$. Чтобы показать, что они совпадают с правыми частями (79.13), достаточно, очевидно, проверить, что равенства (79.14) выполняются тождественно, если в них $\frac{dy_{sj}}{dt}$ заменить правыми частями (79.13). Но, выполняя указанную подстановку, легко убеждаемся, что равенства (79.14) при этом действительно тождественно выполняются.

Пусть

$$\mu_j = X\{y_{1j},\ \ldots,\ y_{nj}\}.$$

Применяя к тождеству

$$\sum_{\alpha=1}^{n} x_{\alpha j} y_{\alpha j} = 1$$

теоремы о характеристичных числах суммы и произведения, получаем

$$\lambda_j + \mu_j \leqslant 0.$$

Но, с другой стороны, те же теоремы дают:

$$X\left\{\frac{\Delta_{sj}}{\Delta}\right\} \geqslant \lambda_1 + \ldots + \lambda_n - \lambda_j + X\left\{\frac{1}{\Delta}\right\},$$

или, так как система (79.1) по условию правильная,

$$X\left\{\frac{\Delta_{sj}}{\Delta}\right\} \geqslant -\lambda_j$$

и, следовательно,

$$\mu_j \geqslant -\lambda_j.$$

Отсюда непосредственно вытекает справедливость (79.9). Кроме того, отсюда находим:

$$S' = \mu_1 + \ldots + \mu_n = -(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n) =$$
$$= -X\left\{\exp\left(\sum \int_0^t p_{ss}\, dt\right)\right\} = X\left\{\exp\left(-\sum \int_0^t p_{ss}\, dt\right)\right\};$$

следовательно, S' достигает своего верхнего предела. Поэтому решения (79.12) образуют нормальную систему и величины μ_j действительно являются характеристичными числами системы (79.8).

Таким образом, теорема полностью доказана.

Допустим, что рассматриваемая система линейных уравнений имеет каноническую форму

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial y_i},\quad \frac{dy_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x_i}\qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n),\tag{79.15}$$

где $H=H(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n,\ y_1,\ \ldots,\ y_n)$ — квадратичная форма переменных x_j, y_j, коэффициенты которой являются непрерывными ограниченными функциями времени. Имеет место следующая теорема, установленная К. П. Персидским[1]).

Теорема 3. *Пусть* $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\ldots\geqslant\lambda_{2n}$ — *характеристичные числа системы* (79.15). *Для того чтобы эта система была правильной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения*

$$\lambda_i+\lambda_{2n-i+1}=0\qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n).\tag{79.16}$$

Доказательство. Система (79.15) более подробно запишется следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx_i}{dt}&=\frac{\partial^2 H}{\partial y_i\,\partial x_1}x_1+\ldots+\frac{\partial^2 H}{\partial y_i\,\partial x_n}x_n+\\&\qquad+\frac{\partial^2 H}{\partial y_i\,dy_1}y_1+\ldots+\frac{\partial^2 H}{\partial y_i\,\partial y_n}y_n,\\\frac{dy_i}{dt}&=-\frac{\partial^2 H}{\partial x_i\,\partial x_1}x_1-\ldots-\frac{\partial^2 H}{\partial x_i\,\partial x_n}x_n-\\&\qquad-\frac{\partial^2 H}{\partial x_i\,\partial y_1}y_1-\ldots-\frac{\partial^2 H}{\partial y_i\,\partial y_n}.\end{aligned}\right\}\tag{79.17}$$

Система, ей сопряженная, есть

$$\left.\begin{aligned}\frac{du_i}{dt}&=-\frac{\partial^2 H}{\partial y_1\,\partial x_i}u_1-\ldots-\frac{\partial^2 H}{\partial y_n\,\partial x_i}u_n+\\&\qquad+\frac{\partial^2 H}{\partial x_1\,\partial x_i}v_1+\ldots+\frac{\partial^2 H}{\partial x_n\,\partial x_i}v_n,\\\frac{dv_i}{dt}&=-\frac{\partial^2 H}{\partial y_1\,\partial y_i}u_1-\ldots-\frac{\partial^2 H}{\partial y_n\,\partial y_i}u_n+\\&\qquad+\frac{\partial^2 H}{\partial x_1\,\partial y_i}v_1+\ldots+\frac{\partial^2 H}{\partial x_n\,\partial y_i}v_n.\end{aligned}\right\}\tag{79.18}$$

