Мы будем говорить, что ряд *равномерно сходится в интервале* (a, b) *вне окрестности точки* c, если он равномерно сходится в интервалах $(a, c-\delta)$, $(c+\delta, b)$, как бы мало ни было δ. Условия, при которых мы можем обосновать почленное интегрирование, состоят в следующем.

Если ряд равномерно сходится в интервале (a, b) *вне окрестностей конечного числа точек и, сверх того, ограниченно сходится во всем интервале, то его можно почленно интегрировать в этом интервале.*

Достаточно доказать это в предположении, что существует только одна исключительная точка, скажем, c. Пусть $|s_n(x)| \leqslant M$. Тогда и $|s(x)| \leqslant M$. Интеграл функции $s(x)$ существует в смысле § 1.5, и

$$\left|\int_a^b \{s(x)-s_n(x)\}\,dx\right| \leqslant \left|\int_a^{c-\delta} \{s(x)-s_n(x)\}\,dx\right| + \\ + \left|\int_{c+\delta}^b \{s(x)-s_n(x)\}\,dx\right| + \left|\int_{c-\delta}^{c+\delta} s(x)\,dx\right| + \left|\int_{c-\delta}^{c+\delta} s_n(x)\,dx\right| \leqslant \\ \leqslant \left|\int_a^{c-\delta}\right| + \left|\int_{c+\delta}^b\right| + 4\delta M.$$

Мы можем выбрать δ столь малым, чтобы последний член был меньше заданного ε, при фиксированном же δ два других члена стремятся к нулю в силу равномерной сходимости. Этим теорема доказана.

Возможны различные обобщения этой теоремы. Нет необходимости в том, чтобы ряд сходился равномерно в интервалах $(a, c-\delta)$ и $(c+\delta, b)$, если почленное интегрирование в этих интервалах может быть оправдано другим путем. Более важное замечание состоит в том, что под знак интеграла можно ввести множитель $\varphi(x)$, который интегрируем, но не обязательно ограничен. Предположим, например, что функция $\varphi(x)$ непрерывна в интервале (a, b) всюду, за исключением точки $x=a$, в окрестности которой она не ограничена, и что $\int_a^b |\varphi(x)|\,dx$ существует как несобственный интеграл. Тогда ряд можно умножить на $\varphi(x)$ и проинтегрировать почленно. Действительно,

$$\left|\int_a^{a+\delta} \{s(x)-s_n(x)\}\,\varphi(x)\,dx\right| < 2M\int_a^{a+\delta} |\varphi(x)|\,dx.$$

Правая часть меньше произвольно заданного ε, если δ достаточно мало, интеграл же по интервалу $(a+\delta, b)$ может быть оценен, как выше.

Заметим, наконец, что позже, когда мы разовьем теорию интеграла Лебега, мы сможем придать всем этим теоремам гораздо более удовлетворительный вид. Ограничения, относящиеся к непрерывности и равномерной сходимости, нужны лишь постольку, поскольку мы ограничиваемся интегралом Римана, и исчезают в окончательной формулировке теоремы.

Примеры. (I) Ряды, для которых

$$s_n(x)=\frac{1}{1+nx}, \qquad s_n(x)=nx(1-x)^n \qquad (0\leqslant x\leqslant 1),$$

ограниченно сходятся.

(II) Рассмотрим ряд $\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}+\ldots$ В силу одного из общих признаков (см. § 1.1.2, пример (I)), этот ряд равномерно сходится вне окрестностей точек $x=0,\ \pm 2\pi,\ \pm 4\pi,\ \ldots$. Чтобы показать, что он сходится ограниченно, и найти его сумму, мы воспользуемся более специальным приемом.

