Е. ТИТЧМАРШ

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ

Е. ТИТЧМАРШ

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ

Перевод с английского
В. А. РОХЛИНА

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1980

22.161
Т 45
УДК 517.5

THE THEORY OF FUNCTIONS
BY
E. C. TITCHMARSH, M. A., F.R.S.

Savilian Professor of Geometry
in the University of Oxford
Second Edition [1939]

OXFORD UNIVERSITY PRESS

Титчмарш Е. **Теория функций**: Пер. с англ. — 2-е изд. перераб. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980.

Книга видного английского математика Е. Титчмарша, написанная в 30-е годы, была впервые издана на русском языке в 1951 г. Ее безусловно можно отнести к классическим сочинениям, и она до сих пор не потеряла своего значения.

Книга содержит много материала, не входящего в распространенные у нас учебники. Ее автор — блестящий аналитик и педагог — прекрасно излагает разнообразные темы аналитической теории функций, выпукло оттеняя ведущие идеи выкладок. В книге много примеров и задач.

Наряду с темами из комплексного анализа книга содержит изложение некоторых вопросов вещественного анализа (несобственные интегралы, теория меры и интегралы Лебега, ряды Фурье и др.). Она послужит ценным дополнением к существующей на русском языке учебной литературе по теории функций.

$Т \frac{20203-046}{053(02)-80}$ БЗ-14-30-80. 1702050000

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОТ ПЕРЕВОДЧИКА

Первое издание этой книги вышло в Англии в 1932 году, второе издание (несколько отличающееся от первого — см. предисловие автора ко второму изданию) — в 1939 году. В дальнейшем оно еще перепечатывалось (с незначительными исправлениями). Русский перевод был сделан со второго английского издания и вышел в 1951 году. Для настоящего второго издания перевода его текст был заново просмотрен и сверен с английским оригиналом.

Книга написана крупным математиком и, как увидит читатель, искусным педагогом. Ее назначение указано автором в предисловии к первому изданию: по замыслу автора она должна была «перекинуть мост от элементарных учебников к систематическим курсам теории функций». Предполагаемая подготовка читателя — знаменитый «Курс чистой математики» Харди, который действительно является элементарным учебником. Вводная глава I содержит разнообразные сведения, нужные для дальнейшего, но отсутствующие в учебнике Харди. Остальные двенадцать глав разделены на две части, не указанные в оглавлении: введение в теорию функций одного комплексного переменного (главы II—IX) и введение в метрическую теорию функций одного действительного переменного (главы X — XIII). Эти части практически независимы друг от друга и написаны совсем по-разному, хотя и с равным мастерством. Вторая часть невелика по объему, ее предмет четко очерчен, материал в указанных пределах изложен достаточно полно, доказательства убедительны. В первой части предмет кажется необъятным, о полноте или систематичности изложения говорить не приходится, доказательства и даже определения, не лежащие на главном направлении, нередко заменяются пояснениями и примерами; зато автор находит место для того, чтобы познакомить читателя с основными идеями нескольких более специальных разделов теории. Такая свобода изложения делает книгу весьма необычным учебником.

Упомянутое главное направление — аналитическое: автор учит прежде всего анализу, в котором он подлинный мастер. Геометрические и топологические аспекты теории аналитических функций представлены маленькой главой, посвященной конформным отображениям, и страницей, посвященной римановым поверхностям. Там, где топология вторгается в изложение помимо воли автора и создает осложнения, он следует классической традиции, т. е. просто обходит вопрос. Например, области нигде в книге не предполагаются односвязными (этого понятия нет вообще), из-за чего некоторые формулировки кажутся неверными; на самом же деле они скорее уклончивы, так как в книге нет определения области. Подобных умолчаний, освященных традицией и относящихся к областям, кривым, контурам и т. п., в книге немало.

Отличительной чертой книги является связанный со свободой изложения необычный для учебника выбор материала. Этот выбор особенно интересен в первой части, содержащей, наряду со старыми, и только что опубликованные результаты. Сегодня, почти через полстолетия, когда первоначальное назначение учебника Титчмарша представляет скорее исторический интерес, этот выбор делает его ценным дополнением к нашей учебной литературе: в нем много такого, что невозможно или очень трудно найти в других курсах.

Отличия настоящего издания от английского оригинала незначительны. При переводе исправлялись только явные мелкие просмотры и опечатки. Топологическая позиция автора, о которой читатель был предупрежден выше, конечно, не могла быть этим затронута; она представляет собой органическую особенность книги, и читателю придется с ней мириться. Литературные ссылки автора по возможности заменены ссылками на русские переводы; впрочем, ссылки учебного характера большей частью потеряли для русского читателя свое значение, поскольку старые учебники вышли из употребления, а в хороших новых учебниках нет недостатка.

Ленинград 1979

В. А. Рохлин

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

При перепечатке первого издания в текст было внесено значительное число мелких исправлений и улучшений. Я должен поблагодарить многих коллег, которые помогли мне в пересмотре книги. Единственное крупное изменение состоит в том, что я включил в главу VIII краткое введение в теорию мероморфных функций. Это стало возможно благодаря тому, что некоторые не столь важные разделы были изложены более сжато и теория гамма-функции была перенесена в главу IV, где она содержит теперь более полное исследование формулы Стирлинга.

Лондон 1939

Е. Титчмарш

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ АВТОРА К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Эта книга возникла из лекций, которые я читал в последние годы студентам университетского колледжа в Лондоне и студентам университета в Ливерпуле. Она состоит из нескольких не очень связанных между собой введений в различные отделы теории функций — как действительного, так и комплексного переменного. Я думаю, что среднему студенту существующая литература по этим вопросам представляется трудной, и я надеюсь, что эти главы перекинут мост от элементарных учебников к систематическим курсам теории функций.

Предполагается, что читатель знаком с элементарным анализом. Под элементарным анализом мы понимаем, грубо говоря, то, что содержится в *Курсе чистой математики* Харди. В остальном книгу можно читать, не обращаясь к другим учебникам.

Порядок изучения глав в известных пределах произволен. Последние четыре главы можно читать и сразу после главы I. Если не считать отдельных ссылок вперед, предшествующая часть книги от них не зависит; но то, что они содержат, есть такая же необходимая часть снаряжения современного аналиста, как старая теория аналитических функций.

В конце каждой главы имеются примеры. Часть их требует лишь более или менее непосредственного применения изложенного в книге. Другие являются более трудными теоремами, не нашедшими места в основном тексте; они сопровождаются указаниями на способ решения и ссылками на источники.

Лондон 1932

Е. Титчмарш

ГЛАВА I

РЯДЫ, БЕСКОНЕЧНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ, НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Введение. В этой вступительной главе мы пополним те сведения из элементарного анализа, которые, как мы предполагаем, имеются у читателя. В частности, мы будем иметь дело с рядами, члены которых являются функциями некоторого переменного, с интегралами, содержащими переменные параметры, и с множеством тех проблем двойного предельного перехода, которые так часто встречаются во всех ветвях анализа. За отправной пункт мы, как было сказано в предисловии, берем *Чистую математику* Харди, которую обозначаем буквами *Ч. М.*, и всюду, где это возможно, ссылаемся на нее.

Мы будем пользоваться следующими названиями и обозначениями. Если в некотором рассуждении встречается число, не зависящее от основных переменных, то оно называется постоянной. Для обозначения абсолютной положительной постоянной, не обязательно все время одной и той же, мы пользуемся буквой A. Читатель может встретить утверждения вроде «$f(x) < A$, следовательно, $2f(x) < A$», которые сначала немного смущают; но скоро он к ним привыкнет. Постоянная, зависящая от одного или нескольких параметров, обычно обозначается через K.

Равенство $f(x) = O\{\varphi(x)\}$ означает вообще, что $|f(x)| < A\varphi(x)$ при значениях x, достаточно близких к заданному пределу. В частности, под $O(1)$ понимается ограниченная функция. Таким образом,

$$\sin x = O(|x|), \quad (x+1)^2 = O(1)$$

при $x \to 0$ и

$$\sin x = O(1), \quad (x+1)^2 = O(x^2)$$

при $x \to \infty$.

Однако равенство $f(x) = O\{\varphi(x)\}$ может означать также, что

$$|f(x)| < K\varphi(x);$$

обычно бывает достаточно ясно, какие параметры имеются в виду.

Равенство $f(x)=o\{\varphi(x)\}$ означает, что $\frac{f(x)}{\varphi(x)}\to 0$, когда x стремится к заданному пределу. Таким образом,

$$\sin x = o(x^2), \quad (x+1)^2 = o(x^3)$$

при $x\to\infty$. В частности, под $o(1)$ понимается функция, стремящаяся к нулю.

Запись $f(x)\sim\varphi(x)$ означает, что $\frac{f(x)}{\varphi(x)}\to 1$, когда x стремится к заданному пределу.

Мы пользуемся буквой ε для обозначения переменной, которой можно придавать произвольно малые значения и которую следует представлять себе малой.

Под $\max(a, b, \ldots)$ мы понимаем наибольшее из чисел $a, b, \ldots$ и под $\min(a, b, \ldots)$ — наименьшее из них.

1.1. Равномерная сходимость ряда. Читатель должен быть знаком с понятием *сходящегося ряда* (*Ч. М.*, § 76). Наше обычное обозначение для бесконечного ряда есть

$$u_1+u_2+u_3+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} u_n=\sum u_n;$$

если суммирование производится не от 1 до ∞, то его пределы точно указываются. n-я частичная сумма ряда есть $s_n=u_1+u_2+\ldots+u_n$.

Напомним сначала определение сходимости. Говорят, что ряд сходится к сумме s, если для всякого положительного числа ε, как бы мало оно ни было, можно найти такое число n_0 (зависящее от ε), что

$$|s-s_n|<\varepsilon \qquad (n>n_0).$$

Другими словами, s_n стремится к пределу s, когда n стремится к бесконечности.

Предположим теперь, что каждый член ряда является функцией действительного переменного x. Обычно предполагается, что область изменения этого переменного есть замкнутый интервал, скажем, $a\leqslant x\leqslant b$; но эта область может быть и открытым интервалом $a<x<b$, или вообще некоторым множеством точек. Рассмотрим ряд

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots=\sum u_n(x)$$

и его n-ю частичную сумму $s_n(x)$. Конечно, этот ряд может быть сходящимся при одних значениях x и расходящимся при других. Если он сходится при всех рассматриваемых значениях x, то его сумма является функцией от x, определенной при всех этих значениях x. Обозначим ее через $s(x)$.

Определение. *Говорят, что ряд $\sum u_n(x)$ равномерно сходится в интервале (a, b), если для всякого положительного числа ε, как бы мало оно ни было, можно найти такое число n_0, зависящее от ε, но не от x, что*

$$|s(x) - s_n(x)| < \varepsilon$$

для $n > n_0$ и всех значений x в интервале (a, b) *).

Ясно, что равномерная сходимость влечет за собой сходимость при каждом значении x в интервале; но, как мы покажем на примерах, ряд может сходиться при каждом значении x в некотором интервале и не быть равномерно сходящимся. Может случиться, что, хотя каждой паре значений x, ε отвечает такое число n_0, что $|s(x) - s_n(x)| < \varepsilon$ при $n > n_0$, это число n_0 неограниченно возрастает, когда x приближается к некоторой точке интервала. Ряд не будет тогда равномерно сходиться.

Подчеркнем, что равномерная сходимость есть свойство, ассоциированное с *интервалом* (или множеством точек), а не с отдельной точкой.

1.1.1. Признаки равномерной сходимости. Подобно тому как существуют признаки сходимости рядов с постоянными членами, существуют и признаки равномерной сходимости рядов функций. Простейший и наиболее полезный признак, указанный Вейерштрассом, состоит в следующем.

Ряд $\sum u_n(x)$ равномерно сходится в интервале (a, b), если существует такой ряд $\sum a_n$ с положительными постоянными членами, что $|u_n(x)| \leqslant a_n$ для всех значений n и x.

Прежде всего, ряд $\sum u_n(x)$ сходится при каждом значении x в силу обычного принципа сравнения (*Ч. М.*, §§ 173, 191). Следовательно, он имеет при каждом значении x определенную сумму $s(x)$. Далее,

$$|s(x) - s_n(x)| = |u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots| \leqslant a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots,$$

правую же часть можно сделать меньшей произвольно заданного ε, взяв n бо́льшим некоторого n_0. Так как числа a_n не зависят от x, то и n_0 не зависит от x. Этим теорема доказана.

Заметим, что теорема остается в силе, если $|u_n(x)| \leqslant a_n$ не для *всех*, а лишь для *всех достаточно больших* значений n.

