Тогда уравнения, определяющие формы $u_s^{(m)}$, примут вместо (92.9) более сложный вид

$$\frac{\partial u_s^{(m)}}{\partial t}+\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial u_s^{(m)}}{\partial y_i}(q_{i1}y_1+\ldots+q_{ik}y_k)=$$
$$=p_{s1}u_1^{(m)}+\ldots+p_{sn}u_n^{(m)}+U_s^{(m)}(t,\ y_1,\ \ldots,\ y_k) \qquad (93.4)$$
$$(s=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Вопрос о возможности удовлетворения уравнениям (93.4) формами с ограниченными коэффициентами представляет в общем случае большие трудности. Но если такие формы существуют и уравнениям (93.3) можно, следовательно, удовлетворить формальными рядами

$$u_s=u_s^{(1)}(t,\ y_1,\ \ldots,\ y_k)+u_s^{(2)}(t,\ y_1,\ \ldots,\ y_k)+\ldots \qquad (93.5)$$
$$(s=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

с ограниченными коэффициентами, то все результаты предыдущего параграфа сохраняют силу. В этом случае задача устойчивости будет решаться первой группой уравнений (93.1), в которых величины x_s должны быть заменены функциями u_s, т. е. формальными рядами (93.5).

Таким образом, вопрос о применимости к уравнениям (93.1) основной теоремы предыдущего параграфа сводится к выяснению возможности удовлетворения уравнениям (93.3) формальными рядами с ограниченными коэффициентами, или, что то же самое, к вопросу о существовании форм с ограниченными коэффициентами, удовлетворяющих уравнениям вида (93.4). Этот вопрос легко разрешается в случае, когда все коэффициенты q_{ij} и r_{sj} являются постоянными. К этому важному случаю, охватывающему все критические случаи установившихся и периодических движений, мы сейчас и переходим.

Полагая $m=n+k$, рассмотрим систему m-го порядка

$$\frac{dz_j}{dt}=a_{j1}z_1+\ldots+a_{jm}z_m+Z_j(t,\ z_1,\ \ldots,\ z_m) \qquad (93.6)$$
$$(j=1,\ 2,\ \ldots,\ m),$$

где a_{js} — постоянные, а коэффициенты разложений Z_j, начинающихся членами не ниже второго порядка, являются непрерывными и ограниченными функциями времени. Допустим, что характеристическое уравнение

$$|a_{js}-\delta_{js}\lambda|=0 \qquad (93.7)$$

имеет n корней с отрицательными вещественными частями и k корней с вещественными частями, равными нулю. Если, в частности, функции Z_j не зависят явно от t, то мы будем иметь самый общий критический случай установившихся движений, а если Z_j являются

периодическими функциями t, то мы получим самый общий случай периодических движений.

При помощи неособенного линейного преобразования с постоянными коэффициентами мы можем вместо переменных $z_1, \ldots, z_m$ ввести переменные $y_1, \ldots, y_k, x_1, \ldots, x_n$ таким образом, чтобы линейная часть уравнений (93.6) приняла вид

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy_i}{dt} = q_{i1}y_1 + \ldots + q_{ik}y_k, \\ &\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + r_{s1}y_1 + \ldots + r_{sk}y_k \\ &\qquad (i = 1, 2, \ldots, k; \quad s = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned}\right\} \tag{93.8}$$

Здесь коэффициенты q_{ij} и p_{sj} таковы, что вещественные части всех корней уравнения n-го порядка

$$\begin{vmatrix} p_{11} - \rho & p_{11} & \ldots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} - \rho & \ldots & p_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{n1} & p_{n2} & \ldots & p_{nn} - \rho \end{vmatrix} = 0 \tag{93.9}$$

отрицательны, а вещественные части всех корней уравнения k-го порядка

$$\begin{vmatrix} q_{11} - \lambda & q_{12} & \ldots & q_{1k} \\ q_{21} & q_{22} - \lambda & \ldots & q_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ q_{k1} & q_{k2} & \ldots & q_{kk} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{93.10}$$

равны нулю. Совокупность $n + k$ корней уравнения (93.7) и определяет все корни уравнений (93.9), (93.10). При этом в случае необходимости указанное преобразование может быть выбрано таким образом, чтобы уравнения (93.8) имели канонический вид

$$\frac{dy_1}{dt} = \lambda_1 y_1, \quad \frac{dy_i}{dt} = \lambda_i y_i + \alpha_i y_{i-1} \quad (i = 2, 3, \ldots, k), \tag{93.11}$$

$$\frac{dx_1}{dt} = \rho_1 x_1, \quad \frac{dx_s}{dt} = \rho_s x_s + \beta_s x_{s-1} \quad (s = 2, 3, \ldots, n). \tag{93.12}$$

Здесь $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ — корни уравнения (93.10), а $\rho_1, \ldots, \rho_n$ — корни уравнения (93.9). При этом корни λ_i и ρ_s могут быть как простыми, так и кратными. Каждому кратному корню может отвечать как одна, так и несколько групп решений (в смысле § 19) уравнений (93.8). Все величины α_i и β_s являются постоянными, среди которых некоторые могут быть равны нулю, а именно: если общее число групп решений, соответствующих всем корням λ_i и ρ_s, равно p, то $p - 2$ постоянных α_i и β_i равны нулю, так как каждая такая группа имеет

одно уравнение, содержащее только ту переменную, которая фигурирует в левой части уравнения. Каждая отличная от нуля постоянная α_i может быть сделана какой угодно, в частности, сколь угодно малой. Действительно, сделав дополнительное преобразование

$$y_1' = y_1, \quad y_2' = A_1 y_2, \quad y_3' = A_1 A_2 y_3, \ \ldots, \ y_k' = A_1 \ldots A_{k-1} y_k,$$

где A_i — произвольные постоянные, мы приведем уравнения (93.11) к виду

$$\frac{dy_1'}{dt} = \lambda_1 y_1', \quad \frac{dy_i'}{dt} = \lambda_i y_i' + \alpha_i' y_{i-1}',$$

в котором постоянные α_i' имеют значения $\alpha_i' = A_{i-1}\alpha_i$, и если какая-нибудь $\alpha_j \neq 0$, то α_j' подбором коэффициента A_{j-1} может быть сделана равной наперед заданной отличной от нуля величине. То же самое можно, конечно, сделать и с постоянными β_s.

Если указанному линейному преобразованию подвергнуть нелинейные уравнения (93.6), то они примут вид (93.1), в котором все коэффициенты q_{ij}, p_{sj} и r_{sj} являются постоянными. Так как при этом все корни уравнения (93.9) имеют отрицательные вещественные части, то для коэффициентов p_{sj} выполняются условия теоремы предыдущего параграфа. Эта теорема может быть, следовательно, применена к рассматриваемой сейчас системе, если только существуют формы $u_s^{(m)}$ с ограниченными коэффициентами, удовлетворяющие уравнениям вида (93.4).

Покажем, что такие формы действительно существуют. С этой целью будем предполагать, что линейная часть уравнений (93.1) приведена к виду (93.11), (93.12). Тогда уравнения (93.4) будут иметь следующий вид:

$$\frac{\partial u_1^{(m)}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial u_1^{(m)}}{\partial y_i}(\lambda_i y_i + \alpha_i y_{i-1}) = \rho_1 u_1 + U_1^{(m)},$$

$$\frac{\partial u_s^{(m)}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial u_s^{(m)}}{\partial y_i}(\lambda_i y_i + \alpha_i y_{i-1}) = \rho_s u_s^{(m)} + \beta_s u_{s-1}^{(m)} + U_s^{(m)}$$

$$(s = 2, \ldots, n; \ \alpha_1 = 0).$$

Следовательно, если формы $u_s^{(m)}$ вычислять последовательно в порядке возрастания индекса s, то для каждой такой формы получится уравнение вида

$$\frac{\partial u_s^{(m)}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial u_s^{(m)}}{\partial y_i}(\lambda_i y_i + \alpha_i y_{i-1}) = \rho_s u_s^{(m)} + \overline{U}_s^{(m)}(t, y_1, \ldots, y_k) \quad (93.13)$$

$$(s = 1, 2, \ldots, m; \ \alpha_1 = 0),$$

где форма $\overline{U}_s^{(m)}$ будет известной, если формы $u_1^{(m)}, \ldots, u_{s-1}^{(m)}$ и все формы $u_j^{(l)}$, для которых $l < m$, уже вычислены. Допустим, что все указанные формы действительно вычислены и вышли с ограниченными коэффициентами. Тогда коэффициенты формы $\overline{U}_s^{(m)}$ будут также ограниченными. Положим:

$$u_s^{(m)} = \sum A_s^{(m_1, \ldots, m_k)}(t)\, y_1^{m_1} \ldots y_k^{m_k} \qquad (m_1 + \ldots + m_k = m).$$

Тогда, если коэффициенты $A_s^{(m_1, \ldots, m_k)}$ вычислять в определенном порядке, то для каждого такого коэффициента получится уравнение вида

$$\frac{dA_s^{(m_1, \ldots, m_k)}}{dt} = \\ = (\rho_s - m_1\lambda_1 - \ldots - m_k\lambda_k) A_s^{(m_1, \ldots, m_k)} + B_s^{(m_1, \ldots, m_k)}(t), \quad (93.14)$$

где $B_s^{(m_1, \ldots, m_k)}$ — линейные функции от уже вычисленных коэффициентов с ограниченными коэффициентами. При этом нужно придерживаться следующего порядка вычисления коэффициентов. Сначала нужно вычислить коэффициент $A_s^{(0, \ldots, m)}$. После этого нужно вычислить все коэффициенты, для которых $m_{k-1} + m_k = m$, в порядке возрастания m_{k-1}, затем те, для которых $m_{k-2} = 1$, $m_{k-1} + m_k = m - 1$, также в порядке возрастания m_{k-1} и т. д.

Допустим, что все уже вычисленные коэффициенты получились ограниченными. Тогда функция $B_s^{(m_1, \ldots, m_k)}(t)$ в уравнении (93.14) будет ограниченной и из этого уравнения находим частное решение

$$A_s^{(m_1, \ldots, m_k)} = \\ = e^{(\rho_s - m_1\lambda_1 - \ldots - m_k\lambda_k)t} \int_0^t e^{-(\rho_s - m_1\lambda_1 - \ldots - m_k\lambda_k)t} B_s^{(m_1, \ldots, m_k)}\, dt, \quad (93.15)$$

которое также получится ограниченным. Действительно, пусть $a_s < 0$ — вещественная часть корня ρ_s. Тогда, учитывая, что вещественные части всех величин λ_i равны нулю, и обозначая через $C_s^{(m_1, \ldots, m_k)}$ верхний предел функции $[B_s^{(m_1, \ldots, m_k)}(t)]$, будем иметь:

$$\left| A_s^{(m_1, \ldots, m_k)} \right| < C_s^{(m_1, \ldots, m_k)} e^{a_s t} \int_0^t e^{-a_s t}\, dt = \\ = -\frac{1}{a_s} C_s^{(m_1, \ldots, m_k)} \left(1 - e^{a_s t}\right) < -\frac{1}{a_s} C_s^{(m_1, \ldots, m_k)},$$

что и доказывает предложение.

Если теперь учесть, что вещественная часть величины $\rho_s - m_1\lambda_1 - \ldots - m_k\lambda_k$ отрицательна, то мы придем к заключению, что не только решение (93.15), но и все решения уравнения (93.14) получатся ограниченными.

Таким образом, если все формы $u_s^{(1)}, \ldots, u_s^{(m-1)}$ получились с ограниченными коэффициентами, то существует бесчисленное множество форм $u_s^{(m)}$, удовлетворяющих уравнению (93.4) и обладающих ограниченными коэффициентами. Но так как формы $U_s^{(1)}$, для которых, очевидно, имеем:

$$U_s^{(1)} = r_{s1}y_1 + \ldots + r_{sk}y_k,$$

известны и обладают ограниченными (постоянными) коэффициентами, то из вышесказанного следует, что существует бесчисленное множество разложений, формально удовлетворяющих уравнениям (93.3). Следовательно, в рассматриваемом случае теорема предыдущего параграфа имеет силу, и мы приходим к следующей теореме.

Теорема 1. *Допустим, что в уравнениях* (93.1) *коэффициенты* q_{ij}, p_{sj} *и* r_{sj} *постоянны, причем уравнение* (93.9) *имеет корни только с отрицательными вещественными частями, а вещественные части всех корней уравнения* (93.10) *равны нулю. Тогда существует бесчисленное множество разложений* (93.5) *с ограниченными коэффициентами, формально удовлетворяющих системе уравнений с частными производными* (93.3). *Выбрав какое-нибудь одно из этих разложений, подставим его вместо величин* x_s *в первую группу уравнений* (93.1) *и рассмотрим полученную таким образом «укороченную» систему*

$$\frac{dy_i}{dt} = q_{i1}y_1 + \ldots + q_{ik}y_k + Y_i(t, y_1, \ldots, y_k, u_1, \ldots, u_n) \qquad (93.16)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, k).$$

Если невозмущенное движение $y_1 = \ldots = y_k = 0$ *«укороченной» системы устойчиво или асимптотически устойчиво, или неустойчиво, и это определяется конечным числом членов в этих уравнениях, то и невозмущенное движение* $x_1 = \ldots = x_n = y_1 = \ldots = y_k = 0$ *для системы* (93.1) *соответственно устойчиво или асимптотически устойчиво, или неустойчиво.*

Допустим, что мы имеем дело со случаем периодических движений, т. е. что функции Y_i и X_s в уравнениях (93.1) по отношению к t периодичны с некоторым периодом ω. Применяя доказанную теорему, приведем задачу к исследованию системы k-го порядка. Однако такое приведение будет, вообще говоря, иметь смысл лишь в том случае, если система (93.16) также будет обладать периоди-

ческими коэффициентами, ибо система из $n+k$ уравнений с периодическими коэффициентами может оказаться для исследования более простой, чем система из k уравнений с непериодическими коэффициентами.

Система (93.16) будет, очевидно, обладать периодическими коэффициентами, если такими коэффициентами обладают формальные разложения (93.5). Покажем, что действительно существует система разложений вида (93.5) с периодическими коэффициентами, формально удовлетворяющих уравнениям (93.3), и что такая система будет единственной.

Для этого, очевидно, достаточно показать, что если коэффициент $B_s^{(m_1, \ldots, m_k)}$ в уравнении (93.14) является периодической функцией времени периода ω, то это уравнение допускает одно и только одно периодическое решение для $A_s^{(m_1, \ldots, m_k)}$ с тем же периодом. Но уравнение (93.14) имеет частное решение

$$A_s^{(m_1, \ldots, m_k)} = e^{at}\left\{\frac{e^{a\omega}}{1-e^{a\omega}}\int_0^{\omega} e^{-at} f(t)\,dt + \int_0^t e^{-at} f(t)\,dt\right\},$$

где для краткости положено

$$a = \rho_s - m_1\lambda_1 - \ldots - m_k\lambda_k, \quad f(t) = B_s^{(m_1, \ldots, m_k)}(t).$$

Это решение, как было показано в § 67, является периодическим с периодом ω. Остальные решения уравнения (93.14) не будут периодическими, так как общее решение однородной части этого уравнения не периодично.

Из вышесказанного вытекает справедливость следующей теоремы.

Теорема 2. *Если при выполнении условий теоремы* 1 *коэффициенты разложений функций Y_l и X_s являются периодическими функциями времени с периодом ω, то существует одна и только одна система разложений* (93.5), *формально удовлетворяющих уравнениям* (93.3) *и обладающих периодическими коэффициентами с тем же периодом. Подставляя эти разложения вместо величин x_s в первую группу уравнений* (93.1), *мы получим «укороченную» систему* (93.16) *также с периодическими коэффициентами. Задача устойчивости для системы* (93.1) *эквивалентна той же задаче для «укороченной» системы, если последняя задача решается конечным числом членов.*

Допустим, наконец, что правые части уравнений (93.1) не зависят совсем от времени. Тогда, как легко видеть, существует одна и только одна система разложений (93.5) с постоянными коэффициентами, удовлетворяющих формально уравнениям (93.3), которые вслед-

ствие этого принимают вид

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial u_s}{\partial y_i} [q_{i1}y_1 + \ldots + q_{ik}y_k + Y_i(y_1, \ldots, y_k, u_1, \ldots, u_n)] =$$
$$= p_{s1}u_1 + \ldots + p_{sn}u_n + r_{s1}y_1 + \ldots + r_{sk}y_k +$$
$$+ X_s(y_1, \ldots, y_k, u_1, \ldots, u_n). \qquad (93.17)$$

Действительно, если величина $B_s^{(m_1, \ldots, m_k)}$ в уравнении (93.14) является постоянной, то это уравнение имеет единственное постоянное решение

$$A_s^{(m_1, \ldots, m_k)} = \frac{B_s^{(m_1, \ldots, m_k)}}{\rho_s - m_1\lambda_1 - \ldots - m_k\lambda_k}.$$

Мы приходим, таким образом, к следующей теореме.

Теорема 3. *Если при выполнении условий теоремы* 1 *правые части уравнений* (93.1) *не зависят явно от времени, то существует одна и только одна система разложений*

$$u_s = u_s^{(1)}(y_1, \ldots, y_k) + u_s^{(2)}(y_1, \ldots, y_k) + \ldots,$$

формально удовлетворяющих уравнениям (93.17). *Если этими разложениями заменить величины* x_s *в первой группе уравнений* (93.1), *то получится «укороченная» система уравнений* (93.16), *также не зависящих от времени. Задача устойчивости для системы* (93.1) *эквивалентна задаче устойчивости для «укороченной» системы, если последняя задача решается конечным числом членов.*

При доказательстве основной теоремы § 91 мы сделали относительно коэффициентов q_{ij} ограничение, что модули коэффициентов квадратичной формы

$$\sum_{i=1}^{k} y_i(q_{i1}y_1 + \ldots + q_{ik}y_k) \qquad (93.18)$$

достаточно малы. Покажем, что при подходящем выборе переменных y_i во всех рассмотренных в настоящем параграфе случаях указанное ограничение действительно выполняется, так что теоремы 1, 2 и 3 можно будет считать полностью доказанными.