Так как каждый член ряда имеет период 2π, то достаточно рассмотреть интервал $0\leqslant x<2\pi$. В нем

$$s_n(x)=\int_0^x(\cos t+\cos 2t+\ldots+\cos nt)\,dt=\int_0^x\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t-\sin\frac{1}{2}t}{2\sin\frac{1}{2}t}\,dt=$$

$$=\int_0^x\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{t}\,dt+\int_0^x\left(\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}t}-\frac{1}{t}\right)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt-\frac{1}{2}x=$$

$$=\int_0^{\left(n+\frac{1}{2}\right)x}\frac{\sin u}{u}\,du+\int_0^x\left(\frac{2}{2\sin\frac{1}{2}t}-\frac{1}{t}\right)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt-\frac{1}{2}x.$$

Но интеграл $\int_0^h\frac{\sin u}{u}\,du$ всегда положителен и имеет абсолютный максимум при $h=\pi$ (*Ч. М.*, § 188, пример LXXVI, 9). Следовательно, при $0\leqslant x\leqslant\pi$

$$|s_n(x)|\leqslant\int_0^\pi\frac{\sin u}{u}\,du+\int_0^\pi\left(\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}t}-\frac{1}{t}\right)dt+\frac{1}{2}\pi,$$

а так как все члены ряда нечетны, то это неравенство верно и в интервале $(-\pi,\ 0)$.

Чтобы просуммировать ряд, фиксируем x в интервале $0<x<2\pi$ и заставим n стремиться к бесконечности. Существование предела

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\left(n+\frac{1}{2}\right)x}\frac{\sin u}{u}\,du=\int_0^\infty\frac{\sin u}{u}\,du$$

уж было установлено (§ 1.5). Обозначим последний интеграл через I. Мы можем написать:

$$\int_0^x \left(\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}t} - \frac{1}{t}\right)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt = -\left(\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}x} - \frac{1}{x}\right)\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{n+\frac{1}{2}} +$$

$$+\frac{1}{n+\frac{1}{2}}\int_0^x \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}t} - \frac{1}{t}\right)\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt.$$

Правая часть стремится к нулю благодаря множителю $n+\frac{1}{2}$ в знаменателе другие множители ограничены), так что для суммы ряда получается формула

$$s(x) = I - \frac{1}{2}x \qquad (0 < x < 2\pi),$$

Но, очевидно, $s(\pi) = 0$ и, таким образом, $I = \frac{1}{2}\pi$. Это дает одновременно сумму ряда и значение несобственного интеграла.

Читателю следует начертить график суммы ряда, обратив внимание на разрывы в точках $x=0$, $\pm 2\pi$, $\pm 4\pi$, ... [см. также гл. XIII, пример 11].

(III) Доказать, что предыдущий ряд ограниченно сходится, не пользуясь интегралами, а применяя метод, подобный методу § 1.1.3.1.

(IV) Просуммировать ряд $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots$, интегрируя предыдущий ряд по интервалу $(0, \pi)$.

(V) Доказать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi x}{2} + \frac{x^2}{4} \qquad (0 < x < \pi).$$

1.7.7. Почленное интегрирование в случае несобственных интегралов. Мы переходим к более сложной ситуации, когда область интегрирования бесконечна или функции становятся бесконечными в области интегрирования. В обоих случаях результаты аналогичны тем, которые были получены для повторных рядов. Ради удобства мы собрали их в одной теореме.

Пусть $u_n(x) \geqslant 0$ для всех значений n и x, и пусть

$$\int_a^c \left\{\sum u_n(x)\right\} dx = \sum \int_a^c u_n(x)\,dx \tag{1}$$

для всех значений c, меньших b, в первом случае и для всех конечных значений c во втором случае. Тогда

$$\int_a^b \left\{\sum u_n(x)\right\} dx = \sum \int_a^b u_n(x)\,dx \tag{2}$$

в первом случае и

$$\int_a^{\infty}\left\{\sum u_n(x)\right\}dx=\sum\int_a^{\infty}u_n(x)\,dx \tag{2a}$$

во втором случае, если только одна из двух частей равенства сходится.

Доказательство — одно и то же в обоих случаях. Мы рассмотрим случай конечного интервала (a, b).