Более общий признак того же типа, который также полезен, состоит в том, что ряд $\sum u_n(x)$ равномерно сходится, если $|u_n(x)| \leqslant v_n(x)$ и ряд $\sum v_n(x)$ равномерно сходится. Доказательство мы предоставляем читателю.

---

*) Это определение является одновременно определением равномерной сходимости последовательности функций $s_n(x)$ к функции $s(x)$ и в таком понимании систематически используется в дальнейшем. (*Примечание переводчика*).

Примеры. (I) Степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ равномерно сходится при $a \leqslant x \leqslant b$, если $-1 < a < b < 1$. [Принять за a_n большее из чисел $|a|^n$, $|b|^n$.]

(II) Тригонометрический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ равномерно сходится в любом интервале.

(III) Ряд Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ равномерно сходится при $a \leqslant s \leqslant b$, если $1 < a < b$.

[Положить $a_n = n^{-a}$; см. Ч. М., § 181. Сумма этого важного ряда обозначается через $\zeta(s)$.]

(IV) Ряд $\{1-(1-x^2)\}^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (1-x^2)^n$ равномерно сходится при $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

(V) Подобное же определение равномерной сходимости может быть дано для таких рядов, как $\sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos n\theta$, где общий член есть функция двух или большего числа переменных (здесь r и θ). Этот ряд равномерно сходится в любой полосе $0 \leqslant r \leqslant b < 1$ плоскости переменных r, θ.

1.1.2. Другие признаки. Всякий признак сходимости становится признаком равномерной сходимости, если его условия удовлетворяются независимо от x. Например (Ч. М., § 175), ряд $\sum u_n(x)$ сходится для частного значения x, если существует такое число r, меньшее чем 1, что

$$\left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| \leqslant r$$

для всех значений n. Вообще говоря, это r, поскольку он существует, будет зависеть от x. Предположим, однако, что мы можем найти r, удовлетворяющее указанному условию при всех значениях x. Тогда ряд равномерно сходится, если только функция $u_1(x)$ ограничена. Действительно, повторное применение предыдущего неравенства показывает, что, если $|u_1(x)| \leqslant M$, то

$$|u_n(x)| \leqslant r^{n-1} |u_1(x)| \leqslant Mr^{n-1};$$

равномерная сходимость следует, таким образом, из принципа сравнения.

Другие признаки сходимости могут быть преобразованы так же. Рассмотрим, например, признак Дирихле (Ч. М., § 196). Аналогичный ему признак равномерной сходимости состоит в следующем.

Пусть φ_n — положительная функция от n, монотонно стремящаяся к нулю при $n \to \infty$. Если существует такая постоян-

ная A, что

$$\left|\sum_{n=1}^{N} u_n(x)\right| \leqslant A$$

для всех значений N и x, то ряд $\sum \varphi_n u_n(x)$ равномерно сходится.

Читатель не встретит никаких трудностей при проведении доказательства *).

Примеры. (I) Если числа a_n положительны и последовательность $a_1, a_2, \ldots$ монотонно сходится к нулю, то ряд $\sum a_n \sin nx$ равномерно сходится в каждом замкнутом интервале, не содержащем кратных 2π.

[Воспользоваться тождеством

$$\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx = \frac{\cos \frac{1}{2} x - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{1}{2} x}.]$$

(II) При тех же условиях ряд $\sum a_n x \sin nx$ равномерно сходится в некотором интервале, содержащем точку $x=0$.

1.1.3. Необходимое и достаточное условие равномерной сходимости. *Ряд $\sum u_n(x)$ равномерно сходится в том и только в том случае, если для всякого положительного ε можно найти такое n_0, зависящее от ε, но не от x,* что

$$|s_m(x) - s_n(x)| < \varepsilon$$

при всех значениях m и n, больших n_0.

Это соответствует «общему принципу сходимости» для обыкновенных рядов (*Ч. М.*, §§ 83, 84).

Как и в случае обыкновенных рядов, нетрудно проверить, что условие необходимо; действительно,

$$|s_m(x) - s_n(x)| \leqslant |s(x) - s_m(x)| + |s(x) - s_n(x)|,$$

так что условие выполнено, если ряд равномерно сходится. В случае обыкновенных рядов доказательство достаточности более трудно. Однако после того как для обыкновенных рядов эта трудность преодолена, для рядов функций она уже не возникает. Действительно, предположим, что условие выполнено. Тогда, согласно теореме об обыкновенных рядах, ряд $\sum u_n(x)$ сходится для каждого x. Пусть $s(x)$ — его сумма. Выберем по заданному ε такое n_0, что

$$|s_m(x) - s_n(x)| < \varepsilon \qquad (m > n_0,\ n > n_0).$$

Оставляя m неизменным, заставим n стремиться к бесконечности. Так как $s_n(x) \to s(x)$, то мы получим неравенство

$$|s_m(x) - s(x)| \leqslant \varepsilon$$

*) См. Bromwich, *Infinite Series*, изд. 2, § 44.

в единственном предположении, что $m > n_0$. Следовательно, сходимость равномерна.

1.1.3.1. Следующая теорема *) об одном классе тригонометрических рядов дает блестящий пример применения предыдущего принципа.

Если числа b_n положительны и последовательность $b_1, b_2, \ldots$ монотонно убывает, то необходимое и достаточное условие равномерной сходимости ряда $\sum b_n \sin nx$ состоит в том, что $nb_n \to 0$.

Чтобы доказать необходимость этого условия, заметим, что при $x = \frac{\pi}{2p}$ и $n = \left[\frac{1}{2}p + 1\right]$ **)

$$b_n \sin nx + b_{n+1} \sin (n+1) x + \ldots + b_p \sin px >$$
$$> b_p (\sin nx + \ldots + \sin px) > b_p \left(\frac{1}{2} p - 1\right) \sin \frac{1}{4} \pi$$

(имеется по крайней мере $\frac{1}{2}p - 1$ членов $\sin mx$, у которых $mx > \frac{1}{4}\pi$). Так как ряд равномерно сходится, то левая часть неравенства стремится к нулю при $p \to \infty$. Следовательно, $pb_p \to 0$.

Для доказательства достаточности условия нам нужно следующее предложение, известное как лемма Абеля.

Если $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n > 0$ и для $k = 1, \ldots, n$

$$m \leqslant a_1 + a_2 + \ldots + a_k \leqslant M,$$

то

$$mb_1 \leqslant a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n \leqslant M b_1.$$

Положим $s_k = a_1 + \ldots + a_k$. Мы можем написать (ср. Ч. М., § 196):

$$a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n = b_1 s_1 + b_2 (s_2 - s_1) + \ldots + b_n (s_n - s_{n-1}) =$$
$$= s_1 (b_1 - b_2) + s_2 (b_2 - b_3) + \ldots + s_{n-1} (b_{n-1} - b_n) + s_n b_n.$$

Так как вторые сомножители в последней строке неотрицательны, то сумма не уменьшится, если мы напишем M вместо $s_1, s_2, \ldots, s_n$, а это дает для нее верхнюю границу

$$M (b_1 - b_2) + M (b_2 - b_3) + \ldots + M b_n = M b_1.$$

Подобным же образом получается нижняя граница mb_1. Этим лемма доказана.

Возвратимся к нашему ряду. Так как каждый его член является нечетной функцией с периодом 2π, то можно ограничиться интервалом $0 \leqslant x \leqslant \pi$. Рассмотрим сумму

$$s_{n, p} = b_n \sin nx + \ldots + b_p \sin px,$$

---

*) Chaundy and Jolliffe [1].

**) $[x]$ есть целая часть числа x.

где n и p больше не связаны между собой, как это было выше. Положим $\mu_n = \max\limits_{m \geqslant n} (mb_m)$, так что $\mu_n \to 0$. При $x \geqslant \pi/n$ мы применяем лемму Абеля: так как для всех значений n и r

$$|\sin nx + \ldots + \sin rx| = \left| \frac{\cos\left(n - \frac{1}{2}\right)x - \cos\left(r + \frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{1}{2} x} \right| \leqslant \frac{1}{\sin \frac{1}{2} x}$$

и так как $\dfrac{1}{\sin \frac{1}{2} x} \leqslant \dfrac{\pi}{x}$ $\left(\text{функция } \dfrac{\sin\theta}{\theta} \text{ монотонно убывает при } 0 < \theta < \frac{1}{2}\pi\right)$, то

$$|s_{n,p}| \leqslant \frac{b_n \pi}{x} \leqslant nb_n \leqslant \mu_n.$$

Если $x \leqslant \pi/p$, то $\sin\theta \leqslant \theta$ и

$$|s_{n,p}| \leqslant b_n nx + \ldots + b_p px \leqslant p\mu_n x \leqslant \pi\mu_n.$$

При $\pi/p < x < \pi/n$ мы пользуемся обоими этими приемами. Мы пишем $|s_{n,p}| \leqslant |s_{n,k}| + |s_{k+1,p}|$ и, применяя лемму Абеля ко второму члену справа и второй прием к первому члену, получаем неравенство

$$|s_{n,p}| \leqslant k\mu_n x + \frac{b_{k+1}\pi}{x} \leqslant \mu_n \left[kx + \frac{\pi}{(k+1)x}\right].$$

Полагая в нем $k = [\pi/x]$, мы видим, что

$$|s_{n,p}| \leqslant \mu_n (\pi + 1).$$

Таким образом, во всех случаях $|s_{n,p}| < A\mu_n$, и остается вспомнить, что $\mu_n \to 0$.

1.1.4. Равномерная сходимость и непрерывность. До сих пор мы не привели никаких доводов в пользу общего рассмотрения равномерно сходящихся рядов. Они важны по многим причинам, из которых не все могут быть названы в этой главе. Первая причина заключается в следующей теореме.

Сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций есть непрерывная функция.

Мы пользуемся прежними обозначениями и пишем $s(x) = s_n(x) + r_n(x)$, так что $r_n(x)$ есть остаток, получающийся после удаления n первых членов ряда. Если x и $x+h$ — две произвольные точки рассматриваемого интервала, то

$$|s(x+h) - s(x)| = |s_n(x+h) - s_n(x) + r_n(x+h) - r_n(x)| \leqslant$$
$$\leqslant |s_n(x+h) - s_n(x)| + |r_n(x+h)| + |r_n(x)|.$$

Найдем по заданному ε такое n_0, что для всех значений h

$$|r_n(x+h)| < \varepsilon, \quad |r_n(x)| < \varepsilon \qquad (n > n_0),$$

и фиксируем какое-нибудь значение n, удовлетворяющее этому условию. Как сумма n непрерывных функций, $s_n(x)$ есть непрерывная функция. Мы можем поэтому найти столь малое δ, что

$$|s_n(x+h)-s_n(x)|<\varepsilon \qquad (|h|<\delta).$$

Комбинируя написанные неравенства, мы получаем неравенство

$$|s(x+h)-s(x)|<3\varepsilon \qquad (|h|<\delta),$$

которое и показывает, что функция $s(x)$ непрерывна.

Заметим, что теорема остается верной, если речь идет о непрерывности в отдельной точке x; действительно, мы пользовались только тем, что $s_n(x+h)\to s_n(x)$ при $h\to 0$ и фиксированном x. Поэтому мы можем сформулировать результат следующим образом.

Предел суммы равномерно сходящегося ряда функций, каждая из которых стремится к некоторому пределу, равен сумме ряда, составленного из пределов функций *).

1.2. Ряды с комплексными членами. Степенные ряды **). Теория равномерной сходимости может быть распространена на ряды вида

$$u_1(z)+u_2(z)+\ldots,$$

где общий член $u_n(z)$ есть комплексная функция комплексного переменного z. Место равномерной сходимости в интервале здесь занимает равномерная сходимость в некоторой области плоскости z, например в круге или квадрате. Читатель не встретит никаких трудностей при распространении определений и признаков на этот случай. Также и теорема о непрерывности суммы равномерно сходящегося ряда непрерывных функций переносится на ряды комплексных функций без осложнений.

Пример. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-s}$, где s — комплексное переменное, равномерно сходится во всякой конечной области, в которой $\mathrm{Re}(s)\geqslant a>1$. Функция $\zeta(s)$, определенная как сумма этого ряда, непрерывна во всех точках области $\mathrm{Re}(s)>1$. [Ср. § 1.11, пример (III).]

1.2.1. Степенные ряды. Один из простейших случаев равномерной сходимости ряда с комплексными членами есть случай степенного ряда. Мы знаем (*Ч. М.*, § 200), что степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ имеет *радиус сходимости* R (который может быть, в частности, нулевым или бесконечным), такой, что ряд сходится при $|z|<R$ и расходится при $|z|>R$.