Эта система переходит в систему (79.17) при замене u_i на y_i и v_i на $-x_i$. Следовательно, если $u_i(t)$, $v_i(t)$ есть какое-нибудь решение системы (79.18), то функции $x_i=-v_i(t)$, $y_i=u_i(t)$ определяют

---

[1]) Персидский К. П., О характеристичных числах дифференциальных уравнений. Изв. АН Казахской ССР, сер. матем. и мех., вып. 1, 1947.

решение системы (79.17). Но оба эти решения обладают, очевидно, одинаковыми характеристичными числами. Следовательно, группа характеристичных чисел системы (79.15) совпадает с группой характеристичных чисел системы, ей сопряженной. Поэтому необходимые и достаточные условия правильности (79.9) принимают сейчас вид (79.16), что и доказывает теорему.

Доказанная теорема является, очевидно, обобщением теорем §§ 24 и 57.

Если система (79.15) не является правильной, то, как показал Н. Г. Четаев[1]) и как это вытекает из предыдущих рассуждений, равенства (79.16) заменяются неравенствами

$$\lambda_i + \lambda_{2n-i+1} < 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Отсюда и из (79.16) вытекает, что если система (79.15) вне зависимости от того, является ли она правильной или нет, обладает положительными характеристичными числами, то она будет обладать также и отрицательными характеристичными числами. Следовательно, справедливо следующее предложение Н. Г. Четаева: *для того чтобы для системы* (79.15) *имела место устойчивость, необходимо, чтобы все ее характеристичные числа равнялись нулю.* При этом, как показал Н. Г. Четаев, система (79.15) будет необходимо приводимой.

§ 80. Устойчивость характеристичных чисел систем линейных дифференциальных уравнений.

Результаты предыдущих параграфов показывают, что характеристичные числа систем линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами играют для них такую же роль, как характеристические показатели для уравнений с периодическими коэффициентами и корни характеристического уравнения для уравнений с постоянными коэффициентами. Эти числа характеризуют порядок роста решений при $t \to \infty$ и имеют поэтому основное значение в вопросах устойчивости. Если все характеристичные числа положительны, то все решения рассматриваемой системы линейных уравнений стремятся к нулю при $t \to \infty$ и, следовательно, для этих уравнений имеет место асимптотическая устойчивость. Напротив, если хотя бы одно из характеристичных чисел отрицательно, то система допускает неограниченные решения и для нее, следовательно, имеет место неустойчивость.

Таким образом, при решении задачи устойчивости для линейных уравнений с переменными коэффициентами необходимо определить знаки ее характеристичных чисел или, по крайней мере, знак наимень-

---

[1]) Четаев Н. Г., Устойчивость движения. Гостехиздат, 1946.

шего из них. Эта задача представляет очень большие трудности, и до сих пор нет достаточно эффективных методов ее решения. Мы имеем, конечно, в виду те случаи, когда уравнения не разрешаются в замкнутой форме. С частным случаем этой задачи мы уже встречались в предыдущей главе, где были показаны некоторые приемы приближенного определения характеристических показателей уравнений с периодическими коэффициентами. Наиболее эффективными из этих методов, хотя и имеющими ограниченную область применения, были те, в которых так или иначе применялся малый параметр. Сущность всех этих методов заключается в том, что определение характеристических показателей заданной системы сводят к определению этих величин для другой системы (например, для системы с постоянными коэффициентами), которая мало отличается от заданной и для которой эти величины могут быть определены. При этом используется то обстоятельство, что малое изменение коэффициентов в случае, когда эти коэффициенты периодичны, вызывает малое изменение характеристических показателей.

Это свойство характеристичных чисел уравнений с периодическими коэффициентами не имеет, вообще говоря, места в общем случае уравнений с любыми переменными коэффициентами. Можно привести примеры, когда коэффициенты одной системы уравнений сколь угодно мало отличаются при всех $t \geqslant 0$ от коэффициентов другой системы уравнений и в то же время характеристичные числа одной системы отличаются на конечные величины от характеристичных чисел другой системы. Таким образом, возникает прежде всего задача о так называемой *устойчивости* характеристичных чисел систем линейных уравнений. Это понятие может быть определено следующим образом.