Предположим, что ряд в правой части равенства (2) сходится, и пусть $\sum\int_a^b u_n(x)\,dx=S$. Так как $u_n(x)\geqslant 0$, то

$$\int_a^c\left\{\sum u_n(x)\right\}dx=\sum\int_a^c u_n(x)\,dx\leqslant S$$

для всех значений c, меньших b. Следовательно (см. *Ч. М.*, § 185), интеграл в левой части равенства (2) существует как несобственный в точке b, и если его значение есть I, то $I\leqslant S$. С другой стороны,

$$\sum_{n=1}^{N}\int_a^b u_n(x)\,dx=\int_a^b\left\{\sum_1^N u_n(x)\right\}\leqslant\int_a^b\left\{\sum_1^{\infty}u_n(x)\right\}dx=I.$$

Заставляя N стремиться к бесконечности, мы видим, что $S\leqslant I$. Следовательно, $S=I$.

В случае, когда сходящейся предполагается левая часть равенства (2) или (2a), доказательство аналогично. Детали мы оставляем читателю.

Как и в случае рядов, можно отбросить условие положительности, предположив, что одна из частей равенства 2 или (2a) сходится абсолютно, т. е. остается сходящейся после замены функций $u_n(x)$ их модулями.

Предыдущая теорема сохраняет силу для любых вещественных или комплексных функций $u_n(x)$, если сходится одно из выражений

$$\int_a^b\left\{\sum|u_n(x)|\right\}dx,\qquad \sum\int_a^b|u_n(x)|\,dx$$

в первом случае и одно из выражений

$$\int_a^{\infty}\left\{\sum|u_n(x)|\right\}dx,\qquad \sum\int_a^{\infty}|u_n(x)|\,dx$$

во втором случае.

Из уже доказанной теоремы следует, что эти условия в обоих случаях равносильны. После этого остальное доказывается в точности так же, как для двойных рядов. Если $u_n(x)$ вещественны, то мы рассматриваем функции $|u_n(x)| \pm u_n(x)$, каждая из которых положительна. Если $u_n(x)$ комплексны, скажем, $u_n(x) = \alpha_n(x) + i\beta_n(x)$, то мы рассматриваем четыре функции $|u_n(x)| \pm \alpha_n(x)$, $|u_n(x)| \pm \beta_n(x)$, каждая из которых положительна.

1.7.8. Различные примеры почленного интегрирования.

(I) Доказать, что $\int\limits_0^1 \log \frac{1}{1-x}\, dx = 1$, разлагая подынтегральную функцию по степеням x и интегрируя ряд почленно. [Заметим, что в окрестности точки $x = 1$ ряд не сходится ни равномерно, ни даже ограниченно.]

(II) Мы можем написать, сначала формально:

$$\int\limits_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}\, dx = \int\limits_0^\infty \left\{\sum x^{s-1}e^{-nx}\right\} dx = \sum \int\limits_0^\infty x^{s-1}e^{-nx}\, dx =$$

$$= \sum n^{-s} \int\limits_0^\infty y^{s-1}e^{-y}\, dy = \sum n^{-s}\Gamma(s) = \Gamma(s)\,\zeta(s).$$

Обосновать эту процедуру: (*a*) для $s > 1$; (*b*) для комплексного s при $\operatorname{Re}(s) > 1$.

(III) Доказать, что $\int\limits_0^\infty e^{-ax}\cos bx\, dx = \frac{a}{a^2+b^2}$, разлагая $\cos bx$ по степеням x.

[При $\operatorname{Re}(a) > |b|$ процедура оправдывается абсолютной сходимостью, но равенство верно и в более широкой области.]

(IV) Доказать, что при $p > 0$

$$\int\limits_0^1 \frac{x^{p-1}}{1-x} \log\frac{1}{x}\, dx = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{(p+1)^2} + \ldots$$

(V) Доказать, что при $p > 0$

$$\int\limits_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x}\, dx = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} + \ldots$$

[Здесь признаки, связанные с абсолютной сходимостью, не помогают. Проинтегрировать по интервалу $(0, \xi)$ с $0 < \xi < 1$ и воспользоваться теоремой Абеля.]

(VI) Доказать, что

$$\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{sh} ax}{\operatorname{sh} bx}\, dx = \frac{\pi}{2b} \operatorname{tg} \frac{a\pi}{2b} \qquad (0 < a < b).$$

[Разложение по степеням функции e^{-bx} приводит к ряду

$$\sum \frac{2a}{(2n-1)^2 b^2 - a^2}.$$

По поводу его суммирования мы должны отослать читателя к гл. III.]