Мы будем для этого предполагать, что линейная часть первой группы уравнений (93.1) имеет вид (93.11), который придется, однако, привести к вещественной форме, так как коэффициенты q_{ij} в уравнениях (91.1) предполагались вещественными.

Коэффициенты α_i в уравнениях (93.11) можно предполагать вещественными, так как, по доказанному, каждый такой коэффициент, отличный от нуля, может быть сделан совершенно произвольным,

Что же касается коэффициентов λ_i, являющихся корнями уравнения (93.10), то они могут либо равняться нулю, либо быть чисто мнимыми. Допустим для определенности, что уравнение (93.10) имеет нулевой корень p-й кратности. Пусть $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_p = 0$. Тогда первые p уравнений (93.11) не нуждаются в дальнейших преобразованиях и имеют вид

$$\frac{dy_1}{dt} = 0, \quad \frac{dy_j}{dt} = \alpha_j y_{j-1} \quad (j = 2, 3, \ldots, p). \tag{93.19}$$

Остальные $k-p$ уравнений (93.11), соответствующие чисто мнимым корням, требуют дальнейших преобразований. Пусть $\pm \lambda i$ — какая-нибудь пара чисто мнимых корней уравнения (93.10) q-й кратности. Пусть $y^{(1)}, \ldots, y^{(q)}$ и $\bar{y}^{(1)}, \ldots, \bar{y}^{(q)}$ — соответствующие этим корням переменные y_i, так что соответствующие этим корням уравнения (93.11) имеют вид

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy^{(1)}}{dt} = \lambda i y^{(1)}, \qquad \frac{dy^{(\sigma)}}{dt} = \lambda i y^{(\sigma)} + \gamma_\sigma y^{(\sigma-1)}, \\ &\frac{d\bar{y}^{(1)}}{dt} = -\lambda i \bar{y}^{(1)}, \qquad \frac{d\bar{y}^{(\sigma)}}{dt} = -\lambda i \bar{y}^{(\sigma)} + \gamma_\sigma \bar{y}^{(\sigma-1)} \\ &\qquad (\sigma = 2, 3, \ldots, q), \end{aligned}\right\} \tag{93.20}$$

где γ_σ — соответствующие рассматриваемым уравнениям постоянные α_i, причем мы считаем, что эти постоянные в уравнениях для $y^{(\sigma)}$ и для $\bar{y}^{(\sigma)}$ имеют одинаковые значения, что не нарушает общности. Вводя вместо переменных $y^{(\sigma)}$ и $\bar{y}^{(\sigma)}$ переменные $u_1, \ldots, u_q, v_1, \ldots, v_q$ при помощи подстановки

$$y^{(\sigma)} = u_\sigma + i v_\sigma, \quad \bar{y}^{(\sigma)} = u_\sigma - i v_\sigma \quad (\sigma = 1, 2, \ldots, q),$$

мы заменим $2q$ уравнений (93.20) с мнимыми коэффициентами $2q$ уравнениями

$$\left.\begin{aligned} &\frac{du_1}{dt} = -\lambda v_1, \qquad \frac{du_\sigma}{dt} = -\lambda v_\sigma + \gamma_\sigma u_{\sigma-1}, \\ &\frac{dv_1}{dt} = \lambda u_1, \qquad \frac{dv_\sigma}{dt} = \lambda u_\sigma + \gamma_\sigma v_{\sigma-1} \\ &\qquad (\sigma = 2, 3, \ldots, q) \end{aligned}\right\} \tag{93.21}$$

с вещественными коэффициентами.

Аналогичным образом мы поступаем со всеми остальными чисто мнимыми корнями. Таким образом, линейная часть первой группы системы (93.1) состоит из уравнений (93.19) и одной или нескольких групп уравнений вида (93.21). Соответственно с этим квадратичная

форма (93.18) будет складываться из квадратичной формы

$$\sum_{j=2}^{p} \alpha_j y_{j-1} y_j$$

и из одной или нескольких квадратичных форм вида

$$\sum_{\sigma=2}^{q} \gamma_\sigma (u_\sigma u_{\sigma-1} + v_\sigma v_{\sigma-1}).$$

Но коэффициенты всех этих форм можно считать численно сколь угодно малыми, так как такими, по доказанному выше, можно считать величины α_j и γ_σ.

Таким образом, вышеуказанное ограничение для коэффициентов q_{ij} в рассматриваемых сейчас случаях действительно выполняется, и мы можем поэтому теоремы 1, 2 и 3 считать полностью доказанными.

На этом мы заканчиваем изложение общей теории критических случаев. В оставшейся части этой главы мы, используя полученные результаты, исследуем ряд критических случаев для установившихся и периодических движений. Мы рассматриваем установившиеся движения, когда характеристическое уравнение первого приближения имеет пару нулевых корней, когда оно имеет две пары чисто мнимых корней и когда оно имеет один нулевой и пару чисто мнимых корней. Аналогичные случаи рассматриваются и для периодических движений.

§ 94. Критический случай двойного нулевого корня для установившихся движений.

Рассмотрим систему $(n+2)$-го порядка с постоянными коэффициентами, для которой характеристическое уравнение первого приближения имеет n корней с отрицательными вещественными частями и два корня, равных нулю. Подходящим выбором переменных система может быть приведена к виду

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= q_{11}x + q_{12}y + X(x, y, x_1, \ldots, x_n), \\ \frac{dy}{dt} &= q_{21}x + q_{22}y + Y(x, y, x_1, \ldots, x_n), \\ \frac{dx_s}{dt} &= p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + p_s x + q_s y + X_s(x, y, x_1, \ldots, x_n) \\ &\qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \end{aligned}\right\} \tag{94.1}$$

где коэффициенты p_{sj} таковы, что характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} p_{11}-\rho & p_{12} & \ldots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22}-\rho & \ldots & p_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{n1} & p_{n2} & \ldots & p_{nn}-\rho \end{vmatrix} = 0 \tag{94.2}$$

имеет корни только с отрицательными вещественными частями, а оба корня характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} q_{11}-\lambda & q_{12} \\ q_{21} & q_{22}-\lambda \end{vmatrix}=0 \tag{94.3}$$

равны нулю. X, Y и X_s — сходящиеся в некоторой окрестности начала координат ряды, расположенные по степеням переменных x, y, $x_1, \ldots, x_n$, начинающиеся членами не ниже второго порядка.

Наряду с системой (94.1) рассмотрим систему второго порядка

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt}&=q_{11}x+q_{12}y+X(x, y, u_1, \ldots, u_n), \\ \frac{dy}{dt}&=q_{21}x+q_{22}y+Y(x, y, u_1, \ldots, u_n), \end{aligned}\right\} \tag{94.4}$$

где $u_s(x, y)$ — формальные решения уравнений с частными производными (93.17). Обозначим соответственно через $X^{(m)}(x, y)$ и $Y^{(m)}(x, y)$ совокупности членов m-го порядка в правых частях уравнений (94.4) и заменим эти уравнения следующими:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt}&=q_{11}x+q_{12}y+X^{(2)}(x, y)+\ldots \\ &\qquad\ldots+X^{(N)}(x, y)+\varphi(t, x, y), \\ \frac{dy}{dt}&=q_{21}x+q_{22}y+Y^{(2)}(x, y)+\ldots \\ &\qquad\ldots+Y^{(N)}(x, y)+\psi(t, x, y). \end{aligned}\right\} \tag{94.5}$$

Здесь N — достаточно большое целое число, а $\varphi(t, x, y)$ и $\psi(t, x, y)$ — аналитические функции переменных x и y, которые при всех $t \geqslant 0$ удовлетворяют неравенствам

$$\left.\begin{aligned} |\varphi(t, x, y)| &< A\{|x|+|y|\}^{N+1}, \\ |\psi(t, x, y)| &< A\{|x|+|y|\}^{N+1}, \end{aligned}\right\} \tag{94.6}$$

где A — положительная постоянная. Тогда на основании теоремы 3 предыдущего параграфа, если невозмущенное движение $x=y=0$ для системы (94.5) устойчиво или асимптотически устойчиво, или неустойчиво при любом выборе функций φ и ψ, удовлетворяющих условиям (94.6), то это же самое будет справедливо и для невозмущенного движения $x=y=x_1=\ldots=x_n=0$ полной системы (94.1). Таким образом, задача сводится к исследованию системы (94.5).

Мы будем предполагать, что переменные x и y выбраны таким образом, что линейная часть уравнений (94.5) имеет каноническую форму. Здесь приходится рассматривать два случая. В первом случае двойной нулевой корень не обращает в нуль хотя бы один из мино-

ров $(n+1)$-го порядка характеристического определителя исходной системы уравнений возмущенного движения, или, что то же самое, этому корню отвечает одна группа решений первого приближения этой системы. В этом случае, если линейная часть уравнений (94.5) имеет каноническую форму, то будем иметь $q_{11}=q_{12}=q_{22}=0$, $q_{21}=1$ и, следовательно, эта линейная часть имеет вид

$$\frac{dx}{dt}=0, \quad \frac{dy}{dt}=x.$$

Вторым случаем будет тот, когда двойному нулевому корню отвечают две группы решений уравнений первого приближения. В этом случае все коэффициенты q_{11}, q_{12}, q_{21}, q_{22} равны нулю и уравнения (94.5) имеют вид

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=X^{(m)}(x, y)+\ldots+X^{(N)}(x, y)+\varphi(t, x, y),\\ \frac{dy}{dt}&=Y^{(m)}(x, y)+\ldots+Y^{(N)}(x, y)+\psi(t, x, y),\end{aligned}\right\} \tag{94.7}$$

где $m \geqslant 2$.

Первый из указанных случаев для системы второго порядка подробно рассмотрен А. М. Ляпуновым[1]). Для систем произвольного порядка этот случай исследован Г. В. Каменковым[2]). Второй случай как для систем второго порядка, так и для систем произвольного порядка рассмотрен автором[3]) и другим методом — Г. В. Каменковым. Мы ограничимся здесь рассмотрением второго случая. Этот случай является особенно важным, так как к нему приводятся наиболее интересные для практики другие критические случаи, когда характеристическое уравнение имеет чисто мнимые корни. В этом мы убедимся в двух следующих параграфах.

Итак, мы будем рассматривать задачу устойчивости для системы (94.7). Рассмотрим две формы $(m+1)$-го порядка $P(x, y)$ и $G(x, y)$, определяемые равенствами

$$\left.\begin{aligned}P(x, y)&=xX^{(m)}(x, y)+yY^{(m)}(x, y),\\ G(x, y)&=xY^{(m)}(x, y)-yX^{(m)}(x, y).\end{aligned}\right\} \tag{94.8}$$

Эти формы будут играть важную роль в дальнейшем исследовании. Если форма $G(x, y)$ не является знакоопределенной, то

---

[1]) Ляпунов А. М., Исследование одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения. Матем. сб., т. XVII, вып. 2, 1893. Работа переиздана во втором и третьем (1950 г.) изданиях книги: Ляпунов А. М., Общая задача об устойчивости движения.

[2]) Каменков Г. В., Об устойчивости движения. Сб. трудов Казанского авиац. ин-та, № 9, 1939.

[3]) Малкин И. Г., Некоторые вопросы теории устойчивости движения в смысле Ляпунова. Сб. трудов Казанского авиац. ин-та, № 7, 1937.

уравнение

$$G(x, y) = 0 \tag{94.9}$$

определяет одну или несколько прямых, проходящих через начало координат.

Угловой коэффициент k каждой такой прямой определяется, очевидно, уравнением

$$Y^{(m)}(1, k) - kX^{(m)}(1, k) = 0. \tag{94.10}$$

Число этих прямых не превосходит $m+1$.

Мы будем различать четыре случая.

1°. Форма G не является знакоопределенной, и на всех прямых (94.9) форма P может принимать только отрицательные значения (за исключением, конечно, начала координат).

2°. Форма G не является знакоопределенной, и хотя бы на одной прямой (94.9) форма P может принимать положительные значения.

3°. Форма G знакоопределенна, и величина

$$\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{P(\cos\vartheta, \sin\vartheta)}{G(\cos\vartheta, \sin\vartheta)} d\vartheta \tag{94.11}$$

отлична от нуля.

4°. Форма G знакоопределенна, и величина (94.11) равна нулю.

Мы исследуем каждый из этих случаев по отдельности.

Случай 1°. Рассмотрим систему однородных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = X^{(m)}(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Y^{(m)}(x, y). \tag{94.12}$$

В рассматриваемом случае уравнение (94.9) имеет вещественные решения. Каждая определяемая этим решением прямая является интегральной кривой уравнений (94.12). Действительно, согласно определению формы G на каждой такой прямой имеем тождественно

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = 0. \tag{94.13}$$

Тождество (94.13) показывает также, что каждая проходящая через начало координат интегральная кривая необходимо касается одной из прямых (94.9).

По условию, на каждой прямой (94.9) форма P, представляющая собой, очевидно, для уравнений (94.12) производную по времени от выражения $\frac{1}{2}(x^2+y^2)$, принимает только отрицательные значения. Следовательно, движение по этим прямым, являющимся, как уже указывалось, интегральными кривыми уравнений (94.12), направлено к началу координат. Отсюда в силу непрерывности поля скоростей для уравнений (94.12) и того обстоятельства, что каждая интеграль-

ная кривая этих уравнений, проходящая через начало координат, касается одной из прямых (94.9), непосредственно вытекает, что все интегральные кривые уравнений (94.12) проходят через начало координат и движение по ним направлено к этой точке. Следовательно, невозмущенное движение для уравнений (94.12) асимптотически устойчиво. Но тогда на основании общей теоремы § 85 невозмущенное движение для уравнений (94.7) будет также асимптотически устойчиво при любом выборе функций $\varphi(t, x, y)$ и $\psi(t, x, y)$, удовлетворяющих условиям (94.6).

Итак, в случае 1° невозмущенное движение асимптотически устойчиво.

Случай 2°. Допустим теперь, что уравнение (94.9) имеет попрежнему вещественные решения, но хотя бы на одной из прямых, определяемых этим уравнением, форма P может принимать положительные значения. Не нарушая общности рассуждений, мы можем считать, что этой прямой является ось x. Действительно, этого всегда можно добиться простым поворотом осей координат. Но если уравнение (94.9) имеет решение $y=0$, то форма $Y^{(m)}$ должна обращаться в нуль при $y=0$. Мы можем, следовательно, писать:

$$Y^{(m)}=Byx^{m-1}+B_2y^2x^{m-2}+\ldots+B_{m-1}y^{m-1}x+B_my^m. \qquad (94.14)$$

Для формы $X^{(m)}$ имеем:

$$X^{(m)}=Ax^m+A_1yx^{m-1}+\ldots+A_{m-1}y^{m-1}x+A_my^m, \qquad (94.15)$$

причем коэффициент A необходимо отличен от нуля, так как при $y=0$ форма P может принимать положительные значения. Кроме того, при m нечетном он должен быть положительным, а при m четном он может быть как положительным, так и отрицательным. Но в последнем случае замена в дифференциальных уравнениях x на $-x$ изменяет знак коэффициента A на обратный. Поэтому, не нарушая общности рассуждений, мы можем предполагать, что коэффициент $A>0$ положителен.

Имея в виду доказать неустойчивость невозмущенного движения, мы постараемся в рассматриваемом случае построить для уравнений (94.7) функцию, удовлетворяющую условиям теоремы о неустойчивости Н. Г. Четаева (§ 48).

Рассмотрим с этой целью функцию

$$2V=\alpha^2x^2-y^2, \qquad (94.16)$$

где α^2 — некоторая положительная постоянная, и составим полную производную от этой функции по времени в силу уравнений (94.7). Будем иметь:

$$\frac{dV}{dt}=\alpha^2xX^{(m)}-yY^{(m)}+\ldots,$$

где ненаписанные члены имеют порядок, не меньший $m+2$.

Функция V принимает положительные значения при $y=0$. То же самое будет иметь место и по отношению к функции $\frac{dV}{dt}$, если численные значения x предполагать достаточно малыми и в случае четного m $x>0$. Это непосредственно следует из того, что $X^{(m)}$ имеет вид (94.15), и коэффициент A положителен. Следовательно, вблизи начала координат существует область, содержащая внутри себя ось x, где одновременно $V>0$ и $\frac{dV}{dt}>0$.

Установив это, допустим сначала, что $A>B$. Покажем, что в этом случае постоянную α можно выбрать настолько малой, чтобы область $V>0$ была заключена внутри области $\frac{dV}{dt}>0$.

В самом деле, функция V может принимать положительные значения только при условии $y=\beta\alpha x$, где β — произвольная величина, лежащая на отрезке $[-1, +1]$. Но, заменяя в выражении $\frac{dV}{dt}$ величину y через $\beta\alpha x$ и принимая во внимание (94.14) и (94.15), будем иметь:

$$\left[\frac{dV}{dt}\right]_{y=\beta\alpha x}=(C+f)\,x^{m+1},$$

где

$$C=(A-B\beta^2)\,\alpha^2+(A_1\beta-B_2\beta^3)\,\alpha^3+\ldots$$
$$\ldots+\left(A_{m-1}\beta^{m-1}-B_m\beta^{m+1}\right)\alpha^{m+1}+A_m\beta^m\alpha^{m+2},$$

а f — аналитическая функция x, обращающаяся в нуль при $x=0$. Отсюда следует, что при достаточно малом x знак величины $(C+f)\,x^{m+1}$ совпадает со знаком величины C (по крайней мере, при $x>0$). Что же касается знака величины C, то постоянную α можно выбрать настолько малой по абсолютному значению, чтобы знак C совпадал со знаком величины $A-B\beta^2$. Но так как $A>B$ и $A>0$, то величина $A-B\beta^2$ будет положительной при всех значениях величины β на отрезке $[-1, +1]$.