*) В действительности эта формулировка содержит дополнительный пункт: последний ряд сходится. Это также легко доказывается. (*Примечание переводчика.*)

**) *Ч. М.*, § 197.

Ряд равномерно сходится при $|z| \leqslant R'$, где R' — любое положительное число, меньшее R.

Действительно, пусть ρ — какое-нибудь число, заключенное между R' и R. Так как ряд сходится при $z = \rho$, то существует такое число K, не зависящее от n, что $|a_n \rho^n| < K$ для всех значений n. Таким образом, при $|z| \leqslant R'$

$$|a_n z^n| = \left|a_n \rho^n \left(\frac{z}{\rho}\right)^n\right| < K\left(\frac{R'}{\rho}\right)^n.$$

Правая часть не зависит от z и является общим членом сходящейся геометрической прогрессии, так что применим комплексный аналог признака § 1.1.1. Следовательно, ряд равномерно сходится.

Мы показали, таким образом, что всякий круг, внутренний к кругу сходимости, является областью равномерной сходимости. Сам круг сходимости не обязан быть областью равномерной сходимости; более того, на его границе ряд не обязан сходиться.

Пример. Для ряда $\sum \frac{z^n}{n^2}$ круг сходимости является областью равномерной сходимости.

1.2.2. Теорема Абеля. Предыдущие рассмотрения оставляют открытым следующий интересный вопрос. Предположим, чтобы взять простейший случай, что перед нами вещественный степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{1}$$

с радиусом сходимости 1. Предположим далее, что ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \tag{2}$$

сходится. Будет ли в этом случае интервал равномерной сходимости простираться вправо до точки $x = 1$? Ответ оказывается утвердительным.

Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ сходится и его сумма равна s, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ равномерно сходится при $0 \leqslant x \leqslant 1$ и

$$\lim_{x \to 1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = s.$$

Доказательство представляет собой непосредственное применение леммы Абеля (см. § 1.1.3.1). Положим $s_{n,p} = a_n + a_{n+1} + \ldots + a_p$. При заданном ε мы можем найти столь большое n_0, что $|s_{n,p}| \leqslant \varepsilon$ при $n_0 \leqslant n < p$. Так как числа x^n не возрастают, если

$0 \leqslant x \leqslant 1$, то, в силу леммы Абеля, при $n_0 \leqslant n < p$

$$|a_n x^n + \ldots + a_p x^p| \leqslant \varepsilon x^n \leqslant \varepsilon \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1),$$

а это и означает равномерную сходимость.

Вторая часть теоремы получается теперь из теоремы о непрерывности (§ 1.1.4).

Пример. Из разложения (*Ч. М.*, § 220)

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \ldots \qquad (|x| < 1)$$

вывести, что $\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots$

1.2.3. Теорема Таубера. Прямым обращением второй части теоремы Абеля было бы утверждение, что если при $x \to 1$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \to s,$$

то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ сходится к сумме s. Что это утверждение не верно, показывает простой пример

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{x+1},$$

в котором $f(x) \to 1/2$ при $x \to 1$, но ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ не сходится.

Если, однако, наложить на коэффициенты a_n дополнительное ограничение, касающееся порядка их величины, то обратную теорему можно доказать.

Если $a_n = o(1/n)$ и $f(x) \to s$ при $x \to 1$, то ряд $\sum\limits_{0}^{\infty} a_n$ сходится к сумме s.

Сначала мы докажем следующую простую лемму *).

Лемма. *Если $b_n \to 0$ при $n \to \infty$, то*

$$\frac{b_0 + b_1 + \ldots + b_n}{n+1} \to 0.$$

Для доказательства достаточно заметить, что, если $|b_n| < K$ при всех значениях n и $|b_n| < \varepsilon$ при $n > n_0$, то при $n > n_0$ и

*) *Ч. М.*, гл. IV, Разные примеры, 16.

$n > (n_0+1)K/\varepsilon$

$$\left|\frac{b_0+b_1+\ldots+b_n}{n+1}\right| \leqslant \left|\frac{b_0+\ldots+b_{n_0}}{n+1}\right| + \left|\frac{b_{n_0+1}+\ldots+b_n}{n+1}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{(n_0+1)K}{n+1} + \frac{(n-n_0)\varepsilon}{n+1} < 2\varepsilon.$$

Чтобы доказать теорему Таубера, достаточно доказать, что при $N=[1/(1-x)]$ и $x \to 1$

$$\sum_0^\infty a_n x^n - \sum_0^N a_n \to 0,$$

т. е. $\sum\limits_{N+1}^{\infty} a_n x^n - \sum\limits_0^N a_n(1-x^n) \to 0$. Обозначим эти суммы через S_1 и S_2 и для заданного ε выберем N столь большим, что $|na_n| < \varepsilon$ при $n > N$. Очевидно,

$$|S_1| = \left|\sum_{N+1}^{\infty} na_n \frac{x^n}{n}\right| < \frac{\varepsilon}{N+1} \sum_{N+1}^{\infty} x^n < \frac{\varepsilon}{(N+1)(1-x)} < \varepsilon.$$

Далее, $1-x^n = (1-x)(1+x+\ldots+x^{n-1}) < n(1-x)$, и потому

$$|S_2| < (1-x)\sum_0^N n|a_n| \leqslant \frac{1}{N}\sum_0^N n|a_n|.$$

В силу леммы правая часть стремится к нулю, так что и $|S_2| < \varepsilon$, если N достаточно велико, а тогда $|S_1 - S_2| < 2\varepsilon$. Этим теорема доказана.

1.3. Ряды, которые не сходятся равномерно. До сих пор читатель мог думать, что сходимость во всех точках некоторого интервала есть то же самое, что равномерная сходимость. Мы хотим доказать примерами, что это не так.

Примеры. (I) Мы можем построить ряд, для которого

$$s_n(x) = \frac{1}{1+nx} \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1),$$

полагая

$$u_1(x) = \frac{1}{1+x},$$

$$u_n(x) = \frac{1}{1+nx} - \frac{1}{1+(n-1)x} = \frac{-x}{(1+nx)\{1+(n-1)x\}} \qquad (n > 1).$$

Эта функция $s_n(x)$ есть *непрерывная функция, стремящаяся к разрывному пределу*. Действительно, если $x > 0$, то $s_n(x)$, очевидно, стремится к нулю при $n \to \infty$; если же $x=0$, то $s_n(x)=1$ для всех значений n, так что $s_n(x)$ стремится к единице. Таким образом, сумма ряда разрывна и ряд не может быть равномерно сходящимся.

(II) Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} xe^{-nx}$. Здесь $s_n(0)=0$, так что $s(0)=0$. При $x>0$

$$s_n(x)=x\frac{1-e^{-nx}}{1-e^{-x}}, \qquad s(x)=\frac{x}{1-e^{-x}}$$

и $s(x)\to 1$, когда $x\to 0$. Следовательно, функция $s(x)$ разрывна, и, как и в предыдущем примере, ряд не сходится равномерно ни в каком интервале с концом $x=0$.

Последнее можно установить и непосредственно: если $x=1/n$, то $s\left(\frac{1}{n}\right)-s_n\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{xe^{-1}}{1-e^{-x}}\to e^{-1}$, так что разность $s(x)-s_n(x)$ не является равномерно малой вблизи значения $x=0$.

(III) Рассмотреть подобным же образом ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n(1-x)$.

(IV) Тем же приемом, что в примере (I), мы можем построить ряд, для которого $s_n(x)=nx(1-x)^n$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$.

Очевидно, $s(0)=0$. Кроме того, если $x>0$, то $n(1-x)^n\to 0$ при $n\to\infty$ (*Ч. М.*, § 213). Следовательно, $s(x)=0$ для всех значений x. Таким образом, в этом случае сумма ряда непрерывна. Однако ряд не является равномерно сходящимся. Простым упражнением в дифференциальном исчислении является отыскание максимума функции $s_n(x)$; он равен $\left(\frac{n}{1+n}\right)^{1+n}$ и, таким образом, стремится к e^{-1} при $n\to\infty$ (*Ч. М.*, §§ 73, 215). Следовательно, как бы велико ни было n, функция $s_n(x)-s(x)$ принимает значения, сколь угодно близкие к e^{-1}. Таким образом, сходимость не равномерна.

Читателю следует начертить график функции $s_n(x)$. У этого графика есть горб, который приближается к началу и неограниченно уменьшается в ширину, но не в высоту.

Заметим, что сходимость может приобрести или утратить равномерность после умножения всех членов ряда на множитель, не зависящий от n. Например, если

$$s_n(x)=\frac{x}{1+nx} \qquad (0\leqslant x\leqslant 1),$$

то $|s_n(x)|\leqslant 1/n$, так что ряд равномерно сходится к нулю. Ряд же, получающийся из него после умножения на $1/x$, не является равномерно сходящимся (пример (I)).

С другой стороны, если мы умножим равномерно сходящийся ряд на *ограниченный* множитель, не зависящий от n, то ряд, полученный в результате, будет также равномерно сходиться. Это легко вывести из определения равномерной сходимости.

1.3.1. Равномерная сходимость рядов с положительными членами. Из предыдущих примеров ясно, что равномерная сходимость ряда непрерывных функций не является необходимым условием непрерывности его суммы. Существует, однако, интересный случай, когда равномерная сходимость ряда и непрерывность суммы равносильны *).

Если $\sum u_n(x)$ — *ряд с положительными членами, непрерывными в замкнутом интервале, то необходимым и достаточным условием непрерывности суммы* $s(x)$ *является равномерная сходимость ряда в этом интервале.*

Мы должны доказать, что это условие необходимо, т. е. что если функция $s(x)$ непрерывна, то ряд равномерно сходится.

Пользуясь нашими обычными обозначениями, заметим, что функция $s(x)-s_n(x)$ непрерывна и, следовательно (*Ч. М.*, § 103), имеет верхнюю грань, скажем, ε_n, которая достигается в некоторой точке x_n рассматриваемого интервала. Достаточно доказать, что $\varepsilon_n \to 0$; действительно, так как члены ряда положительны, то

$$|s(x)-s_n(x)| \leqslant |s(x)-s_N(x)| \leqslant \varepsilon_N$$

для $n \geqslant N$ и всех x; а это влечет за собой равномерную сходимость, если $\varepsilon_N \to 0$ при $N \to \infty$.

Предположим, напротив, что ε_n не стремится к нулю. Так как ε_n монотонно убывает (члены ряда положительны), то ε_n имеет положительную нижнюю грань, скажем δ. Числа же x_n имеют в интервале предельную точку (*Ч. М.*, § 19), скажем ξ. Пусть N столь велико, что $s(\xi)-s_N(\xi)<\delta$. Тогда, если ξ — внутренняя точка интервала, то существует интервал $(\xi-h, \xi+h)$, в котором $s(x)-s_N(x)<\delta$, а если ξ — концевая точка, то существует интервал $(\xi, \xi+h)$ или $(\xi-h, \xi)$ с этим свойством. Следовательно, $\varepsilon_n<\delta$ для значений n, при которых $|x_n-\xi|<h$. Это противоречие завершает доказательство.

1.4. Бесконечные произведения. Бесконечное произведение есть выражение вида

$$(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)\ \ldots, \tag{1}$$

содержащее бесконечно много сомножителей. Мы обозначаем его через

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n).$$

Мы предполагаем, что ни одно из чисел a_n не равно -1.

Рассмотрим частичное произведение

$$p_n=\prod_{m=1}^{n}(1+a_m).$$

Мы говорим, что *бесконечное произведение* (1) *сходится, если* p_n *стремится к некоторому пределу, отличному от нуля, когда* $n \to \infty$.

*) Подробное рассмотрение вопроса имеется у Hardy [11].

Мы могли бы, конечно, допустить предел 0, как всякий другой; но мы увидим ниже, что во многих случаях это было бы неудобно.

Если произведение не сходится, то говорят, что оно расходится. Если $p_n \to 0$, то говорят, что оно расходится к нулю.

Примеры. (I) Произведение

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\ldots$$

сходится.

(II) Если произведение (1) сходится, то $a_n \to 0$.

1.4.1. Мы начнем с рассмотрения двух простых случаев.

Если $a_n \geqslant 0$, то произведение $\Pi(1+a_n)$ и ряд $\sum a_n$ сходятся или расходятся одновременно.

Так как в этом случае p_n есть неубывающая функция от n, то p_n стремится либо к конечному пределу, либо к положительной бесконечности. Далее,

$$a_1+a_2+\ldots+a_n \leqslant (1+a_1)\ldots(1+a_n) \leqslant e^{a_1+a_2+\ldots+a_n}.$$

Левое неравенство становится очевидным, если раскрыть скобки; правое неравенство следует из того, что $1+a \leqslant e^a$ при любом положительном a. Вместе эти неравенства показывают, что p_n и $a_1+\ldots+a_n$ ограничены или не ограничены одновременно, и это завершает доказательство.