(VII) Доказать, что

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{ch} ax}{\operatorname{ch} bx}\,dx = \frac{\pi}{2b}\sec\frac{a\pi}{2b} \qquad (0<a<b).$$

[Общий признак не работает, но интеграл может быть вычислен на основе примера (V).]

(VIII) Показать, что если $u_n(x) = ae^{-nax} - be^{-nbx}$ $(0<a<b)$, то

$$\sum \int_0^\infty u_n(x)\,dx \neq \int_0^\infty \left\{\sum u_n(x)\right\} dx.$$

[Здесь $\sum \int\limits_0^\infty u_n(x)\,dx = \sum\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right) = 0$, но

$$\int_0^\infty \left\{\sum u_n(x)\right\} dx = \int_0^\infty \left(\frac{a}{e^{ax}-1} - \frac{b}{e^{bx}-1}\right) dx > 0$$

(подынтегральная функция положительна, поскольку функция $\frac{u}{e^u-1}$ монотонно убывает).

Нетрудно доказать прямо, что ряд $\sum \int\limits_0^\infty |u_n(x)|\,dx$ расходится.]

(IX) Рассмотрим интеграл $\int\limits_0^\infty e^{-x^{1/4}} \sin x^{1/4} \cos ax\,dx$. Здесь мы должны предвосхитить некоторые из результатов главы III. Если мы разложим $\cos ax$ по степеням x и произведем почленное интегрирование, то получим ряд

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n a^{2n}}{(2n)!} \int_0^\infty e^{-x^{1/4}} \sin x^{1/4} x^{2n}\,dx,$$

каждый член которого равен нулю (§ 3.1.2.5). Однако исходный интеграл не равен тождественно нулю (см. § 3.1.3).

Признак § 1.7.7 здесь не работает; действительно, заменяя $u_n(x)$ через $|u_n(x)|$, мы получаем интеграл

$$\int_0^\infty e^{-x^{1/4}} |\sin x^{1/4}| \operatorname{ch} ax\,dx,$$

который расходится.

1.7.9. В качестве последнего примера почленного интегрирования при специальных условиях мы докажем следующую теорему.

Степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^\infty a_n x^n$ *можно умножить на* e^{-x} *и проинтегрировать почленно в интервале* $(0, \infty)$, *если только полученный в результате интегрирования ряд сходится*)*.

*) Hardy [1], [6].

Иначе говоря,

$$\int_0^\infty e^{-x}\left\{\sum_{n=0}^\infty a_n x^n\right\}dx=\sum_{n=0}^\infty a_n\int_0^\infty e^{-x}x^n\,dx=\sum_{n=0}^\infty a_n n!,$$

если ряд $\sum a_n n!$ сходится. Мы должны оправдать обращение порядка интегрирования и суммирования.

Положим $a_n n! = b_n$. Так как ряд $\sum b_n$ сходится, то числа b_n ограничены, скажем, $|b_n| < B$, и

$$\left|\frac{b_n x^n}{n!}\right| < B\frac{X^n}{n!} \qquad (0\leqslant x\leqslant X).$$

Следовательно, ряд $\sum b_n \frac{x^n}{n!}$ равномерно сходится в интервале $(0, X)$, и мы можем умножить его на e^{-x} и почленно проинтегрировать в этом интервале. Таким образом,

$$\int_0^X e^{-x}\left\{\sum_{n=0}^\infty \frac{b_n x^n}{n!}\right\}dx=\sum_{n=0}^\infty \frac{b_n}{n!}\int_0^X e^{-x}x^n\,dx. \tag{1}$$

Поскольку ряд $\sum_{n=0}^\infty \frac{b_n}{n!}\int_0^\infty e^{-x}x^n\,dx=\sum_{n=0}^\infty b_n$ сходится, равенству (1) можно придать вид

$$\int_0^X e^{-x}\left\{\sum_{n=0}^\infty \frac{b_n x^n}{n!}\right\}dx=\sum_{n=0}^\infty b_n-\sum_{n=0}^\infty \frac{b_n}{n!}\int_X^\infty e^{-x}x^n\,dx, \tag{2}$$