Пусть предложена система уравнений с переменными коэффициентами

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n \qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{80.1}$$

одновременно с которой мы будем рассматривать другую систему:

$$\frac{dx_s}{dt} = (p_{s1} + \varphi_{s1})\, x_1 + \ldots + (p_{sn} + \varphi_{sn})\, x_n. \tag{80.2}$$

Коэффициенты p_{sj} и φ_{sj} предполагаются ограниченными и непрерывными при $t \geqslant 0$. Пусть $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$ — характеристичные числа системы (80.1) и $\lambda_1' \geqslant \lambda_2' \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n'$ — характеристичные числа системы (80.2). Примем следующее определение:

Определение. *Характеристичные числа* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *системы* (80.1) *называются устойчивыми, если для любого сколь угодно малого положительного* ε *можно найти такое положительное число* $\eta(\varepsilon)$, *что характеристичные числа* λ_i'

системы (80.2) *удовлетворяют неравенствам*

$$|\lambda_i' - \lambda_i| < \varepsilon \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{80.3}$$

при любом выборе функций φ_{sj}, *удовлетворяющих при* $t \geqslant 0$ *неравенствам*

$$|\varphi_{sj}(t)| \leqslant \eta \qquad (s, j = 1, 2, \ldots, n). \tag{80.4}$$

Если характеристичные числа системы (80.1) устойчивы, то неравенства (80.3) останутся в силе, когда неравенства (80.4) выполняются не при $t \geqslant 0$, а при $t \geqslant T$, где T — сколь угодно большое число. Это непосредственно вытекает из того, что характеристичные числа системы уравнений, определяемые поведением ее решений при $t \to \infty$, зависят лишь от вида коэффициентов этих уравнений при $t \geqslant T$.

Отсюда следует, что если характеристичные числа системы (80.1) устойчивы и если

$$\lim_{t \to \infty} \varphi_{sj} = 0 \qquad (s, j = 1, 2, \ldots, n), \tag{80.5}$$

то характеристичные числа системы (80.2) совпадают с характеристичными числами системы (80.1). Действительно, если выполняется (80.5), то можно выбрать настолько большое T, чтобы при $t \geqslant T$ неравенства (80.4) выполнялись со сколь угодно малым η. Следовательно, величина ε в неравенствах (80.3) может быть взята сколь угодно малой, что и доказывает, что $\lambda_i' = \lambda_i$.

§ 81. Некоторые признаки устойчивости характеристичных чисел систем линейных дифференциальных уравнений [1].

Рассмотрим снова систему

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n \qquad (s = 1, 2, \ldots, n) \tag{81.1}$$

с непрерывными и ограниченными коэффициентами и мало отличающуюся от нее систему

$$\frac{dx_s}{dt} = (p_{s1} + \varphi_{s1})x_1 + \ldots + (p_{sn} + \varphi_{sn})x_n \qquad (s = 1, 2, \ldots, n). \tag{81.2}$$

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — характеристичные числа системы (81.1) и $\lambda_1', \lambda_2', \ldots, \lambda_n'$ — характеристичные числа системы (81.2). Обозначим, далее, через $x_{1j}, \ldots, x_{nj}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ нормальную систему решений уравнений (81.1), занумерованную таким образом, что характеристичное число решения x_{sj} есть λ_j. Кроме этой системы решений,

[1]) Малкин И. Г., О характеристических числах систем линейных дифференциальных уравнений. ПММ, т. XVI, вып. 1, 1952.

рассмотрим другую фундаментальную систему $\bar{x}_{sj}(t, t_0)$ решений уравнений (81.1), определяемую начальными условиями:

$$\bar{x}_{sj}(t_0, t_0) = \delta_{sj} \qquad (\delta_{sj} \text{ — символ Кронекера}) \tag{81.3}$$
$$(s, j = 1, 2, \ldots, n).$$

Система решений $\bar{x}_{sj}(t, t_0)$ не будет обязательно нормальной. Характеристичные числа решений $\bar{x}_{sj}(t, t_0)$ обозначим, соответственно, через μ_j. При этом каждое из чисел μ_j равно одному из чисел λ_i.