Если $a_n \leqslant 0$ для всех значений n, то мы полагаем $a_n = -b_n$ и рассматриваем произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-b_n)$.

Если $b_n \geqslant 0$, $b_n \neq 1$ для всех значений n и ряд $\sum b_n$ сходится, то произведение $\Pi(1-b_n)$ сходится.

Из сходимости ряда следует существование столь большого N, что $b_N+b_{N+1}+\ldots<1/2$ и, в частности, $b_n<1$ при $n \geqslant N$. Очевидно,

$$(1-b_N)(1-b_{N+1}) \geqslant 1-b_N-b_{N+1},$$

$$(1-b_N)(1-b_{N+1})(1-b_{N+2}) \geqslant (1-b_N-b_{N+1})(1-b_{N+2}) \geqslant$$
$$\geqslant 1-b_N-b_{N+1}-b_{N+2},$$

и вообще

$$(1-b_N)(1-b_{N+1})\ldots(1-b_n) \geqslant 1-b_N-\ldots-b_n > \frac{1}{2}.$$

Таким образом, отношение p_n/p_{N-1} монотонно убывает при $n>N$ и имеет положительную нижнюю грань. Следовательно, оно стремится к положительному пределу. Поскольку $p_{N-1} \neq 0$, это завершает доказательство.

Если $0 \leqslant b_n < 1$ для всех n, но ряд $\sum b_n$ расходится, то произведение $\Pi(1-b_n)$ расходится к нулю.

В самом деле, $1-b \leqslant e^{-b}$, если $0 \leqslant b < 1$, так что

$$(1-b_1)(1-b_2)\ \ldots\ (1-b_n) \leqslant e^{-b_1-b_2-\ \ldots\ -b_n}.$$

Правая часть стремится к нулю, что и завершает доказательство.

Таким образом, *если* $0 \leqslant b_n < 1$, *то произведение* $\Pi(1-b_n)$ *и ряд* $\sum b_n$ *сходятся или расходятся одновременно.*

1.4.2. Общий случай. Пусть теперь a_n — любые вещественные или комплексные числа, отличные от -1.

Определение. *Произведение* $\Pi(1+a_n)$ *называется абсолютно сходящимся, если произведение* $\Pi(1+|a_n|)$ *сходится.*

Из первого предложения § 1.4.1 следует, что *необходимым и достаточным условием абсолютной сходимости произведения* $\Pi(1+a_n)$ *служит сходимость ряда* $\sum |a_n|$.

Покажем теперь, что *абсолютно сходящееся произведение сходится.*

Обозначим через p_n то же частичное произведение, что и выше, и положим $P_n = \prod_{m=1}^{n} (1+|a_n|)$. Так как

$$p_n - p_{n-1} = (1+a_1)\ \ldots\ (1+a_{n-1})\, a_n,$$

$$P_n - P_{n-1} = (1+|a_1|)\ \ldots\ (1+|a_{n-1}|)\,|a_n|,$$

то $|p_n - p_{n-1}| \leqslant P_n - P_{n-1}$. Если произведение $\Pi(1+|a_n|)$ сходится, то P_n стремится к некоторому пределу, так что ряд $\sum(P_n - P_{n-1})$ сходится. Тогда, в силу теоремы сравнения, сходится и ряд $\sum(p_n - p_{n-1})$, т. е. p_n стремится к некоторому пределу.

Этот предел не может быть нулем. Действительно, так как ряд $\sum |a_n|$ сходится и $1+a_n \to 1$, то ряд

$$\sum |a_n/(1+a_n)|$$

также сходится. Следовательно (в силу только что доказанного), произведение $\prod_{m=1}^{n}\left(1-\frac{a_m}{1+a_m}\right)$ стремится к некоторому пределу. Но это произведение равно $1/p_n$. Следовательно, предел произведения p_n отличен от нуля.

Пример. Сомножители абсолютно сходящегося произведения можно произвольно переставлять, не меняя значения произведения (ср. *Ч. М.*, § 192).

1.4.3. Логарифм бесконечного произведения. Пусть

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1+a_n) = p;$$

верно ли, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \log(1+a_n) = \log p$? Здесь $\log z$ — главное значение логарифма числа z, т. е. значение, мнимая часть которого лежит между $-\pi$ и π (*Ч. М.*, § 231).

Ответ будет, очевидно, утвердительным, если все числа a_n действительны и положительны, поскольку тогда все логарифмы имеют свое обычное арифметическое значение. Но в общем случае формула требует модификации.

Пусть p_n обозначает n-е частичное произведение, и пусть $p_n = \rho_n e^{i\varphi_n}$, так что p_n и ρ_n стремятся к пределам и то же относится к аргументу φ_n, если его значения выбраны надлежащим образом. Пусть $1+a_n = r_n e^{i\theta_n}$, где $-\pi < \theta_n \leqslant \pi$; тогда, так как $a_n \to 0$ при $n \to \infty$, то и $\theta_n \to 0$ при $n \to \infty$. Положим

$$s_n = \sum_{m=1}^{n} \log(1+a_m).$$

Очевидно,

$$s_n = \log p_n + 2k_n i\pi, \tag{1}$$

где k_n — целое число, и $2k_n\pi = \theta_1 + \ldots + \theta_n - \varphi_n$, так что

$$2\pi(k_{n+1} - k_n) = \theta_{n+1} - (\varphi_{n+1} - \varphi_n).$$

Поскольку правая часть стремится к нулю, при достаточно большом n

$$|2\pi(k_{n+1} - k_n)| < 2\pi$$

и, следовательно, $k_{n+1} = k_n$ (напомним, что все k_n — целые числа). Таким образом, k_n имеет при достаточно большом n постоянное значение, скажем k, т. е. $s_n = \log p_n + 2ki\pi$ $(n > n_0)$. Следовательно, $\sum \log(1+a_n) = \log p + 2ki\pi$. Сумма ряда есть, таким образом, некоторое значение, но не обязательно главное значение, логарифма произведения.

Заметим, что в ходе доказательства мы получили для всех достаточно больших значений N равенство

$$\sum_{N+1}^{\infty} \log(1+a_n) = \log p - \log p_N.$$

Если мы начнем с ряда логарифмов и положим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log(1+a_n) = s,$$

то после перехода к экспоненциалам в формуле (1), мы получим равенство $e^{s_n} = p_n$, так что $p_n \to p = e^s$.

Примеры. (I) Если ряды $\sum a_n$ и $\sum |a_n|^2$ сходятся, то произведение $\Pi(1+a_n)$ сходится.

[Воспользоваться соотношением $\log(1+a_n)=a_n+O(|a_n|^2)$.]

(II) Если ряды $\sum a_n$, $\sum a_n^2$, ..., $\sum a_n^{k-1}$, $\sum |a_n|^k$ сходятся, то произведение $\Pi(1+a_n)$ сходится.

(III) Если числа a_n вещественны и ряд $\sum a_n$ сходится, то произведение $\Pi(1+a_n)$ сходится или расходится к нулю в зависимости от того, сходится или расходится ряд $\sum a_n^2$.

(IV) Произведение $\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{4}}\right)\dots$ расходится.

(V) Показать, что если

$$a_{2n-1}=-\frac{1}{\sqrt{n+1}},\quad a_{2n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}},$$

то произведение $\Pi(1+a_n)$ сходится, хотя оба ряда $\sum a_n$ и $\sum a_n^2$ расходятся.

(VI) Произведение $\prod\left(1+\frac{i}{n}\right)$ расходится, но произведение $\prod\left|1+\frac{i}{n}\right|$ сходится.

(VII) Если ряд $\sum |u_n|^2$ сходится, то сходится и произведение $\Pi(1-u_n)e^{u_n}$; если же ряд $\sum |u_n|^3$ сходится, то сходится произведение $\Pi(1-u_n)e^{u_n+\frac{1}{2}u_n^2}$.

[Если $u\to 0$, то $(1-u)e^u=1+O(u^{-2})$ и $(1-u)e^{u+\frac{1}{2}u^2}=1+O(u^{-3})$; или же можно рассмотреть ряд логарифмов, как в примере (I). Произведения этого типа имеют большое значение для главы VIII и будут рассмотрены там полнее.]

1.4.4. Равномерная сходимость бесконечных произведений. Бесконечное произведение

$$\prod_{n=1}^{\infty}\{1+u_n(z)\},$$

где сомножители — функции переменного z, вещественного или комплексного, называется равномерно сходящимся в некоторой области значений z, если частичное произведение

$$p_n(z)=\prod_{m=1}^{n}\{1+u_m(z)\}$$

равномерно сходится в этой области к некоторому пределу, нигде не равному нулю.

Вот простейший признак равномерной сходимости произведения.

Произведение $\Pi\{1+u_n(z)\}$ *равномерно сходится в каждой области, в которой ряд* $\sum|u_n(z)|$ *равномерно сходится к ограниченной функции.*

Доказательство состоит в пересмотре аргументов § 1.4.2 с точки зрения равномерности. Пусть M — верхняя грань суммы $\sum|u_n(z)|$

в рассматриваемой области. Тогда

$$\{1+|u_1(z)|\}\ldots\{1+|u_n(z)|\}<e^{|u_1(z)|+\ldots}\leqslant e^M.$$

Полагая $P_n(z)=\prod_{m=1}^{\infty}\{1+|u_m(z)|\}$, мы видим, что

$$P_n(z)-P_{n-1}(z)=\{1+|u_1(z)|\}\ldots\{1+|u_{n+1}(z)|\}\,|u_n(z)|<e^M\,|u_n(z)|.$$

Следовательно, ряд $\sum\{P_n(z)-P_{n-1}(z)\}$ равномерно сходится, и доказательство завершается так же, как в § 1.4.2.

Примеры. (I) Произведение $\prod\left(1-\frac{1}{\omega^s}\right)$, где ω пробегает все простые числа 2, 3, 5, ..., равномерно сходится в каждой конечной области, в которой $\mathrm{Re}(s)\geqslant a>1$; действительно, это верно для ряда $\sum|\omega^{-s}|$, который составлен из части членов ряда $\sum|n^{-s}|$ (§ 1.2, пример).

Значение произведения есть $1/\zeta(s)$. Действительно,

$$(1-2^{-s})\,\zeta(s)=1+3^{-s}+5^{-s}+\ldots,$$

где справа опущены члены ряда $\sum n^{-s}$ с четными n. Далее,

$$(1-2^{-s})(1-3^{-s})\,\zeta(s)=1+5^{-s}+7^{-s}+11^{-s}+\ldots,$$

где справа опущены члены с n, делящимися на 2 или 3. Вообще, если ω_n обозначает n-е простое число, то

$$(1-2^{-s})\ldots(1-\omega_n^{-s})\,\zeta(s)=1+l^{-s}+\ldots,$$

где справа опущены члены с n, делящимися на одно из чисел 2, 3 ..., ω_n. Так как все числа, не превосходящие ω_n, содержат такие множители, то

$$|(1-2^{-s})\ldots(1-\omega^{-s})\,\zeta(s)-1|\leqslant|(\omega_n+1)^{-s}|+|(\omega_n+2)^{-s}|+\ldots,$$

а эта сумма стремится к нулю при $n\to\infty$. Следовательно,

$$\lim\ 1-2^{-s})\ldots(1-\omega_n^{-s})\,\zeta(s)=1,$$

что и утверждалось.

(II) Если $\mathrm{Re}(s)\geqslant 2$, то

$$\log\zeta(s)=-\sum_{\omega}\log(1-\omega^{-s}),$$

причем всюду взяты главные значения логарифма.

[Из предыдущего примера и сказанного в § 1.4.3 мы выводим, что

$$\log\zeta(s)=-\sum\log(1-\omega^{-s})+2ki\pi,$$

где k — целое число, зависящее prima facie от s. Если значение s вещественно, то k есть, очевидно, 0. Кроме того, если $\mathrm{Re}(s)>1$, то вещественная часть числа $1-\omega^{-s}$ положительна, так что его аргумент заключен между $-\frac{1}{2}\pi$ и $\frac{1}{2}\pi$. Поэтому при $\mathrm{Re}(s)>1$ каждый член $\log(1-\omega^{-s})$ непрерывен. Следовательно, сумма ряда непрерывна, Подобным же образом функция $\log\zeta(s)$ непрерывна, если $\operatorname{Re}\zeta(s)>0$. В частности, это верно при $\operatorname{Re}(s)\geqslant 2$, так как при $\operatorname{Re}(s)=\sigma\geqslant 2$

$$\operatorname{Re}\zeta(s)\geqslant 1-2^{-\sigma}-3^{-\sigma}-\ldots\geqslant 1-2^{-2}-3^{-2}-\ldots>1-\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 3}-\ldots=0.$$

Следовательно, функция k непрерывна при $\operatorname{Re}(s)\geqslant 2$ и, таким образом, равна нулю во всей этой области.]

