Положим $\lambda_i' = \lambda_i - \varepsilon + \gamma_i$. Из (81.6) вытекает, что $\gamma_i \geqslant 0$. Поэтому (81.21) дает $\gamma_i \leqslant n(\varepsilon + \eta)$ и, следовательно,

$$\lambda_i' \leqslant \lambda_i + (n-1)\varepsilon + n\eta.$$

Полученные неравенства вместе с (81.6) и доказывают теорему [1]).

Доказанная сейчас теорема аналогична теореме 2, установленной Б. Ф. Быловым [2]).

Рассмотрим частный случай. Допустим, что коэффициенты p_{sj} являются постоянными. Тогда для системы (81.1) условия (81.4) и (81.5), очевидно, выполняются. И так как система с постоянными коэффициентами является правильной, то мы приходим к следующей теореме, установленной К. П. Персидским [3]).

Теорема 3. *Характеристичные числа системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами всегда устойчивы.*

Допустим, что коэффициенты p_{sj} являются постоянными, а коэффициенты φ_{sj} удовлетворяют условиям

$$\lim_{t\to\infty} \varphi_{sj} = 0. \tag{81.22}$$

Тогда, как об этом было указано в предыдущем параграфе, из теоремы 3 непосредственно вытекает справедливость также и следующего предложения:

Теорема 4. *Если коэффициенты φ_{sj} являются постоянными и выполняются условия* (81.22), *то характеристичные числа системы* (81.2) *совпадают с характеристичными числами системы* (81.1).

Эта теорема, установленная при некоторых ограничениях Пуанкаре [4]), в общем виде высказана О. Перроном [5]).

§ 82. Критерий положительности характеристичных чисел.

Допустим, что характеристичные числа системы

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n \qquad (s = 1, 2, \ldots, n) \tag{82.1}$$

---

[1]) См. примечание в конце книги (стр. 525).

[2]) Былов Б. Ф., О характеристичных числах решений систем линейных дифференциальных уравнений. ПММ, т. XIV, вып. 4, 1950.

[3]) Персидский К. П., О характеристичных числах дифференциальных уравнений. Изв. АН Казахской ССР, серия матем. и мех., вып. 1, 1947. Метод, которым мы доказывали теоремы 1 и 2, имеет много общего с методом доказательства К. П. Персидского.

[4]) Poincaré A., Sur les équations linéaires aux differentielles ordinaires et aux differences finies Oeuvres, т. 1, Gauthier Villars, 1928.

[5]) Perron O., Über Stabilität und asymptotisches Verhalten. Atti del Congresso Intern. dei Mat., 1928.

все положительны. Тогда, если выполняются условия теоремы 1 предыдущего параграфа, характеристичные числа системы

$$\frac{dx_s}{dt} = (p_{s1} + \varphi_{s1})\, x_1 + \ldots + (p_{sn} + \varphi_{sn})\, x_n \quad (s = 1, 2, \ldots, n) \tag{82.2}$$

будут также положительны, по крайней мере, тогда, когда все величины $|\varphi_{sj}(t)|$ не превышают некоторого достаточно малого положительного числа. Знание этого наибольшего предела для функций $|\varphi_{sj}(t)|$ является, очевидно, для практики наиболее существенным. Одну из оценок этого предела дает нижеследующая теорема[1]), в которой условия теоремы 1 § 81 несколько обобщены, а именно, вместо условий (81.4) и (81.5) мы будем предполагать, что для решений $\bar{x}_{sj}(t, t_0)$ уравнений (82.1), определяемых начальными условиями $\bar{x}_{sj}(t_0, t_0) = \delta_{sj}$, выполняются неравенства

$$|\bar{x}_{sj}(t, t_0)| < Me^{-\alpha(t-t_0)} \qquad (s, j = 1, 2, \ldots, n), \tag{82.3}$$

где $M \geqslant 1$ и α — некоторые не зависящие от t_0 положительные постоянные.

Теорема. *Если для уравнений* (82.1) *выполняются условия* (82.3), *то характеристичные числа системы* (82.2) *будут положительны при любом выборе функций* $\varphi_{sj}(t)$, *удовлетворяющих при* $t \geqslant 0$ *неравенствам*

$$|\varphi_{sj}(t)| < \frac{\alpha}{mM} \qquad (s, j = 1, 2, \ldots, n), \tag{82.4}$$

где $m \leqslant n^2$ — *наибольшее число членов в каждом из выражений*

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \bar{x}_{s\alpha}(t, \tau)(\varphi_{\alpha 1} x_1 + \ldots + \varphi_{\alpha n} x_n). \tag{82.5}$$

Доказательство. Пусть $x_s(t)$ — произвольное решение уравнений (82.2) с начальными значениями $x_s(0) = C_s$, удовлетворяющими неравенствам

$$|C_s| \leqslant 1 \quad (s = 1, 2, \ldots, n). \tag{82.6}$$

Рассматривая $x_s(t)$ как неизвестные, но вполне определенные функции времени, мы из (82.2) находим, что эти функции необходимо удовлетворяют интегральным уравнениям

$$x_s(t) = \sum_{\alpha=1}^{n} C_\alpha \bar{x}_{s\alpha}(t, 0) + \\ + \sum_{\alpha=1}^{n} \int_0^t \bar{x}_{s\alpha}(t, \tau)\left[\varphi_{\alpha 1} x_1(\tau) + \ldots + \varphi_{\alpha n} x_n(\tau)\right] d\tau, \tag{82.7}$$

---

[1]) Малкин И. Г., О характеристических числах систем линейных дифференциальных уравнений. ПММ, т. XVI, вып. 1, 1952.

которые, следовательно, имеют решение[1]). Для того чтобы доказать справедливость теоремы, достаточно, очевидно, показать, что найдется такое достаточно большое положительное число A и такое достаточно малое положительное число ε, что при всех $t > 0$ будут выполняться условия

$$|x_s(t)| \leqslant Ae^{-\varepsilon t}. \tag{82.8}$$

Но, считая $A > 1$, мы будем на основании (82.6) иметь, что условия (82.8) выполняются при $t = 0$ со знаками неравенства. Следовательно, эти условия будут выполняться, по крайней мере, при $t > 0$, достаточно малом. Допустим, что эти условия при некоторых значениях t нарушаются. Тогда должен существовать такой момент времени $t = T$, при котором впервые хотя бы одно из условий (82.8) выполняется со знаком равенства. Так как при $0 \leqslant t \leqslant T$ условия (82.8) во всяком случае выполняются, то, полагая $\varepsilon < \alpha$, из (82.7) на основании (82.6) и (82.3) получим:

$$|x_s(T)| < nMe^{-\alpha T} + mMAQ \int_0^T e^{-\alpha(T-\tau)} e^{-\varepsilon\tau} d\tau =$$

$$= nMe^{-\alpha T} + \frac{mMAQ}{\alpha - \varepsilon} e^{-\varepsilon T} (1 - e^{-(\alpha-\varepsilon)T} < A\left(\frac{nM}{A} + \frac{mMQ}{\alpha - \varepsilon}\right) e^{-\varepsilon T},$$

где Q — наибольшее значение, принимаемое функциями $|\varphi_{sj}(t)|$ на отрезке $[0, T]$, а m — число членов в выражениях (82.5). Но на основании (82.4) $Q < \frac{\alpha}{Mm}$, и поэтому число ε может быть взято настолько малым, а число A настолько большим, что будет выполняться неравенство

$$\frac{nM}{A} + \frac{mMQ}{\alpha - \varepsilon} < 1.$$

Но тогда мы будем иметь:

$$|x_s(T)| < Ae^{-\varepsilon T},$$

что противоречит предположению, что при $t = T$ хотя бы одно из условий (82.8) будет выполняться со знаком равенства. Таким образом, условия (82.8) будут выполняться при всех $t > 0$, что и доказывает теорему.

Относительно фигурирующей в условиях теоремы величины m заметим следующее. Эта величина, равная наибольшему числу членов, входящих в каждое из выражений (82.5), не превосходит n^2. Но она может быть и меньше, чем n^2. Так, например, если в правую часть

---

[1]) В отличие от уравнений (81.10) в уравнениях (82.7) все нижние пределы интегрирования приняты равными нулю. Вследствие этого отпадает необходимость в доказательстве существования решения этих уравнений.

каждого из уравнений (82.2) входит только по одному поправочному члену, т. е. если при каждом значении s только одна из функций $\varphi_{s1}, \varphi_{s2}, \ldots, \varphi_{sn}$ отлична от нуля, то $m \leqslant n$. То же самое будет и в том случае, если при каждом s только одна из функций $\bar{x}_{s1}(t, t_0), \ldots, \bar{x}_{sn}(t, t_0)$ отлична от нуля. Вообще, если при каждом s число отличных от нуля функций $\varphi_{s1}, \ldots, \varphi_{sn}$ не превосходит $p \leqslant n$, а число отличных от нуля функций $\bar{x}_{s1}, \ldots, \bar{x}_{sn}$ не превосходит $q \leqslant n$, то $m \leqslant pq$.

Рассмотрим частный случай. Допустим, что коэффициенты p_{sj} являются постоянными. Пусть λ — наименьшая из величин $\operatorname{Re}(-\lambda_1)$, $\operatorname{Re}(-\lambda_2), \ldots, \operatorname{Re}(-\lambda_n)$, где λ_i — корни характеристического уравнения

$$|p_{sj} - \delta_{sj}\lambda| = 0. \tag{82.9}$$

Тогда характеристичные числа системы (82.2) будут положительны при выполнении неравенств

$$|\varphi_{sj}(t)| < \frac{\lambda}{mM}. \tag{82.10}$$

В самом деле, в рассматриваемом случае мы можем в условиях (82.3) положить $\alpha = \lambda - \eta$, где η — сколь угодно малое положительное число.

§ 83. Оценка характеристичных чисел методом построения функций Ляпунова.

Рассмотрим снова уравнения (82.1) и (82.2) в предположении, что коэффициенты p_{sj} постоянны. В предыдущем параграфе мы указали предел для величин $|\varphi_{sj}(t)|$, при котором знак наименьшего характеристичного числа системы (82.2) совпадает со знаком наименьшего характеристичного числа системы (82.1). При этом мы предполагали, что указанный знак положителен. Можно указать другой способ оценки интересующего нас предела, который одинаково применим как в случае, когда наименьшее характеристичное число рассматриваемых систем положительно, так и в случае, когда это число отрицательно. Этот способ, предложенный Н. Г. Четаевым, основан на построении для уравнений (82.1) функции Ляпунова[1]).

Допустим сначала, что все корни характеристического уравнения системы (82.1) имеют отрицательные вещественные части и, следовательно, ее характеристичные числа положительны. Найдем квадратичную форму $V(x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющую уравнению

$$\sum \frac{\partial V}{\partial x_s}(p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n) = W(x_1, \ldots, x_n), \tag{83.1}$$

[1]) Четаев Н. Г., Устойчивость движения, стр. 194. Гостехиздат, 1946.

где W — некоторая наперед заданная определенно-положительная квадратичная форма. Форма V при этом получится определенно-отрицательной. Если мы теперь составим производную от V по t в силу уравнений (82.2), то будем иметь:

$$\frac{dV}{dt} = W + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s} (\varphi_{s1} x_1 + \ldots + \varphi_{sn} x_n). \tag{83.2}$$

Если функции $\varphi_{sj}(t)$ таковы, что квадратичная форма

$$W + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s} (\varphi_{s1} x_1 + \ldots + \varphi_{sn} x_n) \tag{83.3}$$

по-прежнему определенно-положительна, то характеристичные числа системы (82.2) будут положительны. Форма (83.3) будет определенно-положительной, если величины $|\varphi_{sj}(t)|$ достаточно малы, и практически никогда не представляет труда определить верхние пределы для $|\varphi_{sj}(t)|$, при которых знакоопределенность (83.3) сохраняется. Эти пределы будут зависеть от выбранной формы W, чем можно воспользоваться для получения для этих пределов возможно больших значений.

Допустим теперь, что характеристическое уравнение системы (82.1) имеет корни с положительными вещественными частями. Тогда, если равенство

$$m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 + \ldots + m_n\lambda_n = 0, \tag{83.4}$$

где λ_i — корни характеристического уравнения, не выполняется ни при каких целых неотрицательных $m_1, \ldots, m_n$, связанных соотношением $m_1 + m_2 + \ldots + m_n = 2$, то форма V, удовлетворяющая уравнению (83.1), по-прежнему существует, но она не будет ни определенно-отрицательной, ни знакопостоянной отрицательной. При этом, если форма (83.3) определенно-положительна, то наименьшее характеристичное число системы (82.2) будет отрицательным. Таким образом, и в рассматриваемом случае предел для $|\varphi_{sj}(t)|$, при котором знаки наименьших характеристичных чисел систем (82.1) и (82.2) совпадают, определяется из условия знакоопределенности формы (83.3).

Если существует система целых неотрицательных m_i, связанных соотношением $m_1 + \ldots + m_n = 2$, для которых удовлетворяется равенство (83.4), то можно построить форму V, удовлетворяющую уравнению

$$\sum \frac{\partial V}{\partial x_s} (p_{s1} x_1 + \ldots + p_{sn} x_n) = \lambda V + W(x_1, \ldots, x_n),$$

где λ — положительное число, W — определенно-положительная форма, и при этом форма V может принимать положительные значения. Если

форма (83.3) будет определенно-положительной, то, так же как и в предыдущем случае, наименьшее характеристичное число системы (82.2) будет отрицательным.

Пример. Пусть предложена система

$$\frac{dx_1}{dt} = -\lambda x_1 + \varphi(t)\, x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -\lambda x_2 + \varphi(t)\, x_2, \tag{83.5}$$

где $\varphi(t)$ — непрерывная функция времени. Полагая $2V = x_1^2 + x_2^2$, получим:

$$\frac{dV}{dt} = -\lambda x_1^2 - (\lambda - \varphi)\, x_2^2 + \varphi x_1 x_2.$$

Условие знакоопределенности $\frac{dV}{dt}$ дает:

$$4\lambda(\lambda - \varphi) > \varphi^2$$

или

$$|\varphi| < (\sqrt{8} - 2)\lambda. \tag{83.6}$$

Если $\lambda > 0$, то можно применить оценку предыдущего параграфа. В рассматриваемом случае

$$\bar{x}_{11}(t, t_0) = e^{-\lambda(t-t_0)}, \quad \bar{x}_{21}(t, t_0) = 0,$$
$$\bar{x}_{12}(t, t_0) = 0, \quad \bar{x}_{22}(t, t_0) = e^{-\lambda(t-t_0)}$$

и, следовательно, $M = 1$, $m = 1$, и формула (82.10) дает:

$$|\varphi| < \lambda.$$

Полученный предел несколько выше даваемого формулой (83.6) и является для рассматриваемого случая наибольшим. В самом деле, при $\varphi = \text{const} > \lambda$ наименьшее характеристичное число системы (83.5) отрицательно.

Определение знака наименьшего характеристичного числа при помощи функций Ляпунова может быть иногда проведено и при p_{sj} переменных. Укажем здесь на один прием, предложенный Н. Г. Четаевым[1]) и заключающий вышеизложенный как частный случай.

Допустим, что коэффициенты p_{sj} в уравнениях (82.1) являются непрерывными и ограниченными функциями t. Допустим, что корни уравнения (82.9), которые теперь являются функциями t, ни при каком $t > 0$ не связаны соотношением (83.4). Тогда по-прежнему будет существовать квадратичная форма $V(t, x_1, \ldots, x_n)$, коэффициенты которой являются функциями времени, удовлетворяющая уравнению (83.1). Допустим, что коэффициенты p_{sj} таковы, что форма

$$\frac{\partial V}{\partial t} + W(x_1, \ldots, x_n)$$

---

[1]) Четаев Н. Г., О наименьшем характеристичном числе. ПММ, т. IX, вып. 2, 1945.

будет также определенно-положительной. Тогда, если форма V окажется определенно-отрицательной, что будет, например, иметь место, когда при всех достаточно больших значениях t вещественные части всех корней уравнения (82.9) меньше некоторого отрицательного числа, то невозмущенное движение для уравнений (82.1) будет устойчиво и, следовательно, характеристичные числа этих уравнений будут во всяком случае не менее нуля. Если окажется, что при любом $t > T$, где T — достаточно большое положительное число, форма V может принимать положительные значения, и если, кроме того, она допускает бесконечно малый высший предел, т. е. ее коэффициенты являются ограниченными, то невозмущенное движение будет неустойчиво.