и остается доказать, что последний член стремится к нулю при $X\to\infty$. Но

$$\int_X^\infty e^{-x}x^n\,dx=e^{-X}(X^n+nX^{n-1}+\ldots+n!),$$

так что этот член равен

$$e^{-X}\sum_{n=0}^\infty b_n\sum_{m=0}^n \frac{X^m}{m!}. \tag{3}$$

Положим $r_n=\sum_{\nu=n}^\infty b_\nu$. Так как $r_n\to 0$ при $n\to\infty$ и $b_n=r_n-r_{n+1}$, то

$$\sum_{n=0}^N b_n\sum_{m=0}^n \frac{X^m}{m!}=\sum_{n=0}^N (r_n-r_{n+1})\sum_{m=0}^n \frac{X^m}{m!}=$$

$$=\sum_{n=0}^N r_n\frac{X^n}{n!}-r_{N+1}\left(1+X+\ldots+\frac{X^N}{N!}\right).$$

При $N \to \infty$ последний член стремится к нулю, так что ряд (3) принимает вид $e^{-X} \sum\limits_{n=0}^{\infty} r_n \frac{X^n}{n!}$. Остальное просто. Для заданного положительного ε можно найти такое N, что $|r_n| < \varepsilon$ при $n > N$. Так как $|r_n| < A$ для всех значений n, то

$$\left| e^{-X} \sum_{n=0}^{\infty} r_n \frac{X_n}{n!} \right| < Ae^{-X} \sum_{0}^{N} \frac{X^n}{n!} + \varepsilon e^{-X} \sum_{N+1}^{\infty} \frac{X^n}{n!} < Ae^{-X} \sum_{0}^{N} \frac{X^n}{n!} + \varepsilon,$$

при фиксированном же N и достаточно большом X первый член справа также меньше ε. Этим теорема доказана.

1.8. Повторные интегралы. Гамма-функция. Повторный интеграл по своей сложности стоит на ступень выше ряда интегралов. Даже если пределы обоих интегрирований конечны, мы все-таки имеем здесь дело с двумя предельными переходами, и обращение их порядка требует обоснования. Если же пределы обоих интегралов бесконечны, то перед нами четыре последовательных предельных перехода.

1.8.1. Сначала мы рассмотрим непрерывные функции и конечные пределы.

Если $f(x, y)$ — непрерывная функция от x, y в прямоугольнике $a \leqslant x \leqslant b$, $\alpha \leqslant y \leqslant \beta$, то

$$\int_a^b dx \int_\alpha^\beta f(x, y)\, dy = \int_\alpha^\beta dy \int_a^b f(x, y)\, dx.$$

Так как функция $f(x, y)$ непрерывна, то

$$F(x) = \int_\alpha^\beta f(x, y)\, dy$$

есть непрерывная функция от x (§ 1.5.2). Мы можем проинтегрировать ее по интервалу (a, b), и результатом будет левая часть равенства. Подобным же образом имеет смысл и правая часть.

Чтобы доказать равенство, разделим интервалы интегрирований точками x_μ и y_ν ($a = x_0$, $b = x_m$, $\alpha = y_0$, $\beta = y_n$), подчиненными неравенствам $x_{\mu+1} - x_\mu < \delta$, $y_{\nu+1} - y_\nu < \delta$. Пусть $m_{\mu,\nu}$ и $M_{\mu,\nu}$ — нижняя и верхняя грани функции $f(x, y)$ в прямоугольнике $(x_\mu, x_{\mu+1}; y_\nu, y_{\nu+1})$. Тогда при $y_\nu \leqslant y \leqslant y_{\nu+1}$

$$m_{\mu,\nu}(x_{\mu+1} - x_\mu) \leqslant \int_{x_\mu}^{x_{\mu+1}} f(x, y)\, dx \leqslant M_{\mu,\nu}(x_{\mu+1} - x_\mu).$$

Интегрируя эти неравенства по y, мы видим, что

$$m_{\mu,\nu}(x_{\mu+1}-x_\mu)(y_{\nu+1}-y_\nu) \leqslant \int\limits_{y_\nu}^{y_{\nu+1}} dy \int\limits_{x_\mu}^{x_{\mu+1}} f(x, y)\,dx \leqslant$$
$$\leqslant M_{\mu,\nu}(x_{\mu+1}-x_\mu)(y_{\nu+1}-y_\nu),$$