Таким образом, в достаточно малой окрестности начала координат существует область $V>0$, заключенная внутри области $\frac{dV}{dt}>0$. Следовательно, функция V удовлетворяет всем условиям теоремы о неустойчивости Н. Г. Четаева и невозмущенное движение неустойчиво.

Допустим теперь, что $A<B$. В этом случае на границе области $V>0$ производная $\frac{dV}{dt}$ будет отрицательной, и, следовательно, функция V не будет удовлетворять условиям теоремы Н. Г. Четаева. Тем не менее, невозмущенное движение будет также неустойчиво, что может быть доказано следующим образом.

Рассмотрим снова функцию (94.16), где α, так же как и в предыдущем случае, выбрана настолько малой, что знак $(C+f)x^{m+1}$ при достаточно малых значениях x совпадает со знаком величины $A-B\beta^2$. Пусть это будет при $0<x\leqslant h$. Так как сейчас $A<B$, то величина $A-B\beta^2$ не будет положительна при любом β на отрезке $[-1, +1]$, но она во всяком случае будет положительна при $|\beta|\leqslant\bar{\beta}$, где $\bar{\beta}$ — достаточно малое положительное число. Следовательно, в области $0<x\leqslant h$, $V_1>0$, где

$$2V_1=\bar{\beta}^2\alpha^2x^2-y^2,$$

производная $\frac{dV}{dt}$ будет во всяком случае положительна. Что же касается производной $\frac{dV_1}{dt}$, то на границе $V_1=0$ рассматриваемой области она будет отрицательна, так как функция V_1 обладает, очевидно, такими же свойствами, как и V.

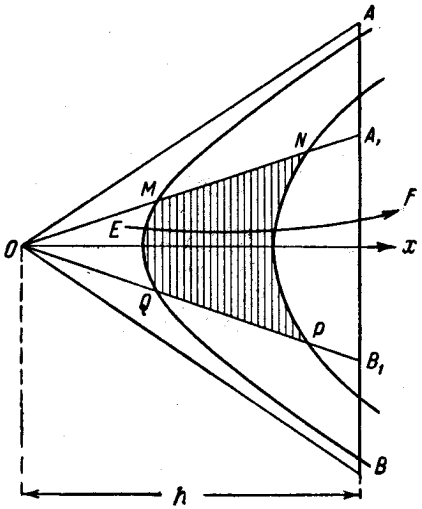

Рис. 21.

Пусть AOB (рис. 21) — границы области $V>0$, а $A_1OB_1A_1$ — границы области $0\leqslant x\leqslant h$, $V_1>0$. Внутри этой последней рассмотрим область $NMQP$ (эта область на чертеже заштрихована), ограниченную отрезком NP гиперболы $V=C$ и отрезком MQ гиперболы $V=c$. При этом C — какое-нибудь фиксированное число, а c предполагается сколь угодно малым, так что дуга MQ расположена сколь угодно близко от начала координат. Внутри области $NMQP$ производная $\frac{dV}{dt}$ положительна, и для нее существует отличный от нуля положительный нижний предел. Обозначим этот предел через l и пусть $T=\frac{C}{l}$. Рассмотрим интегральную кривую уравнений (94.7), выходящую в момент времени $t=T$ из какой-нибудь точки F дуги NP. Пусть $x=x(t)$ и $y=y(t)$ — уравнение этой интегральной кривой. Будем следовать вдоль этой интегральной кривой в сторону убывания t вплоть до момента времени $t=0$. При этом интегральная кривая будет приближаться к началу координат, по крайней мере, до тех пор, пока она не покинет области $A_1OB_1A_1$, так как в этой

области $\frac{dV}{dt} > 0$. Но если бы указанная интегральная кривая в какой-нибудь момент времени $0 \leqslant \tau < T$ покинула область $A_1OB_1A_1$, что она могла бы сделать лишь только через границы ON или OP, то в этот момент времени одновременно выполнялись бы условия $V_1 = 0$, $\frac{dV_1}{dt} \geqslant 0$, что невозможно, так как на отрезках OA_1 и OB_1 производная $\frac{dV_1}{dt}$ отрицательна.

Таким образом, на всем отрезке времени от T до 0 рассматриваемая интегральная кривая будет оставаться внутри области $NOPN$. Допустим, что при $t = 0$ она будет проходить через точку E. Покажем, что точка E непременно находится внутри области $OMQO$. Для этого, очевидно, достаточно показать, что при убывании t от T до 0 рассматриваемая интегральная кривая пересекает в какой-нибудь момент времени дугу MQ. Допустим противное, что интегральная кривая при всех $0 \leqslant t \leqslant T$ находится внутри области $MQNP$. Тогда будем иметь:

$$V[x(0),\ y(0)] = V[x(T),\ y(T)] - \int_0^T \frac{dV}{dt}\,dt <$$
$$< V[x(T),\ y(T)] - lT = C - C = 0,$$

что невозможно, так как по предположению точка $x(0)$, $y(0)$ находится в области $MQNP$ и, следовательно, $V[x(0),\ y(0)] > c > 0$.

Таким образом, точка E находится внутри области OMQ. Рассмотрим теперь интегральную кривую, выходящую в момент времени $t = 0$ из точки E. Это, очевидно, будет та же самая интегральная кривая $x(t)$, $y(t)$. К моменту времени $t = T$ эта кривая достигнет точки F, находящейся на определенном расстоянии от начала координат. Но так как при этом точка E находится сколь угодно близко от начала координат, то невозмущенное движение неустойчиво [1]).

Допустим, наконец, что $A = B$. Рассмотрим функцию

$$2V = x^4 - y^2$$

и область

$$0 < x \leqslant h, \quad V > 0. \tag{94.17}$$

Все значения переменных, лежащих в этой области, удовлетворяют соотношению $y = \beta x^2$, где β — произвольная величина, лежащая на отрезке $[-1, +1]$. Составим производную от V по времени в силу уравнений (94.7) и заменим в ней величину y через βx^2. Тогда,

---

[1]) Построенные нами функции V_1 и V_2 удовлетворяют другой теореме Н. Г. Четаева о неустойчивости.

принимая во внимание (94.14) и (94.15), получим:

$$\left[\frac{dV}{dt}\right]_{y=\beta x^2} = x^{m+3}(2A - B\beta^2 - p + f),$$

где p — коэффициент при x^{m+1} в форме $X^{(m+1)}$, а f — аналитическая функция переменной x, обращающаяся в нуль при $x = 0$.

Коэффициент p можно предполагать сколь угодно малым. В самом деле, если в уравнениях (94.7) переменную y заменить переменной η при помощи подстановки $\eta = \sigma y$, где σ — постоянная, то в формах $X^{(m)}$ и $Y^{(m)}$ коэффициенты A и B не изменятся, а в форме $X^{(m+1)}$ коэффициент при x^{m+1} умножится на σ. Следовательно, выбрав σ достаточно малой, можно всегда добиться, чтобы этот коэффициент был численно сколь угодно малым.

Так как $A > 0$, $B = A$ и p численно мало, то вблизи начала координат величина $\left[\frac{dV}{dt}\right]_{y=\beta x^2}$ будет принимать положительные значения (при $x > 0$, если m — четное) при всех значениях β, лежащих на отрезке $[-1, +1]$. Следовательно, при h, достаточно малом, во всей области (94.17) производная $\frac{dV}{dt}$ принимает положительные значения и функция V удовлетворяет всем условиям теоремы Н. Г. Четаева. Отсюда вытекает, что невозмущенное движение неустойчиво.

Итак, в случае 2° невозмущенное движение неустойчиво. При этом очевидно, что это будет справедливо при любом выборе функций $\varphi(t, x, y)$ и $\psi(t, x, y)$, удовлетворяющих условиям (94.6).

Случай 3°. Допустим теперь, что G есть форма знакоопределенная и величина λ, определяемая равенством (94.11), отлична от нуля. Вводя полярные координаты

$$x = r\cos\vartheta, \quad y = r\sin\vartheta,$$

преобразуем систему (94.7) к следующему виду:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dr}{dt} &= r^m P(\cos\vartheta, \sin\vartheta) + \\ &\quad + r^{m+1}P_{m+1}(\vartheta) + \ldots + r^N P_N(\vartheta) + R(t, \vartheta, r), \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= r^{m-1}G(\cos\vartheta, \sin\vartheta) + \\ &\quad + r^m G_m(\vartheta) + \ldots + r^{N-1}G_{N-1}(\vartheta) + \theta(t, \vartheta, r),\end{aligned}\right\} \quad (94.18)$$

где P_k и G_k — периодические функции ϑ, периода 2π (формы относительно $\cos\vartheta$ и $\sin\vartheta$), а $R(t, \vartheta, r)$ и $\theta(t, \vartheta, r)$ при всех значениях $t \geqslant 0$ и ϑ удовлетворяют условиям

$$|R(t, \vartheta, r)| < Br^{N+1}, \quad |\theta(t, \vartheta, r)| < Br^N, \quad (94.19)$$

где B — некоторая постоянная.

Из (94.11) следует, что функция $\psi(\vartheta)$, определяемая равенством

$$\int_0^{\vartheta} \frac{P(\cos\vartheta, \sin\vartheta)}{G(\cos\vartheta, \sin\vartheta)}\, d\vartheta = \lambda\vartheta + \psi(\vartheta), \tag{94.20}$$

являющаяся вследствие знакоопределенности G непрерывной, будет периодической периода 2π. Такой же, следовательно, будет и функция

$$\varphi(\vartheta) = e^{\psi(\vartheta)}, \tag{94.21}$$

которая к тому же никогда не обращается в нуль. Вследствие этого функция $[\varphi(\vartheta)]^{-1}$ будет также непрерывной. Из (94.20) находим:

$$\frac{d\varphi}{d\vartheta} = \left(\frac{P(\cos\vartheta, \sin\vartheta)}{G(\cos\vartheta, \sin\vartheta)} - \lambda\right)\varphi. \tag{94.22}$$

Введем теперь вместо переменной r переменную ρ при помощи подстановки

$$r = \rho\varphi(\vartheta). \tag{94.23}$$

Из отмеченных свойств функции $\varphi(\vartheta)$ вытекает, что задача устойчивости по отношению к переменной r равносильна той же задаче по отношению к переменной ρ. Уравнения (94.18) на основании (94.22) примут вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= \lambda G(\cos\vartheta, \sin\vartheta)\,\varphi^{m-1}(\vartheta)\,\rho^m + \\ &\quad + P^*_{m+1}(\vartheta)\,\rho^{m+1} + \ldots + P^*_N(\vartheta)\,\rho^N + R^*(t, \vartheta, \rho), \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= G(\cos\vartheta, \sin\vartheta)\,\varphi^{m-1}(\vartheta)\,\rho^{m-1} + \\ &\quad + Q_m(\vartheta)\,\rho^m + \ldots + Q_{N-1}(\vartheta)\,\rho^{N-1} + \theta^*(t, \vartheta, \rho), \end{aligned}\right\} \tag{94.24}$$

где $P^*_k(\vartheta)$ и $Q_k(\vartheta)$ — периодические функции ϑ, периода 2π, а функции R^* и θ^* при всех значениях $t \geqslant 0$ и ϑ удовлетворяют неравенствам

$$|R^*(t, \vartheta, \rho)| < C\rho^{N+1}, \quad |\theta^*(t, \vartheta, \rho)| < C\rho^N, \tag{94.25}$$

где C — некоторая постоянная.

Так как $G(\cos\vartheta, \sin\vartheta)$ никогда не обращается в нуль, то из первого уравнения (94.24) сразу вытекает, что невозмущенное движение при $\lambda G < 0$ асимптотически устойчиво, а при $\lambda G > 0$ неустойчиво, и это будет иметь место при любом выборе функций R^* и θ^*, удовлетворяющих условиям (94.25) и, следовательно, при любом выборе функций $\varphi(t, x, y)$ и $\psi(t, x, y)$, удовлетворяющих условиям (94.6).

Итак, в случае 3° невозмущенное движение будет асимптотически устойчиво при $\lambda G < 0$ и неустойчиво при $\lambda G > 0$.

Случай 4. Допустим, наконец, что G есть форма знакоопределенная и величина λ, определяемая формулой (94.11), равна нулю. Поступая, как и в предыдущем случае, т. е. вводя полярные координаты и затем переменную ρ при помощи подстановки (94.23), мы получим уравнения (94.24), которые сейчас примут вид

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\rho}{dt} &= P^*_{m+1}(\vartheta)\rho^{m+1} + \ldots + P^*_N(\vartheta)\rho^N + R^*(t, \vartheta, \rho),\\ \frac{d\vartheta}{dt} &= G(\cos\vartheta, \sin\vartheta)\varphi^{m-1}(\vartheta)\rho^{m-1} + Q_m(\vartheta)\rho^m + \ldots\\ &\qquad \ldots + Q_{N-1}(\vartheta)\rho^{N-1} + \theta^*(t, \vartheta, \rho).\end{aligned}\right\} \quad (94.26)$$

Отсюда, исключая dt, находим:

$$\frac{d\rho}{d\vartheta} = R_2(\vartheta)\rho^2 + \ldots + R_{N+1-m}(\vartheta)\rho^{N+1-m} + \Phi(t, \vartheta, \rho), \quad (94.27)$$

где $R_k(\vartheta)$ — периодические функции ϑ с периодом 2π, а Φ имеет порядок малости не ниже $N+2-m$ и является функцией такого же типа, как и R^* и θ^*.

Если в уравнении (94.27) отбросить член Φ, то оно будет отличаться от уравнения (66.1), подробно изученного в § 66, только тем, что независимой переменной является не время, а полярный угол ϑ. Мы можем поэтому применить к уравнению (94.27) все рассуждения § 66. Поступая по указанному в этом параграфе второму способу решения задачи, попытаемся удовлетворить уравнению (94.27) решением вида

$$\rho = c + \varphi_2(\vartheta)c^2 + \varphi_3(\vartheta)c^3 + \ldots, \quad (94.28)$$

где c — произвольная постоянная, а φ_k — некоторые периодические функции ϑ, периода 2π. Подставляя (94.28) в (94.27) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях c, мы получим для определения φ_k уравнения вида

$$\frac{d\varphi_k}{dt} = F_k(\vartheta) \qquad (k = 2, 3, \ldots), \quad (94.29)$$

где $F_k(\vartheta)$ — некоторые полиномы с периодическими коэффициентами (если $k < N+1-m$) от $\varphi_2, \ldots, \varphi_{k-1}$. Уравнения (94.29) дают возможность последовательно определять коэффициенты φ_k при помощи квадратур. Однако кроме особо исключительных случаев, которые мы здесь не будем рассматривать, коэффициенты φ_k не будут получаться периодическими при любом k. Пусть φ_i — первый непериодический коэффициент в ряду $\varphi_2, \varphi_3, \ldots$ Этот коэффициент будет иметь вид

$$\varphi_i = g\vartheta + \psi_i(\vartheta), \quad (94.30)$$

где g — некоторая постоянная, а $\psi_i(\vartheta)$ — периодическая функция. Введем теперь в уравнение (94.27) вместо переменной ρ переменную z при помощи подстановки

$$\rho = z + \varphi_2(\vartheta) z^2 + \ldots + \varphi_{i-1}(\vartheta) z^{i-1} + \psi_i(\vartheta) z^i.$$

Тогда, считая, что $N > i + m - 1$, мы получим, как это было показано в § 66, следующее уравнение:

$$\frac{dz}{d\vartheta} = gz^i + \ldots,$$

где ненаписанные члены имеют порядок, не меньший $i+1$. При этом очевидно, что задача устойчивости по отношению к переменной z эквивалентна той же задаче по отношению к переменной ρ.

Для производной $\frac{dz}{dt}$ на основании (94.26) имеем:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{d\theta}\frac{d\vartheta}{dt} = gG(\cos\vartheta, \sin\vartheta)\varphi^{m-1}\rho^{m+i-1} + \ldots$$

Отсюда непосредственно вытекает, что при $gG > 0$ невозмущенное движение неустойчиво, а при $gG < 0$ оно устойчиво асимптотически, причем этот результат будет справедлив при любом выборе функций $\varphi(t, x, y)$, $\psi(t, x, y)$, удовлетворяющих условиям (94.6). Это и дает решение задачи устойчивости в случае 4°.

Полученные результаты могут быть сведены в следующую теорему.