Допустим, что система (81.1) такова, что при любом положительном γ выполняются неравенства

$$|\bar{x}_{sj}(t, t_0)| < Ce^{(-\mu_j+\gamma)(t-t_0)}, \tag{81.4}$$

если $t \geqslant t_0 \geqslant 0$, и неравенства

$$|\bar{x}_{sj}(t, t_0)| < Ce^{(-\mu_j-\gamma)(t-t_0)}, \tag{81.5}$$

если $0 \leqslant t \leqslant t_0$. Здесь C — некоторая постоянная, зависящая только от γ и не зависящая от t_0. Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Если выполняются условия* (81.4) и (81.5), *то для всякого положительного* ε *можно найти такое* $\eta(\varepsilon)$, *что характеристичные числа* λ_i' *системы* (81.2) *удовлетворяют неравенствам*

$$\lambda_i' \geqslant \lambda_i - \varepsilon \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{81.6}$$

при любом выборе функций φ_{sj}, *удовлетворяющих при* $t \geqslant 0$ *неравенствам*

$$|\varphi_{sj}(t)| \leqslant \eta. \tag{81.7}$$

Доказательство. 1°. *Замена системы* (81.2) *интегральными уравнениями.* Рассмотрим неоднородную систему

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + f_s(t), \tag{81.8}$$

где $f_s(t)$ — некоторые непрерывные функции t. Согласно Коши функции

$$x_s'(t) = \sum_{\alpha=1}^{n} \int_{a_\alpha}^{t} \bar{x}_{s\alpha}(t, \tau) f_\alpha(\tau)\, d\tau \tag{81.9}$$

определяют частное решение этих уравнений. При этом в методе Коши все постоянные a_α принято считать одинаковыми, и если положить $a_\alpha = a$, то функции (81.9) определяют то решение уравнений (81.8), для которого все неизвестные обращаются в нуль при $t = a$. Однако легко видеть, что функции $x_s'(t)$ будут удовлетворять уравнениям (81.8)

при любом выборе постоянных a_α, причем некоторые из этих постоянных можно положить равными бесконечности, если только соответствующие интегралы сходятся. В самом деле, непосредственным дифференцированием, принимая во внимание (81.3), находим:

$$\frac{dx_s'}{dt}=\sum_{\alpha=1}^{n}\bar{x}_{s\alpha}(t,\ t)f_\alpha(t)+\sum_{\alpha=1}^{n}\int_{a_\alpha}^{t}\frac{d\bar{x}_{s\alpha}(t,\ \tau)}{dt}f_\alpha(\tau)\,d\tau=$$

$$=f_s(t)+\sum_{\alpha=1}^{n}\int_{a_\alpha}^{t}\left[p_{s1}(t)\bar{x}_{1\alpha}(t,\ \tau)+\ldots+p_{sn}(t)\bar{x}_{n\alpha}(t,\ \tau)\right]f_\alpha(\tau)\,d\tau=$$

$$=f_s(t)+p_{s1}(t)\sum_{\alpha=1}^{n}\int_{a_\alpha}^{t}\bar{x}_{1\alpha}(t,\ \tau)f_\alpha(\tau)\,d\tau+\ldots+$$

$$+p_{sn}(t)\sum_{\alpha=1}^{n}\int_{a_\alpha}^{t}\bar{x}_{n\alpha}(t,\ \tau)f_\alpha(\tau)\,d\tau=f_s(t)+p_{s1}x_1'+\ldots+p_{sn}x_n',$$

что и доказывает наше утверждение. Если теперь к решению (81.9) добавить любое частное решение однородных уравнений (81.1), то снова получится решение уравнений (81.8).