§ 84. Применение метода малого параметра.

Результаты предыдущих параграфов показывают, что при практическом определении знака наименьшего характеристичного числа системы линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами можно последние в некоторых случаях заменить подходящим образом выбранными постоянными. Если при этом отклонения этих коэффициентов от соответствующих им постоянных не превосходят некоторых установленных в предыдущих параграфах пределов, то знак наименьшего характеристичного числа системы с переменными коэффициентами будет совпадать со знаком наименьшего характеристичного числа системы с постоянными коэффициентами. Этот прием не может быть, очевидно, применен в том случае, когда наименьшее характеристичное число системы с постоянными коэффициентами равно нулю. То же самое будет и в том случае, когда указанное наименьшее характеристичное число будет численно очень мало. В этом случае верхние пределы для отклонений коэффициентов сравниваемых систем, даваемые правилами предыдущих параграфов, будут также очень малыми, вследствие чего метод может потерять всякий практический интерес. В этом параграфе мы изложим один прием[1]), который позволяет для широкого класса систем дать практически пригодные оценки наименьшего характеристичного числа для вышеуказанных критических случаев.

Допустим, что рассматриваемая система имеет вид

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + \mu\left(\varphi^*_{s1}x_1 + \ldots + \varphi^*_{sn}x_n\right) \quad (84.1)$$
$$(s = 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

где p_{sj} — постоянные, φ^*_{sj} — ограниченные и непрерывные при $t \geqslant 0$ функции времени, μ — малый параметр, характеризующий степень отклонения от системы с постоянными коэффициентами. Мы будем

[1]) См. работу автора, цитированную в сноске на стр. 352.

предполагать, что характеристическое уравнение

$$|p_{sj} - \delta_{sj}\rho| = 0 \tag{84.2}$$

системы с постоянными коэффициентами

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n \tag{84.3}$$

имеет корни с нулевыми вещественными частями и не имеет корней с положительными вещественными частями. Таким образом, наименьшее характеристичное число системы (84.3) равно нулю. Случай, когда это число отлично от нуля, но очень мало, приводится к рассматриваемому путем отнесения малых поправочных членов к тем членам уравнений (82.1), которые имеют множителем μ. Для упрощения дальнейших выкладок мы предположим, кроме того, что уравнение (84.2) не имеет кратных корней.

Сущность предлагаемого метода решения задачи состоит в том, что систему (84.1) при помощи подходящим образом выбранного линейного преобразования вида

$$y_s = x_s + \mu(f_{s1}x_1 + \ldots + f_{sn}x_n) \quad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{84.4}$$

где $f_{sj}(t)$ — некоторые ограниченные и непрерывные при $t \geqslant 0$ функции времени, приводят к виду

$$\frac{dy_s}{dt} = p_{s1}y_1 + \ldots + p_{sn}y_n + \mu(a_{s1}y_1 + \ldots + a_{sn}y_n) + \\ + \mu^2(\psi_{s1}x_1 + \ldots + \psi_{sn}x_n). \tag{84.5}$$

Здесь a_{sj} — постоянные, а $\psi_{sj}(t)$ — ограниченные и непрерывные при $t \geqslant 0$ функции времени. Эти функции зависят, вообще говоря, от μ, относительно которого они аналитичны.

Если теперь в системе (84.5) отбросить члены с переменными коэффициентами, то может оказаться, что полученная система с постоянными коэффициентами будет иметь наименьшее характеристичное число, отличное от нуля. Это число будет, конечно, иметь порядок малости μ, но в отличие от системы (84.1) порядок малости переменных коэффициентов будет не меньше μ^2, и поэтому к полученной системе могут быть применены методы предыдущих параграфов [1]).

---

[1]) Таким образом, сущность метода заключается в повышении порядка малости членов с переменными коэффициентами. Этот метод широко используется в работах Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова по нелинейным колебаниям. Для случая периодических коэффициентов этот прием применялся Ляпуновым при решении задачи устойчивости в критических случаях (см. § 67). При этом Ляпунов рассматривал нелинейные уравнения; малыми являлись члены, нелинейные относительно x_s, и задача сводилась к преобразованию уравнений к такому виду, чтобы переменные коэффициенты были у членов сколь угодно высокого порядка.

Чтобы вышеуказанное преобразование действительно могло быть выполнено, необходимо, чтобы коэффициенты φ^*_{sj} удовлетворяли следующим условиям:

1) Существуют такие постоянные α_{sj}, что функции

$$\int_0^t \varphi^*_{sj}\,dt - \alpha_{sj}t \quad (s,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

ограничены. При этом условии, очевидно, имеем:

$$\alpha_{sj} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \varphi^*_{sj}(t)\,dt.$$

2) Если разность каких-нибудь двух корней ρ_p и ρ_q уравнения (84.2) есть чисто мнимое число ib, то функции

$$\int_0^t \varphi^*_{sj}\cos bt\,dt, \qquad \int_0^t \varphi^*_{sj}\sin bt\,dt$$

ограничены.

Условия 1) выполняются для любых периодических и квазипериодических функций. Для этих же функций будут выполняться и условия 2), если только разложения этих функций не содержат «резонирующих» гармоник $\cos bt$ и $\sin bt$.

Мы переходим теперь к определению преобразования (84.4). С этой целью заменим в правой и левой частях уравнений (84.5) величины y_s их значениями (84.4). Тогда, принимая во внимание (84.1), получим:

$$\sum_{\alpha=1}^n p_{s\alpha}x_\alpha + \mu\sum_{\alpha=1}^n \varphi^*_{s\alpha}x_\alpha + \mu\sum_{\alpha=1}^n \frac{df_{s\alpha}}{dt}x_\alpha + \mu\sum_{\alpha,\,\beta=1}^n f_{s\alpha}p_{\alpha\beta}x_\beta =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^n p_{s\alpha}\left(x_\alpha + \mu\sum_{\beta=1}^n f_{\alpha\beta}x_\beta\right) + \mu\sum_{\alpha=1}^n a_{s\alpha}\left(x_\alpha + \mu\sum_{\beta=1}^n f_{\alpha\beta}x_\beta\right) + \mu^2(\ldots).$$

Приравнивая члены с первой степенью μ, будем иметь:

$$\frac{df_{sk}}{dt} = \sum_{\alpha=1}^n p_{s\alpha}f_{\alpha k} - \sum_{\alpha=1}^n p_{\alpha k}f_{s\alpha} + a_{sk} - \varphi^*_{sk} \quad (s,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{84.6}$$

Мы получили, таким образом, для определения коэффициентов n^2 линейных неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Из этих уравнений функции f_{sk} могут быть определены при помощи квадратур. Необходимо, однако, чтобы эти функции вышли ограниченными, и мы сейчас покажем, что при сделанных

допущениях постоянными a_{sk} можно так распорядиться, чтобы это обстоятельство действительно имело место.

С этой целью допустим, что система (84.3) при помощи неособенного линейного преобразования с постоянными коэффициентами приведена предварительно к каноническому виду. Так как, по предположению, уравнение (84.2) не имеет кратных корней, то канонический вид системы (84.3) будет следующий:

$$\frac{dx_s}{dt} = \rho_s x_s \qquad (s = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Здесь ρ_s — корни уравнения (84.2). Мы будем предполагать, что такое преобразование было выполнено с самого начала и будем придерживаться прежнего обозначения переменных. Указанное предварительное преобразование не только упрощает выкладки, но и облегчает значительно вычисление коэффициентов f_{sj}, и поэтому его действительно целесообразно выполнить.

Уравнения (84.1) имеют теперь вид

$$\frac{dx_s}{dt} = \rho_s x_s + \mu(\varphi_{s1}x_1 + \ldots + \varphi_{sn}x_n), \tag{84.7}$$

где функции φ_{sj} являются линейными комбинациями функций φ^*_{sj} с постоянными коэффициентами и поэтому удовлетворяют тем же условиям, что и функции φ^*_{sj}.

Уравнения (84.6) имеют теперь следующий простой вид:

$$\frac{df_{sk}}{dt} = (\rho_s - \rho_k) f_{sk} + a_{sk} - \varphi_{sk} \qquad (s,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{84.8}$$

Для того чтобы эти уравнения имели ограниченное решение, положим

$$a_{ss} = \lim \frac{1}{t} \int_0^t \varphi_{ss}\, dt \qquad (s = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

и

$$a_{sk} = 0 \qquad (s \neq k;\ s,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Тогда функции f_{ss}, определяемые равенствами

$$f_{ss} = \int_0^t (a_{ss} - \varphi_{ss})\, dt$$

согласно условиям, которым удовлетворяют φ_{sj}, будут ограниченными. Покажем, что то же самое будет справедливо и по отношению к функциям f_{sk} $(s \neq k)$, если в уравнениях (84.8), которым они удовлетворяют, надлежащим образом распорядиться постоянными инте-

грирования. Действительно, обозначая

$$\rho_s - \rho_k = \alpha_{sk} + i\beta_{sk},$$

мы можем положить:

$$f_{sk} = -e^{\alpha_{sk}t}(\cos\beta_{sk}t + i\sin\beta_{sk}t)\int_a^t e^{-\alpha_{sk}t}(\cos\beta_{sk}t - i\sin\beta_{sk}t)\,\varphi_{sk}\,dt, \tag{84.9}$$

где a — произвольная постоянная. Эту постоянную мы положим равной нулю при $\alpha_{sk} \leqslant 0$ и равной ∞ при $\alpha_{sk} > 0$. Тогда мы будем иметь:

$$|f_{sk}| < Me^{\alpha_{sk}t}\int_0^t e^{-\alpha_{sk}t}\,dt = -\frac{M}{\alpha_{sk}}\left(1 - e^{\alpha_{sk}t}\right), \tag{84.10}$$

если $\alpha_{sk} < 0$, и

$$|f_{sk}| < Me^{\alpha_{sk}t}\int_t^\infty e^{-\alpha_{sk}t}\,dt = \frac{M}{\alpha_{sk}}, \tag{84.11}$$

если $\alpha_{sk} > 0$. Здесь M — верхний предел функций $|\varphi_{sk}|$. Из (84.10) и (84.11) вытекает ограниченность функций (84.9) при $\alpha_{sk} \neq 0$. Ограниченность этих функций при $\alpha_{sk} = 0$ непосредственно вытекает из условия 2), которому удовлетворяют функции φ_{sk}.

Таким образом, мы действительно можем найти ограниченные функции f_{sk}, при которых подстановка (84.4) преобразует систему (84.1) к виду (84.5). При этом входящие в определение функций f_{sk} произвольные постоянные могут быть выбраны по произволу. При μ, достаточно малом, определитель подстановки (84.4) превосходит при любом $t > 0$ некоторую положительную постоянную, вследствие чего характеристичные числа системы (84.1) совпадают с характеристичными числами системы (84.5).

Выбрав функции f_{sk} и постоянные a_{sk} вышеуказанным образом, мы приведем систему (84.7) к виду

$$\frac{dy_s}{dt} = \rho_s y_s + \mu a_{ss} y_s + \mu^2(\psi_{s1}y_1 + \ldots + \psi_{sn}y_n). \tag{84.12}$$

Допустим, что наименьшее характеристичное число системы

$$\frac{dy_s}{dt} = (\rho_s + \mu a_{ss})\,y_s \tag{84.13}$$

с постоянными коэффициентами отлично от нуля. Тогда на основании теоремы об устойчивости характеристичных чисел систем с постоянными коэффициентами величину μ можно всегда выбрать настолько малой, чтобы знак наименьшего характеристичного числа системы (84.12) совпадал со знаком наименьшего характеристичного числа системы (84.13). Оценка верхнего предела для $|\mu|$ может быть

сделана по методам предыдущих параграфов. При этом если эту оценку делать при помощи функций Ляпунова, то после определения коэффициентов f_{sk} можно уже не производить самого преобразования (84.4) и исходить непосредственно из уравнений (84.7). Действительно, функцией Ляпунова для системы (84.12) будет выражение

$$2V = \sum_{\alpha=1}^{n} (\rho_\alpha + \mu a_{\alpha\alpha}) y_\alpha^2,$$

и следовательно, функцией Ляпунова для системы (84.7) будет выражение

$$2V = \sum_{\alpha=1}^{n} (\rho_\alpha + \mu_{\alpha\alpha}) \left(x_\alpha + \mu \sum_{\beta=1}^{n} f_{\alpha\beta} x_\beta \right)^2. \tag{84.14}$$

При этом верхний предел значений μ определится из условия, что производная от (84.14) в силу уравнений (84.7) является определенно-положительной [1]).

Пример. Пусть предложена система

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \mu(-1 + 2\sin t)\, x_1 + \mu x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= -x_2 + \mu x_1, \end{aligned}\right\} \tag{84.15}$$

где $\mu > 0$. Характеристическое уравнение соответствующей системы с постоянными коэффициентами имеет, с точностью до величин второго порядка, отрицательные корни $-\mu$ и -1. Однако методы предыдущих параграфов не дают возможности сделать каких-либо заключений о знаках характеристичных чисел полной системы (84.15), так как эти методы дают пределы для модулей переменных коэффициентов, меньшие модулей корней характеристического уравнения. В рассматриваемом случае переменный коэффициент $2\mu \sin t$ может вдвое превосходить модуль корня $-\mu$.

Для системы (84.15) уравнения, определяющие коэффициенты f_{sk} преобразования (84.4)

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= x_1 + \mu(f_{11}x_1 + f_{12}x_2), \\ y_2 &= x_2 + \mu(f_{21}x_1 + f_{22}x_2), \end{aligned}\right\} \tag{84.16}$$

имеют вид

$$\frac{df_{11}}{dt} = a_{11} + 1 - 2\sin t, \qquad \frac{df_{22}}{dt} = a_{22},$$

$$\frac{df_{12}}{dt} = f_{12} - 1, \qquad \frac{df_{21}}{dt} = -f_{21} - 1.$$

---

[1]) См. примечание в конце книги (стр. 527).

Эти уравнения имеют такие ограниченные решения

$$f_{11} = 2\cos t, \quad f_{22} = 0,$$
$$f_{12} = 1, \quad f_{21} = -1,$$

причем

$$a_{11} = -1, \quad a_{22} = 0.$$

Подставляя в (84.16) и выполняя преобразование, получим вместо (84.15) следующую систему:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= -\mu y_1 + \mu^2(\psi_{11}y_1 + \psi_{12}y_2), \\ \frac{dy_2}{dt} &= -y_2 + \mu^2(\psi_{21}y_1 + \psi_{22}y_2), \end{aligned}\right\} \tag{84.17}$$

где

$$\psi_{11} = \frac{1}{\Delta}[1 + 2\sin 2t + \mu(1 + 2\cos t)],$$
$$\psi_{12} = \frac{1}{\Delta}[1 + 2\cos t + \mu(-1 + 4\cos^2 t - \sin 2t + 2\cos t)],$$
$$\psi_{21} = \frac{1}{\Delta}[1 - 2\sin t - \mu],$$
$$\psi_{22} = \frac{1}{\Delta}[-1 + \mu(-1 + 2\sin t - 2\cos t)],$$
$$\Delta = 1 + 2\mu\cos t + \mu^2.$$

Характеристичные числа системы (84.17) будут положительны, если величины $\mu^2|\psi_{sj}|$ достаточно малы. Для оценки верхнего предела этих величин воспользуемся формулой (82.10). В рассматриваемом случае $\lambda = \mu$, $m = 2$ и $M = 1$. Поэтому, для того чтобы характеристичные числа системы (84.17) были положительны, достаточно, чтобы функции $\mu^2|\psi_{sj}|$ удовлетворяли неравенствам $|\mu^2\psi_{sj}| < \frac{\mu}{2}$. Грубая оценка показывает, что это во всяком случае будет выполнено, если $\mu < \frac{1}{9}$.