Теорема. *Допустим, что предложена система $(n+2)$-го порядка дифференциальных уравнений возмущенного движения, для которых характеристическое уравнение первого приближения имеет n корней с отрицательными вещественными частями и двойной нулевой корень, которому соответствуют две группы решений уравнений первого приближения. Подходящим выбором переменных эту систему можно представить в следующем виде:*

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = X, \quad \frac{dy}{dt} = Y, \\ \frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + p_s x + q_s y + X_s, \end{aligned}\right\} \quad (94.31)$$

где X, Y, X_s — аналитические функции переменных x, y, $x_1, \ldots, x_n$, разложения которых начинаются членами не ниже второго порядка, а коэффициенты p_{sj} таковы, что уравнение (94.2) *имеет корни только с отрицательными вещественными частями.*

Составляя систему уравнений с частными производными

$$\frac{\partial u_s}{\partial x} X(x, y, u_1, \ldots, u_n) + \frac{\partial u_s}{\partial y} Y(x, y, u_1, \ldots, u_n) =$$
$$= p_{s1}u_1 + \ldots + p_{sn}u_n + p_s x + q_s y + X_s(x, y, u_1, \ldots, u_n),$$

попытаемся удовлетворить ей формально выражениями $u_s(x, y)$, *являющимися рядами по степеням* x *и* y, *не имеющими свободных членов. Такие ряды всегда найдутся и будут единственными. Этими рядами заменяем величины* x_s *в первых двух уравнениях* (94.31), *после чего они примут вид*

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= X^{(m)}(x, y) + X^{(m+1)}(x, y) + \ldots, \\ \frac{dy}{dt} &= Y^{(m)}(x, y) + Y^{(m+1)}(x, y) + \ldots, \end{aligned}\right\} \qquad (94.32)$$

где $X^{(l)}$ *и* $Y^{(l)}$ — *формы* l-*го порядка переменных* x *и* y. *Далее составляем формы* $P(x, y)$ *и* $G(x, y)$ *по формулам* (94.8). *Тогда*:

1) *Если форма* G *не является знакоопределенной и форма* P *на всех прямых, определяемых уравнением* (94.9), *может принимать только отрицательные значения, то невозмущенное движение асимптотически устойчиво.*

2) *Если форма* G *не является знакоопределенной и хотя бы на одной из прямых, определяемых уравнением* (94.9), *форма* P *может принимать положительные значения, то невозмущенное движение неустойчиво.*

3) *Если форма* G *является знакоопределенной и величина* λ, *определяемая формулой* (94.11), *отлична от нуля, то невозмущенное движение асимптотически устойчиво при* $\lambda G < 0$ *и неустойчиво при* $\lambda G > 0$.

4) *Если форма* G *является знакоопределенной и* $\lambda = 0$, *то для решения задачи устойчивости поступаем следующим образом.*

Вводим в уравнения (94.32) *вместо переменных* x *и* y *переменные* ρ *и* ϑ *при помощи подстановки* $x = \rho\varphi(\vartheta)\cos\vartheta$, $y = \rho\varphi(\vartheta)\sin\vartheta$, *где* φ — *периодическая с периодом* 2π *функция* ϑ, *определяемая формулой* (94.21), *в которой* $\psi(\vartheta)$ *определяется формулой* (94,20). *Уравнения* (94.32) *примут вид*

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= P_{m+1}(\vartheta)\rho^{(m+1)} + P_{m+2}(\vartheta)\rho^{m+2} + \ldots, \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= G(\cos\vartheta, \sin\vartheta)\varphi^{m-1}(\vartheta)\rho^{m-1} + Q_m(\vartheta)\rho^m + \ldots, \end{aligned}\right\} \qquad (94.33)$$

где P_k *и* Q_k — *периодические функции* ϑ, *периода* 2π.

Из (94.33), *исключая* t, *находим уравнение*

$$\frac{d\rho}{d\vartheta} = R_2(\vartheta)\rho^2 + R_3(\vartheta)\rho^3 + \ldots,$$

где R_k — *периодические функции периода* 2π. *Этому уравнению пытаемся удовлетворить решением вида* (94.28), *в котором*

c — произвольная постоянная, а φ_k — периодические функции периода 2π. Для определения φ_k получаем уравнения (94.29), *из которых эти функции последовательно определяются при помощи квадратур. Функции φ_k лишь только в особо исключительных случаях будут все получаться периодическими. Оставляя в стороне этот случай, допустим, что φ_l является первой непериодической функцией в ряду $\varphi_2, \varphi_3, \ldots$ Эта функция будет необходимо иметь вид* (94.30). *Тогда, если $gG > 0$, то невозмущенное движение неустойчиво, а при $gG < 0$ оно устойчиво асимптотически.*

Доказанная теорема охватывает все случаи, кроме тех, при которых форма G не является знакоопределенной, а форма P обращается в нуль на некоторых прямых, определяемых уравнением (94.9), но ни на одной из этих прямых она не может принимать положительных значений. В этих случаях, так же как и в случае 4°, задача не решается формами $X^{(m)}$ и $Y^{(m)}$ в уравнениях (94.32), а требует рассмотрения членов более высоких порядков. На этих случаях мы здесь не останавливаемся [1]).

§ 95. Критический случай двух пар чисто мнимых корней для установившихся движений [2]).

Рассмотрим систему $(n+4)$-го порядка с постоянными коэффициентами, для которой характеристическое уравнение первого приближения имеет две пары чисто мнимых корней $\pm\lambda_1 i$ и $\pm\lambda_2 i$ и n корней с отрицательными вещественными частями. Мы будем предполагать, что отношение $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ иррационально. Подходящим выбором переменных эту систему можно представить в виде

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dx_j}{dt} = \lambda_j i x_j + X_j(x_1, y_1, x_2, y_2, z_1, \ldots, z_n),\\
&\frac{dy_j}{dt} = -\lambda_j i y_j + Y_j(x_1, y_1, x_2, y_2, z_1, \ldots, z_n),\\
&\frac{dz_s}{dt} = p_{s1}z_1 + \ldots + p_{sn}z_n + \alpha_s x_1 + \beta_s y_1 + \gamma_s x_2 + \delta_s y_2 +\\
&\qquad\qquad + Z_s(x_1, y_1, x_2, y_2, z_1, \ldots, z_n)\\
&\qquad (j = 1, 2;\ s = 1, 2, \ldots, n),
\end{aligned}\right\} \quad (95.1)$$

где коэффициенты p_{si} таковы, что уравнение

$$|p_{si} - \delta_{si}\rho| = 0$$

---

[1]) См. примечание в конце книги (стр. 530).

[2]) Малкин И. Г., Решение некоторых критических случаев задачи устойчивости движения. Прикл. матем. и мех., т. XV, вып. 5, 1951.

имеет корни только с отрицательными вещественными частями. Функции X_j, Y_j, Z_s, как обычно, предполагаются аналитическими с разложениями, начинающимися членами не ниже второго порядка.

Наряду с системой (95.1) рассмотрим «укороченную» систему

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_j}{dt} &= \lambda_j i x_j + X_j(x_1, y_1, x_2, y_2, u_1, \ldots, u_n), \\ \frac{dy_j}{dt} &= -\lambda_j i y_j + Y_j(x_1, y_1, x_2, y_2, u_1, \ldots, u_n) \\ &\qquad (j = 1, 2), \end{aligned}\right\} \tag{95.2}$$

где $u_s(x_1, y_1, x_2, y_2)$ — ряды по степеням переменных x_1, y_1, x_2, y_2, не имеющие свободных членов и представляющие формальные решения уравнений с частными производными:

$$\sum_{j=1}^{2}\left[\frac{\partial u_s}{\partial x_j}\lambda_j i x_j + X_j(x_1, y_1, x_2, y_2, u_1, \ldots, u_n) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial u_s}{\partial y_j} - \lambda_j i y_j + Y_i(x_1, y_1, x_2, y_2, u_1, \ldots, u_n)\right] =$$
$$= p_{s1}u_1 + \ldots + p_{sn}u_n + \alpha_s x_1 + \beta_s y_1 + \gamma_s x_2 + \delta_s y_2 +$$
$$+ Z_s(x_1, y_1, x_2, y_2, u_1, \ldots, u_n)$$
$$(s = 1, 2, \ldots, n).$$

Пусть $X_j^{(m)}$, $Y_j^{(m)}$ — формы m-го порядка переменных x_1, y_1, x_2, y_2, представляющие, соответственно, члены m-го порядка в правых частях уравнений ((95.2). Рассмотрим систему

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_j}{dt} &= \lambda_j i x_j + X_j^{(2)} + \ldots + X_j^{(N)} + \varphi_j(t, x_1, y_1, x_2, y_2), \\ \frac{dy_j}{dt} &= -\lambda_j i y_j + Y_j^{(2)} + \ldots + Y_j^{(N)} + \psi_j(t, x_1, y_1, x_2, y_2) \\ &\qquad (j = 1, 2), \end{aligned}\right\} \tag{95.3}$$

где N — сколь угодно большое целое число, а φ_j и ψ_j — зависящие от t аналитические функции переменных x_1, y_1, x_2, y_2, удовлетворяющие при всех $t \geqslant 0$ в некоторой окрестности начала координат условиям

$$\left.\begin{aligned} |\varphi_j(t, x_1, y_1, x_2, y_2)| &< A\{|x_1| + |y_1| + |x_2| + |y_2|\}^{N+1}, \\ |\psi_j(t, x_1, y_1, x_2, y_2)| &< A\{|x_1| + |y_1| + |x_2| + |y_2|\}^{N+1}, \end{aligned}\right\} \tag{95.4}$$

где A — некоторая постоянная. Если невозмущенное движение $x_1 = y_1 = x_2 = y_2 = 0$ для системы (95.3) будет устойчиво или асимптотически устойчиво, или неустойчиво при любом выборе функций

φ_j и ψ_j, то согласно § 93 невозмущенное движение $x_1 = y_1 = x_2 = y_2 = z_1 = \ldots = z_n = 0$ для системы (95.1) будет также соответственно, устойчиво или асимптотически устойчиво, или неустойчиво. Таким образом, задача сводится к исследованию системы (95.3).

Заметим прежде всего, что переменные x_j и y_j являются комплексно сопряженными. Поэтому вторая группа уравнений (95.3) может быть получена из первой заменой i на $-i$, x_j на y_j, y_j на x_j. Этим обстоятельством мы неоднократно будем пользоваться в дальнейшем.

Введем теперь в уравнения (95.3) вместо переменных x_1, y_1, x_2, y_2 переменные u_1, v_1, u_2, v_2 при помощи подстановки

$$\left.\begin{aligned} x_j &= u_j + u_j^{(2)}(u_1, v_1, u_2, v_2) + \ldots + u_j^{(N)}(u_1, v_1, u_2, v_2), \\ y_j &= v_j + v_j^{(2)}(u_1, v_1, u_2, v_2) + \ldots + v_j^{(N)}(u_1, v_1, u_2, v_2) \\ &\qquad (j = 1, 2) \end{aligned}\right\} \quad (95.5)$$

где $u_j^{(m)}(u_1, v_1, u_2, v_2)$ и $v_j^{(m)}(u_1, v_1, u_2, v_2)$ — некоторые подлежащие определению формы m-го порядка переменных u_1, v_1, u_2, v_2. Эти формы мы постараемся подобрать таким образом, чтобы преобразованные уравнения приняли вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{du_j}{dt} &= \lambda_j i u_j + \sum_{k=1}^{\frac{1}{2}(N-1)} U_j^{(2k+1)}(u_1, v_1, u_2, v_2) + \Phi_j(t, u_1, v_1, u_2, v_2), \\ \frac{dv_j}{dt} &= -\lambda_j i v_j + \sum_{k=1}^{\frac{1}{2}(N-1)} \overline{U}_j^{(2k+1)}(v_1, u_1, v_2, u_2) + \Psi_j(t, u_1, v_1, u_2, v_2) \\ &\qquad (j = 1, 2). \end{aligned}\right\} \quad (95.6)$$

Здесь функции Φ_j и Ψ_j начинаются членами не ниже $(N+1)$-го порядка (число N предполагаем нечетным), $U_j^{(m)}(u_1, v_1, u_2, v_2)$ и $\overline{U}_j^{(m)}(v_1, u_1, v_2, u_2)$ — формы m-го порядка переменных u_1, v_1, u_2, v_2. Черта над буквой обозначает комплексную сопряженность, так что формы $\overline{U}_j^{(m)}(v_1, u_1, v_2, u_2)$ получаются из $U_j^{(m)}(u_1, v_1, u_2, v_2)$ заменой i на $-i$, u_j на v_j и v_j на u_j, т. е. если

$$U_j^{(m)}(u_1, v_1, u_2, v_2) = \sum A_j^{(m_1, m_2, n_1, n_2)} u_1^{m_1} v_1^{m_2} u_2^{n_1} v_2^{n_2} \quad (95.7)$$
$$(j = 1, 2;\ m_1 + m_2 + n_1 + n_2 = m),$$

то

$$\overline{U}_j^{(m)}(v_1, u_1, v_2, u_2) = \sum \overline{A}_j^{(m_1, m_2, n_1, n_2)} v_1^{m_1} u_1^{m_2} v_2^{n_1} u_2^{n_2} \quad (95.8)$$
$$(j = 1, 2;\ m_1 + m_2 + n_1 + n_2 = m).$$

Формы $U_j^{(m)}$, кроме того, таковы, что

$$\left.\begin{aligned} &A_1^{(m_1,\ m_2,\ n_1,\ n_2)}=0, \text{ если } (n_1-n_2)^2+(m_1-m_2-1)^2\neq 0;\\ &A_2^{(m_1,\ m_2,\ n_1,\ n_2)}=0, \text{ если } (m_1-m_2)^2+(n_1-n_2-1)^2\neq 0,\end{aligned}\right\}$$

так что из всех коэффициентов $A_1^{(m_1,\ m_2,\ n_1,\ n_2)}$ отличными от нуля являются лишь те, для которых одновременно $n_1=n_2$ и $m_1-m_2=1$, а из коэффициентов $A_2^{(m_1,\ m_2,\ n_1,\ n_2)}$ отличными от нуля будут лишь те, для которых одновременно $m_1=m_2$, $n_1-n_2-1=0$.

Мы сейчас покажем, что эти условия могут быть удовлетворены и что они определяют как формы $u_j^{(m)}$, $v_j^{(m)}$, так и коэффициенты $A_j^{(m_1,\ m_2,\ n_1,\ n_2)}$, причем все эти величины определяются крайне простыми вычислениями, так как для каждого коэффициента форм $u_j^{(m)}, v_j^{(m)}$ и для каждого коэффициента $A_j^{(m_1,\ m_2,\ n_1,\ n_2)}$ получится линейное алгебраическое уравнение с одной неизвестной.

Заметим прежде всего, что, как показывают уравнения (95.6), вторая группа этих уравнений должна получиться (по крайней мере, с точностью до членов N-го порядка) из первой группы заменой i на $-i$, u_j на v_j, v_j на u_j, т. е. переменные u_j и v_j должны получиться комплексно сопряженными. Так как такими же свойствами обладают и исходные уравнения (95.3), то должно быть $v_j^{(m)}(u_1,\ v_1,\ u_2,\ v_2)=\overline{u}_j^{(m)}(v_1,\ u_1,\ v_2,\ u_2)$, т. е. если

$$u_j^{(m)}=\sum B_j^{(m_1,\ m_2,\ n_1,\ n_2)}u_1^{m_1}v_1^{m_2}u_2^{n_1}v_2^{n_2} \tag{95.10}$$
$$(j=1,\ 2;\ m_1+m_2+n_1+n_2=m),$$

то

$$v_j^{(m)}=\sum \overline{B}_j^{(m_1,\ m_2,\ n_1,\ n_2)}v_1^{m_1}u_1^{m_2}v_2^{n_1}u_2^{n_2} \tag{95.11}$$
$$(j=1,\ 2;\ m_1+m_2+n_1+n_2=m).$$

Если при выполнении этих условий удастся подобрать преобразование (95.5) так, чтобы первая группа уравнений (95.6) имела требуемый вид, то требуемый вид будет иметь также и вторая группа этих уравнений.

Заменяя в первой группе уравнений (95.3) x_j и y_j их выражениями (95.5) и принимая во внимание (95.6), получим:

$$\lambda_j i u_j+U_j^{(3)}+\ldots+\sum_{\beta=2}^{N}\sum_{\alpha=1}^{2}\left\{\frac{\partial u_j^{(\beta)}}{\partial u_\alpha}(\lambda_\alpha i u_\alpha+U_\alpha^{(3)}+\ldots)+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial u_j^{(\beta)}}{\partial v_\alpha}(-\lambda_\alpha i v_\alpha+\overline{U}_\alpha^{(3)}+\ldots)\right\}=\lambda_j i(u_j+u_j^{(2)}+\ldots)+$$
$$+X_j^{(2)}(u_1+\ldots,\ \ldots,\ v_2+\ldots)+\ldots \qquad (j=1,\ 2). \tag{95.12}$$

Задавшись произвольным числом $m < N$, приравняем в обеих частях полученных уравнений коэффициенты при $u_1^{m_1} v_1^{m_2} u_2^{n_1} v_2^{n_2}$, где $m_1 + m_2 + n_1 + n_2 = m$. Тогда, принимая во внимание (95.7), (95.8), (95.10) и (95.11), мы получим для определения коэффициентов $B_j^{(m_1, m_2, n_1, n_2)}$ следующие уравнения:

$$[(m_1 - m_2)\lambda_1 + (n_1 - n_2)\lambda_2 - \lambda_j] B_j^{(m_1, m_2, n_1, n_2)} + \\ + \alpha A_j^{(m_1, m_2, n_1, n_2)} = C_j^{(m_1, m_2, n_1, n_2)}, \qquad (95.13)$$

где $\alpha = 0$ при m четном и $\alpha = 1$ при m нечетном.