Установив это, будем рассматривать в уравнениях (81.2) члены, зависящие от φ_{sj}, как неоднородную часть уравнений (81.8). Тогда мы можем утверждать, что решение интегральных уравнений

$$x_s(t)=x_{sk}(t)+\sum_{\alpha=1}^{n}\int_{a_\alpha}^{t}\bar{x}_{s\alpha}(t,\ \tau)L_\alpha(\tau,\ x_1(\tau),\ \ldots,\ x_n(\tau))\,d\tau \qquad (81.10)$$

$$(s=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

если оно существует, будет являться решением уравнений (81.2). Здесь

$$L_\alpha=\varphi_{\alpha1}x_1+\ldots+\varphi_{\alpha n}x_n \qquad (81.11)$$

а $a_\alpha=0$ для тех значений α, для которых $\mu_\alpha\geqslant\lambda_k$, и $a_\alpha=\infty$ при $\mu_\alpha<\lambda_k$.

Изменяя индекс k от 1 до n, мы получим n решений уравнений (81.2).

2°. *Доказательство существования решений интегральных уравнений.* Пусть ε — сколь угодно малое положительное число. Так как характеристичные числа функций x_{sk} не менее λ_k, то

$$|x_{sk}(t)|<Ae^{(-\lambda_k+\varepsilon)t}, \qquad (81.12)$$

где A — некоторая постоянная. Покажем, что интегральные уравнения (81.10) допускают решение, удовлетворяющее неравенствам

$$|x_s(t)| < 2Ae^{(-\lambda_k+\varepsilon)t}, \tag{81.13}$$

если только величина η в неравенствах (81.7) достаточно мала.

Будем искать решение уравнений (81.10) методом последовательных приближений, полагая

$$\left.\begin{aligned} &x_s^{(0)} = x_{sk}(t), \\ &x_s^{(m)} = x_{sk} + \sum_{\alpha=1}^{n} \int_{a_\alpha}^{t} \bar{x}_{s\alpha}(t, \tau) L_\alpha\left(\tau, x_1^{(m-1)}(\tau), \ldots, x_n^{(m-1)}(\tau)\right) d\tau. \end{aligned}\right\} \tag{81.14}$$

Покажем, прежде всего, что все приближения удовлетворяют неравенствам

$$\left|x_s^{(m)}\right| < 2Ae^{(-\lambda_k+\varepsilon)t}, \tag{81.15}$$

если η настолько мало, что выполняется неравенство

$$\frac{4n^2\eta C}{\varepsilon} < 1, \tag{81.16}$$

что мы и будем предполагать.

В самом деле, неравенства (81.15) во всяком случае выполняются при $m = 0$. Допустим, что они выполняются для $(m-1)$-го приближения, и покажем, что они выполняются также и для m-го приближения.

Пусть α — такой индекс, для которого $\mu_\alpha \geqslant \lambda_k$ и для которого, следовательно, $a_\alpha = 0$. Тогда, полагая в условиях (81.4) $\gamma = \frac{\varepsilon}{2}$ и принимая во внимание (81.11), будем иметь:

$$\left|\int_{a_\alpha}^{t} \bar{x}_{s\alpha}(t, \tau) L_\alpha\left(\tau, x_1^{(m-1)}, \ldots, x_n^{(m-1)}\right) d\tau\right| =$$

$$= \left|\int_{0}^{t} \bar{x}_{s\alpha}(t, \tau) L_\alpha\left(\tau, x_1^{(m-1)}, \ldots, x_n^{(m-1)}\right) d\tau\right| <$$

$$< 2n\eta AC \int_{0}^{t} e^{\left(-\mu_\alpha+\frac{\varepsilon}{2}\right)(t-\tau)} \cdot e^{(-\lambda_k+\varepsilon)\tau} d\tau =$$

$$= \frac{2n\eta AC}{\mu_\alpha - \lambda_k + \frac{\varepsilon}{2}} e^{(-\lambda_k+\varepsilon)t}\left(1 - e^{\left(\lambda_k-\mu_\alpha-\frac{\varepsilon}{2}\right)t}\right) < \frac{4n\eta AC}{\varepsilon} e^{(-\lambda_k+\varepsilon)t}. \tag{81.17}$$