(III) Сходимость произведения $\Pi(1+a_n)$ не влечет за собой сходимость произведения $\Pi(1+a_nx)$, за исключением случаев $x=0$ и $x=1$ *).

(IV) Из сходимости произведения $\Pi(1+a_n)$ не следует равенство

$$\lim_{x\to 1}\prod(1+a_nx^n)=\prod(1+a_n).$$

[Харди *) указал пример, в котором

$$\lim\prod(1+a_nx^n)=2\prod(1+a_n).$$

Этот пример резко контрастирует с теоремой Абеля о непрерывности степенных рядов.]

(V) Произведение $\prod\left(1+\frac{e^{in\theta}}{\log n}\right)$ не сходится ни при каком рациональном значении θ/π, но сходится, если θ/π есть алгебраическое число (*Ч. М.*, гл. I, пример 36), не являющееся рациональным.

[Проблема сходимости этого произведения, предложенная Харди *), была решена Литтлвудом **).]

1.5. Сходимость несобственных интегралов. Мы предполагаем, что читатель знаком с элементарными свойствами интеграла Римана от непрерывной функции (*Ч. М.*, §§ 161 — 169). Если функция $f(x)$ непрерывна в конечном замкнутом интервале $(a,\ b)$, то интеграл Римана

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

всегда существует. Далее, при $a\leqslant x\leqslant b$ существует неопределенный интеграл $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$, и функция $F(x)$ непрерывна и имеет производную, равную $f(x)$. Мы предполагаем известными обычные правила интегрирования по частям, подстановкой и т. д., а также теоремы о среднем значении (*Ч. М.*, §§ 165, 166).

Прежде всего мы распространим определение интеграла на простейшие разрывные функции. Предположим, что интервал $(a,\ b)$ может быть разбит на конечное число частей $(a,\ x_1)$, $(x_1,\ x_2)$, $\ldots$, $(x_n,\ b)$ таким образом, что функция $f(x)$ непрерывна всюду, кроме точек $x_1,\ \ldots,\ x_n$, причем существуют пределы $f(x_1-0)$, $f(x_1+0)$, $\ldots$, $f(x_n-0)$, $f(x_n+0)$ (*Ч. М.*, § 100). Тогда интеграл функции $f(x)$ существует на каждом частичном интер-

*) Hardy [5].
**) Littlewood [2].

вале и интеграл по всему интервалу определяется как сумма интегралов по частичным интервалам:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \ldots + \int_{x_n}^{b} f(x)\,dx.$$

Напомним определение несобственного интеграла (*Ч. М.*, § 184). Если функция $f(x)$ интегрируема в интервале (a, x) при любом x и

$$\lim_{x\to\infty}\int_a^x f(t)\,dt = l,$$

то говорят, что несобственный интеграл $\int_a^{\infty} f(t)\,dt$ сходится и его значение есть l. Подобным же образом, если функция $f(t)$ стремится к бесконечности или колеблется при $x\to c$, но $\lim\limits_{x\to c}\int_a^x f(t)\,dt = l$, то мы полагаем интеграл функции $f(t)$ по интервалу (a, c) равным l (*Ч. М.*, § 187).

На эти случаи без всяких трудностей распространяются правила интегрирования по частям и подстановкой.

Некоторые признаки сходимости, такие как признак сравнения, для случая, когда функция $f(t)$ положительна, имеются в *Ч. М.*, § 185.

Пусть теперь $f(t)$ — функция произвольного знака. Если обе функции $f(t)$ и $|f(t)|$ интегрируемы в одном из уже указанных смыслов в любом интервале (a, x) и интеграл $\int_a^{\infty} |f(t)|\,dt$ сходится, то интеграл $\int_a^{\infty} f(t)\,dt$ называется *абсолютно сходящимся* (ср. *Ч. М.*, § 203).

Абсолютно сходящийся интеграл сходится. Действительно, если интеграл функции $|f(t)|$ сходится, то, как показывает признак сравнения, сходятся и интегралы функций

$$\varphi(t) = |f(t)| + f(t), \quad \psi(t) = |f(t)| - f(t)$$

(обе эти функции положительны). Следовательно, сходится и интеграл функции $\frac{1}{2}\{\varphi(t) - \psi(t)\} = f(t)$.

Это предложение верно и в случае, когда $f(t)$ — непрерывная комплексная функция: нужно рассмотреть порознь ее действительную часть и ее мнимую часть.

Интеграл, который сходится, но не сходится абсолютно, называется *условно сходящимся*.

Наиболее важные признаки условной сходимости интегралов являются аналогами признаков Дирихле и Абеля для рядов (*Ч. М.* § 196).

Аналог признака Дирихле. *Если функция* $\varphi(x)$ *имеет непрерывную производную и монотонно убывает до нуля при* $x \to \infty$, *а функция*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

ограничена, то интеграл $\int_a^\infty \varphi(x) f(x)\,dx$ *сходится.*

Интегрируя по частям (этот процесс является для интегралов аналогом того «суммирования по частям», с помощью которого обосновывается признак Дирихле), мы получаем равенство

$$\int_a^X \varphi(x) f(x)\,dx = \varphi(X) F(X) + \int_a^X \{-\varphi'(x)\} F(x)\,dx.$$

Первый член справа стремится к нулю при $X \to \infty$, интеграл же справа абсолютно сходится согласно признаку сравнения: функция $|F(x)|$ ограничена, функция $-\varphi'(x)$ неотрицательна, и

$$\int_a^X \{-\varphi'(x)\}\,dx = \varphi(a) - \varphi(X) \to \varphi(a).$$

Этим теорема доказана.

Примеры. (I) Интегралы $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$, $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x}\,dx$ являются условно сходящимися.

(II) Сформулировать и доказать для интегралов аналог признака Абеля.

Укажем, наконец, *необходимое и достаточное условие* сходимости интеграла $\int_a^\infty f(x)\,dx$; оно требует, чтобы для заданного ε можно было найти такое X_0, что

$$\left| \int_X^{X'} f(x)\,dx \right| < \varepsilon,$$

если $X' > X \geqslant X_0$. Оно может быть обосновано так же, как соответствующее условие для рядов (*Ч. М.*, §§ 83, 84), или выведено из последнего.

Примеры. (I) Воспользоваться этим условием для доказательства того, что абсолютно сходящийся интеграл сходится.

(II) Получить признак сходимости Дирихле с помощью этого принципа и второй теоремы о среднем значении (*Ч. М.*, § 166, примеры 11, 12).

1.5.1. Равномерная сходимость несобственных интегралов. Теперь мы можем распространить на несобственные интегралы понятие равномерной сходимости. Пусть $f(x, y)$ — интегрируемая функция от x в интервале $a \leqslant x \leqslant b$ при $\alpha \leqslant y \leqslant \beta$ и любом значении b. Предположим, что интеграл

$$\varphi(y) = \int_a^\infty f(x, y)\, dx$$

сходится для всех значений y в интервале (α, β). *Этот интеграл называется равномерно сходящимся, если для всякого ε можно найти такое число X_0, зависящее от ε, но не от y, что*

$$\left| \varphi(y) - \int_a^X f(x, y)\, dx \right| < \varepsilon \qquad (X \geqslant X_0).$$

Подобным же образом определяется равномерная сходимость для интегралов, которые являются несобственными из-за того, что подынтегральная функция становится в интервале интегрирования бесконечной.

Простейший признак равномерной сходимости является аналогом признака § 1.1.1, относящегося к рядам. *Предыдущий интеграл заведомо равномерно сходится, если существует такая положительная функция $g(x)$, не зависящая от y, что $|f(x, y)| \leqslant g(x)$ для всех значений x и y и что интеграл $\int_a^\infty g(x)\, dx$ сходится.*

Это можно доказать так же, как упомянутую теорему о рядах.

Подобным же образом могут быть модифицированы и другие признаки. Например, если в признаке Дирихле f и φ — функции от x и y, то мы предполагаем, что производная $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ непрерывна, что φ стремится к нулю монотонно и равномерно относительно y и что $|F|$ меньше постоянной, не зависящей от x и y. Тогда интеграл от φf равномерно сходится.

Примеры. (I) Исследовать сходимость интеграла

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt.$$

[Предположим сначала, что значение x вещественно. Интеграл сходится у своего правого предела для всех значений x (функция $t^{x+1}e^{-t}$ ограничена при любом x, что позволяет сравнить этот интеграл с интегралом от $1/t^2$); но чтобы обеспечить сходимость у левого конца, нужно предположить, что $x > 0$ (*Ч. М.*, § 187).

Интеграл сходится равномерно в каждом конечном интервале $a \leqslant x \leqslant b$ с $a > 0$. Чтобы доказать это, мы разбиваем интеграл на два интеграла, распространенные на интервалы $(0, 1)$ и $(1, \infty)$, и сравниваем эти интегралы с интегралами

$$\int_0^1 t^{a-1}\,dt, \quad \int_1^\infty t^{b-1}e^{-t}\,dt,$$

которые сходятся и не зависят от x.

Подобным же образом при комплексном x интеграл равномерно сходится во всякой конечной области, в которой всюду $\operatorname{Re}(x) \geqslant a > 0$; действительно, если $x = \xi + i\eta$, то $|t^{x-1}| = t^{\xi-1}$, что позволяет повторить предыдущие аргументы.]

(II) Интеграл $\int\limits_0^\infty \frac{\sin xy}{x^s}\,dx$ абсолютно сходится при $1 < s < 2$ и любом y. При фиксированном значении s из этого интервала он сходится равномерно в любом интервале $0 < \alpha \leqslant y \leqslant \beta$.

Он сходится условно при $0 < s \leqslant 1$, $y > 0$ и равномерно при $0 < \alpha \leqslant y \leqslant \beta$, если $0 < s \leqslant 1$.

При фиксированном $y > 0$ он сходится абсолютно и равномерно в любом интервале $1 < s_1 \leqslant s \leqslant s_2 < 2$ и равномерно, но не абсолютно, в любом интервале $0 < s_1 \leqslant s \leqslant 1$.

1.5.2. Теорема о непрерывности. В этом параграфе мы докажем для интегралов аналог теоремы, утверждающей, что сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций непрерывна.

Нам потребуется следующая теорема о непрерывных функциях двух переменных, подобная теореме о функциях одного переменного, доказанной в *Ч. М.*, § 107.

Пусть $f(x, y)$ — функция от x и y, определенная и непрерывная в прямоугольнике $a \leqslant x \leqslant b$, $\alpha \leqslant y \leqslant \beta$. Тогда для всякого ε существует такое разбиение прямоугольника на конечное число частичных прямоугольников $x_\mu \leqslant x \leqslant x_{\mu+1}$, $y_\nu \leqslant y \leqslant y_{\nu+1}$, что для любых двух точек (x, y) и (ξ, η), лежащих в одном и том же частичном прямоугольнике,

$$|f(x, y) - f(\xi, \eta)| < \varepsilon.$$

Мы докажем это методом подразделения. Предположим, что сам заданный прямоугольник не обладает требуемым свойством. Тогда, если мы разделим его прямыми $x = \frac{1}{2}(a + b)$, $y = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ на четыре прямоугольника, то по крайней мере один из них также не будет обладать этим свойством. Пометим его, если он один; если же он не один, пометим один из имеющихся — чтобы дать определенное правило, расположим все четыре прямоугольника в определенном порядке (скажем, левый нижний, левый верхний, правый нижний, правый верхний), — и выберем первый, не обладающий требуемым свойством.

После этого мы таким же образом разделим на четыре части выбранный прямоугольник и продолжим этот процесс подразделения неограниченно, каждый раз выбирая одну четвертушку, не обладающую требуемым свойством. Абсциссы левых сторон выбранных прямоугольников образуют возрастающую последовательность, а абсциссы правых сторон — убывающую последовательность, так что каждая из этих последовательностей имеет предел. Этот предел — общий, так как длина стороны стремится к нулю; обозначим его через X. Подобным же образом ординаты верхних и нижних сторон выбранных прямоугольников стремятся к некоторому пределу Y.