суммирование же по μ и ν приводит к неравенствам

$$\sum\sum m_{\mu,\nu}(x_{\mu+1}-x_\mu)(y_{\nu+1}-y_\nu) \leqslant \int\limits_\alpha^\beta dy \int\limits_a^b f(x, y)\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \sum\sum M_{\mu,\nu}(x_{\mu+1}-x_\mu)(y_{\nu+1}-y_\nu).$$

Такие же неравенства верны для другого повторного интеграла. Но при $\delta \to 0$ разность между суммами стремится к нулю; действительно, для заданного ε существует столь малое δ, что наибольшая из разностей $M_{\mu,\nu}-m_{\mu,\nu}$ меньше ε, вследствие чего

$$\sum\sum (M_{\mu,\nu}-m_{\mu,\nu})(x_{\mu+1}-x_\mu)(y_{\nu+1}-y_\nu) \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon \sum\sum (x_{\mu+1}-x_\mu)(y_{\nu+1}-y_\nu) = \varepsilon(b-a)(\beta-\alpha).$$

Таким образом, повторные интегралы равны между собой.

1.8.2. Распространение на разрывные функции. Предположим сначала, что прямоугольник пересечен непрерывной монотонной кривой $y=\varphi(x)$ или $x=\psi(y)$ от $x=a$ до $x=c$, и пусть функция $f(x, y)$ непрерывна во всех точках, кроме точек этой кривой, и ограничена. Тогда повторные интегралы остаются равными.

Прежде всего, функция $F(x)$ остается непрерывной. Действительно,

$$F(x) = \int\limits_\alpha^{\varphi(x)} f(x, y)\,dy + \int\limits_{\varphi(x)}^\beta f(x, y)\,dy.$$

Обозначим эти интегралы через $F_1(x)$ и $F_2(x)$. Так как

$$F_1(x+h)-F_1(x) =$$
$$= \int\limits_\alpha^{\varphi(x)} \{f(x+h, y)-f(x, y)\}\,dy + \int\limits_{\varphi(x)}^{\varphi(x+h)} f(x+h, y)\,dy,$$

то $F_1(x+h)-F_1(x)$ стремится к нулю вместе с h. Следовательно, функция $F_1(x)$ непрерывна, и так же доказывается, что функция $F_2(x)$ непрерывна.

Таким образом, первый повторный интеграл определен. Точно так же определен второй повторный интеграл.

Чтобы доказать, что они равны, рассмотрим полосу

$$\varphi(x)-\eta < y < \varphi(x)+\eta$$

и предположим для определенности, что $\varphi(x)$ монотонно возрастает. Построим, как выше, прямоугольники $(x_\mu, x_{\mu+1}; y_\nu, y_{\nu+1})$ со сторонами, меньшими δ. Площадь, покрытая теми прямоугольниками, лежащими между прямыми $x=x_\mu$ и $x=x_{\mu+1}$, которые содержат точки указанной полосы, меньше, чем

$$(x_{\mu+1}-x_\mu)\left[\{\varphi(x_{\mu+1})+\eta\}-\{\varphi(x_\mu)-\eta\}+2\delta\right]<$$
$$<\delta\{\varphi(x_{\mu+1})-\varphi(x_\mu)\}+(x_{\mu+1}-x_\mu)(2\eta+2\delta);$$

общая же площадь прямоугольников, содержащих точки полосы, поэтому меньше, чем

$$\delta(\beta-\alpha)+(b-a)(2\eta+2\delta).$$

Следовательно, если $\sum_1$ обозначает суммирование по этим прямоугольникам и $|f(x, y)|\leqslant M$, то

$$\sum\nolimits_1 (M_{\mu,\nu}-m_{\mu,\nu})(x_{\mu+1}-x_\mu)(y_{\nu+1}-y_\nu)<$$
$$<2M\{\delta(\beta-\alpha)+(2\eta+2\delta)(b-a)\},$$

правая же часть произвольно мала вместе с η и δ. Наконец, так как функция $f(x, y)$ непрерывна в каждой из оставшихся областей, то при достаточно малом δ в остальных прямоугольниках

$$\max(M_{\mu,\nu}-m_{\mu,\nu})<\varepsilon,$$

и доказательство завершается, как выше.