Здесь $C_j^{(m_1, m_2, n_1, n_2)}$ — целые рациональные функции от тех коэффициентов $A_s^{(m_1, m_2, n_1, n_2)}$ и $B_s^{(m_1, m_2, n_1, n_2)}$ (и комплексно сопряженных с ними величин), для которых $m_1 + m_2 + n_1 + n_2 < m$. Допустим, что все эти коэффициенты уже определены и, следовательно, величины $C_j^{(m_1, m_2, n_1, n_2)}$ известны. Тогда будем различать два случая. Первым из них будет тот, когда при $j = 1$ одновременно выполняются условия $m_1 = m_2 + 1$, $n_1 = n_2$, а при $j = 2$ — условия $m_1 = m_2$, $n_1 = n_2 + 1$. Этот случай возможен лишь при m нечетном. В первом случае коэффициент при $B_j^{(m_1, m_2, n_1, n_2)}$ в уравнении (95.13) обращается в нуль, и мы получим вполне определенное значение для $A_j^{(m_1, m_2, n_1, n_2)}$:

$$A_j^{(m_1, m_2, n_1, n_2)} = C_j^{(m_1, m_2, n_1, n_2)}.$$

Коэффициент $B_j^{(m_1, m_2, n_1, n_2)}$ остается произвольным, и мы его можем положить равным нулю.

Во втором случае вышеуказанные условия относительно индексов не выполняются. В этом случае коэффициент при $B_j^{(m_1, m_2, n_1, n_2)}$ в уравнении (95.13) не обращается в нуль, так как, по условию, отношение λ_1/λ_2 является числом иррациональным. Мы можем тогда положить

$$A_j^{(m_1, m_2, n_1, n_2)} = 0, \quad B_j^{(m_1, m_2, n_1, n_2)} = \frac{C_j^{(m_1, m_2, n_1, n_2)}}{(m_1 - m_2)\lambda_1 + (n_1 - n_2)\lambda_2 - \lambda_j}.$$

Если теперь учесть, что при $m = 1$ коэффициенты $C_j^{(m_1, m_2, n_1, n_2)}$ являются известными величинами, то из вышесказанного вытекает, что мы можем действительно определить преобразование (95.5), приводящее систему (95.3) к виду (95.6), причем для коэффициентов форм $U_{(j)}^m(u_1, v_1, u_2, v_2)$ будут выполняться условия (95.9). Само определение преобразования, как мы сейчас видели, чрезвычайно просто и сводится к составлению уравнений (95.13), что требует лишь развертывания левых и правых частей уравнений (95.12).

Рассмотрим подробнее преобразованные уравнения. Очевидно, прежде всего, что функции Φ_j и Ψ_j удовлетворяют при всех $t \geqslant 0$ и при значениях u_j и v_j, достаточно малых, неравенствам

$$\left.\begin{aligned} \Phi_j(t, u_1, v_1, u_2, v_2) &< B\{|u_1| + |v_1| + |u_2| + |v_2|\}^{N+1}, \\ \Psi_j(t, u_1, v_1, u_2, v_2) &< B\{|u_1| + |v_1| + |u_2| + |v_2|\}^{N+1}, \end{aligned}\right\} \tag{95.14}$$

где B — некоторое положительное число.

Положим теперь

$$u_j = \rho_j(\cos\vartheta_j + i\sin\vartheta_j), \quad v_j = \rho_j(\cos\vartheta_j - i\sin\vartheta_j) \tag{95.15}$$
$$(j = 1, 2),$$

где ρ_1, ρ_2, ϑ_1 и ϑ_2 — новые переменные. Тогда, принимая во внимание (95.7), (95.8) и (95.9), легко найдем, что уравнения (95.6) примут вид

$$\frac{d\rho_j}{dt} + i\rho_j\frac{d\vartheta_j}{dt} = i\lambda_j\rho_j + \sum A_j^{(m_1, m_2, n_1, n_2)}\rho_1^{m_1+m_2}\rho_2^{n_1+n_2} + \\ + e^{-i\vartheta_j}\Phi_j(t, \rho_1 e^{i\vartheta_1}, \ldots, \rho_2 e^{-i\vartheta_1}),$$

$$\frac{d\rho_j}{dt} - i\rho_j\frac{d\vartheta_j}{dt} = -i\lambda_j\rho_j + \sum \overline{A}_j^{(m_1, m_2, n_1, n_2)}\rho_1^{m_1+m_2}\rho_2^{n_1+n_2} + \\ + e^{i\vartheta_j}\Psi_j(t, \rho_1 e^{i\vartheta_1}, \ldots, \rho_2 e^{-i\vartheta_2})$$

$$(j = 1, 2;\ m_1 + m_2 + n_1 + n_2 = 3, 5, \ldots, N).$$

Полагая

$$a_j^{(m_1, m_2, n_1, n_2)} = \operatorname{Re} A_j^{(m_1, m_2, n_1, n_2)}, \quad b_j^{(m_1, m_2, n_1, n_2)} = \operatorname{Im} A_j^{(m_1, m_2, n_1, n_2)}$$

и выделяя вещественные и мнимые части, получим две группы уравнений

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\rho_j}{dt} = \sum a_j^{(m_1, m_2, n_1, n_2)}\rho_1^{m_1+m_2}\rho_2^{n_1+n_2} + R_j(t, \vartheta_1, \vartheta_2, \rho_1, \rho_2) \\ &\qquad (j = 1, 2;\ m_1 + m_2 + n_1 + n_2 = 3, 5, \ldots, N) \\ &\text{и} \\ &\rho_j\frac{d\vartheta_j}{dt} = \rho_j\lambda_j + \sum b_j^{(m_1, m_2, n_1, n_2)}\rho_1^{m_1+m_2}\rho_2^{n_1+n_2} + \theta_j(t, \vartheta_1, \vartheta_2, \rho_1, \rho_2) \\ &\qquad (j = 1, 2;\ m_1 + m_2 + n_1 + n_2 = 3, 5, \ldots, N). \end{aligned}\right\} \tag{95.16}$$

Здесь функции R_j, θ_j, очевидно, таковы, что при всех $t \geqslant 0$, при всех значениях ϑ_1, ϑ_2 и при достаточно малых значениях ρ_1 и ρ_2 выполняются неравенства

$$\left.\begin{aligned} |R_j(t, \vartheta_1, \vartheta_2, \rho_1, \rho_2)| &< C\{|\rho_1| + |\rho_2|^{N+1}, \\ |\theta_j(t, \vartheta_1, \vartheta_2, \rho_1, \rho_2)| &< C\{|\rho_1| + |\rho_2|^{N+1}, \end{aligned}\right\} \tag{95.17}$$

где C — положительная постоянная.

Если невозмущенное движение $\rho_1 = \rho_2 = 0$ для уравнений (95.16), в которых ϑ_1 и ϑ_2 рассматриваются как произвольные функции времени, устойчиво, асимптотически устойчиво или неустойчиво при любом выборе функций R_j, удовлетворяющих условиям (95.17), то по характеру преобразования (95.15) то же самое будет иметь место и для невозмущенного движения $x_1 = y_1 = x_2 = y_2 = 0$ уравнений (95.3) при любом выборе функций φ_j и ψ_j, удовлетворяющих условиям (95.4). Справедливо, очевидно, и обратное соотношение между системами (95.3) и (95.16). Поэтому задача сводится к исследованию на устойчивость системы второго порядка (95.16).

Обращаясь к последней, замечаем, что она представляет некоторый частный случай задачи, рассмотренной в предыдущем параграфе, и для решения ее мы можем воспользоваться полученными в этом параграфе результатами. Запишем с этой целью уравнения (95.16) в виде

$$\frac{d\rho_j}{dt} = R_j^{(m)}(\rho_1, \rho_2) + R_j^{(m+2)}(\rho_1, \rho_2) + \ldots + R_j^{(N)}(\rho_1, \rho_2) + \\ + R_j(t, \vartheta_1, \vartheta_2, \rho_1, \rho_2) \qquad (95.18)$$
$$(j = 1, 2),$$

где $m \geqslant 3$ (m — нечетное), а $R_j^{(k)}$ — формы k-го порядка переменных ρ_1 и ρ_2. При этом, принимая во внимание (95.9), мы можем писать:

$$R_1^{(m)} = A_m\rho_1^m + A_{m-2}\rho_1^{m-2}\rho_2^2 + \ldots + A_1\rho_1\rho_2^{m-1},$$
$$R_2^{(m)} = B_m\rho_2^m + B_{m-2}\rho_2^{m-2}\rho_1^2 + \ldots + B_1\rho_2\rho_1^{m-1},$$

где A_s и B_s — некоторые постоянные.

Составляя далее формы $P(\rho_1, \rho_2)$ и $G(\rho_1, \rho_2)$ (§ 94), будем иметь:

$$P(\rho_1, \rho_2) = \rho_1 R_1^{(m)} + \rho_2 R_2^{(m)} = \\ = A_m\rho_1^{m+1} + (A_{m-2} + B_1)\rho_1^{m-1}\rho_2^2 + \ldots + B_m\rho_2^{m+1},$$
$$G(\rho_1, \rho_2) = \rho_1 R_2^{(m)} - \rho_2 R_1^{(m)} = \\ = \rho_1\rho_2\left[(B_1 - A_m)\rho_1^{m-1} + (B_3 - A_{m-2})\rho_1^{m-3}\rho_2^2 + \ldots + (B_m - A_1)\rho_2^{m-1}\right].$$

В рассматриваемом случае G никогда не будет знакоопределенной. При этом уравнение $G = 0$ выполняется для осей координат $\rho_1 = \rho_2 = 0$ и прямых, определяемых уравнением

$$G^*(\rho_1, \rho_2) = (B_1 - A_m)\rho_1^{m-1} + (B_3 - A_{m-2})\rho_1^{m-3}\rho_2^2 + \ldots + \\ + (B_m - A_1)\rho_2^{m-1} = 0. \qquad (95.19)$$

На осях координат $\rho_1 = 0$ и $\rho_2 = 0$ форма P принимает соответственно значения $B_m\rho_2^{m+1}$ и $A_m\rho_1^{m+1}$. Поэтому на основании теоремы

предыдущего параграфа невозмущенное движение будет неустойчиво, если хотя бы одна из величин A_m, B_m положительна. Если $A_m \leqslant 0$ и $B_m \leqslant 0$, то невозмущенное движение будет неустойчиво, если хотя бы на одной из вещественных прямых, определяемых уравнением (95.19), форма P может принимать положительные значения. Напротив, если на каждой такой вещественной прямой форма P может принимать только отрицательные значения и если при этом $A_m < 0$, $B_m < 0$, то невозмущенное движение устойчиво асимптотически. Если форма P обращается в нуль либо при $\rho_1 = 0$ (т. е. $B_m = 0$), либо при $\rho_2 = 0$ (т. е. $A_m = 0$), либо на одной из прямых (95.19) и если при этом ни на одной из прямых (95.19) или осях координат она не может принимать положительных значений, то решение задачи требует рассмотрения в уравнениях (95.18) членов порядков более высоких, чем m. На этих исключительных случаях мы здесь не останавливаемся.

В тех случаях, которые мы сейчас рассмотрели, задача решается членами наинизшего порядка в уравнениях (95.18). Следовательно, коэффициенты $A_j^{(m_1, m_2, n_1, n_2)}$ нужно вычислять до тех пор, пока мы не придем к некоторому порядку m, для которого не все величины $\operatorname{Re}\left(A_1^{(m_1, m_2, n_1, n_2)}\right)$ равны нулю при $m_1 + m_2 + n_1 + n_2 = m$. Может случиться, что все величины $\operatorname{Re}\left(A_j^{(m_1, m_2, n_1, n_2)}\right)$ обращаются в нуль, как бы велико ни было число $m_1 + m_2 + n_1 + n_2$. Этот исключительный случай, при котором задача устойчивости вообще не решается конечным числом членов, как и все другие аналогичные случаи, здесь не рассматривается.

Таким образом, мы получили решение задачи устойчивости для рассматриваемого критического случая, когда характеристическое уравнение первого приближения имеет две пары чисто мнимых корней [1]).

Пример. Пусть предложена система четвертого порядка

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda^2 x = f\left[x,\ y,\ \left(\frac{dx}{dt}\right)^2,\ \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right] + a\left(\frac{dx}{dt}\right)^3,$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 x = F\left[x,\ y,\ \left(\frac{dx}{dt}\right)^2,\ \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right] + b\left(\frac{dy}{dt}\right)^3,$$

где a и b — постоянные, а f и F — аналитические функции своих аргументов, разложения которых по степеням x, y, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$

---

[1]) Этот критический случай рассмотрен впервые в работе Г. В. Каменкова, цитированной на стр. 411, который также приводит задачу к случаю двух нулевых корней. Однако предложенный Г. В. Каменковым метод решения задачи требует проведения большого числа предварительных преобразований, каждое из которых приводит к очень громоздким вычислениям.

начинаются членами не ниже третьего порядка. Полагая

$$x_1 = x - \frac{i}{\lambda}\frac{dx}{dt}, \quad y_1 = x + \frac{i}{\lambda}\frac{dx}{dt},$$
$$x_2 = y - \frac{i}{\omega}\frac{dy}{dt}, \quad y_2 = y + \frac{1}{\omega}\frac{dy}{dt},$$

приведем данную систему к виду

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= i\lambda x_1 + i\varphi_1(x_1, y_1, x_2, y_2) + \frac{a\lambda^3}{8\omega}(y_1 - x_1)^3,\\
\frac{dx_2}{dt} &= i\omega x_2 + i\varphi_2(x_1, y_1, x_2, y_2) + \frac{b\omega^3}{8\lambda}(y_2 - x_2)^3,\\
\frac{dy_1}{dt} &= -i\lambda y_1 - i\varphi_1(y_1, x_1, y_2, x_2) + \frac{a\lambda^3}{8\omega}(x_1 - y_1)^3,\\
\frac{dy_2}{dt} &= -i\omega y_2 - i\varphi_2(y_1, x_1, y_2, x_2) + \frac{b\omega^3}{8\lambda}(x_2 - y_2)^3,
\end{aligned}\right\} \tag{95.20}$$

где φ_1 и φ_2 — *вещественные* аналитические функции своих аргументов, разложения которых начинаются членами не ниже третьего порядка. Делаем далее подстановку (95.5), в которой можно положить $u_j^{(2)} = v_j^{(2)} = 0$, так как правые части уравнений (95.20) не содержат членов второго порядка. Таким образом, полагаем:

$$\left.\begin{aligned}
x_j &= u_j + u_j^{(3)}(u_1, v_1, u_2, v_2) + \ldots,\\
y_j &= v_j + v_j^{(3)}(u_1, v_1, u_2, v_2) + \ldots
\end{aligned}\right\} \tag{95.21}$$
$$(j = 1, 2),$$

где

$$\left.\begin{aligned}
u_j^{(3)} &= \sum B_j^{(m_1, m_2, n_1, n_2)} u_1^{m_1} v_1^{m_2} u_2^{n_1} v_2^{n_2},\\
v_j^{(3)} &= \sum \overline{B}_j^{(m_1, m_2, n_1, n_2)} v_1^{m_1} u_1^{m_2} v_2^{n_1} u_2^{n_2}\\
&(j = 1,\ 2;\ m_1 + m_2 + n_1 + n_2 = 3).
\end{aligned}\right\} \tag{95.22}$$

Подстановку (95.21) подбираем таким образом, чтобы уравнения приняли вид (95.6) с соблюдением условий (95.9), так что можно положить:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{du_1}{dt} &= i\lambda u_1 + \alpha_1 u_1^2 v_1 + \beta_1 u_1 u_2 v_2 + \ldots,\\
\frac{du_2}{dt} &= i\omega u_2 + \alpha_2 u_2^2 v_2 + \beta_2 u_1 u_2 v_1 + \ldots,\\
\frac{dv_1}{dt} &= -i\lambda v_1 + \overline{\alpha}_1 v_1^2 u_1 + \overline{\beta}_1 v_1 v_2 u_2 + \ldots,\\
\frac{dv_2}{dt} &= -i\omega v_2 + \overline{\alpha}_2 v_2^2 u_2 + \overline{\beta}_2 v_1 v_2 u_1 + \ldots,
\end{aligned}\right\} \tag{95.23}$$

где α_1, α_2, β_1, β_2 — подлежащие определению постоянные и ненаписанные члены имеют порядок не ниже четвертого.

Подставляя в первое уравнение (95.20) вместо x_1, y_1, x_2, y_2 их значения из (95.21), заменяя при этом производные $\frac{du_j}{dt}$, $\frac{dv_j}{dt}$ их выражениями (95.23) и приравнивая члены третьего порядка, получим:

$$\alpha_1 u_1^2 v_1 + \beta_1 u_1 u_2 v_2 + i\lambda u_1 \frac{\partial u_1^{(3)}}{\partial u_1} - i\lambda v_1 \frac{\partial u_1^{(3)}}{\partial v_1} + i\omega u_2 \frac{\partial u_1^{(3)}}{\partial u_2} - i\omega v_2 \frac{\partial u_1^{(3)}}{\partial v_2} =$$
$$= i\lambda u_1^{(3)} + i\varphi_1^{(3)}(u_1, v_1, u_2, v_2) + \frac{a\lambda^3}{8\omega}(v_1 - u_1)^3, \quad (95.24)$$

где $\varphi_1^{(3)}$ — совокупность членов третьего порядка в функции φ_1. Приравнивая в обеих частях (95.24) коэффициенты при $u_1^2 v_1$ и $u_1 u_2 v_2$, учитывая при этом (95.22), найдем:

$$\alpha_1 + (2i\lambda - i\lambda) B_1^{(2,1,0,0)} = i\lambda B_1^{(2,1,0,0)} + ia_1 + \frac{3a\lambda^3}{8\omega},$$
$$\beta_1 + (i\lambda + i\omega - i\omega) B_1^{(1,0,1,1)} = i\lambda B_1^{(1,0,1,1)} + ib_1,$$

или

$$\alpha_1 = \frac{3a\lambda^3}{8\omega} + ia_1, \quad \beta_1 = ib_1.$$

Здесь a_1 и b_1 — вещественные числа, представляющие собой коэффициенты при $u_1^2 v_1$ и $u_1 u_2 v_2$ в функции $\varphi_1(u_1, v_1, u_2, v_2)$. Аналогичным образом находим:

$$\alpha_2 = \frac{3b\omega^3}{8\lambda} + ia_2, \quad \beta_2 = ib_2,$$

где a_2 и b_2 — коэффициенты при $u_2^2 v_2$ и $u_1 u_2 v_1$ в функции $\varphi_2(u_1, v_1, u_2, v_2)$.