Воспользуемся теперь тем фактом, что функция $f(x, y)$ непрерывна в точке (X, Y). По заданному ε мы можем найти такое δ, что

$$|f(x, y)-f(X, Y)|<\frac{1}{2}\varepsilon \qquad (|x-X|<\delta, \ |y-Y|<\delta)$$

и что, следовательно, $|f(x, y)-f(\xi, \eta)|<\varepsilon$, если обе точки (x, y), (ξ, η) лежат в квадрате с центром (X, Y) и стороной 2δ. Таким образом, прямоугольники, выбранные при построении, обладают требуемым свойством, если они лежат в этом квадрате, а они, начиная с некоторого, действительно в нем лежат. Мы получили противоречие, которое и доказывает теорему.

Из нее мы выведем следующий важный факт: *каково бы ни было ε, можно найти такое δ, что*

$$|f(x, y)-f(\xi, \eta)|<\varepsilon,$$

если $|x-\xi|<\delta$ и $|y-\eta|<\delta$; δ зависит только от ε, но не от x, y, ξ или η.

Разобьем прямоугольник так, чтобы для любых двух точек (x, y) и (ξ, η) из одного и того же частичного прямоугольника было выполнено неравенство $|f(x, y)-f(\xi, \eta)|<\frac{1}{2}\varepsilon$. Пусть δ — длина наименьшей из сторон частичных прямоугольников. Тогда δ есть нужное число. Действительно, если $|x-\xi|<\delta$ и $|y-\eta|<\delta$, то точки (x, y) и (ξ, η) лежат либо в одном и том же частичном прямоугольнике, либо в двух соседних прямоугольниках, и в обоих случаях $|f(x, y)-f(\xi, \eta)|<\varepsilon$.

Обычно это предложение формулируют короче: *функция двух переменных, непрерывная в прямоугольнике (включая границу), равномерно непрерывна в нем.*

Теперь мы можем заняться свойствами интеграла.

Если $f(x, y)$ — функция, определенная и непрерывная в прямоугольнике $a\leqslant x\leqslant b$, $\alpha\leqslant y\leqslant\beta$, то

$$\varphi(y)=\int_a^b f(x, y)\,dx$$

есть непрерывная функция от y в интервале (α, β).

Действительно,

$$\varphi(y+k)-\varphi(y)=\int_a^b \{f(x,\ y+k)-f(x,\ y)\}\,dx,$$

и по заданному ε мы можем найти такое k_0, что

$$|f(x,\ y+k)-f(x,\ y)|\leqslant\varepsilon \qquad (|k|<k_0)$$

для всех значений x и y. Следовательно,

$$|\varphi(y+k)-\varphi(y)|\leqslant\varepsilon(b-a) \qquad (|k|<k_0),$$

что и завершает доказательство.

Если функция $f(x,\ y)$ непрерывна в прямоугольнике $a\leqslant x\leqslant b$, $\alpha\leqslant y\leqslant\beta$ при любом значении b и интеграл

$$\varphi(y)=\int_a^\infty f(x,\ y)\,dx$$

сходится равномерно относительно y в интервале $(\alpha,\ \beta)$, то $\varphi(y)$ есть непрерывная функция от y в этом интервале.

Мы можем написать:

$$|\varphi(y+k)-\varphi(y)|=\left|\int_a^\infty \{f(x,\ y+k)-f(x,\ y)\}\,dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\int_a^X \{f(x,\ y+k)-f(x,\ y)\}\,dx\right|+$$

$$+\left|\int_X^\infty f(x,\ y+k)\,dx\right|+\left|\int_X^\infty f(x,\ y)\,dx\right|.$$

По заданному ε можно найти такое X_0, что при $X>X_0$ и любом k каждый из двух последних членов меньше ε; если же X фиксировано, то, в силу предыдущей теоремы, первый член справа стремится к нулю вместе с k. Этим теорема доказана.

В последних теоремах непрерывность функции $\varphi(y)$ в концевых точках α и β понимается как односторонняя; например, $\varphi(y)\to\varphi(\alpha)$ при $y\to\alpha$ справа.

Примеры. (I). Если интеграл $\int_0^\infty f(x)\,dx$ сходится, то интеграл $\int_0^\infty e^{-xy}f(x)\,dx$ равномерно сходится при $0\leqslant y\leqslant\beta$ и, таким образом, непрерывен при $y=0$.

[Это — аналог для интегралов теоремы Абеля о степенных рядах. Доказательство может быть проведено следующим образом.

Положим $F(x)=\int\limits_x^\infty f(t)\,dt$, так что $F(x)\to 0$ при $x\to\infty$. Пусть $|F(x)|<\varepsilon$ при $x>X_0$. Тогда

$$\left|\int\limits_X^{X'} f(x)e^{-xy}\,dx\right|=\left|F(X)e^{-Xy}-F(X')e^{-X'y}-y\int\limits_X^{X'}F(x)e^{-xy}\,dx\right|\leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon+\varepsilon+y\varepsilon\int\limits_X^{X'}e^{-xy}\,dx<3\varepsilon$$

при $X'>X>X_0$ и $y\geqslant 0$.]

(II) Интеграл $\int\limits_0^\infty \frac{\sin xy}{x}\,dx$ сходится при любом y; однако он не сходится в окрестности точки $y=0$ равномерно, так как он разрывен в этой точке.

[Чтобы доказать это, заметим, что интеграл: (a) постоянен при $y>0$ (полагаем $x=u/y$); (b) положителен при $y=1$ (представляем его в виде ряда

$$\sum\int\limits_{(n-1)\pi}^{n\pi}\frac{\sin x}{x}\,dx,$$

с убывающими членами переменного знака); (c) является нечетной функцией от y.

Можно доказать прямо, что он не сходится равномерно, рассматривая «остаток»

$$\int\limits_X^\infty \frac{\sin xy}{x}\,dx=\int\limits_{Xy}^\infty \frac{\sin u}{u}\,du$$

и полагая, например, $X=\pi/y$.

Значение этого интеграла будет найдено позже (§ 1.7. 6).]

1.6. Двойные ряды. Двойной ряд состоит из членов, расположенных в двойном порядке, т. е. имеет вид $\sum a_{m,n}$, где каждый из индексов m, n изменяется от 1 до ∞. Не существует единственного стоящего вне конкуренции метода суммирования такого ряда, подобного «$\lim s_n$»-методу, которым пользуются для простых рядов. Образовывать частичные суммы ряда можно множеством различных способов, и каждый способ дает метод суммирования ряда. Мы можем, например, рассмотреть «прямоугольные» суммы $\sum\limits_{m=1}^{M}\sum\limits_{n=1}^{N}a_{m,n}$ и заставить M и N стремиться к бесконечности различными способами. Мы можем также рассмотреть суммы, взятые по треугольным областям, такие как $\sum\limits_{m+n\leqslant N}a_{m,n}$. Наконец, мы можем превратить двойной ряд в «повторный» ряд, образуя сначала суммы $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{m,n}$ и находя затем сумму этих сумм.

Мы записываем этот повторный ряд как $\sum_{m=1} \sum_{n=1} a_{m,n}$; внутренняя сумма должна быть найдена первой. Он называется «суммой строк». Если мы выберем противоположный порядок, то получим повторный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n}$, называемый «суммой столбцов».

1.6.1. Двойные ряды с положительными членами. *Если все члены двойного ряда положительны, то все методы суммирования равносильны: либо мы получаем конечный предел, один и тот же во всех случаях, либо при любом методе суммирования ряд расходится к положительной бесконечности.*

Мы докажем это, рассматривая имеющиеся возможности.

Будем называть любое множество числовых пар (m, n) областью. Пусть $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$ — последовательность конечных областей, каждая из которых содержит предыдущую, и пусть, как бы велико ни было N, Δ_p содержит квадрат $m \leqslant N$, $n \leqslant N$, если p достаточно велико.

Возможны два случая: конечные суммы

$$a_{m_1, n_1} + a_{m_2, n_2} + \ldots + a_{m_k, n_k},$$

выбранные из ряда произвольным образом, могут иметь верхнюю грань, скажем G, и могут не иметь ее. В первом случае

$$\sum_{\Delta_p} a_{m,n} \leqslant G$$

для всех значений p, и, с другой стороны, для заданного ε можно найти конечную сумму, бо́льшую $G-\varepsilon$. Так как Δ_p содержит все члены этой суммы, если p достаточно велико, то при достаточно большом p

$$\sum_{\Delta_p} a_{m,n} > G - \varepsilon.$$

Поскольку $\sum_{\Delta_p} a_{m,n}$ не убывает, это значит, что $\lim_{p \to \infty} \sum_{\Delta_p} a_{m,n} = G$, т. е. что при суммировании любым способом рассматриваемого вида ряд сходится и его сумма равна G. В согласии с этим в первом случае ряд называется *сходящимся*; указывать выбор последовательности областей нет необходимости.

Во втором случае для всякого положительного числа H существует конечная сумма $a_{m_1, n_1} + \ldots + a_{m_k, n_k}$, превосходящая H. Так как можно найти такое p, что Δ_p содержит все члены этой суммы, то при достаточно большом p

$$\sum_{\Delta_p} a_{m,n} > H.$$

Следовательно,

$$\sum_{\Delta_p} a_{m,n} \to \infty.$$

В этом случае ряд называется *расходящимся.*

Эти два случая являются единственными возможными. Так как результат не зависит от выбора рассматриваемых областей Δ_p, то для *конечных* частичных сумм теорема доказана.

Повторные ряды пока не охватываются нашими рассмотрениями. Чтобы охватить их, мы должны заменить наши конечные области Δ_p бесконечными областями.

Предположим сначала, что двойной ряд сходится. Пусть D — произвольная область, конечная или бесконечная. Положим $b_{m,n} = a_{m,n}$, если (m, n) есть точка области D, и $b_{m,n} = 0$ в противном случае. Очевидно, ряд $\sum b_{m,n}$ сходится, и мы полагаем $\sum\limits_{D} a_{m,n} = \sum b_{m,n}$. Ясно, что

$$\sum_{D} a_{m,n} \leqslant G.$$

Пусть теперь D_1, D_2, ... — последовательность не обязательно конечных областей, в остальном обладающая теми же свойствами, что и последовательность Δ_1, Δ_2, ... Тогда

$$\sum_{D_p} a_{m,n} \leqslant G,$$

и можно доказать в точности так же, как выше для Δ_p, что

$$\sum_{D_p} a_{m,n} > G - \varepsilon \qquad (p \geqslant p_0).$$

Следовательно, $\lim\limits_{p\to\infty} \sum\limits_{D_p} a_{m,n} = G$. В частности, если мы возьмем в качестве D_p бесконечную область, определенную неравенством $m \leqslant p$, то увидим, что сумма строк равна G. Подобным же образом сумма столбцов равна G.

Предположим теперь, что двойной ряд расходится. Может случиться, что при некотором значении p ряд $\sum\limits_{D_p} a_{m,n}$ расходится. В этом случае процесс суммирования обрывается. Если же ряд $\sum\limits_{D_p}$ сходится при любом p, то, как выше, $\sum\limits_{D_p} a_{m,n} > H$ для любого H при $p \geqslant p_0(H)$. Следовательно,

$$\sum_{D_p} a_{m,n} \to \infty.$$

В частности, если двойной ряд расходится, то либо некоторый столбец расходится, либо все столбцы сходятся, но образуют расходящийся ряд. То же верно для строк.

1.6.2. Поскольку случай повторных рядов особенно интересен, мы дадим для него и другое доказательство.

Если $a_{m,n} \geqslant 0$, *то*

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n}; \tag{1}$$

это значит, что если одна часть равенства сходится, то сходится и другая и притом к той же сумме.

Предположим, например, что сходится левая часть. Это значит, что все ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{m,n}$ сходятся, скажем, к суммам A_m и что ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty} A_m$ сходится, скажем, к сумме S.

Так как $a_{m,n} \leqslant A_m$ для всех значений m и n, то, согласно признаку сравнения, ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty} a_{m,n}$ сходится при любом n. Обозначив его сумму через $A^{(n)}$, мы можем написать:

$$\sum_{n=1}^{N} A^{(n)} = \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{N} a_{m,n} \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} A_m = S.$$

Следовательно, ряд $\sum A^{(n)}$ сходится, и если его сумма есть S', то $S' \leqslant S$. Но теперь мы можем обратить все рассуждение и, начав со сходимости правой части, доказать, что $S \leqslant S'$. Следовательно, $S = S'$.

1.6.2.1. Вот еще одно доказательство. Предположим, что левая часть равенства (1) § 1.6.2 сходится. Тогда

$$\sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{N} a_{m,n}, \tag{1}$$

поскольку складывается только конечное число сходящихся рядов (их сходимость следует из сходимости ряда $\sum A_m$). Достаточно доказать теперь, что при $N \to \infty$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=N+1}^{\infty} a_{m,n} \to 0. \tag{2}$$

Действительно, левая часть, сложенная с правой частью равенства (1), дает S, и если она стремится к нулю, то левая часть равенства (1) стремится к S, а это и нужно установить.