Примечание. Если коэффициенты ψ_{sj} в преобразованных уравнениях (84.5) обладают такими же свойствами, как и коэффициенты φ^*_{sj}, то эти уравнения можно подвергнуть такому же преобразованию и получить новые уравнения, у которых переменные коэффициенты будут иметь порядок малости μ^3. Аналогичным образом можно продолжать и дальше. В частности, если коэффициенты φ^*_{sj} являются квазипериодическими функциями, то можно построить любое число

приближений и привести уравнения (84.1) к виду

$$\frac{dy_s}{dt} = p_{s1}y_1 + \ldots + p_{sn}y_n + \sum_{\alpha=1}^{k} \mu^\alpha \left(a_{s1}^{(\alpha)}y_1 + \ldots + a_{sn}^{(\alpha)}y_n\right) + \\ + \mu^{k+1}\left[f_{s1}(t)\,y_1 + \ldots + f_{sn}(t)\,y_n\right],$$

где $a_{sj}^{(\alpha)}$ — постоянные. Этот прием использовал И. З. Штокало [1]) для установления критериев устойчивости линейных систем с квазипериодическими коэффициентами. Однако И. З. Штокало не устанавливает пределов для μ и ограничивается доказательством, что при μ, достаточно малом, невозмущенное движение будет устойчиво, если корни характеристического уравнения системы с постоянными коэффициентами

$$\frac{dy_s}{dt} = p_{s1}y_1 + \ldots + p_{sn}y_n + \sum_{\alpha=1}^{k} \mu^\alpha \left(a_{s1}^{(\alpha)}y_1 + \ldots + a_{sn}^{(\alpha)}y_n\right)$$

имеют отрицательные вещественные части. Более просто и в более общем виде это предложение доказано Н. П. Еругиным [1]).

В. ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ПЕРВОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ.

§ 85. Теорема об устойчивости по первому приближению.

Мы переходим сейчас к рассмотрению нелинейных уравнений, зависящих явно от t, и к установлению условий, при которых задача устойчивости решается совокупностью членов наинизшего порядка в этих уравнениях. В этом параграфе мы будем рассматривать систему вида

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s^{(m)}(x_1, \ldots, x_n) + \varphi_s(t, x_1, \ldots, x_n), \tag{85.1}$$

где $X_s^{(m)}$ — некоторые не зависящие от t формы m-го порядка ($m \geqslant 1$) переменных $x_1, \ldots, x_n$. Функции φ_s зависят также от t. Эти функции определены в области

$$t \geqslant 0, \quad |x_s| \leqslant H, \tag{85.2}$$

где они непрерывны и удовлетворяют неравенствам

$$|\varphi_s(t, x_1, \ldots, x_n)| < A\,\{|x_1| + \ldots + |x_n|\}^m, \tag{85.3}$$

---

[1]) Штокало И. З., Критерий устойчивости и неустойчивости решений линейных дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами. Матем. сб., т. 19, № 2, 1946.

[2]) Еругин Н. П., Об асимптотической устойчивости решения некоторой системы дифференциальных уравнений. ПММ, т. XII, вып. 2, 1948.

причем A — некоторая постоянная. Кроме того, предполагается, что уравнения (85.1) допускают в области (85.2) единственное решение при заданных начальных условиях.

Рассмотрим систему первого приближения

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s^{(m)}(x_1, \ldots, x_n), \tag{85.4}$$

которая, вообще говоря, нелинейна. При каких условиях устойчивость для уравнений (85.4) обусловливает устойчивость для полной системы (85.1)? Ответ на этот вопрос дается следующей теоремой [1]).

Теорема. *Если невозмущенное движение для уравнений* (85.4) *асимптотически устойчиво, то то же самое будет справедливо и для уравнений* (85.1) *при любом выборе функций* φ_s, *удовлетворяющих неравенствам* (85.3), *если только постоянная* A *достаточно мала.*

Доказательство. На основании теоремы § 73 существует определенно-положительная функция $V(x_1, \ldots, x_n)$, производная которой, составленная в силу уравнений (85.4), т. е. выражение

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s} X_s^{(m)}, \tag{85.5}$$

есть функция определенно-отрицательная. Рассмотрим в пространстве переменных $x_1, \ldots, x_n$ семейство поверхностей $V = h > 0$. При h, достаточно малом, все эти поверхности замкнуты, окружают начало координат и пересекаются интегральными кривыми уравнений (85.4) снаружи во внутрь. Пусть $V = h^*$ одна из этих поверхностей. Обозначим эту поверхность через S. В силу знакоопределенности выражения (85.5) каждая интегральная кривая системы (84.5) пересекает поверхность S снаружи во внутрь под углом, превосходящим некоторую положительную величину α.

Соединим радиусами-векторами все точки поверхности S с началом координат и уменьшим все эти радиусы-векторы в k раз. Мы получим замкнутую поверхность, окружающую начало координат, подобную поверхности S. Обозначим эту поверхность через S_k. Изменяя k от 1 до 0, мы получим семейство такого рода поверхностей [2]), стягивающихся при $k = 0$ в начало координат.

Пусть A — какая-нибудь точка поверхности S и A_k — соответствующая ей точка поверхности S_k. Так как эти поверхности подобны, то касательные плоскости к ним в точках A и A_k параллельны. С другой стороны, касательные к интегральным кривым уравнений (85.4)

---

[1]) Малкин И. Г., Теорема об устойчивости по первому приближению. ДАН СССР, т. LXXVI, № 6, 1951.

[2]) Эти поверхности, вообще говоря, пересекаются между собой.

в точках A и A_k также параллельны, так как в силу однородности этих уравнений имеем:

$$\left(\frac{dx_s}{dt}\right)_{A_k} = X_s^{(m)}[k(x_1)_A, \ldots, k(x_n)_A] = k^m \left(\frac{dx_s}{dt}\right)_A .$$

Таким образом, интегральная кривая уравнений (85.4), проходящая через точку A_k, пересекает поверхность S_k под таким же углом, под каким интегральная кривая тех же уравнений, проходящая через точку A, пересекает поверхность S. Следовательно, так же как и поверхность S, все поверхности S_k пересекаются интегральными кривыми уравнений (85.4) снаружи во внутрь под углами, превосходящими α.

Рассмотрим теперь полную систему уравнений (85.1). Предположим, что величина A в неравенствах (85.3) настолько мала, что во всей области (85.2) поле касательных к интегральным кривым уравнений (85.1) повернуто относительно поля касательных к интегральным кривым уравнений (85.4) на угол, меньший α. Тогда, очевидно, все интегральные кривые системы (85.1) будут пересекать поверхности S_k снаружи во внутрь, откуда непосредственно вытекает справедливость теоремы [1]).

§ 86. Некоторые особенности задачи устойчивости по первому приближению для неустановившихся движений.

Таким образом, если члены наинизшего порядка в уравнениях возмущенного движения не зависят явно от t, то для устойчивости невозмущенного движения достаточно, чтобы для первого приближения имела место асимптотическая устойчивость. Можно показать, что, по крайней мере, при $n = 2$ справедливо и обратное предложение, а именно, невозмущенное движение для уравнений (85.1) будет только тогда устойчиво при любом выборе функций φ_s, имеющих порядок малости выше m, когда для уравнений первого приближения имеет место асимптотическая устойчивость [2]).

Значительно сложнее обстоит дело в случае, когда члены наинизшего порядка в уравнениях возмущенного движения также зависят от t. В этом случае условия асимптотической устойчивости для уравнений первого приближения недостаточно для обеспечения устойчивости для полной системы уравнений. С другой стороны, это условие не является необходимым.

Рассмотрим, например, следующую систему уравнений:

$$\frac{dx_s}{dt} = px_s + \varphi_s(t, x_1, \ldots, x_n). \tag{86.1}$$

---

[1]) См примечание в конце книги (стр. 528).

[2]) Тем более это условие будет необходимым, если функции φ_s удовлетворяют неравенствам (85.3).

К. П. Персидский показал [1]), что, для того чтобы для этой системы уравнений имела место устойчивость при любом выборе функций φ_s, удовлетворяющих в области (85.2) условию

$$|\varphi_s(t, x_1, \ldots, x_n)| < A(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2), \tag{86.2}$$

где A — некоторая постоянная, достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\exp \int_0^t p\,dt < B, \quad \int_0^t \exp \int_0^\tau p(\tau)\,d\tau < B, \tag{86.3}$$

где B — также постоянная.

В самом деле, полагая

$$y_s = x_s \exp\left(-\int_0^t p\,dt\right),$$

получим:

$$\frac{dy_s}{dt} = \exp\left(-\int_0^t p\,dt\right)\varphi_s\left(t, y_1 \exp\int_0^t p\,dt, \ldots, y_n \exp\int_0^t p\,dt\right),$$

откуда

$$y_s = c_s + \int_0^t \exp\left(-\int_0^t p\,dt\right)\varphi_s\left(t, y_1 \exp\int_0^t p\,dt, \ldots\right.$$
$$\left.\ldots, y_n \exp\int_0^t p\,dt\right)dt, \tag{86.4}$$

где c_s — начальные значения величин y_s, а следовательно, также и величин x_s.

Пусть ε — произвольно малое положительное число. Мы будем предполагать, что

$$\varepsilon < \frac{1}{2nA}. \tag{86.5}$$

Выберем η согласно условию

$$\eta < \frac{\varepsilon}{2B}. \tag{86.6}$$

Тогда, если $|c_s| \leqslant \eta$, то при всех $t > 0$ будут выполняться неравенства $|y_s| < \frac{\varepsilon}{B}$. В самом деле, эти неравенства, выполняясь в начальный момент, будут выполняться и при t, достаточно малом.

---

[1]) Персидский К. П., К теории устойчивости интегралов систем дифференциальных уравнений. Изв. физ.-матем. об-ва при Казанском гос. ун-те, т. VIII, 1936—1937.

Пусть T — первый момент времени, при котором хотя бы одна из величин $|y_s|$, пусть это будет $|y_k|$, достигает значения $\frac{\varepsilon}{B}$. Тогда из (86.4), (86.2), (86.3), (86.5) и (86.6) получим:

$$|y_k(T)| < \eta + \frac{nA\varepsilon^2}{B^2}\int_0^T \exp\left[\int_0^t p\,dt\right]dt < \frac{\varepsilon}{2B} + \frac{nA}{B}\varepsilon^2 =$$

$$= \frac{\varepsilon}{B}\left(\frac{1}{2} + nA\varepsilon\right) < \frac{\varepsilon}{B}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{\varepsilon}{B},$$

что противоречит условию $|y_k(T)| = \frac{\varepsilon}{B}$. Таким образом, при всех $t > 0$ будут выполняться неравенства $|y_s| < \frac{\varepsilon}{B}$, а следовательно, и неравенства $|x_s| < \varepsilon$, что доказывает устойчивость невозмущенного движения для уравнений (86.1).

Но условия (86.3) будут выполнены, если положить

$$p(t) = \frac{2t^3 \sin t \cos t - 3t^2 \cos^2 t}{1 + t^3 \cos^2 t} = -\frac{d}{dt}\ln(1 + t^3 \cos^2 t).$$

При таком выборе функции p уравнения первого приближения для системы (86.1) имеют общее решение

$$x_s = \frac{c_s}{1 + t^3 \cos^2 t},$$

из которого следует, что невозмущенное движение для первого приближения устойчиво, но не асимптотически. В то же время невозмущенное движение для полной системы (86.1) будет по доказанному устойчиво при любом выборе функций φ_s, удовлетворяющих условиям (86.3).

Рассмотрим теперь систему уравнений[1])

$$\frac{dx_1}{dt} = -ax_1,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = [\sin\ln(t+1) + \cos\ln(t+1) - 2a]\,x_2 + x_1^2, \qquad (86.7)$$

где

$$1 < 2a < 1 + \frac{1}{2}e^{-\pi}. \qquad (86.8)$$

Общее решение уравнений первого приближения имеет вид

$$x_1 = c_1 e^{-at}, \quad x_2 = c_2 \exp[(t+1)\sin\ln(t+1) - 2at].$$

Это решение не только асимптотически устойчиво, но обладает положительным характеристичным числом. Тем не менее, невоз-

[1]) Perron O., Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen. Mathem. Zeitschrift, т. 32, 1930.

мущенное движение для полной системы уравнений (86.7) неустойчиво. Действительно, это общее решение имеет вид

$$x_1 = c_1 e^{-at},$$

$$x_2 = \exp\left[(t+1)\sin\ln(t+1) - 2at\right] \times$$
$$\times \left(c_2 + c_1^2 \int_0^t \exp\left[-(\tau+1)\sin\ln(\tau+1)\right] d\tau\right).$$

Полагая $t+1 = e^{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi}$, где $n > 0$ — целое число, будем иметь:

$$\exp\left[(t+1)\sin\ln(t+1) - 2at\right] = e \cdot e^{(1-2a)t}, \quad (1+t)e^{-\pi} - 1 > 0$$

и следующие оценки:

$$\int_0^t \exp[-(\tau+1)\sin\ln(\tau+1)]d\tau > \int_{(1+t)e^{-\pi}-1}^{(1+t)e^{-\frac{2}{3}\pi}-1} \exp[-(\tau+1)\sin\ln(\tau+1)]d\tau >$$

$$> \int_{(1+t)e^{-\pi}-1}^{(1+t)e^{-\frac{2}{3}\pi}-1} e^{\frac{1}{2}(\tau+1)} d\tau > \int_{(1+t)e^{-\pi}-1}^{(1+t)e^{-\frac{2}{3}\pi}-1} e^{\frac{1}{2}(t+1)e^{-\pi}} d\tau =$$
$$= e^{\frac{1}{2}(t+1)e^{-\pi}}(t+1)\left(e^{-\frac{2}{3}\pi} - e^{-\pi}\right).$$

Поэтому при указанных значениях t второе слагаемое в выражении для x_2 удовлетворяет неравенству

$$c_1^2 \exp\left[(t+1)\sin\ln(t+1) - 2at\right] \int_0^t \exp\left[-(\tau+1)\sin\ln(\tau+1)\right] d\tau >$$
$$> e^{\frac{1}{2}(2+e^{-\pi})}\left(e^{-\frac{2}{3}\pi} - e^{-\pi}\right) e^{\left(1-2a+\frac{1}{2}e^{-\pi}\right)t}$$

и, следовательно, на основании (86.8) с неограниченным возрастанием t неограниченно возрастает. Первое же слагаемое в выражении x_2 с неограниченным возрастанием t стремится к нулю. И это будет справедливо, каковы бы ни были начальные значения $c_1 \neq 0$ и c_2 величин x_1 и x_2. Таким образом, при любых начальных значениях, при которых $c_1 \neq 0$, функция x_2 будет неограниченной и, следовательно, невозмущенное движение неустойчиво.

Приведенные примеры показывают, что если уравнения первого приближения зависят явно от t, то условие асимптотической устойчивости решений этих уравнений не является ни необходимым, ни

достаточным для устойчивости невозмущенного движения при любом выборе членов высших порядков.

Необходимых и достаточных условий устойчивости по первому приближению неустановившихся движений для общего случая не найдено. Установлен, однако, ряд достаточных критериев, которые мы ниже и излагаем. Мы будем при этом заниматься только критериями устойчивости. Критериями неустойчивости по первому приближению занимался Н. Г. Четаев[1]).

Мы будем также предполагать, что уравнения первого приближения линейны.

§ 87. Критерий Ляпунова.

Рассмотрим уравнения возмущенного движения вида

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + \varphi_s(t, x_1, \ldots, x_n) \qquad (87.1)$$

$$(s = 1, 2, \ldots, n),$$

где p_{sj} ограничены и непрерывны при $t \geqslant 0$, и соответствующую систему уравнений первого приближения

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n. \qquad (87.2)$$

Первым, установившим достаточные условия устойчивости по первому приближению для уравнений вида (87.1), был сам А. М. Ляпунов. При этом Ляпунов предполагал, что функции φ_s, ограниченные по отношению к t, разлагаются в ряды по степеням переменных $x_1, \ldots, x_n$, начинающиеся членами не ниже второго порядка. Критерий Ляпунова обобщен Э. Коттоном и К. П. Персидским[2]), наложившими на φ_s менее ограничительные условия. Мы докажем теорему Ляпунова в предположении, что функции φ_s удовлетворяют в области

$$|x_s| \leqslant H, \quad t \geqslant 0 \qquad (87.3)$$

неравенствам

$$|\varphi_s(t, x_1, \ldots, x_n)| < A\{|x_1| + \ldots + |x_n|\}^m, \qquad (87.4)$$

где A и m — положительные числа, из которых второе больше единицы. Кроме того, предполагается, как обычно, что уравнения (87.1) допускают в рассматриваемой области единственное решение при заданных начальных условиях. Наложенные на φ_s ограничения зна-

---

[1]) Четаев Н. Г., Теорема о неустойчивости для правильных систем. ПММ, т. XII, вып. 5, 1944; Четаев Н. Г., О некоторых вопросах об устойчивости и неустойчивости для неправильных систем. ПММ, т. XII, вып 5, 1948; Четаев Н. Г., Устойчивость движения, Гостехиздат, 1946.