Делая теперь подстановку (95.15), окончательно найдем:

$$\frac{d\rho_1}{dt} = \frac{3a\lambda^3}{8\omega}\rho_1^3 + \ldots, \quad \frac{d\rho_2}{dt} = \frac{3b\omega^3}{8\lambda}\rho_2^3 + \ldots,$$

где ненаписанные члены имеют порядок не ниже четвертого. Отсюда сразу следует, что если хотя бы один из коэффициентов a или b положителен, то невозмущенное движение неустойчиво. Если же оба коэффициента отрицательны, то невозмущенное движение устойчиво и притом асимптотически.

§ 96. Критический случай одного нулевого и пары чисто мнимых корней для установившихся движений [1]).

Рассмотрим теперь систему $(n+3)$-го порядка с постоянными коэффициентами, для которой характеристическое уравнение первого

---

[1]) См. Малкин И. Г., Решение некоторых критических случаев задачи устойчивости движения. ПММ, т. XV, вып. 5, 1951.

Эта задача также впервые рассматривалась Г. В. Каменковым. Предлагаемый ниже метод отличается от метода Г. В. Каменкова и приводит к значительно более простым вычислениям.

приближения имеет один нулевой корень, два чисто мнимых корня $\pm i\lambda$ и n корней с отрицательными вещественными частями.

Подходящим выбором переменных рассматриваемые уравнения могут быть представлены в следующем виде:

$$\frac{dx}{dt} = X(x, x_1, y_1, z_1, \ldots, z_n),$$

$$\frac{dx_1}{dt} = i\lambda x_1 + X_1(x, x_1, y_1, z_1, \ldots, z_n),$$

$$\frac{dy_1}{dt} = -i\lambda y_1 + Y_1(x, x_1, y_1, z_1, \ldots, z_n),$$

$$\frac{dz_s}{dt} = p_{s1}z_1 + \ldots + p_{sn}z_n + p_s x + q_s x_1 + r_s y_1 + \\ + Z_s(x, x_1, y_1, z_1, \ldots, z_n) \\ (s = 1, 2, \ldots, n),$$

где разложения функций X, X_1, Y_1, Z_s начинаются членами не ниже второго порядка, а коэффициенты p_{sj} таковы, что уравнение

$$|p_{sj} - \delta_{sj}\rho| = 0$$

имеет корни только с отрицательными вещественными частями.

Пользуясь методом § 93, мы можем привести задачу к исследованию системы третьего порядка вида

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= X^{(2)}(x, x_1, y_1) + \ldots + X^{(N)}(x, x_1, y_1) + \varphi(t, x, x_1, y_1), \\ \frac{dx_1}{dt} &= i\lambda x_1 + X_1^{(2)}(x, x_1, y_1) + \ldots + X_1^{(N)}(x, x_1, y_1) + \\ &\qquad + \varphi_1(t, x, x_1, y_1), \\ \frac{dy_1}{dt} &= -i\lambda y_1 + Y_1^{(2)}(x, x_1, y_1) + \ldots + Y_1^{(N)}(x, x_1, y_1) + \\ &\qquad + \psi_1(t, x, x_1, y_1), \end{aligned}\right\} \quad (96.1)$$

где $X^{(k)}$, $X_1^{(k)}$ и $Y_1^{(k)}$ — формы k-го порядка переменных x, x_1, y_1 а φ, φ_1 и ψ_1 — зависящие от t аналитические функции переменных x, x_1, y_1, удовлетворяющие при всех $t \geqslant 0$ в окрестности начала координат неравенствам

$$\left.\begin{aligned} |\varphi(t, x, x_1, y_1)| &< A\{|x| + |x_1| + |y_1|\}^{N+1}, \\ |\varphi_1(t, x, x_1, y_1)| &< A\{|x| + |x_1| + |y_1|\}^{N+1}, \\ |\psi_1(t, x, x_1, y_1)| &< A\{|x| + |x_1| + |y_1|\}^{N+1}. \end{aligned}\right\} \quad (96.2)$$

При этом переменные x_1 и y_1 являются комплексно сопряженными, так что третье уравнение (96.1) может быть получено из второго

заменой i на $-i$, x_1 на y_1 и y_1 на x_1. Первое уравнение (96.1) при такой замене не изменяется.

Преобразуем теперь уравнения (96.1) при помощи подстановки

$$\left.\begin{aligned} x &= u + u^{(2)}(u, u_1, v_1) + \ldots + u^{(N)}(u, u_1, v_1), \\ x_1 &= u_1 + u_1^{(2)}(u, u_1, v_1) + \ldots + u_1^{(N)}(u, u_1, v_1), \\ y_1 &= v_1 + v_1^{(2)}(u, u_1, v_1) + \ldots + v_1^{(N)}(u, u_1, v_1), \end{aligned}\right\} \tag{96.3}$$

где $u^{(k)}$, $u_1^{(k)}$, $v_1^{(k)}$ — подлежащие определению формы k-го порядка новых переменных u, u_1, v_1. Эти формы мы постараемся подобрать таким образом, чтобы преобразованные уравнения приняли вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= U^{(2)}(u, u_1, v_1) + \ldots + U^{(N)}(u, u_1, v_1) + U(t, u, u_1, v_1), \\ \frac{du_1}{dt} &= i\lambda u_1 + U_1^{(2)}(u, u_1, v_1) + \ldots + U_1^{(N)}(u, u_1, v_1) + \\ &\qquad + U_1(t, u, u_1, v_1), \\ \frac{dv_1}{dt} &= -i\lambda v_1 + \overline{U}_1^{(2)}(u, v_1, u_1) + \ldots + \overline{U}_1^{(N)}(u, v_1, u_1) + \\ &\qquad + V_1(t, u, u_1, v_1). \end{aligned}\right\} \tag{96.4}$$

Здесь $U^{(k)}$, $U_1^{(k)}$, $\overline{U}_1^{(k)}$ — формы k-го порядка переменных u, u_1, v_1, причем формы $\overline{U}_1^{(k)}$ получаются из $U_1^{(k)}$ заменой i на $-i$, u_1 на v_1 и v_1 на u_1. Кроме того, формы $U^{(k)}$ и $U_1^{(k)}$ таковы, что если ввести обозначения

$$\left.\begin{aligned} U^{(k)} &= \sum A^{(n, m_1, m_2)} u^n u_1^{m_1} v_1^{m_2}, \\ U_1^{(k)} &= \sum A_1^{(n, m_1, m_2)} u^n u_1^{m_1} v_1^{m_2} \\ &\qquad (n + m_1 + m_2 = k), \end{aligned}\right\} \tag{96.5}$$

то для коэффициентов $A^{(n, m_1, m_2)}$ и $A_1^{(n, m_1, m_2)}$ должны выполняться соотношения

$$\left.\begin{aligned} A^{(n, m_1, m_2)} &= 0 \quad \text{при} \quad m_1 \neq m_2, \\ A_1^{(n, m_1, m_2)} &= 0 \quad \text{при} \quad m_1 \neq m_2 + 1. \end{aligned}\right\} \tag{96.6}$$

Покажем, что формы $u^{(k)}$, $u_1^{(k)}$ и $v_1^{(k)}$ в преобразовании (96.3) можно действительно выбрать так, чтобы для уравнений (96.4) выполнялись указанные условия. Положим с этой целью

$$\left.\begin{aligned} u^{(k)} &= \sum B^{(n, m_1, m_2)} u^n u_1^{m_1} v_1^{m_2}, \\ u_1^{(k)} &= \sum B_1^{(n, m_1, m_2)} u^n u_1^{m_1} v_1^{m_2} \\ &\qquad (n + m_1 + m_2 = k). \end{aligned}\right\} \tag{96.7}$$

Так как второе уравнение (96.4) должно перейти в третье (по крайней мере, с точностью до величин N-го порядка) при замене i

на $-i$, u_1 на v_1 и v_1 на u_1, то должно быть:

$$v_1^{(k)} = \sum \bar{B}_1^{(n,\, m_1,\, m_2)} u^n v_1^{m_1} u_1^{m_2} \qquad (n + m_1 + m_2 = k). \tag{96.8}$$

При таком выборе форм $v_1^{(k)}$ третье уравнение (96.4) будет нужного вида, если только этим свойством будут обладать и первые два уравнения. Остается, таким образом, определить формы $u^{(k)}$ и $u_1^{(k)}$. Подставим с этой целью в первые два уравнения (96.1) вместо x, x_1, y_1 их выражения (96.3). Тогда, принимая во внимание (96.4), получим:

$$\left.\begin{aligned}
&\left(1 + \sum_{\alpha=2}^{N} \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial u}\right)(U^{(2)} + \ldots) + \sum_{\alpha=2}^{N} \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial u_1}(i\lambda u_1 + U_1^{(2)} + \ldots) + \\
&\qquad + \sum_{\alpha=2}^{N} \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial v_1}(-i\lambda v_1 + \bar{U}_1^{(2)} + \ldots) = \\
&\qquad = X^{(2)}(u + \ldots,\ u_1 + \ldots,\ v_1 + \ldots) + \ldots, \\
&\left(1 + \sum_{\alpha=2}^{N} \frac{\partial u_1^{(\alpha)}}{\partial u_1}\right)(i\lambda u_1 + U_1^{(2)} + \ldots) + \\
&+ \sum_{\alpha=2}^{N} \frac{\partial u_1^{(\alpha)}}{\partial v_1}(-i\lambda v_1 + \bar{U}_1^{(2)} + \ldots) + \sum_{\alpha=2}^{N} \frac{\partial u_1^{(\alpha)}}{\partial u}(U^{(2)} + \ldots) = \\
&\qquad = i\lambda(u_1 + U_1^{(2)} + \ldots) + \\
&\qquad + X_1^{(2)}(u + \ldots,\ u_1 + \ldots,\ v_1 + \ldots) + \ldots
\end{aligned}\right\} \tag{96.9}$$

Задавшись каким-нибудь числом $k < N$, приравняем в обеих частях полученных уравнений коэффициенты при $u^n u_1^{m_1} v_1^{m_2}$, где $n + m_1 + m_2 = k$. Будем на основании (96.6) и (96.7) иметь:

$$A^{(n,\, m_1,\, m_2)} + (m_1 - m_2)\, i\lambda B^{(n,\, m_1,\, m_2)} = C^{(n,\, m_1,\, m_2)},$$

$$A_1^{(n,\, m_1,\, m_2)} + (m_1 - m_2 - 1)\, i\lambda B_1^{(n,\, m_1,\, m_2)} = C_1^{(n,\, m_1,\, m_2)}.$$

Здесь $C^{(n,\, m_1,\, m_2)}$, $C_1^{(n,\, m_1,\, m_2)}$ — целые рациональные функции от тех $A^{(p,\, q_1,\, q_2)}$, $A_1^{(p,\, q_1,\, q_2)}$, $B^{(p,\, q_1,\, q_2)}$, $B_1^{(p,\, q_1,\, q_2)}$ и комплексно сопряженных с ними величин, для которых $p + q_1 + q_2 < k$. Допустим, что все указанные величины уже вычислены и, следовательно, величины $C^{(n,\, m_1,\, m_2)}$, $C_1^{(n,\, m_1,\, m_2)}$ известны. Тогда при $m_1 \neq m_2$ мы можем положить:

$$A^{(n,\, m_1,\, m_2)} = 0, \quad B^{(n,\, m_1,\, m_2)} = \frac{1}{(m_1 - m_2)\, i\lambda} C^{(n,\, m_1,\, m_2)},$$

а при $m_1 = m_2$ получим, что

$$A^{(n,\, m_1,\, m_2)} = C^{(n,\, m_1,\, m_2)},$$

а коэффициент $B^{(n,\, m_1,\, m_2)}$ остается произвольным. Мы можем положить его равным нулю или любой другой величине. Далее, при $m_1 \neq m_2 + 1$ мы можем положить:

$$A_1^{(n,\, m_1,\, m_2)} = 0, \quad B_1^{(n,\, m_1,\, m_2)} = \frac{C_1^{(n,\, m_1,\, m_2)}}{(m_1 - m_2 - 1)\, i\lambda}.$$

Если $m_1 = m_2 + 1$, то

$$A_1^{(n,\, m_1,\, m_2)} = C_1^{(n,\, m_1,\, m_2)},$$

а коэффициент $B_1^{(n,\, m_1,\, m_2)}$ может быть выбран совершенно произвольно.

Так как при $n + m_1 + m_2 = 2$ величины $C^{(n,\, m_1,\, m_2)}$ и $C_1^{(n,\, m_1,\, m_2)}$ известны, то отсюда следует, что действительно существует преобразование (96.3), обладающее всеми указанными для него свойствами. При этом легко видеть, что все коэффициенты $A^{(n,\, m_1,\, m_2)}$ будут вещественными. Действительно, первое уравнение (96.1) не изменяется при замене i на $-i$, x_1 на y_1 и y_1 на x_1. Так как для преобразования (96.3) выполняется (96.8), то первое уравнение (96.4) не изменится при замене i на $-i$, u_1 на v_1 и v_1 на u_1. Но так как $A^{(n,\, m_1,\, m_2)} = 0$ при $m_1 \neq m_2$, то первое уравнение (96.4) не меняется при замене u_1 на v_1 и v_1 на u_1. Следовательно, это уравнение не меняется при замене i на $-i$, откуда и вытекает вещественность коэффициентов $A^{(n,\, m_1,\, m_2)}$. Определение преобразования (96.3) приводится, как мы видим, к весьма простым вычислениям, сводящимся к развертыванию правых и левых частей уравнений (96.9).

Допустим, что указанное преобразование выполнено. Тогда функция $U(t,\, u,\, u_1,\, v_1)$ в уравнениях (96.4) будет, очевидно, удовлетворять неравенству

$$|U(t,\, u,\, u_1,\, v_1)| < B\{|u| + |u_1| + |v_1|\}^{N+1}, \tag{96.10}$$

где B — положительная постоянная. Таким же точно неравенствам будут удовлетворять и функции U_1 и V_1. Положим теперь:

$$u_1 = \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta), \qquad v_1 = \rho(\cos\vartheta - i\sin\vartheta). \tag{96.11}$$

Тогда получим:

$$\frac{du}{dt} = \sum_{n+2m=2}^{N} A^{(n,\, m,\, m)} u^n \rho^{2m} + U\left(t,\, u,\, \rho e^{i\vartheta},\, \rho e^{-i\vartheta}\right),$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho i \frac{d\vartheta}{dt} = i\lambda\rho + \sum_{n+2m=1}^{N-1} A_1^{(n,\, m+1,\, m)} u^n \rho^{2m+1} + U_1(t,\, u,\, \rho e^{i\vartheta},\, \rho e^{-i\vartheta}),$$

$$\frac{d\rho}{dt} - \rho i \frac{d\vartheta}{dt} = -i\lambda\rho + \sum_{n+2m=1}^{N-1} \overline{A}_1^{(n,\, m+1,\, m)} u^n \rho^{2m+1} + U_1(t,\, u,\, \rho e^{i\vartheta},\, \rho e^{-i\vartheta}),$$

или, выделяя вещественные и мнимые части и учитывая, что коэффициенты $A^{(n,\ m,\ m)}$ вещественны, получим два уравнения:

$$\left.\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \sum_{n+2m=2}^{N} A^{(n,\ m,\ m)} u^n \rho^{2m} + U_*(t,\ \vartheta,\ \rho,\ u), \\ \frac{d\rho}{dt} &= \sum_{n+2m=1}^{N-1} a^{(n,\ m+1,\ m)} u^n \rho^{2m+1} + R(t,\ \vartheta,\ \rho,\ u) \end{aligned}\right\} \tag{96.12}$$

и уравнение

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \lambda + \sum_{n+2m=1}^{N-1} b^{(n,\ m+1,\ m)} u^n \rho^{2m} + \theta(t,\ \vartheta,\ \rho,\ u).$$

Здесь

$$a^{(n,\ m+1,\ m)} = \operatorname{Re}\left(A_1^{(n,\ m+1,\ m)}\right),$$
$$b^{(n,\ m+1,\ m)} = \operatorname{Im}\left(A_1^{(n,\ m+1,\ m)}\right),$$

и функции R, U_* при достаточно малых ρ и u и при всех значениях ϑ и $t \geqslant 0$ удовлетворяют условиям

$$\left.\begin{aligned} |U_*(t,\ \vartheta,\ \rho,\ u)| &< C\{|\rho| + |u|\}^{N+1}, \\ |R(t,\ \vartheta,\ \rho,\ u)| &< C\{|\rho| + |u|\}^{N+1}, \end{aligned}\right\} \tag{96.13}$$

где C — положительная постоянная.

Аналогичному условию удовлетворяет и функция $\theta(t,\ \vartheta,\ \rho)$.

Если невозмущенное движение $u = \rho = 0$ для уравнений (96.12), в которых ϑ рассматривается как произвольная функция времени, будет устойчиво или асимптотически устойчиво, или неустойчиво при любом выборе функций U_*, R, удовлетворяющих условиям (96.13), то невозмущенное движение $x = x_1 = y_1 = 0$ для системы (96.1) будет, соответственно, устойчиво или асимптотически устойчиво, или неустойчиво при любом выборе функций $\varphi(t,\ x,\ x_1,\ y_1)$, $\varphi_1(t,\ x,\ x_1,\ y_1)$, $\psi_1(t,\ x,\ x_1,\ y_1)$, удовлетворяющих условиям (96.2). Но тогда такие же обстоятельства будут иметь место и для невозмущенного движения $x = x_1 = y_1 = z_1 = \ldots = z_n = 0$ исходной системы.