Но соотношение (2) следует из теоремы § 1.1.4 о равномерной сходимости. Действительно, ряд (2) имеет вид $\sum\limits_{m=1}^{\infty} u_m(N)$. Он сходится равномерно относительно N, так как

$$|u_m(N)| \leqslant A_m$$

и ряд $\sum A_m$ сходится. Кроме того, $u_m(N) \to 0$ для каждого значения m, что и завершает доказательство.

Этот метод представляет интерес по следующей причине. В менее простых случаях, когда не все числа $a_{m,n}$ положительны, мы можем все-таки исходить из равенства (1) и, таким образом, редуцировать проблему к доказательству равенства (2). Последнее может быть доказано в этих случаях специальными приемами — см., например, § 1.6.6, пример (XVII).

1.6.3. Признак сравнения. Ряды с положительными и отрицательными членами. Укажем сначала на признак сравнения для двойных рядов с положительными членами: *если $a_{m,n} \leqslant b_{m,n}$ и ряд $\sum b_{m,n}$ сходится, то ряд $\sum a_{m,n}$ сходится.*

Доказательство мы предоставляем читателю.

Пусть теперь некоторые из чисел $a_{m,n}$ могут быть положительными, а некоторые отрицательными. Тогда *ряд $\sum b_{m,n}$ называется абсолютно сходящимся, если ряд $\sum |a_{m,n}|$ сходится.*

Положим $\alpha_{m,n} = a_{m,n}$, если $a_{m,n} \geqslant 0$, и $\alpha_{m,n} = 0$ в противном случае; положим $\beta_{m,n} = -a_{m,n}$, если $a_{m,n} < 0$, и $\beta_{m,n} = 0$ в противном случае. Так как $0 \leqslant \alpha_{m,n} \leqslant |a_{m,n}|$, $0 \leqslant \beta_{m,n} \leqslant |a_{m,n}|$, то, согласно признаку сравнения, ряды $\sum \alpha_{m,n}$, $\sum \beta_{m,n}$ сходятся, если ряд $\sum |a_{m,n}|$ сходится. Обозначим суммы этих рядов через α и β. В обозначениях § 1.6.1

$$\sum_{\Delta_p} a_{m,n} = \sum_{\Delta_p} \alpha_{m,n} - \sum_{\Delta_p} \beta_{m,n} \to \alpha - \beta.$$

То же можно написать, заменив конечную область Δ_p бесконечной областью D_p, только в этом случае равенство служит определением своей левой части.

«Сумма» $\alpha-\beta$ не зависит от выбора последовательности областей Δ_p или D_p. Мы выражаем этот факт словами: *ряд* $\sum a_{m,n}$ *сходится.* Таким образом, *абсолютно сходящийся двойной ряд сходится.*

На ряды этого типа может быть теперь распространен признак сравнения.

1.6.4. Ряды с комлексными членами. Пусть, наконец, $a_{m,n}$ — комплексные числа, скажем, $a_{m,n}=b_{m,n}+ic_{m,n}$. Ряд $\sum a_{m,n}$ и в этом случае называется абсолютно сходящимся, если ряд $\sum |a_{m,n}|$ сходится. Так как

$$|b_{m,n}|\leqslant|a_{m,n}|,\quad |c_{m,n}|\leqslant|a_{m,n}|,$$

то абсолютная сходимость ряда $\sum a_{m,n}$ влечет за собой абсолютную сходимость и, значит, сходимость рядов $\sum b_{m,n}$ и $\sum c_{m,n}$. Если b и c — суммы этих рядов, то

$$\sum_{\Delta_p\,(\text{или } D_p)} a_{m,n}=\sum_{\Delta_p} b_{m,n}+i\sum_{\Delta_p} c_{m,n}\to b+ic,$$

и говорят, что ряд $\sum a_{m,n}$ сходится; другими словами, *абсолютно сходящийся ряд с комплексными членами сходится.*

Все наши заключения о рядах с положительными членами могут быть теперь распространены на абсолютно сходящиеся ряды с комплексными членами.

1.6.5. Перемножение рядов. Пусть

$$a_0+a_1+a_2+\ldots,\quad b_0+b_1+b_2+\ldots$$

— два ряда. Результат перемножения этих рядов по правилу Коши есть ряд $c_0+c_1+c_2+\ldots$, в котором

$$c_n=a_0b_n+a_1b_{n-1}+\ldots+a_nb_0.$$

Это правило происходит из теории степенных рядов, где $a_n=\alpha_nx^n$, $b_n=\beta_nx^n$ и где в ряде, получающемся после перемножения, собирают вместе члены с одной и той же степенью x.

Если ряды $\sum\limits_0^\infty a_n$ *и* $\sum\limits_0^\infty b_n$ *абсолютно сходятся и их суммы равны* a *и* b, *то ряд* $\sum c_n$ *абсолютно сходится и его сумма равна* ab.

Это сразу следует из предыдущих теорем о двойных рядах. Действительно, двойной ряд $\sum a_mb_n$ абсолютно сходится. Его сумма по строкам или столбцам равна ab, и так как

$$\sum_{n=0}^{N} c_n=\sum_{m+n\leqslant N} a_mb_n,$$

то левая сумма тоже стремится к пределу ab.

Если ряды $\sum_0^\infty a_n$, $\sum_0^\infty b_n$, $\sum_0^\infty c_n$ *сходятся к суммам* a, b, c, *то* $c=ab$.

Мы применяем предыдущую теорему к рядам $\sum_0^\infty a_n x^n$, $\sum_0^\infty b_n x^n$, $\sum_0^\infty c_n x^n$, которые абсолютно сходятся при $0 \leqslant x < 1$, а затем заставляем x стремиться к 1 и пользуемся теоремой Абеля (§ 1.2.2).

1.6.6. Различные примеры, относящиеся к двойным и повторным рядам. (I) Если $|a_{m,n}| < Am^\alpha n^\beta$, где A, α, β — постоянные, и $|x| < 1$, $|y| < 1$, то ряд $\sum a_{m,n} x^m y^n$ абсолютно сходится.

(II) Если ряд $\sum a_{m,n} x_0^m y_0^n$ абсолютно сходится, то ряд $\sum a_{m,n} x^m y^n$ абсолютно сходится при $|x| \leqslant |x_0|$, $|y| \leqslant |y_0|$.

(III) Ряд $\sum m^{-\alpha} n^{-\beta}$ сходится при $\alpha > 1$, $\beta > 1$.

(IV) Ряд $\sum (m^2+n^2)^{-\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$.

[Сравнить часть ряда, в которой $m \leqslant n$, с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sum\limits_{m=1}^{n} n^{-2\alpha}$.]

То же верно для двойного ряда с такими же членами, но пределами суммирования $-\infty$, ∞; значения $m=0$, $n=0$ исключаются.

(V) Ряд $\sum (am^2+2bmn+cn^2)^{-\alpha}$ сходится, если $a > 0$, $b^2 < ac$ и $\alpha > 1$.

[Отношение $\dfrac{am^2+2bmn+cn^2}{m^2+n^2}$ имеет положительное наименьшее значение.]

(VI) Если отношение z/z' не вещественно и a не равно ни одному из чисел $-mz-nz'$, то ряд $\sum |a+mz+nz'|^{-\alpha}$ сходится при $\alpha > 2$.

(VII) Разлагая функцию

$$\log(1-2x\cos\theta+x^2) = \log(1-xe^{i\theta}) + \log(1-xe^{-i\theta})$$

в степенной ряд двумя способами, показать, что

$$\cos n\theta = 2^{n-1}\cos^n\theta - \frac{n}{1!}2^{n-3}\cos^{n-2}\theta + \frac{n(n-3)}{2!}2^{n-5}\cos^{n-4}\theta - \ldots$$

[Перестановка членов оправдывается теоремой о двойных рядах; применяется также теорема единственности степенного ряда (*Ч. М.*, § 201).]

(VIII) Если $|a| < 1$ и $|x| < 1$, то

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{a^n}{1+x^2a^{2n}} = e^a - x^2 e^{a^2} + x^4 e^{a^4} - \ldots$$

(IX) Если x не является отрицательным целым числом, то

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x(x+1)\ldots(x+n)} = e\left\{\frac{1}{x} - \frac{1}{1!}\frac{1}{(x+1)} + \frac{1}{2!}\frac{1}{(x+2)} - \ldots\right\}.$$

(X) Если $d(n)$ — число делителей числа n и $|x|<1$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{\infty} d(n) x^n.$$

(XI) Перемножение по Дирихле. Если ряды $\sum a_n n^{-s}$ и $\sum b_n n^{-s}$ абсолютно сходятся и $c_n = \sum_{pq=n} a_p b_q$, то

$$\sum a_n n^{-s} \cdot \sum b_n n^{-s} = \sum c_n n^{-s}.$$

В частности, $\{\zeta(s)\}^2 = \sum d(n) n^{-s}$.

(XII) Если

$$a_{m,n} = \begin{cases} 1 & \text{при } m=n+1 \text{ и } n=1, 2, \ldots, \\ -1 & \text{при } m=n-1 \text{ и } n=2, 3, \ldots, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

то $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n} \neq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n}$.

(XIII) Доказать то же, если $a_{m,n} = \frac{1}{m^2-n^2}$ $(m \neq n)$, $a_{m,n}=0$ $(m=n)$.

[Здесь (члены с $m=n$ опущены)

$$\sum_{m=1}^{\infty}{}' \frac{1}{m^2-n^2} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2n} \sum_{m=1}^{N}{}' \left(\frac{1}{m-n} - \frac{1}{m+n}\right) =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2n} \left(-\sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{1}{\nu} + \sum_{\nu=1}^{N-n} \frac{1}{\nu} - \sum_{\nu=n+1}^{N+n} \frac{1}{\nu} + \frac{1}{2n}\right) = \frac{3}{4n^2},$$

так что сумма столбцов и сумма строк равны соответственно $\pi^2/8$ и $-\pi^2/8$ *).]

(XIV) Если ряд $\sum |u_n|$ сходится, то произведение $\prod (1+u_n z)$ абсолютно и равномерно сходится во всякой конечной области и может быть преобразовано в степенной ряд по правилу

$$\prod (1+u_n z) = 1 + z \sum u_n + z^2 \sum_{m \neq n} \sum u_m u_n + \ldots$$

[Первая часть уже была доказана (§ 1.4.4), так что остается оправдать преобразование в ряд. Пусть значение z фиксировано. Положим:

$$P_N = \prod_1^N (1+|u_n||z_n|) = 1 + C_1^{(N)} |z| + \ldots + C_N^{(N)} |z|^N.$$

P_N сходится к некоторому пределу P, а $C_m^{(N)}$ при фиксированном m не убывает и не превосходит $P|z|^{-m}$; следовательно, и $C_m^{(N)}$ стремится к некоторому пределу, скажем C_m. Очевидно,

$$1 + \sum_{m=1}^{k} C_m^{(N)} |z|^m \leqslant P_N \leqslant 1 + \sum_{m=1}^{N} C_m |z|^m \qquad (k \leqslant N).$$

*) См. Hardy [3].

Заставляя стремиться к ∞ сначала N, а затем k, мы выводим из этого, что

$$P=1+\sum_{m=1}^{\infty} C_m |z|^m.$$

Положим $p_N=\prod_1^N (1+u_n z)=1+c_1^{(N)}z+\ldots+c_N^{(N)}z^N$. В силу очевидного обобщения теоремы об абсолютной сходимости на кратные ряды, $c_m^{(N)}$ стремится к некоторому пределу c_m, и ясно, что $\left|c_m-c_m^{(N)}\right|\leqslant C_m-C_m^{(N)}\leqslant C_m$. Следовательно, при $k\leqslant N$

$$\left|\sum_{m=1}^{\infty} c_m z^m-\sum_{m=1}^{N} c_m^{(N)} z^m\right|\leqslant \sum_{m=1}^{k}\left(C_m-C_m^{(N)}\right)|z|^m+\sum_{k+1}^{\infty} C_m|z|^m,$$

правую же часть можно сделать произвольно малой, взяв достаточно большим сначала k, а потом N. Это завершает доказательство.]

(XV) Из формулы $\dfrac{\sin x}{x}=\prod\limits_1^{\infty}\left(1-\dfrac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$ вывести, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}.$$

(XVI) Пусть запись $s_{m,n}\to s$ означает, что $|s_{m,n}-s|<\varepsilon$, если m и n больше $n_0=n_0(\varepsilon)$.