[2]) См. работу, цитированную на стр. 367.

чительно слабее, чем у Э. Коттона, и несколько сильнее, чем у К. П. Персидского.

Критерий Ляпунова выражается следующей теоремой.

Теорема. *Если система уравнений первого приближения* (87.2) *правильная и если все ее характеристичные числа положительны, то невозмущенное движение для уравнений* (87.1) *асимптотически устойчиво при любом выборе функций* φ_s, *удовлетворяющих в области* (87.3) *неравенствам* (87.4).

Доказательство. Обозначим через $x_{sj}(t)$ нормальную систему решений уравнений (87.2), а через $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — ее характеристичные числа, так что

$$X\{x_{1j}, \ldots, x_{nj}\} = \lambda_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{87.5}$$

По условию теоремы все величины λ_j положительны. Обозначим далее через $\bar{x}_{sj}(t)$ фундаментальную систему решений уравнений (87.2), определяемую начальными условиями $\bar{x}_{si}(0) = \delta_{sj}$ (δ_{sj} — символ Кронекера). Тогда, если

$$\lambda = \min\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\},$$

то во всяком случае

$$X\{\bar{x}_{sj}\} \geqslant \lambda. \tag{87.6}$$

Пусть $\Delta = |x_{sj}|$ — определитель Вронского решений x_{sj}, а Δ_{sj} — минор этого определителя, соответствующий элементу x_{sj}. Оценим характеристичное число функций Δ_{sj}/Δ. Применяя теоремы о характеристичных числах произведения и суммы, получим:

$$X\left\{\frac{\Delta_{sj}}{\Delta}\right\} \geqslant X\{\Delta_{sj}\} + X\left\{\frac{1}{\Delta}\right\} \geqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i - \lambda_j + X\left\{\frac{1}{\Delta}\right\}.$$

Но, так как система (87.2) — правильная, то

$$X\left\{\frac{1}{\Delta}\right\} = X\left\{\frac{1}{\Delta(0)} e^{-\sum\limits_{i=1}^{n} \int p_{ii} dt}\right\} = -\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

и, следовательно,

$$X\left\{\frac{\Delta_{sj}}{\Delta}\right\} \geqslant -\lambda_j. \tag{87.7}$$

Из (87.5), (87.6) и (87.7) находим, что при всех $t \geqslant 0$ справедливы оценки

$$\left.\begin{aligned} |\bar{x}_{sj}(t)| < Be^{(-\lambda+\alpha)t}, \quad |x_{sj}(t)| < Be^{(-\lambda_j+\alpha)t}, \\ \left|\frac{\Delta_{sj}}{\Delta}\right| < Be^{(\lambda_j+\alpha)t}, \end{aligned}\right\} \tag{87.8}$$

где α — сколь угодно малое положительное число, а $B \geqslant 1$ — некоторая постоянная (зависящая от α).

Сделаем теперь в уравнениях (87.1) замену переменных

$$y_s = x_s e^{\gamma t}, \tag{87.9}$$

где $\gamma < \lambda$. Получим:

$$\frac{dy_s}{dt} = p_{s1}y_1 + \ldots + p_{sn}y_n + \gamma y_s + e^{\gamma t}\varphi_s(t, e^{-\gamma t}y_1, \ldots, e^{-\gamma t}y_n), \tag{87.10}$$

причем система первого приближения (87.2) перейдет в систему

$$\frac{dy_s}{dt} = p_{s1}y_1 + \ldots + p_{sn}y_n + \gamma y_s. \tag{87.11}$$

Пусть $\bar{y}_{sj}(t)$ — фундаментальная система решений уравнений (87.11), определяемая начальными условиями $\bar{y}_{sj}(0) = \delta_{sj}$, $y_{sj}(t)$ — нормальная система решений этих уравнений, соответствующая системе x_{sj} уравнений (87.2), $D = |y_{sj}|$ и D_{sj} — минор определителя D, соответствующий элементу y_{sj}. Тогда, очевидно,

$$\bar{y}_{sj} = e^{\gamma t}\bar{x}_{sj}, \quad y_{sj} = e^{\gamma t}x_{sj}, \quad \frac{D_{sj}}{D} = e^{-\gamma t}\frac{\Delta_{sj}}{\Delta},$$

и из (87.8) находим:

$$\left.\begin{aligned} |\bar{y}_{sj}(t)| < Be^{(-\lambda+\alpha+\gamma)t}, \quad |y_{sj}(t)| < Be^{(-\lambda_j+\alpha+\gamma)t}, \\ \left|\frac{D_{sj}}{D}\right| < Be^{(\lambda_j+\alpha-\gamma)t}. \end{aligned}\right\} \tag{87.12}$$

Мы будем предполагать, что α настолько мало, что

$$-\lambda_j + \alpha + \gamma \leqslant -\lambda + \alpha + \gamma < 0.$$

Рассмотрим неоднородную систему

$$\frac{dy_s}{dt} = p_{s1}y_1 + \ldots + p_{sn}y_n + \gamma y_s + f_s(t),$$

где f_s — произвольные непрерывные функции времени. Частное решение этих уравнений, если его искать по методу вариации произвольных постоянных Лагранжа, имеет вид

$$y_s = \sum_{i,j=1}^{n} y_{sj}\int_0^t \frac{D_{ij}}{D} f_i(t)\,dt.$$

Поэтому общее решение этих уравнений определяется равенствами

$$y_s = \sum_{i=1}^{n} c_i\bar{y}_{si}(t) + \sum_{i,j=1}^{n} y_{sj}\int_0^t \frac{D_{ij}}{D} f_i(t), \tag{87.13}$$

где c_s — начальные значения величин y_s.

Установив это, рассмотрим произвольное решение $y_s(t)$ уравнений (87.10) с начальными условиями $y_s(t)=y_s^0$. На основании (87.13) мы можем писать:

$$y_s(t)=\sum_{i=1}^{n} y_i^0 \bar{y}_{si}(t)+$$
$$+\sum_{i,j=1}^{n} y_{ij}\int_0^t \frac{D_{ij}}{D} e^{\gamma t}\varphi_i[t,\ e^{-\gamma t}y_1(t),\ \ldots,\ e^{-\gamma t}y_n(t)]\,dt. \quad (87.14)$$

Пусть ε — произвольное сколь угодно малое положительное число. Мы будем при этом предполагать, что оно настолько мало, что выполняется неравенство

$$n^{m+1}B^2A\varepsilon^{m-1}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{|\lambda_j+\alpha-m\gamma|}<\frac{1}{2}. \quad (87.15)$$

Так как $m>1$, то это будет выполняться при всяком $\varepsilon<h$, где h достаточно мало. Выберем теперь $\eta(\varepsilon)$ согласно неравенству

$$\eta<\frac{1}{2nB}\varepsilon<\frac{\varepsilon}{2} \quad (87.16)$$

и покажем, что если $|y_s^0|\leqslant\eta$, то при всех $t>0$ будет $|y_s(t)|<\varepsilon$, т. е. что невозмущенное движение относительно переменных y_s устойчиво.

В самом деле, пусть $t=T$ — первый момент времени, при котором хотя бы одна из величин $|y_s|$ достигает значения ε. На всем отрезке $[0,\ T]$ на основании (87.4) справедливы оценки

$$|\varphi_i(t,\ e^{-\gamma t}y_1(t),\ \ldots,\ e^{-\gamma t}y_n(t))|<n^mAe^{-m\gamma t}\varepsilon^m.$$

Поэтому, принимая во внимание (87.12), из (87.14) найдем:

$$|y_s(T)|<nB\eta e^{(-\lambda+\alpha+\gamma)t}+\sum_{j=1}^{n}n^{m+1}B^2A\varepsilon^m e^{(-\lambda_j+\alpha+\gamma)t}\int_0^t e^{(\lambda_j+\alpha-m\gamma)t}\,dt=$$
$$=nB\eta e^{(-\lambda+\alpha+\gamma)t}+n^{m+1}B^2A\varepsilon^m\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\lambda_j+\alpha-m\gamma}\left(e^{(2\alpha+\gamma-m\gamma)t}-e^{(-\lambda_j+\alpha+\gamma)t}\right).$$

Так как $m>1$, то α можно выбрать настолько малой, чтобы $2\alpha+\gamma-m\gamma<0$. Тогда на основании (87.13) показатели степеней в правых частях полученных неравенств будут отрицательны. Поэтому указанные неравенства принимают вид

$$|y_s(T)|<nB\eta+n^{m+1}B^2A\varepsilon^m\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{|\lambda_j+\alpha-m\gamma|}$$

и, следовательно, на основании (87.15) и (87.16)

$$|y_s(T)| < \varepsilon,$$

что противоречит условию, что хотя бы одна из величин $|y_s(T)|$ равна α.

Таким образом, невозмущенное движение по отношению к переменным y_s устойчиво. Но тогда оно на основании (87.9) будет асимптотически устойчиво по отношению к переменным x_s, что и доказывает теорему.

Примечание 1. Из устойчивости невозмущенного движения по отношению y_s и равенств (87.9) вытекает, что характеристичное число функций $x_s(t)$ не менее величины γ, которая является любым положительным числом, меньшим наименьшего из характеристичных чисел системы первого приближения.

Примечание 2. Допустим, что система (87.2) не является правильной, так что

$$X\left\{e^{\sum_{i=1}^{n}\int_0^t p_{ii}dt}\right\} - \sum_{i=1}^{n}\lambda_i = a > 0.$$

Ляпунов показал, что доказанная теорема останется в силе, если a меньше наименьшего характеристического числа системы (87.2).

§ 88. Другая группа критериев.

Мы рассмотрим сейчас три других критерия устойчивости по первому приближению, отличных от критерия Ляпунова и играющих важную роль в теории критических случаев. Во всех этих трех критериях предполагается, что функции $\varphi_s(t, x_1, \ldots, x_n)$ в дифференциальных уравнениях возмущенного движения

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + \varphi_s(t, x_1, \ldots, x_n) \qquad (s = 1, 2, \ldots, n) \tag{88.1}$$

удовлетворяют в области

$$t \geqslant 0, \quad |x_s| \leqslant H, \tag{88.2}$$

неравенствам

$$|\varphi_s(t, x_1, \ldots, x_n)| < A\{|x_1| + \ldots + |x_n|\}, \tag{88.3}$$

где A — некоторая постоянная.

Первый из указанных критериев выражается следующей теоремой[1]).

---

[1]) См. Малкин И. Г., Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen. Сб. трудов Казанского авиац. ин-та, № 2, 1934.

Теорема 1. *Если для уравнений первого приближения*

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n \tag{88.4}$$

существует функция Ляпунова $V(t, x_1, \ldots, x_n)$, *удовлетворяющая всем условиям теоремы* II *об асимптотической устойчивости, то невозмущенное движение асимптотически устойчиво при любом выборе функций* φ_s, *удовлетворяющих в области* (88.2) *неравенствам* (88.3), *если только постоянная* A *достаточно мала.*

Доказательство. Мы воспользуемся для доказательства результатами § 75. Согласно последним (теорема 3) при выполнении условий теоремы существует определенно-положительная квадратичная форма $V^*(t, x_1, \ldots, x_n)$ с ограниченными коэффициентами, производная которой, составленная в силу уравнений (88.4), равна наперед заданной определенно-отрицательной квадратичной форме. Мы можем, в частности, положить:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s}(p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n) = -\sum_{s=1}^{n} x_s^2.$$

Составим теперь производную от V по t в силу полной системы уравнений (88.1). Будем иметь:

$$\frac{dV}{dt} = -\sum_{s=1}^{n} x_s^2 + \sum_{s=1}^{n} \varphi_s \frac{\partial V}{\partial x_s}.$$

Эта производная, в силу того что коэффициенты формы V ограничены, будет определенно-отрицательной при любом выборе функций φ_s, удовлетворяющих в области (88.2) неравенствам (88.3), если только постоянная A достаточно мала. Следовательно, форма V является функцией Ляпунова для полной системы (88.1), удовлетворяющей всем условиям теоремы II об асимптотической устойчивости. Поэтому невозмущенное движение асимптотически устойчиво, что и доказывает теорему.

Пусть $x_{sj}(t, t_0)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ — фундаментальная система решений уравнений (88.4), определяемая начальными условиями

$$x_{ss}(t_0, t_0) = 1, \quad x_{sj}(t_0, t_0) = 0 \qquad (s \neq j)$$
$$(s, j = 1, 2, \ldots, n).$$

Тогда имеет место также следующий критерий устойчивости по первому приближению, установленный К. П. Персидским[1]).

[1]) См. работу, цитированную на стр. 367.

Теорема 2. *Если для уравнений первого приближения* (88.4) *при любых* $t_0 \geqslant 0$ *и* $t > t_0$ *выполняются неравенства*

$$|x_{sj}(t, t_0)| < Be^{-\alpha(t-t_0)}, \tag{88.5}$$

где B *и* α — *положительные постоянные, не зависящие от* t_0, *то невозмущенное движение асимптотически устойчиво при любом выборе функций* φ_s, *удовлетворяющих в области* (88.2) *неравенствам* (88.3), *если только постоянная* A *достаточно мала.*

Согласно результатам § 75 (теорема 1 и 2) этот критерий, который может быть доказан и непосредственно, полностью эквивалентен критерию, даваемому теоремой 1, и поэтому в отдельном доказательстве не нуждается.

Отметим, наконец, еще третий критерий, который также эквивалентен первым двум. Этот критерий установлен О. Перроном[1]) и выражается следующей теоремой.

Теорема 3. *Если уравнения первого приближения* (88.4), *обладают тем свойством, что при любых непрерывных и ограниченных при* $t \geqslant 0$ *функциях* f_s *система неоднородных уравнений*

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + f_s(t) \tag{88.6}$$

допускает только ограниченные решения, то невозмущенное движение асимптотически устойчиво при любом выборе функций φ_s, *удовлетворяющих в области* (88.2) *неравенствам* (88.3), *если только постоянная* A *достаточно мала.*

Как уже указывалось выше, этот критерий полностью эквивалентен критериям, даваемым теоремами 1 и 2.

Действительно, общее решение уравнений (88.6) имеет вид

$$x_s = \sum_{j=1}^{n} c_j x_{sj}(t, 0) + \int_0^t \sum_{j=1}^{n} x_{sj}(t, \tau) f_j(\tau)\, d\tau,$$

где c_j — произвольные постоянные. Если выполняются условия теоремы 1, или, что то же самое, неравенства (88.5), то при любом $t \geqslant 0$ будут справедливы оценки

$$x_s < B(|c_1| + \ldots + |c_n|) + nBM \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)}\, dt =$$

$$= B(|c_1| + \ldots + |c_n|) + \frac{nBM}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t}),$$

где M — верхний предел функций $|f_s(t)|$, что и доказывает ограниченность функций x_s. Наоборот, если уравнения (88.6) при любых ограниченных и непрерывных $f_s(t)$ допускают только ограниченные

[1]) См. работу, цитированную на стр. 368.

решения, то можно показать [1]), что выполняются условия теоремы 1, а следовательно, также и теоремы 2.

Доказанными теоремами выделяется определенный класс линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Эти уравнения обладают тем свойством, что для них одновременно выполняются условия всех трех теорем, причем если выполняются условия хотя бы одной из этих теорем, то выполняются условия и двух других теорем. Из (88.5) вытекает, что все характеристичные числа этих уравнений положительны.

Частным случаем такого рода уравнений являются уравнения с постоянными коэффициентами, если вещественные части всех корней его характеристического уравнения отрицательны, и уравнения с периодическими коэффициентами, если их характеристические показатели также имеют отрицательные вещественные части [2]).