Разумеется, эту теорему можно распространить на функции, которые имеют любое конечное число разрывов указанного типа. В частности, она применима к интегралу, взятому по непрямоугольной области, ограниченной кривыми указанного типа: такой интеграл можно трактовать как интеграл по прямоугольнику, в части которого, ограниченной кривыми, функция непрерывна, а в остальной части всюду равна нулю.

Укажем в заключение на следующее неравенство. Предположим, что функция $f(x, y)$ непрерывна, что $|f(x, y)|\leqslant M$ в некоторой области указанного типа и что $f(x, y)=0$ в остальных точках. Положим $F(x, y)=M$ в области и $F(x, y)=0$ в остальных точках. Тогда

$$\left|\int_\alpha^\beta dy\int_a^b f(x, y)\,dx\right|\leqslant\int_\alpha^\beta dy\int_a^b F(x, y)\,dx.$$

Читатель без труда выведет это из предыдущих рассмотрений.

1.8.3. Замена переменных в повторном интеграле. Формула, по которой заменяются переменные в повторном интеграле, может быть получена следующим образом. Рассмотрим интеграл

$$\int dy\int f(x, y)\,dx,$$

распространенный на некоторую область, и пусть

$$x=\varphi(u, v), \quad y=\psi(u, v).$$

Пусть эти функции таковы, что если y фиксировано, то x есть монотонная дифференцируемая функция от u. Заменив интегрирование по x интегрированием по u, мы получим равенство

$$\int f(x, y)\, dx=\int f \frac{dx}{du}\, du.$$

Но (см. *Ч. М.*, § 157)

$$\frac{dx}{du}=\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial u}, \quad 0=\frac{\partial\psi}{\partial u}+\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial u},$$

так что *)

$$\frac{dx}{du}=\frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\dfrac{\partial\psi}{\partial v}-\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\dfrac{\partial\psi}{\partial u}}{\dfrac{\partial\psi}{\partial v}}=\frac{\dfrac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)}}{\dfrac{\partial\psi}{\partial v}}.$$

Это позволяет представить повторный интеграл в виде

$$\int dy \int f \frac{\dfrac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)}}{\dfrac{\partial\psi}{\partial v}}\, du=\int du \int f \frac{\dfrac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)}}{\dfrac{\partial\psi}{\partial v}}\, dy,$$

если, конечно, порядок интегрирования может быть обращен. Наконец, рассматривая y как функцию от v (при фиксированном u) и предполагая эту функцию монотонной, мы можем написать $\frac{dy}{dv}=\frac{\partial\psi}{\partial v}$, после чего интеграл принимает вид

$$\int du \int F(u, v) \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)}\, dv,$$

где $F(u, v)=f\{\varphi(u, v), \psi(u, v)\}$.

Эта процедура законна, если, например, подынтегральная функция на каждом шаге непрерывна и область ограничена монотонными кривыми, как в § 1.8.2. В конкретных случаях необходима осторожность. Рассмотрим, например, интеграл

$$I=\int_0^a dy \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y)\, dx,$$

где $f(x, y)$ — непрерывная функция, и преобразуем его к полярным координатам r, θ, определяемым формулами $x=r\cos\theta$, $y=$

*) Относительно обозначения якобиана см. *Ч. М.*, гл. VII, Разные примеры, 15.

$=r\sin\theta$. Переходя сначала к переменным $(r,\ y)$, мы видим, что $x=\sqrt{r^2-y^2}$ и $\frac{dx}{dr}=\frac{r}{\sqrt{r^2-y^2}}$. Чтобы обойти трудность, связанную с обращением этой производной в ∞ (при $r=y$), рассмотрим вместо I интеграл

$$I_\delta=\int\limits_0^{\sqrt{a^2-\delta^2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x,\ y)\,dx,$$

$(0<\delta<a)$. Переходя в нем сначала к переменным $(r,\ y)$, а затем к переменным $(r,\ \theta)$, мы получаем предыдущим методом равенство

$$I_\delta=\int\limits_\delta^a r\,dr \int\limits_0^{\arccos(\delta/r)} f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)\,d\theta.$$

Если теперь $\delta\to 0$, то $I_\delta\to I$, а интеграл справа стремится к

$$\int\limits_0^a r\,dr \int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)\,d\theta.$$

То и другое легко доказывается при помощи неравенства, указанного в конце § 1.8.2 *).