При том же значении γ, считая ε настолько малым, что при $\lambda_k > \mu_\alpha$ выполняется неравенство

$$\lambda_k - \mu_\alpha > 2\varepsilon,$$

из (81.5) получим, что для значений α, для которых $\mu_\alpha < \lambda_k$, справедливы оценки

$$\left| \int_{a_\alpha}^{t} \bar{x}_{s\alpha}(t, \tau) L_\alpha\left(\tau, x_1^{(m-1)}, \ldots, x_n^{(m-1)}\right) d\tau \right| =$$

$$= \left| \int_{t}^{\infty} \bar{x}_{s\alpha}(t, \tau) L_\alpha\left(\tau, x_1^{(m-1)}, \ldots, x^{(m-1)}\right) d\tau \right| <$$

$$< -2n\eta AC \int_{t}^{\infty} e^{\left(-\mu_\alpha - \frac{\varepsilon}{2}\right)(t-\tau)} \cdot e^{(-\lambda_k + \varepsilon)\tau} d\tau =$$

$$= \frac{2n\eta AC}{-\mu_\alpha + \lambda_k - \frac{3}{2}\varepsilon} e^{(-\lambda_k + \varepsilon)t} < \frac{4n\eta AC}{\varepsilon} e^{(-\lambda_k + \varepsilon)t}. \qquad (81.18)$$

Принимая во внимание (81.12), (81.17), (81.18) и (81.16), из (81.14) находим:

$$\left| x_s^{(m)} \right| < Ae^{(-\lambda_k + \varepsilon)t} + \frac{4n^2\eta CA}{\varepsilon} e^{(-\lambda_k + \varepsilon)t} < 2Ae^{(-\lambda_k + \varepsilon)t}. \qquad (81.19)$$

Оценим теперь величины $\left| x_s^{(m+1)} - x_s^{(m)} \right|$. Пусть

$$\left| x_s^{(m)} - x_s^{(m-1)} \right| < Pe^{(-\lambda_k + \varepsilon)t}.$$

Тогда, применяя к равенствам

$$x_s^{(m+1)} - x_s^{(m)} \Big| =$$

$$= \left| \sum_{\alpha=1}^{n} \int_{a_\alpha}^{t} \bar{x}_{s\alpha}(t, \tau) L_\alpha\left(\tau, x_1^{(m)} - x_1^{(m-1)}, \ldots, x_n^{(m)} - x_n^{(m-1)}\right) d\tau \right|$$

оценки (81.17) и (81.18), в которых лишь придется заменить $2A$ на P, получим:

$$\left| x_s^{(m+1)} - x_s^{(m)} \right| < \frac{2n^2\eta CP}{\varepsilon} e^{(-\lambda_k + \varepsilon)t} = P\theta e^{(-\lambda_k + \varepsilon)t}, \qquad (81.20)$$

где на основании (81.16)

$$\theta = \frac{2n^2 C\eta}{\varepsilon} < \frac{1}{2}.$$

Так как на основании (81.15) и (81.12) во всяком случае

$$\left| x_s^{(1)} - x_s^{(0)} \right| < 3Ae^{(-\lambda_k + \varepsilon)t},$$

то из (81.20) следует, что

$$\left| x_s^{(m+1)} - x_s^{(m)} \right| < 3A\theta^m e^{(-\lambda_k+\varepsilon)t}.$$

Отсюда непосредственно вытекает, что с неограниченным возрастанием m последовательные приближения равномерно стремятся к некоторым функциям $f_s(t)$. Так как все последовательные приближения удовлетворяют неравенствам (81.15), то этим же неравенствам удовлетворяют и функции $f_s(t)$. Остается показать, что полученные таким образом функции $f_s(t)$ удовлетворяют уравнениям (81.10). Имеем:

$$\begin{aligned}\left| x_s^{(m)} - f_s \right| &= \left| \left(x_s^{(m)} - x_s^{(m+1)}\right) + \left(x_s^{(m+1)} - x_s^{(m+2)}\right) + \ldots \right| < \\ &< \left| x_s^{(m+1)} - x_s^{(m)} \right| + \left| x_s^{(m+2)} - x_s^{(m+1)} \right| + \ldots < \\ &< 3Ae^{(-\lambda_k+\varepsilon)t}\left(\theta^m + \theta^{m+1} + \ldots\right) = \frac{3A\theta^m}{1-\theta} e^{(-\lambda_k+\varepsilon)t},\end{aligned}$$