§ 89. Связь с критерием Ляпунова. Обобщенный критерий.

В предыдущем параграфе установлены три эквивалентных между собой критерия устойчивости по первому приближению. Естественно, возникает вопрос, будут ли указанные критерии эквивалентны критерию Ляпунова или они дают более широкие условия устойчивости по первому приближению, или, напротив, более узкие условия. Нижеприводимые примеры показывают, что ни одно из этих предположений неверно. Может случиться, что для системы первого приближения выполняются условия Ляпунова и не выполняются условия теорем предыдущего параграфа, и наоборот, существуют системы, для которых выполняются условия указанных теорем и не выполняются условия Ляпунова. Чтобы это показать, рассмотрим сначала систему [3])

$$\frac{dx_1}{dt} = -(2 - \sin[\ln(t+1)])\, x_1 = p x_1,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_1 - x_2.$$

Эта система имеет положительные характеристичные числа, но она не является правильной, так как выражение

$$\frac{1}{t}\int_0^t p\,dt = -2 + \frac{1}{2}[\sin\ln(t+1) - \cos\ln(t+1)] + \\ + \frac{1 + \sin\ln(t+1) - \cos\ln(t+1)}{2t}$$

---

[1]) Малкин И. Г., Об устойчивости по первому приближению. Сб. научных трудов Казанск. авиац. ин-та, № 3, 1935.

[2]) См. примечание в конце книги (стр. 528).

[3]) См. работу автора, цитированную в сноске [1]).

не стремится ни к какому пределу при $t \to \infty$, что является (см. § 79) необходимым и достаточным условием правильности такого рода систем. Вместе с тем, производная от функции $V = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$, составленная в силу этих уравнений, равная

$$\frac{dV}{dt} = -[2 - \sin\ln(t+1)]\, x_1^2 + x_1 x_2 - x_2^2,$$

будет определенно-отрицательной, и следовательно, выполняются условия теоремы 1, а также и двух других теорем предыдущего параграфа.

Рассмотрим теперь систему[1]), состоящую из одного уравнения

$$\frac{dx}{dt} = -(1 + 2\pi\cos\sqrt{t})\, x = px.$$

Так как

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t p\,dt = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\left[-t - 4\pi\cos\sqrt{t} - 4\pi\sqrt{t}\sin\sqrt{t} + 4\pi\right] = -1,$$

то система правильна и обладает положительным характеристичным числом, равным единице. Следовательно, выполняются условия критерия Ляпунова. Вместе с тем легко показать, что для этого уравнения не выполняются неравенства (88.5) и, следовательно, критерии предыдущего параграфа. Действительно, в рассматриваемом случае

$$x(t, t_0) = \exp\left[-(t - t_0) - 4\pi\left(\cos\sqrt{t} - \cos\sqrt{t_0}\right) - \right.$$
$$\left. - 4\pi\left(\sqrt{t}\sin\sqrt{t} - \sqrt{t_0}\sin\sqrt{t_0}\right)\right].$$

Полагая $t_0 = \left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)^2$ и $t = (2k\pi + \pi)^2 > t_0$, где k — целое число, будем иметь:

$$x_s(t, t_0) = \exp\left[-\left(4k\pi + \frac{3}{2}\pi\right)\frac{\pi}{2} + 4\pi + 4\pi\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right] > e^{6k\pi^2}.$$

С неограниченным возрастанием k правая часть этого неравенства неограниченно возрастает и, следовательно, условия (88.5) не выполняются.

Приведем, наконец, еще один критерий устойчивости по первому приближению, указанный автором[2]). Этот критерий утверждает, что невозмущенное движение будет асимптотически устойчиво при любом

---

[1]) Персидский К. П., К теории устойчивости интегралов систем дифференциальных уравнений. Изв. физ.-матем. об-ва при Казанск. гос. ун-те, т. VIII, 1936—1937.

[2]) Малкин И. Г., Об устойчивости движения по первому приближению. ДАН, т. XVIII, № 3, 1938.

выборе функций $\varphi_s(t, x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющих в области (88.2) условию (87.4), если вместо неравенств (88.5), фигурирующих в теореме 2 предыдущего параграфа, будут выполняться при всех $t_0 > 0$ и $t > t_0$ неравенства

$$|x_{sj}(t, t_0)| < Be^{\beta t_0} e^{-\alpha(t-t_0)},$$

где B и α — не зависящие от t_0 положительные постоянные, а β — также положительная постоянная, удовлетворяющая неравенству

$$\beta < (2m-1)\alpha.$$

Г. ТЕОРИЯ КРИТИЧЕСКИХ СЛУЧАЕВ.

§ 90. Постановка задачи. Основные определения.

В предыдущем разделе установлен ряд теорем, дающих достаточные условия устойчивости по первому приближению. Эти условия, являясь достаточными, не являются необходимыми, и поэтому при невыполнении их еще не следует делать заключения, что для решения задачи устойчивости необходимо исследовать члены более высоких порядков в уравнениях возмущенного движения. Однако можно указать такие уравнения, для которых исследование членов более высоких порядков является безусловно необходимым. Такими будут, очевидно, уравнения следующего вида:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy_i}{dt} = q_{i1}y_1 + \ldots + q_{ik}y_k + Y_i(t, y_1, \ldots, y_k, x_1, \ldots, x_n), \\ &\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + r_{s1}y_1 + \ldots + r_{sk}y_k + \\ &\qquad\qquad + X_s(t, y_1, \ldots, y_k, x_1, \ldots, x_n) \\ &\qquad (i = 1, 2, \ldots, k; \quad s = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned}\right\} \quad (90.1)$$

Здесь Y_i и X_s — аналитические функции переменных $y_1, \ldots, y_k, x_1, \ldots, x_n$, разложения которых начинаются членами не ниже второго порядка. Коэффициенты этих разложений, а также коэффициенты q_{ij}, r_{sj} и p_{sj} являются непрерывными и ограниченными функциями времени. При этом коэффициенты p_{sj} таковы, что для линейной системы

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n \quad (90.2)$$

выполняется какой-нибудь критерий устойчивости по первому приближению, так что для нелинейной системы, которая получится из (90.2) путем прибавления нелинейных членов, зависящих только от $x_1, \ldots, x_n$, будет иметь место асимптотическая устойчивость. В дальнейшем мы будем предполагать, что для системы (90.2)

выполняются критерии § 88. Это будет необходимо для справедливости излагаемых ниже результатов.

Коэффициенты q_{ij}, напротив, таковы, что задача устойчивости для уравнений вида

$$\frac{dy_i}{dt} = q_{i1}y_1 + \ldots + q_{ik}y_k + \varphi_i(t, y_1, \ldots, y_k), \tag{90.3}$$

где φ_i — нелинейные добавки, зависящие только от $y_1, \ldots, y_k$, не решается первым приближением. Таким будет, например, случай, когда коэффициенты q_{ij} постоянны, а характеристическое уравнение системы (90.3) имеет корни с вещественными частями, равными нулю, и не имеет корней с положительными вещественными частями.

Все случаи, для которых задача устойчивости не решается членами первого порядка, мы будем называть *критическими*. В настоящем разделе мы устанавливаем несколько основных предложений общего характера о решении задачи устойчивости для критических случаев и применяем затем эти предложения к некоторым критическим случаям для установившихся и периодических движений.

Отбросим в системе $(n+k)$-го порядка (90.1) последние n уравнений, а в первых k уравнениях отбросим все члены, зависящие от $x_1, \ldots, x_n$, и рассмотрим полученную таким образом систему k-го порядка

$$\frac{dy_i}{dt} = q_{i1}y_1 + \ldots + q_{ik}y_k + Y_i(t, y_1, \ldots, y_k, 0, \ldots, 0) \quad (i = 1, 2, \ldots, k). \tag{90.4}$$

Эту систему мы будем в дальнейшем называть «укороченной».

Допустим, что задачу устойчивости для «укороченной» системы удалось разрешить. Возникает вопрос: при каких условиях этим самым решается задача устойчивости и для полной системы (90.1)? В главе IV, где были рассмотрены два простейших критических случая для установившихся движений, было показано, что в этих простых случаях ответ на задачу устойчивости для полной системы совпадает с ответом на задачу устойчивости для «укороченной» системы, если последняя решается конечным числом членов и если выполняются следующие условия: 1) все коэффициенты r_{sj} равны нулю; 2) разложения функций $X_s(t, y_1, \ldots, y_k, 0, \ldots, 0)$ начинаются членами достаточно высокого порядка.

Это дало возможность свести решение задачи устойчивости полной системы к решению задачи для «укороченной» системы (состоящей в рассмотренных случаях из одного или двух уравнений) путем преобразования полной системы к такому виду, для которого условия 1) и 2) выполняются. Эти результаты удалось, однако, получить путем действительного решения задачи устойчивости для «укороченной» системы и притом вполне определенным методом — построением

функций Ляпунова, причем это удалось сделать лишь тольку потому, что для «укороченной» системы удалось построить функции Ляпунова очень простого вида, а именно — целые рациональные. Использованные методы дали возможность надеяться, что аналогичные результаты удастся получить и в других критических случаях, если для «укороченной» системы удастся построить такие же простые функции Ляпунова. Таким путем действительно удалось исследовать [1]) некоторые критические случаи, не рассмотренные Ляпуновым. Однако такой метод является очень неудобным и сложным, так как построение функций Ляпунова представляет иногда непреодолимые трудности, даже в тех случаях, когда заранее известно решение задачи устойчивости для «укороченной» системы. Более того, нет вообще уверенности, что такие простые функции Ляпунова действительно существуют. Поэтому, естественно, возникает вопрос: всегда ли вообще задача устойчивости для полной системы при выполнении условий 1) и 2) решается «укороченной» системой? Можно показать [2]), что ответ на поставленный вопрос получается всегда утвердительный, если задача устойчивости для «укороченной» системы решается конечным числом членов. Это предложение доказывается в следующем параграфе. В § 92 показывается, что полная система может быть всегда преобразована к такому виду, для которого условия 1) и 2) выполняются. Результатами этих двух параграфов задача устойчивости для системы $(n+k)$-го порядка с k критическими переменными всегда приводится к исследованию системы k-го порядка, если задача решается конечным числом членов.

Последнее понятие требует уточнения. Рассмотрим произвольную систему какого-нибудь r-го порядка

$$\frac{dz_i}{dt} = Z_i^{(m)}(t, z_1, \ldots, z_r) + \ldots + Z_i^{(N)}(t, z_1, \ldots, z_r) + \\ + \varphi_i(t, z_1, \ldots, z_r) \quad (90.5)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, r),$$

определенную в области

$$t \geqslant 0, \quad |z_i| \leqslant H. \quad (90.6)$$

Здесь $Z_i^{(l)}$ — формы l-го порядка переменных $z_1, \ldots, z_r$, коэффициенты которых являются непрерывными и ограниченными функциями времени, а φ_i обозначают совокупность всех членов порядка выше N.

Мы примем следующие определения.

---

[1]) Малкин И. Г., Некоторые вопросы теории устойчивости движения в смысле Ляпунова. Сб. трудов Казанск. авиац. ин-та, № 7, 1937; Каменков Г. В., Об устойчивости движения. Сб. трудов Казанск. авиац. ин-та, № 9, 1939.

[2]) Малкин И. Г., Некоторые основные теоремы теории устойчивости движения в критических случаях. ПММ, т. VI, вып. 6, 1942.

Определение 1. *Невозмущенное движение* $z_1 = z_2 = \ldots = z_r = 0$ *называется устойчивым вне зависимости от вида членов порядка выше, чем* N, *если для всякого положительного* ε, *как бы мало оно ни было, существует такое положительное число* $\eta(\varepsilon, A)$, *зависящее только от* ε *и* A, *что для всех решений уравнений* (90.5), *начальные значения* z_i^0 *которых в начальный момент времени* $t = 0$ *выбраны согласно условиям*

$$|z_i^0| < \eta(\varepsilon, A),$$

выполняются при всех $t > 0$ *неравенства*

$$|z_i| < \varepsilon$$

при всяком выборе функций $\varphi_i(t, z_1, \ldots, z_r)$, *удовлетворяющих в области* (90.6) *условиям*

$$|\varphi_i(t, z_1, \ldots, z_r)| < A\{|z_1| + \ldots + |z_r|\}^{N+1},$$

где N — *некоторая постоянная.*

Определение 2. *Невозмущенное движение* $z_1 = \ldots = z_r = 0$ *называется неустойчивым вне зависимости от членов порядка выше, чем* N, *если при тех же условиях относительно функций* φ_i *существует положительное число* $\varepsilon(A)$, *зависящее только от* A, *что внутри любой сколь угодно малой* η-*окрестности точки* $z_1 = \ldots = z_r = 0$ *существует, по крайней мере, одна система величин* $\alpha_1(A, \eta), \ldots, \alpha_r(A, \eta)$, *зависящих только от* A *и* η, *что хотя бы одна из величин* $|z_i|$ *для решения уравнений* (90.5), *определенного начальными условиями*

$$z_i^0 = \alpha_i,$$

достигает в некоторый момент времени значения ε.

§ 91. Первая основная теорема о критических случаях.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений возмущенного движения $(n+k)$-го порядка следующего вида:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_i}{dt} &= q_{i1}y_1 + \ldots + q_{ik}y_k + r_{i1}x_1 + \ldots + r_{in}x_n + \\ &\qquad + Y_i(t, y_1, \ldots, y_k, x_1, \ldots, x_n), \\ \frac{dx_s}{dt} &= p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + X_s(t, y_1, \ldots, y_k, x_1, \ldots, x_n) \\ &\qquad (i = 1, 2, \ldots, k; \quad s = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned}\right\} \tag{91.1}$$

Здесь Y_i и X_s — ряды по степеням переменных $y_1, \ldots, y_k, x_1, \ldots, x_n$, сходящиеся в области

$$t \geqslant 0, \quad |x_s| \leqslant H, \quad |y_i| \leqslant H \tag{91.2}$$

и начинающиеся членами не ниже второго порядка. Коэффициенты этих рядов, а также коэффициенты q_{ij}, r_{ij} и p_{sj} суть ограниченные и непрерывные функции времени. Коэффициенты p_{sj} таковы, что для системы линейных уравнений (90.2) выполняются критерии устойчивости по первому приближению, установленные в § 88. Мы можем, следовательно, предположить, что существует определенно-положительная квадратичная форма $V(t, x_1, \ldots, x_n)$ переменных $x_1, \ldots, x_n$, коэффициенты которой являются ограниченными функциями времени, для которой

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\sum_{s=1}^{n}(p_{s1}x_1+\ldots+p_{sn}x_n)\frac{\partial V}{\partial x_s}=-\sum_{s=1}^{n}x_s^2. \qquad (91.3)$$

Для самой же формы V в силу ее знакоопределенности мы можем писать

$$V(t, x_1, \ldots, x_n)\geqslant a^2\sum_{s=1}^{n}x_s^2, \qquad (91.4)$$

где a — вещественная постоянная.

Рассмотрим далее «укороченную» систему

$$\frac{dy_i}{dt}=q_{i1}y_1+\ldots+q_{ik}y_k+Y_i(t, y_1, \ldots, y_k, 0, \ldots, 0)=$$
$$=Y_i^0(t, y_1, \ldots, y_k) \qquad (91.5)$$
$$(i=1, 2, \ldots, k)$$

и докажем следующую теорему.

Теорема. *Допустим, что невозмущенное движение $y_1=\ldots=y_k=0$ для «укороченной» системы устойчиво или асимптотически устойчиво, или неустойчиво вне зависимости от членов порядка выше, чем N. Тогда, если разложения функций $X_s(t, y_1, \ldots, y_k, 0, \ldots, 0)$ начинаются членами порядка не ниже $N+1$, то и невозмущенное движение $y_1=\ldots=y_k=x_1=\ldots=x_n=0$ для полной системы* (91.1) *соответственно устойчиво, асимптотически устойчиво или неустойчиво* [1]).

Доказательство. 1°. Для упрощения доказательства [2]) мы сделаем относительно уравнений (91.1) некоторые дополнительные ограничения. Мы предположим, прежде всего, что все коэффициенты r_{ij}

---

[1]) См. примечание в конце книги (стр. 529).