Таким образом, задача сводится к исследованию на устойчивость системы (96.12). Последняя задача является частным случаем задачи, рассмотренной в § 94, и для ее решения мы запишем уравнения (96.12) в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= U_*^{(k)}(u,\ \rho) + \ldots + U_*^{(N)}(u,\ \rho) + U_*(t,\ \vartheta,\ u,\ \rho), \\ \frac{d\rho}{dt} &= R^{(k)}(u,\ \rho) + \ldots + R^{(N)}(u,\ \rho) + R(t,\ \vartheta,\ u,\ \rho), \end{aligned}\right\} \tag{96.14}$$

где $k \geqslant 2$ и $U_*^{(l)}$, $R^{(l)}$ — формы l-го порядка переменных u и ρ. При этом в силу (96.12) формы $U_*^{(l)}$ содержат только четные степени ρ, а формы $R^{(l)}$ — только нечетные степени ρ. Так что мы можем, в частности, писать:

$$R^{(k)}(u,\ 0) = 0.$$

Отсюда следует, что

$$G(u,\ \rho) = uR^{(k)} - \rho U_*^{(k)} = \rho G'(u,\ \rho),$$

где $G'(u, \rho)$—форма k-го порядка переменных u и ρ. Следовательно, форма G не является знакоопределенной. Невозмущенное движение будет неустойчиво, если существует хотя бы одна вещественная прямая $G(u, \rho) = 0$, на которой $P(u, \rho)$ может принимать положительные значения, и асимптотически устойчиво, если на всех вещественных прямых $G = 0$ форма P может принимать только отрицательные значения. Все это будет справедливо при любом выборе функций U_* и R, и число N можно будет положить равным k.

Случаи, когда ни на одной из вещественных прямых, определяемых уравнением $G = 0$, форма P не может принимать положительных значений, но на некоторых из них может обращаться в нуль, мы здесь не рассматриваем. Мы не рассматриваем также и тех исключительных случаев, когда все формы $U_*^{(k)}$, $R^{(k)}$, как бы велико ни было число k, обращаются тождественно в нуль, что будет иметь место тогда, когда все величины $A^{(n,\ m,\ m)}$ и $a^{(n,\ m+1,\ m)}$ равны нулю. В этих случаях задача устойчивости не решается, очевидно, конечным числом членов в уравнениях возмущенного движения.

§ 97. Критические случаи периодических движений. Приведение к установившимся движениям [1]).

Мы переходим к исследованию критических случаев периодических движений. Допустим, что предложена система $(n+k)$-го порядка с периодическими коэффициентами, для которой уравнения первого приближения имеют n характеристических показателей с отрицательными вещественными частями и k характеристических показателей с вещественными частями, равными нулю. Мы будем предполагать, что переменные выбраны таким образом, что первое приближение имеет постоянные коэффициенты и в нем разделены критические и некритические переменные. Таким образом, уравнения возмущенного

---

[1]) Малкин И. Г., Решение некоторых критических случаев задачи устойчивости движения. ПММ, т. XV, вып. 5, 1951.

движения имеют вид

$$\left.\begin{aligned}\frac{dy_j}{dt}&=q_{j1}y_1+\ldots+q_{jk}y_k+Y_j(t,\ y_1,\ \ldots,\ y_k,\ x_1,\ \ldots,\ x_n),\\ \frac{dx_s}{dt}&=p_{s1}x_1+\ldots+p_{sn}x_n+r_{s1}y_1+\ldots+r_{sk}y_k+\\ &\qquad+X_s(t,\ y_1,\ \ldots,\ y_k,\ x_1,\ \ldots,\ x_n)\end{aligned}\right\}\quad(97.1)$$

$$(j=1,\ 2,\ \ldots,\ k;\ s=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Здесь Y_j и X_s — аналитические функции переменных y_i и x_s, разложения которых начинаются членами не ниже второго порядка. Эти функции зависят также от t, по отношению к которому они периодичны с периодом ω. Коэффициенты q_{ji}, p_{si} и r_{si} являются постоянными, причем уравнение

$$|p_{si}-\delta_{si}|=0$$

имеет корни только с отрицательными вещественными частями, а все корни уравнения

$$|q_{ji}-\delta_{ji}|=0 \qquad (97.2)$$

имеют вещественные части, равные нулю.

Согласно теореме 2 § 93 ответ на задачу устойчивости для системы (97.1) совпадает с ответом на ту же задачу для системы k-го порядка

$$\frac{dy_i}{dt}=q_{i1}y_1+\ldots+q_{ik}y_k+Y_i(t,\ y_1,\ \ldots,\ y_k,\ u_1,\ \ldots,\ u_n), \qquad (97.3)$$

где $u_s(t,\ y_1,\ \ldots,\ y_k)$ — ряды по степеням $y_1,\ \ldots,\ y_k$ с периодическими коэффициентами, являющиеся формальными решениями уравнений с частными производными (93.3). Это будет, однако, справедливо лишь в том случае, когда задача устойчивости для системы (97.3) решается конечным числом членов.

Мы будем предполагать, что переменные y_i выбраны таким образом, что линейная часть уравнений (97.3) имеет каноническую форму, так что

$$q_{11}=\lambda_1,\ q_{22}=\lambda_2,\ \ldots,\ q_{kk}=\lambda_k,\ q_{21}=\alpha_1,\ q_{32}=\alpha_2,\ \ldots$$
$$\ldots,\ q_{n,\,n-1}=\alpha_{n-1},$$

а остальные коэффициенты q_{ij} равны нулю. Здесь λ_i — корни уравнения (97.2), которые, как уже указывалось, имеют вещественные части, равные нулю, а α_i — некоторые постоянные. Все эти постоянные равны нулю, если уравнение (97.2) не имеет кратных корней. Но если указанное уравнение имеет кратные корни, то некоторые из этих постоянных могут быть отличными от нуля и эти отличные от нуля величины α_i можно предполагать произвольными. Обозначим,

далее, через $Y_i^m(t, y_1, \ldots, y_k)$ формы с периодическими коэффициентами, представляющими собой члены k-го порядка в разложениях правых частей уравнений (97.3). Тогда, обозначая через N достаточно большое целое число, рассмотрим систему

$$\frac{dy_i}{dt} = \lambda_i y_i + \alpha_{i-1} y_{i-1} + Y_i^{(2)} + \ldots + Y_i^{(N)} + \varphi_i(t, y_1, \ldots, y_k) \quad (97.4)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, k;\ \alpha_0 = 0),$$

совпадающую до членов N-го порядка с системой (97.3). Если невозмущенное движение для системы (97.4) будет устойчиво или асимптотически устойчиво, или неустойчиво при любом выборе функций φ_i, удовлетворяющих при всех $t \geqslant 0$ в некоторой окрестности начала координат неравенствам

$$|\varphi_i(t, y_1, \ldots, y_k)| < A\{|y_1| + \ldots + |y_k|\}^{N+1}, \quad (97.5)$$

где A — некоторая постоянная, то и невозмущенное движение для системы (97.1) будет, соответственно, устойчиво или асимптотически устойчиво, или неустойчиво.

Для решения задачи устойчивости для системы (97.4) мы воспользуемся методом, который мы уже применяли в §§ 66 и 67 при решении частных случаев рассматриваемой сейчас задачи. Этот метод заключается в преобразовании уравнений (97.4) к такому виду, чтобы в нем члены до порядка N имели постоянные коэффициенты. Тогда задача сведется к уже рассмотренной задаче критических случаев установившихся движений.

Мы сейчас покажем, что указанное преобразование действительно может быть выполнено, если между корнями λ_i и периодом ω не существует никаких соотношений вида

$$\pm\sqrt{-1}(m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 + \ldots + m_k\lambda_k - \lambda_i) = \frac{2\pi}{\omega}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, k),$$

где $m_1, \ldots, m_k$ — произвольные целые положительные числа (некоторые из них могут равняться нулю), связанные соотношением $m_1 + \ldots + m_k \leqslant N$. Мы будем предполагать, что это условие выполнено и будем искать интересующее нас преобразование в виде

$$y_i = u_i + \sum A_i^{(m_1, m_2, \ldots, m_k)}(t)\, u_1^{m_1} u_2^{m_2} \ldots u_k^{m_k} \quad (97.6)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, k;\ 2 \leqslant m_1 + \ldots + m_k \leqslant N),$$

где $A_i^{(m_1, \ldots, m_k)}(t)$ — некоторые периодические функции t с периодом ω. Мы постараемся подобрать эти функции таким образом, чтобы

преобразованные уравнения приняли вид

$$\frac{du_i}{dt} = \lambda_i u_i + \alpha_{i-1} u_{i-1} + \\ + \sum a_i^{(m_1, \ldots, m_k)} u_1^{m_1} \ldots u_k^{m_k} + U_i(t, u_1, \ldots, u_k) \qquad (97.7)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, k;\ 2 \leqslant m_1 + \ldots + m_k \leqslant N),$$

где $a_i^{(m_1, \ldots, m_k)}$ — постоянные, а U_i — зависящие от t аналитические функции переменных $u_1, \ldots, u_k$, разложения которых начинаются членами не ниже $(N+1)$-го порядка. Эти функции, очевидно, удовлетворяют соотношениям вида (97.5).

Пусть $u_i^{(m)}(t, u_1, \ldots, u_k)$ обозначает совокупность членов m-го порядка в подстановке (97.6). Допустим, что все $u_i^{(s)}$, для которых $s < m$, и все $u_j^{(m)}$, для которых $j < i$, уже вычислены согласно вышеуказанным условиям. Тогда, подставляя в уравнения (97.4) вместо y_i их выражения (97.6), заменяя при этом производные $\frac{du_i}{dt}$ их выражениями (97.7) и приравнивая члены m-го порядка в левых и правых частях полученных таким образом уравнений, мы найдем для определения форм $u_i^{(m)}$ следующие уравнения:

$$\frac{\partial u_i^{(m)}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial u_i^{(m)}}{\partial u_j} (\lambda_j u_j + \alpha_{j-1} u_{j-1}) + \sum a_i^{(m_1 \ldots m_k)} u_1^{m_1} \ldots u_k^{m_k} = \\ = \lambda_i u_i^{(m)} + U_i^{(m)}(t, u_1, \ldots, u_k) \qquad (97.8)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, k;\ m_1 + \ldots + m_k = m;\ \alpha_0 = 0).$$

Здесь $U_i^{(m)}$ обозначает известные формы m-го порядка переменных $u_1, \ldots, u_k$, коэффициенты которых являются периодическими функциями t, периода ω.

Приравнивая в уравнениях (97.8) подобные члены, мы получим для определения коэффициентов $A_i^{(m_1, \ldots, m_k)}(t)$ систему линейных неоднородных дифференциальных уравнений. При этом, если эти коэффициенты вычислять в определенном порядке (см. § 93, уравнения (93.13)), то для каждого из них получится уравнение вида

$$\frac{dA_i^{(m_1, \ldots, m_k)}}{dt} + (m_1\lambda_1 + \ldots + m_k\lambda_k - \lambda_i) A_i^{(m_1, \ldots, m_k)} = \\ = -a_i^{(m_1, \ldots, m_k)} + B_i^{(m_1, \ldots, m_k)}(t), \qquad (97.9)$$

где $B_i^{(m_1, \ldots, m_k)}$ являются линейными функциями уже вычисленных величин $A_j^{(n_1, \ldots, n_k)}$ с периодическими коэффициентами.

Допустим, что все входящие в $B_i^{(m_1, \ldots, m_k)}$ величины $A_j^{(n_1, \ldots, n_k)}$ уже вычислены и вышли периодическими. Тогда $B_i^{(m_1, \ldots, m_k)}$ будут известными периодическими функциями времени и уравнение (97.9) даст возможность вычислить коэффициент $A_i^{(m_1, \ldots, m_k)}$.

Для того чтобы этот коэффициент получился периодическим, необходимо, вообще говоря, подобрать постоянную $a_i^{(m_1, \ldots, m_k)}$. Мы положим

$$a_i^{(m_1, \ldots, m_k)} = \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} B_i^{(m_1, \ldots, m_k)} dt \text{ при } m_1\lambda_1 + \ldots + m_k\lambda_k - \lambda_i = 0.$$

При таком и только таком выборе постоянной $a_i^{(m_1, \ldots, m_k)}$ уравнение (97.9) при $m_1\lambda_1 + \ldots + m_k\lambda_k - \lambda_i = 0$ будет иметь периодическое решение, определяемое, очевидно, формулой

$$A_i^{(m_1, \ldots, m_k)} = \int B_i^{(m_1, \ldots, m_k)} dt.$$

Входящую сюда постоянную интегрирования можно выбрать по произволу. При $m_1\lambda_1 + \ldots + m_k\lambda_k - \lambda_i \neq 0$ уравнение (97.9) имеет периодическое решение при любом выборе постоянной $a_i^{(m_1, \ldots, m_k)}$. С целью упрощения (весьма существенного) получаемых после преобразования уравнений (97.7) мы будем полагать:

$$a_i^{(m_1, \ldots, m_k)} = 0 \quad \text{при} \quad m_1\lambda_1 + \ldots + m_k\lambda_k - \lambda_i \neq 0. \quad (97.10)$$

При таком выборе постоянной $a_i^{(m_1, \ldots, m_k)}$ уравнение (97.9), как было показано в § 67, имеет периодическое решение

$$A_i^{(m_1, \ldots, m_k)} = e^{at} \left\{ \frac{e^{a\omega}}{1 - e^{a\omega}} \int_0^{\omega} e^{-at} f(t)\, dt + \int_0^{t} e^{-at} f(t)\, dt \right\}, \quad (97.11)$$

где для краткости положено:

$$a = \lambda_i - m_1\lambda_1 - \ldots - m_k\lambda_k, \quad f(t) = B_i^{(m_1, \ldots, m_k)}(t).$$

Так как по условию a никогда не равняется $\pm \frac{2\pi}{\omega} \sqrt{-1}$, то знаменатель в решении (97.11) всегда отличен от нуля и это решение действительно существует. Благодаря тому же условию однородная часть уравнения не имеет периодического решения с периодом, соизмеримым с ω, вследствие чего уравнение (97.9) кроме решения (97.11) не имеет других периодических решений.

Таким путем можно последовательно определить коэффициенты $A_i^{(m_1, \ldots, m_k)}$ преобразования и одновременно с ними коэффициенты $a_i^{(m_1, \ldots, m_k)}$ преобразованных уравнений. Если теперь учесть, что каждая из величин λ_i либо равна нулю, либо является чисто мнимой и что в последнем случае какая-нибудь из величин λ_j равна $-\lambda_i$, то мы придем к заключению, что, по крайней мере, при нечетном m некоторые из величин $m_1\lambda_1 + \ldots + m_k\lambda_k - \lambda_i$ равны нулю. Следовательно, не все постоянные $a_i^{(m_1, \ldots, m_k)}$ равны нулю, если только не рассматривать тот особо исключительный случай, когда все интегралы

$$\int_0^{\omega} B_i^{(m_1, \ldots, m_k)}\, dt,$$

как бы велико ни было m, равны нулю. Исключая из рассмотрения указанный случай, как и все другие случаи, при которых задача устойчивости не решается конечным числом членов, мы приведем любой критический случай для периодических движений к аналогичному случаю для установившихся движений.

В частности, мы имеем возможность решить задачу устойчивости для критических случаев одного нулевого корня и пары чисто мнимых корней и двух пар чисто мнимых корней. Заметим, что в этих случаях в силу (97.10) уравнения (97.7) будут уже иметь вид, при котором задача устойчивости решается сразу, т. е. вид (95.6) в случае двух пар чисто мнимых корней и вид (96.4) в случае одного нулевого и пары чисто мнимых корней.

Пример. Пусть предложена система третьего порядка

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda^2 x = f\left(t,\ x,\ \left(\frac{dx}{dt}\right)^2,\ y\right) + \varphi(t)\left(\frac{dx}{dt}\right)^3,$$

$$\frac{dy}{dt} = F\left(t,\ x,\ \frac{dx}{dt},\ y\right)$$

с одним нулевым и парой чисто мнимых корней $\pm\lambda_i$. Здесь f и F — аналитические функции переменных x, $\frac{dx}{dt}$, y, разложения которых по степеням этих переменных начинаются членами не ниже третьего порядка, причем функция f содержит только четные степени $\frac{dx}{dt}$. Коэффициенты этих разложений, так же как и коэффициент $\varphi(t)$, являются периодическими функциями t, периода ω.