и поэтому

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \int_{a_\alpha}^{t} \bar{x}_{s\alpha}(t, \tau) L_\alpha\left(\tau, f_1 - x_1^{(m)}, \ldots, f_n - x_n^{(m)}\right) d\tau < \frac{3\theta^{m+1}A}{1-\theta} e^{(-\lambda_k+\varepsilon)t}.$$

Правая часть этих неравенств стремится к нулю при $m \to \infty$. Следовательно,

$$\begin{aligned}&\sum_{\alpha=1}^{n} \int_{a_\alpha}^{t} \bar{x}_{s\alpha}(t, \tau) L_\alpha\left(\tau, f_1, \ldots, f_n\right) d\tau = \\ &= \lim_{m\to\infty} \sum_{\alpha=1}^{n} \int_{a_\alpha}^{t} \bar{x}_{s\alpha}(t, \tau) L_\alpha\left(\tau, x_1^{(m)}, \ldots, x_n^{(m)}\right) d\tau = \\ &= \lim_{m\to\infty} \left(x_s^{(m+1)} - x_{sk}\right) = f_s - x_{sk},\end{aligned}$$

что и доказывает, что функции f_s удовлетворяют уравнениям (81.10).

3°. *Оценка характеристичных чисел.* Таким образом, мы получили решение уравнений (81.10), которое является в то же самое время решением и уравнений (81.2). Как уже указывалось, изменяя в (81.10) индекс k от 1 до n, мы получим n решений системы (81.2). Все эти решения образуют фундаментальную систему. Действительно, при $t = 0$ полученные решения, как это следует из оценок (81.18), будут сколь угодно мало отличаться от решений x_{sk} системы (81.1), если только η достаточно мало, и следовательно, определитель Вронского полученной системы будет при $t = 0$ сколь угодно мало отличаться от определителя Вронского системы x_{sj}, который заведомо отличен от нуля.

Обозначим через $\lambda_1^*, \ldots, \lambda_n^*$ характеристичные числа полученной фундаментальной системы решений уравнений (81.1). Из (81.13)

вытекает, что

$$\lambda_k^* \geqslant \lambda_k - \varepsilon.$$

Если мы теперь рассмотрим нормальную систему решений уравнений (81.2), то она будет отличаться от полученной фундаментальной системы тем, что некоторые решения последней заменены другими решениями с большими характеристичными числами. Следовательно, характеристичные числа $\lambda_1', \lambda_2', \ldots, \lambda_n'$ нормальной системы будут и подавно удовлетворять неравенствам (81.6).

Таким образом, теорема полностью доказана.

Теорема 2. *Если при выполнении условий предыдущей теоремы система* (81.1) *является правильной, то ее характеристичные числа устойчивы* [1]).

Доказательство. По условию теоремы имеем:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = X\left\{\exp \sum_{\alpha=1}^{n} \int_0^t p_{\alpha\alpha}\, dt\right\}.$$

Далее, на основании теоремы 1 § 79

$$\lambda_1' + \ldots + \lambda_n' \leqslant X\left\{\exp \sum_{\alpha=1}^{n} \int_0^t p_{\alpha\alpha}\, dt \cdot \exp \sum_{\alpha=1}^{n} \int_0^t \varphi_{\alpha\alpha}\, dt\right\}.$$

Но из (81.7), очевидно, имеем:

$$X\left\{\exp \sum_{\alpha=1}^{n} \int_0^t \varphi_{\alpha\alpha}\, dt\right\} \leqslant n\eta.$$

Кроме того, теорема 4 § 77 дает:

$$X\left\{\exp \sum_{\alpha=1}^{n} \int_0^t p_{\alpha\alpha}\, dt \cdot \exp \sum_{\alpha=1}^{n} \int_0^t \varphi_{\alpha\alpha}\, dt\right\} =$$

$$= X\left\{\exp \sum_{\alpha=1}^{n} \int_0^t p_{\alpha\alpha}\, dt\right\} + X\left\{\exp \sum_{\alpha=1}^{n} \int_0^t \varphi_{\alpha\alpha}\, dt\right\},$$

так как для правильных систем выполняется условие (79.4). Следовательно,

$$\lambda_1' + \ldots + \lambda_n' \leqslant \lambda_1 + \ldots + \lambda_n + n\eta. \tag{81.21}$$

---

[1]) См. примечание в конце книги (стр. 524).