[2]) Это упрощение сделано В. Н. Постниковым (Постников В. Н., К теории устойчивости движения в критических случаях. Диссертация, 1942). Он же исправил и неточность в формулировке теоремы, данной в работе автора (см. сноску [2]) на стр. 381), где вместо условия, что разложения функций $X_s(t, y_1, \ldots, y_k, 0, \ldots, 0)$ начинаются членами не ниже $(N+1)$-го порядка, указывалось, что это разложение должно начинаться членами не ниже N-го порядка.

равны нулю. Это ограничение не существенно, и его легко добиться простым преобразованием переменных. Второе ограничение заключается в следующем.

Так как коэффициенты q_{ij} ограничены, то мы можем писать:

$$\left|\sum_{i=1}^{k} y_i(q_{i1}y_1+\ldots+q_{ik}y_k)\right| \leqslant b^2(y_1^2+\ldots+y_k^2), \qquad (91.6)$$

где b — некоторая вещественная постоянная. Мы будем предполагать, что эта постоянная настолько мала, что квадратичная форма

$$-\sum_{s=1}^{n} x_s^2+2Nb^2V \qquad (91.7)$$

определенно-отрицательна. Как мы увидим ниже, во всех тех случаях, для которых мы будем применять теорему, это ограничение будет выполняться.

При этом ограничении, мы можем писать неравенство

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_s}\left(p_{s1}x_1+\ldots+p_{sn}x_n-Nx_s\frac{\sum_{i=1}^{k} y_i(q_{i1}y_1+\ldots+q_{ik}y_k)}{y_1^2+\ldots+y_k^2}\right)\leqslant$$
$$\leqslant -\alpha^2\sum_{s=1}^{n} x_s^2, \qquad (91.8)$$

где α — вещественная постоянная, справедливое при любых значениях $t\geqslant 0$, y_i и x_s. Действительно, в силу (91.3) и (91.6) левая часть этого неравенства не превосходит формы (91.7), которая, по условию, определенно-отрицательна.

Сделаем теперь преобразование переменных [1])

$$x_s=r^N\xi_s, \quad r=\sqrt{y_1^2+\ldots+y_k^2}. \qquad (91.9)$$

Тогда первая группа уравнений (91.1) примет вид

$$\frac{dy_i}{dt}=Y_i^0(t, y_1, \ldots, y_k)+r^N\Psi_i(t, y_1, \ldots, y_k, \xi_1, \ldots, \xi_n) \qquad (91.10)$$
$$(i=1, 2, \ldots, k),$$

где функции Ψ_i в силу сделанного предположения, что все коэффициенты r_{ij} равны нулю, удовлетворяют тождествам

$$\Psi_i(t, 0, \ldots, 0, \xi_1, \ldots, \xi_n)\equiv 0 \quad (i=1, 2, \ldots, k). \qquad (91.11)$$

---

[1]) См. примечание в конце книги (стр. 529).

Для второй группы уравнений (91.1) имеем:

$$\frac{d\xi_s}{dt} r^N + N\xi_s r^{N-2} \sum_{i=1}^{n} y_i \frac{dy_i}{dt} =$$

$$= r^N (p_{s1}\xi_1 + \ldots + p_{sn}\xi_n) + X_s(t, y_1, \ldots, y_k, \xi_1 r^N, \ldots, \xi_n r^N)$$

или, принимая во внимание, что разложения функций $X_s(t, y_1, \ldots, y_k, 0, \ldots, 0)$ начинаются членами не ниже $(N+1)$-го порядка,

$$\frac{d\xi_s}{dt} = p_{s1}\xi_1 + \ldots + p_{sn}\xi_n - N\xi_s \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i (q_{i1}y_1 + \ldots + q_{ik}y_k}{r^2} +$$

$$+ \Xi_s(t, y_1, \ldots, y_k, \xi_1, \ldots, \xi_n), \qquad (91.12)$$

где функции Ξ_s также удовлетворяют тождествам

$$\Xi_s(t, 0, \ldots, 0, \xi_1, \ldots, \xi_n) \equiv 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, n). \qquad (91.13)$$

2°. Пусть $\varepsilon < H$ — произвольное положительное число. Обозначим через ξ наибольшую из величин $|\xi_s|$, а через $l(\varepsilon)$ — некоторое отличное от нуля положительное число, меньшее точного нижнего предела формы V при условии $H > \xi \geqslant \varepsilon$. В силу (91.4) такое число $l(\varepsilon)$ существует. Итак,

$$V(t, \xi_1, \ldots, \xi_n) > l(\varepsilon) > 0 \quad \text{при} \quad H > \xi \geqslant \varepsilon. \qquad (91.14)$$

Рассмотрим теперь множество всевозможных значений переменных $\xi_1, \ldots, \xi_n$, связанных соотношением

$$V(t, \xi_1, \ldots, \xi_n) = l(\varepsilon). \qquad (91.15)$$

Для этого множества выполняется, очевидно, неравенство $|\xi_s| < \varepsilon$. Кроме того, так как коэффициенты формы V ограничены, то будет также выполняться условие

$$\sum_{s=1}^{n} \xi_s^2 \geqslant \lambda^2(\varepsilon) \text{ при } V(t, \xi_1, \ldots, \xi_n) = l(\varepsilon), \qquad (91.16)$$

где $\lambda^2(\varepsilon)$ — достаточно положительное число.

Установив это, вычислим производную от функции $V(t, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ по времени в силу уравнений (91.12) при условии (91.15). Будем иметь:

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)_{V=l} = \left\{ \frac{\partial V}{\partial t} + \right.$$

$$\left. + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial \xi_s} \left(p_{s1}\xi_1 + \ldots + p_{sn}\xi_n - N\xi_s \frac{\sum_{i=1}^{k} y_i (q_{i1}y_1 + \ldots + q_{ik}y_k)}{r^2} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \Xi_s \right) \right\}_{V=l}.$$

Но на основании (91.8) и (91.16)

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)_{V=l} \leqslant -\alpha^2\lambda^2 + \left\{\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial \xi_s} \Xi_s(t, y_1, \ldots, y_k, \xi_1, \ldots, \xi_n)\right\}_{V=l}. \quad (91.17)$$

Поэтому, принимая во внимание тождества (91.13), мы видим, что всегда найдется такое положительное число $h(\varepsilon)$ (зависящее только от ε), что при всех значениях величин $|y_i|$, удовлетворяющих неравенствам $|y_i| \leqslant h(\varepsilon)$, выражение (91.17) будет отрицательным. Мы будем предполагать, что во всяком случае $h(\varepsilon) < \varepsilon$. Таким образом,

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)_{V=l} < 0 \text{ при } |y_i| \leqslant h(\varepsilon) < \varepsilon. \quad (91.18)$$

Построенные в этом пункте области и поверхности, их ограничивающие:

$$\xi = H, \ \xi = \varepsilon, \ \sum_{s=1}^{n} \xi_s^2 = \lambda^2(\varepsilon), \ y = h(\varepsilon), \ V(t, \xi_1, \ldots, \xi_n) = l(\varepsilon),$$

$$\xi = \max(|\xi_1|, \ldots, |\xi_n|, \qquad y = \max(|y_1|, \ldots, |y_k|),$$

для наглядности дальнейших рассуждений полезно изобразить схематически так, как это сделано на рис. 20. Здесь вертикальная ось изображает k-мерное многообразие точек, где $x_1 = \ldots = x_n = 0$, y_i — любые, а горизонтальная ось — n-мерное многообразие, где $y_1 = \ldots = y_k = 0$, x_s — любые.

Подчеркнем следующее важное обстоятельство. Поверхность $V(t, \xi_1, \ldots, \xi_n) = l(\varepsilon)$ охватывает многообразие $x_1 = \ldots = x_n = 0$, которое, таким образом, оказывается внутри полости, ограниченной этой поверхностью. Поверхности $V(t, \xi_1, \ldots, \xi_n) = l(\varepsilon)$, $y = h(\varepsilon)$ в совокупности ограничивают некоторые замкнутые полости. Вследствие неравенства (91.18) интегральные кривые $x_s(t)$, $y_i(t)$ системы (91.1) пересекают при этом поверхность $V(t, \xi_1, \ldots, \xi_n) = l(\varepsilon)$ внутрь, т. е. в сторону убывания функции V. При этом число $h(\varepsilon)$ будем считать столь малым, что область $y \leqslant h(\varepsilon)$, $V(t, \xi_1, \ldots, \xi_n) \leqslant l(\varepsilon)$ лежит в области $|x_s| < \varepsilon$.

3°. Допустим сначала, что для «укороченной» системы невозмущенное движение устойчиво. Покажем, что тогда и для полной системы невозмущенное движение будет также устойчиво. Заменим с этой целью в уравнениях (91.10) величины ξ_s произвольными функциями времени, удовлетворяющими при всех $t \geqslant 0$ неравенствам

$$|\xi_s| \leqslant H \qquad (s = 1, 2, \ldots, n). \quad (91.19)$$

Тогда получим систему уравнений

$$\frac{dy_i}{dt} = Y_i^{(01)}(t, y_1, \ldots, y_k) + Y_i^{(02)} + \ldots$$
$$\ldots + Y_i^{(0N)} + \overline{Y}_i(t, y_1, \ldots, y_k). \quad (91.20)$$

где $Y_i^{(0l)}$ — формы l-го порядка переменных $y_1, \ldots, y_k$, представляющие собой совокупности членов l-го порядка в разложениях функций $Y_i^{(0)}(t, y_1, \ldots, y_k)$ и

$$\overline{Y}_i = Y_i^{(0,\ N+1)} + Y_i^{(0,\ N+2)} + \ldots + r^N \Psi_i(t, y_1, \ldots, y_k, \xi_1, \ldots, \xi_n).$$

В силу (91.11), очевидно, имеем:

$$|\overline{Y}_i(t, y_1, \ldots, y_k)| < A\{|y_1| + \ldots + |y_k|\}^{N+1}, \qquad (91.21)$$

где A — некоторая постоянная, зависящая, очевидно, только от структуры уравнений (91.10) и не зависящая от того или иного частного

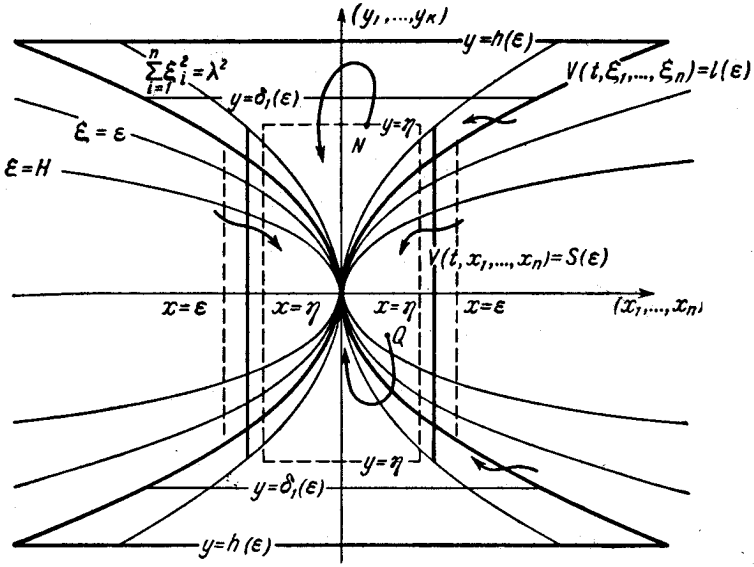

Рис. 20.

выбора функций ξ_s. Согласно условию об устойчивости для «укороченной» системы вне зависимости от членов порядка выше N существует положительная постоянная $\delta_1(h(\varepsilon), A)$, такая, что все решения уравнений (91.20), удовлетворяющие в начальный момент $t = 0$ условиям

$$|y_i^0| \leqslant \delta_1(h(\varepsilon), A) \qquad (91.22)$$

будут при всех $t > 0$ удовлетворять условиям

$$|y_i(t)| < h(\varepsilon). \qquad (91.23)$$

При этом постоянная δ_1 будет зависеть только от $h(\varepsilon)$ и, следовательно, в конечном счете только от ε, т. е. $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon)$,

Допустим теперь, что в уравнениях (91.10) величины ξ_s заменены функциями времени, удовлетворяющими неравенствам (91.19) не при всех значениях t, а только при значениях t, не превосходящих некоторого числа T. Тогда все решения уравнений (91.20), удовлетворяющие начальным условиям (91.22), будут удовлетворять неравенствам (91.23), по крайней мере, при всех значениях t, лежащих на отрезке $[0, T]$.

В самом деле, пусть $\xi_s = f_s(t)$ будут указанные функции. Заменим в уравнениях (91.10) величины ξ_s функциями $\xi_s = \varphi_s(t)$, определенными следующим образом:

$$\varphi_s(t) = f_s(t) \qquad \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

$$\varphi_s(t) = \varphi_s(T) = \text{const} \qquad \text{при} \quad t > T.$$

Тогда уравнения (91.10) примут вид

$$\frac{dy_i}{dt} = Y_i^{(01)} + \ldots + Y_i^{(0N)} + \overline{Y}_i^*(t, y_1, \ldots, y_k), \tag{91.24}$$

причем

$$\overline{Y}_i^*(t, y_1, \ldots, y_k) = \overline{Y}_i(t, y_1, \ldots, y_k) \quad \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Так как функции $\varphi_s(t)$ удовлетворяют условиям (91.19) при всех $t \geqslant 0$, то для всех решений уравнений (91.24), для которых справедливо (91.22), будет при всех $t > 0$ выполняться (91.23). Но решения уравнений (91.24) на отрезке $[0, T]$ совпадают с решениями уравнений (91.20), и мы, следовательно, приходим к следующему выводу: если в уравнениях (91.10) заменить все величины ξ_s произвольными функциями времени, удовлетворяющими на отрезке $[0, T]$ условию (91.19), то все решения полученной таким образом системы уравнений, удовлетворяющие начальным условиям (91.22), будут на отрезке $[0, T]$ удовлетворять неравенствам (91.23). Если условия (91.19) выполняются при всех $t \geqslant 0$, то и неравенства (91.23) будут выполняться при всех $t \geqslant 0$.

Рассмотрим теперь произвольное решение $\xi_1(t), \ldots, \xi_n(t)$, $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ уравнений (91.10) и (91.12), для которого в начальный момент $t = 0$ выполняются условия

$$|\xi_s^0| \leqslant \eta, \quad |y_i^0| \leqslant \eta \qquad (s = 1, 2, \ldots, n;\ i = 1, 2, \ldots, k). \tag{91.25}$$

Мы будем при этом предполагать, что

$$\eta < \delta_1(\varepsilon) \tag{91.26}$$

и что постоянная η настолько мала, что выполняется неравенство

$$V(0, \xi_1^0, \ldots, \xi_n^0) < l(\varepsilon). \tag{91.27}$$

Покажем, что все функции $\xi_s(t)$ и $y_i(t)$ будут при всех $t > 0$ удовлетворять неравенствам

$$|\xi_s(t)| < \varepsilon, \tag{91.28}$$

$$|y_i(t)| < \varepsilon. \tag{91.29}$$

Рассмотрим сначала функции ξ_s. Для этих функций условия (91.28), выполняясь при $t=0$, будут выполняться при t, достаточно малом. Пусть T — первый момент времени, для которого $\xi = \max\{|\xi_1|, \ldots, |\xi_n|\} = \varepsilon$. Тогда на основании (91.14) будем иметь:

$$V[T, \xi_1(T), \ldots, \xi_n(T)] > l(\varepsilon).$$

Отсюда на основании (91.27) заключаем, что в интервале $(0, T)$ должен существовать такой момент времени $t = T'$, что одновременно будут выполняться условия

$$V = l, \quad \left[\frac{dV}{dt}\right]_{V=l} \geqslant 0 \quad \text{при} \quad t = T'. \tag{91.30}$$

Но во всем интервале $(0, T)$, несомненно, выполняется условие (91.19). Следовательно, на основании предыдущего во всем этом интервале будут выполняться неравенства (91.23), так как число η выбрано согласно (91.26), а функции $y_i(t)$ будут, очевидно, одним из решений уравнений (91.20), которые получатся из (91.10), если в последних величины ξ_s заменить рассматриваемыми сейчас функциями $\xi_s(t)$. Поэтому на основании (91.18) во всем интервале $(0, T)$ будет выполняться неравенство

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)_{V=l} < 0,$$

что противоречит (91.30).