Показать, что если $s_{m,n}\to s$ и $\lim\limits_{n\to\infty} s_{m,n}$ существует для каждого m, то $\lim\limits_{m\to\infty}\left(\lim\limits_{n\to\infty} s_{m,n}\right)=s$.

[Прингсгеймом было доказано, что если двойной ряд $\sum a_{m,n}$ сходится к сумме s в том смысле, что

$$\sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu,\nu}\to s,$$

и простые ряды $\sum\limits_{m=1}^{\infty} a_{m,n}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{m,n}$ все сходятся, то сумма строк и сумма столбцов также равны s *).]

(XVII) Из формулы (*Ч. М.*, § 221) $1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\ldots=\dfrac{\pi}{4}$ вывести, что

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{8}.$$

[Это получается из равенства

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\left(m+\frac{1}{2}\right)\left(m+n+\frac{1}{2}\right)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\left(m+\frac{1}{2}\right)\left(m+n+\frac{1}{2}\right)}.$$

*) См. Bromwich, *Infinite Series*, § 30.

Его левая часть равна (полагаем $n=r-m$)

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m+\frac{1}{2}} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r+\frac{1}{2}} = \left(\frac{2}{\frac{1}{2}} - \frac{2}{\frac{3}{2}} + \ldots\right)^2 = \pi^2.$$

Далее, если $n \neq 0$, то

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(m+\frac{1}{2}\right)\left(m+n+\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{n} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{m+\frac{1}{2}} - \frac{1}{m+n+\frac{1}{2}}\right) = 0,$$

так что правая часть равна

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(m+\frac{1}{2}\right)^2} = 8\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots\right).$$

Остается поэтому оправдать обращение порядка суммирования. Соответствующий двойной ряд, очевидно, не сходится абсолютно, так что здесь нужен специальный прием.

При любом N

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-N}^{N} = \sum_{n=-N}^{N} \sum_{m=-\infty}^{\infty},$$

и потому (см. § 1.6.2.1) достаточно доказать, что при $N \to \infty$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=N+1}^{\infty} \to 0, \quad \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{-N-1} \to 0.$$

Рассмотрим первую сумму. Если $m \geqslant -N-1$, то

$$\left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{m+n+\frac{1}{2}} \right| < \frac{1}{m+N+\frac{3}{2}}.$$

Следовательно, соответствующая часть первой суммы по абсолютной величине меньше, чем

$$\sum_{m=-N-1}^{\infty} \frac{1}{\left|m+\frac{1}{2}\right|\left(m+N+\frac{3}{2}\right)} \leqslant \sum_{-N-1 \leqslant m \leqslant -\frac{1}{2}N-\frac{1}{2}} \frac{1}{\frac{1}{2}N\left(m+N+\frac{3}{2}\right)} +$$

$$+ \sum_{-\frac{1}{2}N-\frac{1}{2} \leqslant m \leqslant N}^{\infty} \frac{1}{\left|m+\frac{1}{2}\right| \frac{1}{2}N} + \sum_{N+1}^{\infty} \frac{1}{\left(m+\frac{1}{2}\right)^2},$$

и, таким образом, стремится к нулю. В остающейся части первой суммы

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{m+n+\frac{1}{2}} = (-1)^m \pi - \sum_{n=-\infty}^{N} \frac{(-1)^n}{m+n+\frac{1}{2}}.$$

Сумма членов, содержащих π, очевидно, стремится к нулю, последний же член аналогичен уже рассмотренному, так что соответствующая сумма тоже стремится к нулю.

Наконец, вторая сумма может быть оценена тем же способом, что и завершает доказательство.]

1.7. Интегрирование рядов. Закончив рассмотрение повторного суммирования, мы обращаемся теперь к ряду аналогичных проблем, в которых одно из суммирований заменено интегрированием. Поскольку конечный интеграл, в отличие от конечной суммы, уже сам по себе является пределом, эти рассмотрения будут в каждом случае на ступень сложнее.

Сначала мы рассмотрим почленное интегрирование ряда в конечном интервале.

1.7.1. *Равномерно сходящийся ряд непрерывных функций можно интегрировать почленно. Это значит, что если функции* $u_1(x)$, $u_2(x)$, ... *непрерывны и ряд* $u_1(x)+u_2(x)+\ldots$ *равномерно сходится в интервале* (a, b) *к сумме* $s(x)$, *то*

$$\int_a^b u_1(x)\,dx+\int_a^b u_2(x)\,dx+\ldots=\int_a^b s(x)\,dx.$$

Поскольку функция $s(x)$ непрерывна (§ 1.1.4), она интегрируема по Риману. Сумма первых n членов ряда интегралов в наших обычных обозначениях равна $\int_a^b s_n(x)\,dx$. Мы должны доказать поэтому, что

$$\int_a^b s_n(x)\,dx\to\int_a^b s(x)\,dx,$$

т. е. что $\int_a^b \{s(n)-s_n(x)\}\,dx\to 0$. Для заданного ε мы можем найти такое n_0, что

$$|s(x)-s_n(x)|<\varepsilon$$

при $n>n_0$ и всех значениях x. Следовательно (*Ч. М.*, § 165),

$$\left|\int_a^b \{s(x)-s_n(x)\}\,dx\right|<\varepsilon(b-a),$$

что и завершает доказательство.

Примеры. (I) Если $0<x<1$, то

$$\log\frac{1}{1-x}=\int_0^x\frac{dt}{1-t}=\int_0^x(1+t+t^2+\ldots)\,dt=x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\ldots$$

(II) Подобным же образом $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots$

(III) Доказать, что $\int\limits_0^1 \log \frac{1+x}{1-x} \frac{dx}{x} = \frac{\pi^2}{4}$.

[Воспользоваться теоремой Абеля о непрерывности.]

(IV) Показать, что если $r < 1$ и n — положительное целое число, то

$$\int\limits_0^\pi \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta + r^2} \cos n\theta \, d\theta = \pi r^n.$$

1.7.2. *Ряд можно дифференцировать почленно, если после дифференцирования получается равномерно сходящийся ряд непрерывных функций. Другими словами: пусть*

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots = s(x)$$

и функции $u_1(x)$, $u_2(x)$, ... имеют непрерывные производные; если ряд $u_1'(x) + u_2'(x) + \ldots$ равномерно сходится в интервале (a, b) к $f(x)$, то $f(x) = s'(x)$ при $a < x < b$.

Согласно предыдущей теореме второй ряд может быть проинтегрирован почленно в интервале (a, b), так что

$$\{u_1(x) - u_1(a)\} + \{u_2(x) - u_2(a)\} + \ldots = \int\limits_a^x f(x)\, dt.$$

Но левая часть равна также $s(x) - s(a)$. Следовательно,

$$s(x) - s(a) = \int\limits_a^x f(t)\, dt,$$

и так как функция $f(x)$ непрерывна, то $f(x) = s'(x)$.

Примеры. (I) Если $|x| < 1$, то

$$\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-k+1)\, x^{n-k} = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}.$$

(II) Если $s > 1$, то

$$\zeta'(s) = -\sum_{n=2}^{\infty} n^{-s} \log n.$$

1.7.3. *Вещественный степенной ряд можно интегрировать и дифференцировать внутри интервала сходимости любое число раз.* Другими словами, результат формального почленного интегрирования или дифференцирования верен, если мы находимся внутри интервала сходимости.

Пусть $f(x)=\sum\limits_{0}^{\infty} a_n x^n$ $(|x|<R)$. В силу теоремы о равномерной сходимости (§ 1.2.1) мы можем проинтегрировать этот ряд почленно. Мы получим равенство

$$\int\limits_a^x f(t)\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1} \qquad (|x|<R).$$

Поскольку для нового ряда интервал сходимости по крайней мере так же велик, как для исходного ряда, процесс можно повторить.

Почленное дифференцирование приводит к равенству

$$f'(x)=\sum_{1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Этот ряд также сходится при $|x|<R$. Действительно, если $0<\rho<R$, то $|a_n\rho^n|<K$, так что

$$|na_nx^{n-1}|=n\,|a_n\rho^n|\left|\frac{x^{n-1}}{\rho^n}\right|<\frac{K}{\rho}\,n\left(\frac{|x|}{\rho}\right)^{n-1}.$$

Сходимость ряда производных следует из этой оценки и равенства

$$\sum_{1}^{\infty} n\left(\frac{|x|}{\rho}\right)^{n-1}=\frac{1}{\left(1-\frac{|x|}{\rho}\right)^2}$$

в силу признака сравнения. Таким образом, ряд производных равномерно сходится во всяком замкнутом интервале, содержащемся в интервале $|x|<R$, и почленное дифференцирование оправдано. Процесс может быть, конечно, повторен.

Мы видим, в частности, что *функция, представимая степенным рядом, имеет производные всех порядков.*

Ясно также, что ни интегрирование, ни дифференцирование не может увеличить интервал сходимости, поскольку ни один из этих процессов не может его уменьшить, а процессы эти взаимно обратны.

Пример. Маклореновское разложение функции $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ по степеням x есть исходный ряд.

1.7.4. *Если при вещественных значениях* x

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (|x|<R),$$

то $f(x+h)$ *можно разложить при* $|x|<R$ *и* $|h|<R-|x|$ *в ряд Тейлора по степеням* h.

Формальное разложение имеет вид

$$f(x+h)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{h^m}{m!}f^{(m)}(x),$$

где, согласно предыдущей теореме,

$$f^{(m)}(x)=\sum_{n=m}^{\infty}n(n-1)(n-m+1)a_nx^{n-m}.$$

Чтобы обосновать это разложение, мы пишем:

$$\begin{aligned}f(x+h)&=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x+h)^n=\\&=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\sum_{m=0}^{n}\frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!}x^{n-m}h^m=\\&=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=m}^{\infty}a_n\frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!}x^{n-m}h^m=\\&=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{h^m}{m!}f^{(m)}(x).\end{aligned}$$

Обоснованию подлежит обращение порядка суммирования. Оно оправдывается абсолютной сходимостью, если сходится ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|\sum_{m=0}^{n}\frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!}|x|^{n-m}|h|^m=\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|(|x|+|h|)^n,$$

а он сходится, если $|x|+|h|<R$. Этим теорема доказана.

Заметим, что интервал сходимости нового ряда во всяком случае простирается до одного из концов интервала сходимости исходного ряда. Действительный интервал сходимости может и не быть больше, как, например, в случае ряда

$$f(x)=\frac{1}{1-x^2}=1+x^2+x^4+\ldots$$

Но он может простираться и дальше; например, если

$$f(x)=\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\ldots,$$

то

$$f^{(m)}(x)=\frac{(-1)^m m!}{(1+x)^{m+1}},$$

и, полагая $x = 1/2$, мы получаем разложение

$$f\left(\frac{1}{2}+h\right) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{2}{3}\right)^{m+1} h^m,$$

действительное при $|h| < 3/2$.

Невозможно дать удовлетворительное объяснение этого феномена, рассматривая только *вещественные* степенные ряды, и мы должны отложить дальнейшее обсуждение вопроса до того времени, когда мы познакомимся с функциями комплексного переменного.

1.7.5. Ряды, которые нельзя интегрировать почленно. Простой пример такого ряда получится, если мы положим

$$s_n(x) = n^2 x (1-x)^n \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1).$$

Здесь $s(x) = 0$ для всех значений x, и потому

$$\int_0^1 s(x)\,dx = 0.$$

Но $\int_0^1 s_n(x)\,dx = \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} \to 1$, так что почленное интегрирование дает неверный результат. Конечно, ряд не сходится равномерно.

С другой стороны, равномерная сходимость не является необходимым условием возможности почленного интегрирования. Некоторые из неравномерно сходящихся рядов § 1.3, например, ряды, для которых

$$s_n(x) = \frac{1}{1+nx}, \quad s_n(x) = nx(1-x)^n,$$

можно интегрировать почленно.

Это приводит к рассмотрению более широких классов рядов, допускающих почленное интегрирование.

1.7.6. Ограниченно сходящиеся ряды. *Ряд*

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots$$

называется ограниченно сходящимся в интервале (a, b), *если он сходится при всех значениях* x *в этом интервале и существует такая постоянная* M, *что* $|s_n(x)| \leqslant M$ *для всех значений* n *и* x $(a \leqslant x \leqslant b)$.

Ясно, что сумма ограниченно сходящегося ряда ограничена. Однако ограниченность сама по себе не может (пока что) обеспечить нам возможность почленного интегрирования, поскольку мы не умеем интегрировать ограниченные функции достаточно общего вида. Мы должны присоединить к ней другое условие.