Полагая

$$x_1 = x - \frac{i}{\lambda}\frac{dx}{dt}, \qquad y_1 = x + \frac{i}{\lambda}\frac{dx}{dt},$$

приведем рассматриваемую систему к виду

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} &= F\left(t,\ \frac{x_1+y_1}{2},\ \frac{\lambda(y_1-x_1)}{2i},\ y\right),\\
\frac{dx_1}{dt} &= i\lambda x_1 - \frac{i}{\lambda} f\left(t,\ \frac{x_1+y_1}{2},\ \frac{\lambda^2(y_1-x_1)^2}{-4},\ y\right) + \\
&\qquad + \frac{\lambda^2}{8}\varphi(t)(y_1-x_1)^3,\\
\frac{dy_1}{dt} &= -i\lambda y_1 + \frac{i}{\lambda} f\left(t,\ \frac{x_1+y_1}{2},\ \frac{\lambda^2(y_1-x_1)^2}{-4},\ y\right) - \\
&\qquad - \frac{\lambda^2}{8}\varphi(t)(y_1-x_1)^3.
\end{aligned}\right\} \tag{97.12}$$

Делаем, далее, подстановку (97.6):

$$\left.\begin{aligned}
y &= v + v^{(3)}(t,\ u_1,\ v_1,\ v) + \ldots,\\
x_1 &= u_1 + u_1^{(3)}(t,\ u_1,\ v_1,\ v) + \ldots,\\
y_1 &= v_1 + v_1^{(3)}(t,\ u_1,\ v_1,\ v) + \ldots,
\end{aligned}\right\} \tag{97.13}$$

где

$$v^{(k)} = \sum A^{(m_1,\ m_2,\ n)} u_1^{m_1} v_1^{m_2} v^n,$$

$$u_1^{(k)} = \sum A_1^{(m_1,\ m_2,\ n)} u_1^{m_1} v_1^{m_2} v^n,$$

$$v_1^{(k)} = \sum \bar{A}_1^{(m_1,\ m_2,\ n)} v_1^{m_1} u_1^{m_2} v^n$$

$$(m_1 + m_2 + n = k).$$

Мы не вводим в подстановку членов второго порядка, так как эти члены отсутствуют в уравнениях (97.12). Кроме того, мы учитываем, что переменные x_1 и y_1 являются комплексно сопряженными, и делаем поэтому такими же переменные u_1 и v_1.

Стараемся подобрать преобразование (97.13) таким образом, чтобы преобразованные уравнения приняли вид (97.7). В рассматриваемом случае, учитывая (97.10), мы должны получить:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dv}{dt} &= \alpha v^3 + \beta v u_1 v_1 + \ldots,\\
\frac{du_1}{dt} &= i\lambda u_1 + \alpha_1 u_1^2 v_1 + \beta_1 u_1 v^2 + \ldots,\\
\frac{dv_1}{dt} &= -i\lambda v_1 + \bar{\alpha}_1 v_1^2 u_1 + \bar{\beta}_1 v_1 v^2 + \ldots
\end{aligned}\right\} \tag{97.14}$$

Подставляя (97.13) и (97.14) в первые два уравнения (97.12) и приравнивая члены третьего порядка, получим:

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha v^3+\beta v u_1 v_1+\frac{\partial v^{(3)}}{\partial t}+i\lambda u_1\frac{\partial v^{(3)}}{\partial u_1}-i\lambda v_1\frac{\partial v^{(3)}}{\partial v_1}=\\
&\qquad\qquad=F^{(3)}\left(t,\ \frac{u_1+v_1}{2},\ \frac{\lambda(v_1-u_1)}{2i},\ v\right),\\
&\alpha_1 u_1^2 v_1+\beta_1 u_1 v^2+\frac{\partial u_1^{(3)}}{\partial t}+i\lambda\frac{\partial u_1^{(3)}}{\partial u_1}u_1-i\lambda\frac{\partial u_1^{(3)}}{\partial v_1}v_1=\\
&\quad=i\lambda u_1^{(3)}-\frac{i}{\lambda}f^{(3)}\left(t,\ \frac{u_1+v_1}{2},\ \frac{\lambda^2(v_1-u_1)^2}{-4},\ v\right)+\\
&\qquad\qquad+\frac{\lambda^2}{8}\varphi(t)(v_1-u_1)^3,
\end{aligned}\right\}\qquad(97.15)$$

где $f^{(3)}$ и $F^{(3)}$ — совокупность членов третьего порядка в f и F.

Если в первом из этих уравнений приравнять коэффициент при v^3, то получим:

$$\alpha+\frac{dA^{(0,\,0,\,3)}}{dt}=F^{(3)}(t,\ 0,\ 0,\ 1),$$

и условие периодичности $A^{(0,\,0,\,3)}$ дает:

$$\alpha=\frac{1}{\omega}\int_0^\omega F^{(3)}(t,\ 0,\ 0,\ 1)\,dt.\qquad(97.16)$$

Приравнивая во втором уравнении (97.15) коэффициенты при $u_1^2 v_1$ и $u_1 v^2$, будем иметь:

$$\alpha_1+\frac{dA_1^{(2,\,1,\,0)}}{dt}=-\frac{i}{\lambda}\psi(t)+\frac{3}{8}\lambda^2\varphi(t),$$

$$\beta_1+\frac{dA_1^{(102)}}{dt}=-\frac{i}{\lambda}\Psi(t),$$

где $\psi(t)$ и $\Psi(t)$ — некоторые вещественные функции t, представляющие собой коэффициенты при $u_1^2 v_1$ и $u_1 v^2$ в $f^{(3)}\left(t,\ \frac{u_1+v_1}{2},\ \frac{\lambda^2(v_1-u_1)^2}{-4},\ v\right)$. Отсюда находим:

$$\alpha_1=\frac{3\lambda^2}{8\omega}\int_0^\omega\varphi(t)\,dt-\frac{i}{\lambda\omega}\int_0^\omega\psi(t)\,dt,\ \beta_1=-\frac{i}{\lambda\omega}\int_0^\omega\Psi(t)\,dt.$$

Коэффициент β мы не подсчитываем, так как он нам не потребуется. Полагая теперь:

$$u_1=\rho e^{i\vartheta},\quad v_1=\rho e^{-i\vartheta},$$

мы получим из (97.14) следующую решающую задачу систему второго порядка с двумя нулевыми корнями:

$$\frac{dv}{dt} = \alpha v^3 + \beta v \rho^2 + \ldots,$$

$$\frac{d\rho}{dt} = a\rho^3 + \ldots$$

Здесь

$$a = \frac{3\lambda^2}{8\omega} \int_0^\omega \varphi(t)\, dt. \tag{97.17}$$

Для форм P и G имеем:

$$P(v, \rho) = \alpha v^4 + \beta v^2 \rho^2 + a\rho^4,$$

$$G(v, p) = v\rho[(a - \beta)\rho^2 - \alpha v^2].$$

Уравнение $G = 0$ дает две прямые $v = 0$, $\rho = 0$ и две прямые, определяемые уравнением

$$\alpha v^2 - (a - \beta)\rho^2 = 0, \tag{97.18}$$

если только $\alpha(a - \beta) > 0$. Отсюда находим, что невозмущенное движение будет неустойчиво, если хотя бы одна из величин α или a положительна. Если $\alpha < 0$ и $a < 0$, то, невозмущенное движение будет асимптотически устойчиво, если уравнение (97.18) не имеет вещественных решений, т. е. если $\alpha(a - \beta) < 0$. Но то же самое будет и в том случае, когда прямые (97.18) являются вещественными. Действительно, при условии (97.18) имеем:

$$P = a\rho^2 v^2 + a\rho^4,$$

и следовательно, если $a < 0$, то на обеих прямых (97.18) форма P отрицательна. Итак, принимая во внимание (97.16) и (97.17), находим, что невозмущенное движение будет асимптотически устойчиво, если обе величины

$$\int_0^\omega \varphi(t)\, dt, \quad \int_0^\omega F^{(3)}(t, 0, 0, 1)\, dt$$

отрицательны и неустойчиво, если хотя бы одна из них положительна. Если одна из этих величин отрицательна, а другая равна нулю, то требуется рассмотреть члены более высокого порядка в уравнениях (97.14).

ДОПОЛНЕНИЕ I.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ.

§ 98. Постановка задачи.

В 1949 году М. А. Айзерманом[1]) была поставлена следующая задача об устойчивости систем автоматического регулирования с одним нелинейным органом.

Допустим, что поведение системы автоматического регулирования описывается дифференциальными уравнениями вида

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + f(x_k), \\ \frac{dx_s}{dt} &= a_{s1}x_1 + \ldots + a_{sn}x_n \qquad (s = 2, \ldots, n), \end{aligned} \tag{98.1}$$

где a_{sj} — постоянные. Наряду с системой (98.1) рассмотрим линейную систему

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + hx_k, \\ \frac{dx_s}{dt} &= a_{s1}x_1 + \ldots + a_{sn}x_n \qquad (s = 2, \ldots, n) \end{aligned}$$

и допустим, что все корни ее характеристического уравнения имеют отрицательные вещественные части при всех значениях h, лежащих в интервале

$$\alpha < h < \beta. \tag{98.2}$$

Требуется узнать, будет ли при любом выборе однозначной и непрерывной функции $f(x_k)$, обращающейся в нуль при $x_k = 0$ и удовлетворяющей при всех значениях $x_k \neq 0$ неравенствам

$$\alpha x_k^2 < x_k f(x_k) < \beta x_k^2, \tag{98.3}$$

---

[1]) Айзерман М. А., Об одной проблеме, касающейся устойчивости «в большом» динамических систем, Успехи матем. наук, т. IV, вып. 4, 1949.

состояние равновесия $x_1 = \ldots = x_n = 0$ системы (98.1) асимптотически устойчивым при любых начальных возмущениях.

Указанная задача для систем второго порядка была досконально изучена в 1950 году Н. П. Еругиным[1]), который в рассмотренных им случаях дал положительный ответ на вопрос М. А. Айзермана. Его работы опирались на качественные методы исследования траекторий на плоскости переменных $\{x_1, x_2\}$. Эти исследования привлекли внимание многих математиков к данной проблеме и к другим задачам устойчивости в целом.

В 1952 году, уже после выхода первого издания настоящей монографии, И. Г. Малкиным была выполнена работа[2]), в которой также изучалась проблема М. А. Айзермана для систем второго порядка. Это исследование опиралось на второй метод Ляпунова. При этом автор нашел весьма простое доказательство, построив функцию Ляпунова в виде суммы квадратичной формы и интеграла с переменным верхним пределом. Такой метод впервые был предложен в работе А. И. Лурье и В. Н. Постникова[3]). Статья И. Г. Малкина, где этот метод был развит для данной задачи, послужила толчком для ряда работ, посвященных исследованию нелинейных проблем устойчивости в целом на базе функций Ляпунова.

Содержанием настоящего Дополнения I является упомянутая работа И. Г. Малкина с небольшими изменениями.

§ 99. Исследование системы второго порядка с нелинейностью, зависящей от первой координаты.

Рассмотрим сначала систему второго порядка

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + ay, \quad \frac{dy}{dt} = bx + cy. \tag{99.1}$$

Характеристическое уравнение соответствующей линейной системы

$$\frac{dx}{dt} = hx + ay, \quad \frac{dy}{dt} = bx + cy$$

имеет вид

$$\rho^2 - (h + c)\rho + hc - ab = 0.$$

---

[1]) Еругин Н. П., О некоторых вопросах устойчивости движения и качественной теории дифференциальных уравнений. ПММ, т. XIV, вып. 5, 1950; Качественное исследование интегральных кривых дифференциальных уравнений. ПММ, т. XIV, вып. 6, 1950.

[2]) Малкин И. Г., Об одной задаче теории устойчивости систем автоматического регулирования. ПММ, т. XVI, вып. 3, 1952.

[3]) Лурье А. И., Постников В. Н., К теории устойчивости регулируемых систем. ПММ, т. VIII, вып. 3, 1944.

Корни этого уравнения будут иметь отрицательные вещественные части при всех значениях h, удовлетворяющих условиям

$$h + c < 0, \quad hc - ab > 0.$$

Поэтому, полагая $f(x) = xh(x)$ $(x \neq 0)$, будем по условию задачи иметь:

$$h(x) + c < 0, \quad h(x)c - ab > 0 \quad (x \neq 0). \tag{99.2}$$

Мы будем, кроме того, предполагать, что при $|x| > \xi$, где ξ — достаточно большое число, выполняется неравенство

$$h(x)c - ab > \varepsilon \quad (|x| > \xi), \tag{99.3}$$

где ε — положительное число, которое может быть сколь угодно малым.

Рассмотрим функцию

$$2V = 2c\int_0^x f(x)\,dx + (c^2 - ab)x^2 - 2acxy + a^2y^2 \equiv$$

$$\equiv 2\int_0^x [h(x)c - ab]\,x\,dx + (cx - ay)^2.$$

На основании (99.2) эта функция определенно-положительна. Составляя производную этой функции по t в силу уравнений (99.1), найдем:

$$\frac{dV}{dt} = -abcx^2 + cf^2(x) + (c^2 - ab)xf(x).$$

Полученное выражение, обращаясь в нуль при $x = 0$, при $x \neq 0$ может принимать только отрицательные значения при любом выборе функции $f(x)$, удовлетворяющей условию (99.2). Действительно, при условии (99.2) и при $x \neq 0$ будем иметь:

$$\frac{dV}{dt} = (h + c)(ch - ab)x^2 < 0, \tag{99.4}$$

что и доказывает наше утверждение.

Таким образом, при любом выборе функции $f(x)$, удовлетворяющей условию (99.2), V будет являться для уравнений (99.1) функцией Ляпунова. Отсюда немедленно вытекает устойчивость равновесия $x = y = 0$. Легко видеть, что при этом устойчивость будет асимптотической, несмотря на то, что функция $\frac{dV}{dt}$ является не знакоопределенной, а только знакопостоянной. Действительно, $\frac{dV}{dt}$ обращается в нуль только при $x = 0$ и, следовательно, интегральные

кривые во всех точках, не лежащих на оси y, пересекают семейство замкнутых кривых $V = \text{const}$ снаружи внутрь. Но то же самое будет, очевидно, иметь место и в точках, лежащих на оси y, так как при $x = 0$, как это следует из уравнений (99.1), $\frac{dx}{dt} \neq 0$. Разница будет лишь в том, что на оси y интегральные кривые, входя внутрь кривых $V = \text{const}$, будут при этом их касаться[1]).

Итак, при любом выборе функции $f(x)$, удовлетворяющей условию (99.2), равновесие $x = y = 0$ асимптотически устойчиво. И это будет иметь место, каковы бы ни были начальные значения величин x и y, так как, учитывая (99.3), можно показать, что кривые $V(x, y) = c$ при любом c замкнуты. Это можно также показать и не обращаясь к геометрической интерпретации[2]).

Достаточно рассмотреть лишь случаи, когда в уравнениях (99.1) $a \neq 0$, так как при $a = 0$ асимптотическая устойчивость движения $x = y = 0$ в целом при условиях (99.2), (99.3) проверяется непосредственно последовательным интегрированием уравнений (99.1).

Действительно, при $|x| > \xi$ мы можем на основании (99.3) писать (знак плюс перед ξ берется при $x > \xi$ и знак минус — при $x < -\xi$):

$$2V = 2\int_0^{\pm\xi} [h(x)c - ab]\, x\, dx + 2\int_{\pm\xi}^{x} [h(x)c - ab]\, x\, dx + \\ + (cx - ay)^2 \geqslant 2\varepsilon(x^2 - \xi^2) + (cx - ay)^2. \quad (99.5)$$

Пусть $x(t)$, $y(t)$ — произвольное решение уравнений (99.1). На основании (99.4)

$$V(x(t), y(t)) \leqslant V_0 = V(x(t_0), y(t_0)).$$

Но так как при достаточно больших x выполняется (99.5), то отсюда следует, что при всех $t \geqslant t_0$ рассматриваемое решение остается внутри круга достаточно большого радиуса с центром в начале координат. Но тогда это решение с неограниченным возрастанием t либо стремится к какому-нибудь периодическому решению $x^*(t)$, $y^*(t)$, либо к единственной особой точке $x = y = 0$. Но первый из этих случаев невозможен. Действительно, функция $V(x^*(t), y^*(t))$ отлична от постоянной, так как в силу (99.4) ее производная может обратиться тождественно в нуль только, если $x^*(t) \equiv 0$, а последнее невозможно, если в уравнениях (99.1) величина $a \neq 0$. Но если функция $V(x^*(t), y^*(t))$ отлична от постоянной, то, будучи периодической, она вопреки (99.4) не может обладать знакопостоянной

---

[1]) См. Дополнение III.

[2]) См. также примечание к стр. 38.

производной. Таким образом, система (99.1) не имеет периодических решений и, следовательно, решение $x(t)$, $y(t)$ при $t \to \infty$ стремится к нулю. Поэтому для уравнений (99.1) ответ на вопрос, поставленный М. А. Айзерманом, всегда получается утвердительный.

§ 100. Исследование системы второго порядка с нелинейностью, зависящей от второй координаты.

Рассмотрим теперь систему

$$\frac{dx}{dt} = ax + f(y), \quad \frac{dy}{dt} = bx + cy. \tag{100.1}$$

Характеристическое уравнение соответствующей линейной системы имеет теперь вид

$$\rho^2 - (a + c)\rho + ac - bh = 0.$$

Следовательно, для того чтобы корни этого уравнения имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$a + c < 0, \quad ac - bh > 0.$$

Полагая $f(y) = yh(y)$, будем иметь

$$ac - bh(y) > 0. \tag{100.2}$$

Кроме того, предположим, что при достаточно больших значениях $|y|$ выполняется неравенство $ac - bh(y) > \varepsilon$.

В частности, если $b = 0$, то функция $f(y)$ ничем не ограничена. Но при $b = 0$, как это следует из (100.2), должно быть $a < 0$, $c < 0$ и непосредственное интегрирование системы (100.1) показывает, что равновесие асимптотически устойчиво при любом начальном возмущении и при любом выборе функции $f(y)$.

Допустим, что $b \neq 0$, и рассмотрим функцию

$$2V = -2b\int_0^y f(y)\,dy + b^2x^2 - 2abxy + (a + c)ay^2 \equiv$$

$$\equiv 2\int_0^y [ac - bh(y)]\,y\,dy + (bx - ay)^2.$$

На основании (100.2) функция V определенно-положительна. Составляя ее производную в силу уравнений (100.1), получим:

$$\frac{dV}{dt} = ac(a + c)y^2 - b(a + c)yf(y).$$