Таким образом, приходим к заключению, что неравенства (91.28) будут выполняться при всех $t > 0$. Но тогда при всех $t > 0$ будут выполняться и неравенства (91.23), а следовательно, и подавно неравенства (91.29), так как $h(\varepsilon) < \varepsilon$. Следовательно, невозмущенное движение устойчиво по отношению к переменным $\xi_1, \ldots, \xi_n, y_1, \ldots, y_k$.

Таким образом установлен следующий факт. Траектория $x_s(t)$, $y_i(t)$ системы (91.1), начавшаяся в любой точке $N(x_s(t_0), y_i(t_0))$ в области $|y_i(t_0)| \leqslant \eta$, $|\xi_s| \leqslant \eta$, не покидает область, ограниченную поверхностями

$$y = h(\varepsilon), \quad V(t, \xi_1, \ldots, \xi_n) = l(\varepsilon)$$

(см. рис. 20). При этом величины $\xi_s(t)$ при всех $t \geqslant t_0$ не превосходят H и, следовательно, использование в рассуждениях преобразования (91.9) является законным. Итак, пока доказана лишь условная устойчивость решения $x_s = 0$, $y_i = 0$ относительно возмущений $x_s(t_0)$, $y_i(t_0)$ из области $V(t_0, \xi_1, \ldots, \xi_n) \leqslant l(\varepsilon)$. Поэтому для

завершения доказательства первого утверждения теоремы следует еще показать, что из такой условной устойчивости в данном случае вытекает устойчивость движения $x_s = 0$, $y_i = 0$ при любых малых возмущениях $x_s(t_0)$, $y_i(t_0)$ из полной окрестности[1]) точки $x_s = 0$, $y_i = 0$.

Сделаем это. Вернемся снова к записи уравнений возмущенного движения в форме (91.1). Рассмотрим поверхности

$$V(t, x_1, \ldots, x_n) = S.$$

Это — цилиндрические поверхности в пространстве $\{x_s, y_i\}$, охватывающие многообразие $x_1 = \ldots = x_n = 0$ (см. рис. 20). Рассматриваемые поверхности перемещаются со временем, но для любого $S > 0$ можно указать два числа $\mu_1(S)$ и $\mu_2(S)(\mu_1 < \mu_2)$ таких, что при всех t поверхность $V(t, x_1, \ldots, x_n) = S$ лежит между поверхностями $x = \mu_1(S)$, $x = \mu_2(S)$ $(x = \max(|x_1|, \ldots, |x_n|)$, причем $\lim \mu_2 = \lim \mu_1 = 0$ при $S \to 0$. Это обстоятельство является следствием того, что квадратичная форма V определенно положительна и допускает бесконечно малый высший предел.

Теперь можно выбрать достаточно малое положительное число $S(\varepsilon)$, которое удовлетворяет следующим трем условиям:

1) число $\mu_2[S(\varepsilon)] < \varepsilon$;

2) при $S \leqslant S(\varepsilon)$ поверхности $V(t, x_1, \ldots, x_n) = S$ пересекаются с поверхностью $\sum_{s=1}^{n} \xi_s^2 = \lambda^2(\varepsilon)$ (а следовательно, и с поверхностью $V(t, \xi_1, \ldots, \xi_n) = l(\varepsilon)$) при

$$|y_i| < \delta_1(\varepsilon); \tag{α}$$

3) на поверхностях $V(t, x_1, \ldots, x_n) = S$ при $S \leqslant S(\varepsilon)$ и при условии

$$(y_1^2 + \ldots + y_k^2)^{\frac{1}{2}} \leqslant \sqrt[2N]{\frac{x_1^2 + \ldots + x_n^2}{\lambda^2}} \tag{β}$$

выполняется неравенство

$$\frac{dV}{dt} < 0,$$

где $\frac{dV}{dt}$ — производная функции V в силу уравнений (91.1).

Действительно, первое и второе условия удовлетворяются при малом $S(\varepsilon)$ потому, что при $S \to 0$ поверхности $V(t, x_1, \ldots, x_n) = S$ равномерно стягиваются к многообразию $x_1 = \ldots = x_n = 0$. Третьему условию можно удовлетворить по свойствам функций $X_s(t, y_1, \ldots, y_k, x_1, \ldots, x_n)$ в уравнениях (91.1). В самом деле, разложе-

[1]) На это существенное обстоятельство обратил внимание Н. П. Еругин. См. его рецензию о книге И. Г. Малкина «Теория устойчивости движения» в Вестнике ЛГУ № 5, 1953.

ние функции $X_s(t, y_1, \ldots, y_k, 0, \ldots, 0)$ начинается членами порядка не ниже $(N+1)$, поэтому при условии (β) и при достаточно малых x_s имеем

$$|X_s| \leqslant \alpha(|x_1| + \ldots + |x_n|), \tag{γ}$$

где постоянная $\alpha > 0$ сколь угодно мала, если величины x_s достаточно малы. Из условия (γ) обычными приемами выводится неравенство $\frac{dV}{dt} < 0$, на чем мы останавливаться не будем.

Итак, пусть выбрано число $S(\varepsilon) > 0$, удовлетворяющее указанным условиям 1), 2) и 3). Выберем число $\eta > 0$ так, чтобы помимо условий (91.26) и (91.27) это число еще удовлетворяло следующему требованию: область $|x_s| \leqslant \eta$ должна лежать внутри поверхности $V(t, x_1, \ldots, x_n) = S(\varepsilon)$, т. е. должно быть $V(t, x_1, \ldots, x_n) < S(\varepsilon)$ при $|x_s| \leqslant \eta$.

Покажем, что при условиях $|x_s(t_0)| \leqslant \eta$, $|y_i(t_0)| \leqslant \eta$ выполняются неравенства $|x_s(t)| < \varepsilon$, $|y_i(t)| < \varepsilon$ для всех $t \geqslant t_0$. В самом деле, выше уже показано, что указанные неравенства выполняются, если начальное возмущение лежит в области $V(t, \xi_1, \ldots, \xi_n) \leqslant l(\varepsilon)$. Пусть теперь начальное возмущение этому условию не удовлетворяет. По выбору числа η и по предыдущим построениям в таком случае заключаем, что точка $x_s(t_0)$, $y_i(t_0)$ (назовем ее Q) лежит в области, ограниченной поверхностями

$$V(t, x_1, \ldots, x_n) = S(\varepsilon) \qquad (\text{при } V < S(\varepsilon)),$$

$$V(t, \xi_1, \ldots, \xi_n) = l(\varepsilon) \qquad (\text{при } V > l(\varepsilon))$$

(см. рис. 20). Вследствие неравенства $\frac{dV}{dt} < 0$ траектория $x_s(t)$, $y_i(t)$ при $t \geqslant t_0$ может покинуть эту область лишь через поверхность $V(t, \xi_1, \ldots, \xi_n) = l(\varepsilon)$. Следовательно, либо траектория $x_s(t)$, $y_i(t)$ все время остается в указанной области и тогда по построению ее все время $|x_s(t)| < \varepsilon$, $|y_i(t)| < \varepsilon$ (и, более того, $x_s(t) \to 0$, $y_i(t) \to 0$), либо, начиная с какого-то момента, траектория $x_s(t)$, $y_i(t)$ попадает в область $V(t, \xi_1, \ldots, \xi_n) \leqslant l(\varepsilon)$ и при этом обязательно при $|y_i| < \delta_1(\varepsilon)$. Но в таком случае уже по доказанному выше траектория $x_s(t)$, $y_i(t)$ в дальнейшем все время остается в области $y \leqslant h(\varepsilon)$, $V(t, \xi_1, \ldots, \xi_n) \leqslant l(\varepsilon)$, причем также выполняются неравенства $|x_s(t)| < \varepsilon$, $|y_i(t)| < \varepsilon$. Тем самым устанавливается устойчивость решения $x_s = 0$, $y_i = 0$ и завершается доказательство первого пункта теоремы.

4°. Допустим теперь, что для «укороченной» системы получается асимптотическая устойчивость. Покажем, что невозмущенное движение для полной системы будет также асимптотически устойчиво.

Рассмотрим с этой целью произвольное решение $\xi_s(t)$, $y_i(t)$ уравнений (91.10) и (91.12) с начальными значениями, удовлетворяющими

неравенствам

$$|\xi_s^0| \leqslant \eta, \quad |y_i^0| \leqslant \eta,$$

где число η достаточно мало. На основании доказанного тривиальное решение $\xi_1 = \ldots = \xi_n = y_1 = \ldots = y_k = 0$ устойчиво, и поэтому функции $\xi_s(t)$ будут во всяком случае удовлетворять неравенствам (91.19) при всех $t \geqslant 0$. Но тогда согласно условию все решения уравнений (91.20), которые получим, если в уравнениях (91.10) заменим все величины ξ_s функциями $\xi_s(t)$, будут удовлетворять условиям

$$\lim_{t \to \infty} y_i = 0,$$

если только начальные значения этих решений численно достаточно малы. Но одним из этих решений будут, очевидно, функции $y_i(t)$. Следовательно, если число η выбрано достаточно малым, то все функции $y_i(t)$ при неограниченном возрастании t будут стремиться к нулю. Покажем, что то же самое будет и для функции $\xi_s(t)$.

Рассмотрим произвольное сколь угодно малое положительное число l и покажем, что всегда найдется такой момент времени, начиная с которого будет все время выполняться неравенство

$$V[t, \xi_1(t), \ldots, \xi_n(t)] < l, \tag{91.31}$$

т. е. что

$$\lim_{t \to \infty} V[t, \xi_1(t), \ldots, \xi_n(t)] = 0. \tag{91.32}$$

С этой целью заменим в уравнениях (91.12) величины y_i функциями $y_i(t)$ и найдем выражение полной производной по времени от формы $V(t, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ в силу полученных таким образом уравнений

$$\frac{d\xi_s}{dt} = p_{s1}\xi_1 + \ldots + p_{sn}\xi_n - N\xi_s \frac{\sum_{i=1}^{k} y_i(t)[q_{i1}y_1(t) + \ldots + q_{ik}y_k(t)]}{r^2(t)} + \\ + \Xi_s[t, y_1(t), \ldots, y_k(t), \xi_1, \ldots, \xi_n], \tag{91.33}$$

одним из решений которых будут функции $\xi_s(t)$. Будем иметь:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial \xi_s}\left(p_{s1}\xi_1 + \ldots + p_{sn}\xi_n - \right. \\ \left. - N\xi_s \frac{\sum_{i=1}^{k} y_i(t)[q_{i1}y_1(t) + \ldots + q_{ik}y_k(t)]}{r^2(t)}\right) + \\ + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial \xi_s} \Xi_s[t, y_1(t), \ldots, y_k(t), \xi_1, \ldots, \xi_n].$$

Рассмотрим совокупность значений переменных ξ_s, удовлетворяющих неравенствам

$$V(t, \xi_1, \ldots, \xi_n) \geqslant l, \quad |\xi_s| \leqslant H. \tag{91.34}$$

Для этой совокупности будет выполняться условие

$$\lambda^2 \leqslant \sum_{s=1}^{n} \xi_s^2,$$

где λ^2 — некоторое положительное число. Поэтому на основании (91.8) находим, что при условии (91.34) будет выполняться также условие

$$\frac{dV}{dt} \leqslant -\alpha^2\lambda^2 + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial \xi_s} \Xi_s [t, y_1(t), \ldots, y_k(t), \xi_1, \ldots, \xi_n].$$

С другой стороны, функции $y_s(t)$ стремятся к нулю при $t \to \infty$. Поэтому на основании (91.13) всегда найдется такой момент времени $t = T$, что будет выполняться условие

$$\frac{dV(t, \xi_1, \ldots, \xi_n)}{dt} < -\frac{\alpha^2\lambda^2}{2} \text{ при } V(t, \xi_1, \ldots, \xi_n) > l, \quad |\xi_s| \leqslant H, \quad t \geqslant T, \tag{91.35}$$

для всех решений уравнений (91.33) и, в частности, для $\xi_s = \xi_s(t)$. Отсюда следует, что если для какого-нибудь решения уравнений (91.33) будет выполняться неравенство (91.31) в какой-нибудь момент времени $t = T' > T$, то это неравенство будет для него выполняться при всех $t > T'$. Допустим, что такого момента времени для решения $\xi_s(t)$ не существует, т. е. что при всех $t > T$ будет

$$V[t, \xi_1(t), \ldots, \xi_n(t)] \geqslant l.$$

Так как при этом $|\xi_s(t)| \leqslant H$, то из

$$V[t, \xi_1(t), \ldots, \xi_n(t)] = V[T, \xi_1(T), \ldots, \xi_n(T)] + \int_T^{t+T} \frac{dV}{dt} dt$$

будем на основании (91.35) иметь:

$$V[t, \xi_1(t), \ldots, \xi_n(t)] < V[T, \xi_1(T), \ldots, \xi_n(T)] - \frac{\alpha^2\lambda^2}{2}(t - T).$$

Однако последнее неравенство не может выполняться при всех $t > T$, так как форма V положительна. Таким образом, приходим к заключению, что всегда наступит такой момент времени, начиная с которого будет выполняться неравенство (91.31). Это, однако, эквивалентно (91.32), откуда в силу (91.4) находим:

$$\lim_{t \to \infty} \xi_s = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, n).$$

Следовательно, невозмущенное движение для полной системы асимптотически устойчиво относительно переменных ξ_s и y_i.

Теперь, как и выше, для завершения доказательства достаточно показать, что невозмущенное движение $x_s = 0$, $y_i = 0$ асимптотически устойчиво не только относительно возмущений $x_s(t_0)$, $y_i(t_0)$, стесненных условиями $|\xi_s(t_0)| < \eta$, но и относительно любых достаточно малых начальных возмущений $x_s(t_0)$, $y_i(t_0)$. Это доказательство, однако, в точности повторяет те рассуждения, которые были приведены выше при доказательстве первого пункта теоремы. Поэтому здесь на этом рассуждении останавливаться не будем.

5°. Допустим, наконец, что для «укороченной» системы имеет место неустойчивость, и покажем, что то же самое будет справедливо и для полной системы.

Рассмотрим снова систему (91.20), которая получается из системы (91.10) заменой величин ξ_s произвольными функциями времени, удовлетворяющими при всех $t \geqslant 0$ неравенствам (91.19). По условию найдется число $\varepsilon > 0$ такое, что как бы мало ни было число η, существует система величин $\beta_1(\eta), \ldots, \beta_k(\eta)$, для которых $|\beta_i| \leqslant \eta$, и при этом для решения уравнений (91.20) с начальными условиями $y_i^0 = \beta_i$ будет в некоторый момент времени $t = T$ выполняться условие

$$y(T) = \max\{|y_1(T)|, \ldots, |y_k(T)|\} = h(\varepsilon), \tag{91.36}$$

где $h(\varepsilon)$ — величина, фигурирующая в (91.18).

При этом величины β_i зависят только от η и не зависят от выбора функций ξ_s, лишь бы они удовлетворяли неравенствам (91.19).

Рассмотрим теперь полную систему уравнений (91.1) и допустим, что вопреки утверждению невозмущенное движение устойчиво. Тогда существует такое число η, что для всех решений этих уравнений, для которых начальные значения удовлетворяют неравенствам

$$|y_i^0| \leqslant \eta, \qquad |x_s^0| \leqslant \eta, \tag{91.37}$$

будут при всех $t > 0$ выполняться неравенства

$$|y_i| < h(\varepsilon) < \varepsilon, \qquad |x_s| < h(\varepsilon) < \varepsilon. \tag{91.38}$$

Из всех этих решений выделим какое-нибудь одно $y_i(t)$, $x_s(t)$, для которого $y_i^0 = \beta_i$, $x_s^0 = \alpha_s$, где α_s — некоторые постоянные, выбранные настолько малыми, чтобы для переменных ξ_s, определяемых преобразованием (91.9), в начальный момент времени выполнялось неравенство

$$V(0, \xi_1^0, \ldots, \xi_n^0) < l(\varepsilon). \tag{91.39}$$

Тогда из (91.18) вытекает, что при всех $t > 0$ переменные ξ_s для рассматриваемого решения будут удовлетворять неравенству

$$V[t, \xi_1(t), \ldots, \xi_n(t)] < l,$$

из которого на основании (91.14) вытекает, что $|\xi_s(t)| < \varepsilon$ и, следовательно, при $t \geqslant 0$ будут во всяком случае выполняться условия (91.19)

Будем теперь считать, что уравнения (91.20) получились из (91.10) заменой величин ξ_s функциями $\xi_s(t)$, соответствующими рассматриваемому решению. Тогда решение этих уравнений с начальными условиями $y_i^0 = \beta_i$ даст как раз функции $y_i(t)$, во всяком случае до тех пор, пока $|y_i(t)| \leqslant h(\varepsilon)$. Но для этого решения выполнено условие (91.36), так как функции $\xi_s(t)$ удовлетворяют, по доказанному, (91.19). Это, однако, противоречит (91.38). Полученное противоречие и доказывает неустойчивость невозмущенного движения.

Таким образом, теорема полностью доказана.

§ 92. Вторая основная теорема о критических случаях.

Рассмотрим теперь систему уравнений возмущенного движения вида

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy_i}{dt} = Y_i(t, y_1, \ldots, y_k, x_1, \ldots, x_n), \\ &\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + r_{s1}y_1 + \ldots + r_{sk}y_k + \\ &\qquad\qquad + X_s(t, y_1, \ldots, y_k, x_1, \ldots, x_n) \\ &\qquad (i = 1, 2, \ldots, k;\ s = 1, 2, \ldots, n), \end{aligned}\right\} \quad (92.1)$$

где Y_i и X_s — ряды по степеням переменных $y_1, \ldots, y_k, x_1, \ldots, x_n$, начинающиеся членами не ниже второго порядка и сходящиеся в области (91.2). Коэффициенты этих разложений, а также коэффициенты p_{sj} и r_{sj} являются непрерывными и ограниченными функциями t. При этом, как и в предыдущем параграфе, предполагается, что для системы линейных уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n \qquad (s = 1, 2, \ldots, n) \qquad (92.2)$$

выполняются условия устойчивости по первому приближению, установленные в § 88.

Для возможности применения к уравнениям (92.1) теоремы предыдущего параграфа необходимо, очевидно, привести эти уравнения к такому виду, для которого разложения функций

$$r_{s1}y_1 + \ldots + r_{sk}y_k + X_s(t, y_1, \ldots, y_k, 0, \ldots, 0)$$

начинались бы членами достаточно высокого порядка. С этой целью положим:

$$x_s = \xi_s + u_s(t, y_1, \ldots, y_k) \qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{92.3}$$

где u_s — целые рациональные функции переменных $y_1, \ldots, y_k$, коэффициенты которых являются ограниченными функциями времени. Тогда уравнения (92.1) примут вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_i}{dt} &= Y_i^*(t, y_1, \ldots, y_k, \xi_1, \ldots, \xi_n) = \\ &= Y_i(t, y_1, \ldots, y_k, \xi_1 + u_1, \ldots, \xi_n + u_n), \\ \frac{d\xi_s}{dt} &= p_{s1}\xi_1 + \ldots + p_{sn}\xi_n + \Xi_s(t, y_1, \ldots, y_k, \xi_1, \ldots, \xi_n), \end{aligned}\right\} \tag{92.4}$$

где

$$\begin{aligned} \Xi_s = p_{s1}u_1 + \ldots + p_{sn}u_n + r_{s1}y_1 + \ldots + r_{sk}y_k + \\ + X_s(t, y_1, \ldots, y_k, \xi_1 + u_1, \ldots, \xi_n + u_n) - \\ - \frac{\partial u_s}{\partial t} - \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial u_s}{\partial y_i} Y_i(t, y_1, \ldots, y_k, \xi_1 + u_1, \ldots, \xi_n + u_n). \end{aligned}$$

При этом имеем:

$$\begin{aligned} \Xi_s(t, y_1, \ldots, y_k, 0, \ldots, 0) = p_{s1}u_1 + \ldots + p_{sn}u_n + \\ + r_{s1}y_1 + \ldots + r_{sk}y_k + X_s(t, y_1, \ldots, y_k, u_1, \ldots, u_n) - \\ - \frac{\partial u_s}{\partial t} - \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial u_s}{\partial y_i} Y_i(t, y_1, \ldots, y_k, u_1, \ldots, u_n). \end{aligned} \tag{92.5}$$

Задача заключается, следовательно, в таком выборе функций $u_s(t, y_1, \ldots, y_k)$ чтобы разложения выражений (92.5) начинались членами достаточно высокого порядка. Рассмотрим для этого систему уравнений с частными производными

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_s}{\partial t} + \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial u_s}{\partial y_i} Y_i(t, y_1, \ldots, y_k, u_1, \ldots, u_n) = \\ = p_{s1}u_1 + \ldots + p_{sn}u_n + r_{s1}y_1 + \ldots + r_{sk}y_k + \\ + X_s(t, y_1, \ldots, y_k, u_1, \ldots, u_n) \\ (s = 1, 2, \ldots, n) \end{aligned} \tag{96.6}$$

и попытаемся удовлетворить этим уравнениям формальными рядами вида

$$u_s = u_s^{(1)}(t, y_1, \ldots, y_k) + u_s^{(2)}(y_1, \ldots, y_k) + \ldots, \tag{92.7}$$

где $u_s^{(m)}$ — формы m-го порядка переменных $y_1, \ldots, y_k$ с ограниченными коэффициентами. Подставляя эти ряды в (92.6), приравнивая члены первого порядка и учитывая, что разложения функций Y_i начинаются членами не ниже второго порядка, найдем:

$$\frac{\partial u_s^{(1)}}{\partial t} = p_{s1}u_1^{(1)} + \ldots + p_{sn}u_n^{(1)} + r_{s1}y_1 + \ldots + r_{sk}y_k. \qquad (92.8)$$

Аналогично приравнивая члены m-го порядка, получим:

$$\frac{\partial u_s^{(m)}}{\partial t} = p_{s1}u_1^{(m)} + \ldots + p_{sn}u_n^{(m)} + U_s^{(m)}(t, y_1, \ldots, y_k) \qquad (92.9)$$

$$(m = 2, 3, \ldots),$$

где $U_s^{(m)}$ — некоторые формы m-го порядка переменных $y_1, \ldots, y_k$, зависящие от тех $u_s^{(j)}$, для которых $j < m$. Если все формы $u_s^{(j)}$ при $j < m$ уже вычислены и вышли с ограниченными коэффициентами, то формы $U_s^{(m)}$ будут известными и будут также обладать ограниченными коэффициентами.

Уравнения (92.8) и (92.9) служат для последовательного определения форм $u_s^{(m)}$. Если мы вычислим все эти формы до какого-нибудь заданного порядка N включительно, то, положив в подстановке (92.3)

$$u_s = u_s^{(1)} + u_s^{(2)} + \ldots + u_s^{(N)},$$

мы приведем уравнения (92.1) к виду (92.4), для которого разложение функций $\Xi_s(t, y_1, \ldots, y_k, 0, \ldots, 0)$ начинается членами не ниже $(N+1)$-го порядка. Уравнения (92.4) будут, следовательно, иметь нужный вид.

Переходим к вопросу о вычислении форм $u_s^{(m)}$. Полагая

$$u_s^{(m)} = \sum A_s^{(m_1, \ldots, m_k)}(t)\, y_1^{m_1} \ldots y_k^{m_k} \qquad (m_1 + \ldots + m_k = m),$$

будем, очевидно, иметь:

$$\frac{dA_s^{(m_1, \ldots, m_k)}}{dt} = p_{s1}A_1^{(m_1, \ldots, m_k)} + \ldots + p_{sn}A_n^{(m_1, \ldots, m_k)} + \\ + C_s^{(m_1, \ldots, m_k)}(t) \qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \qquad (92.10)$$

где $C_s^{(m_1, \ldots, m_k)}$ будут известными функциями времени, если формы $u_s^{(1)}, u_s^{(2)}, \ldots, u_s^{(m-1)}$ уже вычислены. Эти коэффициенты будут притом ограниченными функциями времени, если такими вышли коэффициенты форм $u_s^{(1)}, \ldots, u_s^{(m-1)}$. Но при $m_1 + \ldots + m_n = 1$ каждая из функций $C_s^{(m_1, \ldots, m_n)}$, совпадающая, как это следует из (92.8), с одним из

коэффициентов r_{si}, будет известной и ограниченной. Отсюда следует, что из уравнений (92.8) и (92.9) можно последовательно определять формы $u_s^{(m)}$ нужного вида, если только уравнения

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + f_s(t) \tag{92.11}$$

допускают ограниченные решения при любом выборе ограниченных и непрерывных функций $f_s(t)$. Но так как для уравнений (92.2) выполняются критерии § 88, то, как было показано в этом параграфе (критерий О. Перрона), все решения уравнений (92.11) ограничены. Таким образом, существует бесчисленное множество разложений (92.7) с ограниченными коэффициентами, формально удовлетворяющими уравнениям (92.6). Для нашей цели пригодно любое из этих разложений. И так как нам нужно лишь конечное число членов в этих разложениях, то вопрос о их сходимости не представляет для нас интереса.

Итак, допустим, что в качестве функций u_s в преобразовании (92.3) взяты первые N членов разложений (92.7). Отбросим в правых частях первой группы уравнений (92.4) все члены, содержащие $\xi_1, \ldots, \xi_n$, и рассмотрим полученную таким образом «укороченную» систему

$$\frac{dy_i}{dt} = Y_i^0(t, y_1, \ldots, y_k) = Y_i(t, y_1, \ldots, y_k, u_1, \ldots, u_n) \tag{92.12}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, k).$$

Допустим, что число N выбрано настолько большим, что невозмущенное движение $y_1 = \ldots = y_k = 0$ системы (92.12) устойчиво либо асимптотически устойчиво, либо неустойчиво при любом выборе членов порядка выше, чем N. Тогда на основании теоремы предыдущего параграфа невозмущенное движение для системы (92.4) будет соответственно устойчиво, асимптотически устойчиво или неустойчиво. То же самое будет справедливо и для исходной системы (92.1), так как по свойству преобразования (92.3) устойчивость по отношению к переменным y_i и ξ_s равносильна устойчивости по отношению к переменным y_i и x_s.

Так как

$$Y_i^0(t, y_1, \ldots, y_k) = Y_i(t, y_1, \ldots, y_k, u_1, \ldots, u_n),$$

то полученный результат приводит к следующей теореме:

Теорема. *Допустим, что дифференциальные уравнения возмущенного движения имеют вид* (92.1). *Составим систему уравнений с частными производными* (92.6), *которой всегда можно удовлетворить формальными рядами вида*

$$u_s = \sum A_s^{(m_1 \ldots m_k)}(t)\, y_1^{m_1} \ldots y_k^{m_k} \qquad (m_1 + \ldots + m_k \geqslant 1)$$

с ограниченными коэффициентами. Подставим эти ряды вместо величин x_s в первую группу уравнений системы (92.1), *после чего они примут вид* (92.12), *где Y_i^0 — формальные ряды, расположенные по степеням $y_1, \ldots, y_k$ с ограниченными коэффициентами.*

Тогда, если невозмущенное движение $y_1 = \ldots = y_k = 0$ для системы (92.12) [1]) *устойчиво или асимптотически устойчиво, или неустойчиво, и это определяется произвольным, но конечным числом N первых членов, вне зависимости от членов более высокого порядка системы* (92.12), *то невозмущенное движение $y_1 = \ldots = y_k = x_1 = \ldots = x_n = 0$ для системы* (92.1) *соответственно устойчиво, асимптотически устойчиво или неустойчиво.*

При практическом применении теоремы необходимо задаться числом N. Очевидно, что увеличение числа N не изменит в уравнениях (92.12) членов порядка, не превосходящего первоначального значения N. Поэтому при выполнении вычислений следует сначала положить $N = 1$, а затем если в этом будет необходимость, это число увеличивать. При этом само собой разумеется, что общее решение линейной системы (92.2) предполагается известным, что соответствует существу задачи. Тогда решение уравнений (92.10) приведется к квадратурам.

Примечание. Допустим, что в уравнениях (92.1) все коэффициенты r_{sj} равны нулю и что разложение функций $X_s(t, y_1, \ldots, y_k, 0, \ldots, 0)$ начинается членами p-го ($p > 1$) порядка. Тогда, как легко видеть, можно считать, что разложение функций $u_s(t, y_1, \ldots, y_k)$ начинается членами также p-го порядка. Допустим, что наинизший порядок членов, зависящих от $x_1, \ldots, x_n$, в разложениях функций $Y_i(t, y_1, \ldots, y_k, x_1, \ldots, x_n)$ есть q, а наинизший порядок этих членов относительно $x_1, \ldots, x_n$ есть $r \leqslant q$. Тогда очевидно, что в «укороченной» системе уравнений (92.12), которая решает задачу устойчивости, влияние второй группы уравнений (92.1) скажется лишь на членах порядка, не ниже чем $q - r + pr$. Поэтому, если задача устойчивости для «укороченной» системы решается членами порядка, не выше чем N, то вторая группа уравнений не будет иметь влияния на ответ и может быть отброшена, если выполняется условие

$$p \geqslant \frac{N+1-q+r}{r}. \tag{92.13}$$

Отсюда следует, что когда правые части первой группы уравнений (91.1) не содержат линейных членов, то основная теорема преды-

---

[1]) То есть тех уравнений, которые получатся из уравнений (92.12), если в последних взять произвольно большое, но конечное число членов.

дущего параграфа останется в силе, если наименьший порядок p членов разложений функций $X_s(t, y_1, \ldots, y_k, 0, \ldots, 0)$ удовлетворяет не условию $p \geqslant N+1$, а условию (92.13), которое может оказаться значительно слабее.

§ 93. Случай, когда коэффициенты линейных членов постоянны. Приложение к установившимся и периодическим движениям.

Мы предполагали в предыдущем параграфе, что разложения правых частей первой группы уравнений (92.1) не содержат линейных членов. Однако многие критические случаи приводятся к исследованию систем вида

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy_i}{dt} = q_{i1}y_1 + \ldots + q_{ik}y_k + Y_i(t, y_1, \ldots, y_k, x_1, \ldots, x_n), \\ &\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + r_{s1}y_1 + \ldots + r_{sk}y_k + \\ &\qquad\qquad + X_s(t, y_1, \ldots, y_k, x_1, \ldots, x_n) \\ &\qquad (i = 1, 2, \ldots, k; \quad s = 1, 2, \ldots, n), \end{aligned}\right\} \quad (93.1)$$

отличающихся от (92.1) наличием в первой группе уравнений линейных относительно y_i членов. Наличие этих членов не препятствует применению теоремы § 91, так как эти члены содержатся в уравнениях (91.1), к которым эта теорема относится. Однако эти члены мешают привести систему (92.1) к виду (91.1), т. е. уничтожить во второй группе уравнений этой системы все не зависящие от $x_1, \ldots, x_n$ члены до достаточного высокого порядка.

Действительно, поступая так же, как в предыдущем параграфе, т. е. делая замену переменных

$$\begin{aligned} x_s &= \xi_s + u_s(t, y_1, \ldots, y_k) = \\ &= \xi_s + u_s^{(1)}(t, y_1, \ldots, y_k) + u_s^{(2)}(t, y_1, \ldots, y_k) + \ldots \end{aligned} \quad (93.2)$$

и стараясь подобрать функции u_s так, чтобы уничтожить вышеуказанные мешающие члены, мы придем вместо уравнений с частными производными (92.6) к уравнениям

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u_s}{\partial t} + \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial u_s}{\partial y_i} [q_{i1}y_1 + \ldots + q_{ik}y_k + Y_i(t, y_1, \ldots, y_k, u_1, \ldots, u_n)] = \\ &\qquad = p_{s1}u_1 + \ldots + p_{sn}u_n + r_{s1}y_1 + \ldots + r_{sk}y_k + \\ &\qquad\qquad + X_s(t, y_1, \ldots, y_k, u_1, \ldots, u_n). \end{aligned} \quad (93.3)$$