1.8.4. Повторные интегралы. Один из интервалов бесконечен. Здесь наиболее важная теорема аналогична теореме о почленном интегрировании равномерно сходящихся рядов.

Пусть

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_\alpha^\beta f(x,\ y)\,dy=\int\limits_\alpha^\beta dy \int\limits_a^b f(x,\ y)\,dx$$

для всех значений b, больших чем a, и пусть интеграл $\int\limits_a^\infty f(x,\ y)\,dx$ равномерно сходится при $\alpha\leqslant y\leqslant\beta$. Тогда

$$\int\limits_a^\infty dx \int\limits_\alpha^\beta f(x,\ y)\,dy=\int\limits_\alpha^\beta dy \int\limits_a^\infty f(x,\ y)\,dx.$$

Действительно,

$$s_n(y)=\int\limits_a^n f(x,\ y)\,dx\to s(y)=\int\limits_a^\infty f(x,\ y)\,dx$$

равномерно в интервале $(\alpha,\ \beta)$. Поэтому из теоремы § 1.7.1

*) Общая теория рассматриваемых преобразований имеется у Гурса, *Курс математического анализа*, т. I, гл. 6.

следует, что

$$\int_a^n dx \int_\alpha^\beta f(x, y)\, dy = \int_\alpha^\beta dy \int_a^n f(x, y)\, dx =$$

$$= \int_\alpha^\beta s_n(y)\, dy \to \int_\alpha^\beta s(y)\, dy = \int_\alpha^\beta dy \int_a^\infty f(x, y)\, dx.$$

Подобная же теорема верна для несобственных интегралов второго рода.

Эти теоремы вместе с предыдущим доказательством сохраняют силу, если интеграл не сходится равномерно в скрестности некоторых точек, но является ограниченно сходящимся.

1.8.5. Повторные несобственные интегралы. Следующая теорема о повторных интегралах является аналогом теорем § 1.6.2 и § 1.7.7 о двойных рядах и рядах интегралов.

Пусть функция $f(x, y)$ положительна, и пусть

$$\int_a^c dx \int_\alpha^\beta f(x, y)\, dy = \int_\alpha^\beta dy \int_a^c f(x, y)\, dx \tag{1}$$

для всех значений c, меньших b, и

$$\int_a^b dx \int_\alpha^\gamma f(x, y)\, dy = \int_\alpha^\gamma dy \int_a^b f(x, y)\, dx \tag{2}$$

для всех значений γ, меньших β. Тогда

$$\int_a^b dx \int_\alpha^\beta f(x, y)\, dy = \int_\alpha^\beta dy \int_a^b f(x, y)\, dx, \tag{3}$$

если одна из двух частей этого равенства сходится.

В этой формулировке одно из чисел b, β, а также оба эти числа можно заменить бесконечностью.

Возьмем, например, случай двух конечных интервалов и предположим, что сходится левая часть равенства (3). Так как $f(x, y) \geqslant 0$, то

$$\int_\alpha^\gamma f(x, y)\, dy \leqslant \int_\alpha^\beta f(x, y)\, dy \qquad (\alpha < \gamma < \beta),$$

и, следовательно,

$$\int_\alpha^\gamma dy \int_a^b f(x, y)\, dx = \int_a^b dx \int_\alpha^\gamma f(x, y)\, dy \leqslant \int_a^b dx \int_\alpha^\beta f(x, y)\, dy.$$

Заставляя γ стремиться к β, мы видим, что правая часть равенства (3) существует и что

$$\int_\alpha^\beta dy \int_a^b f(x, y)\,dx \leqslant \int_a^b dx \int_\alpha^\beta f(x, y)\,dy.$$

То же рассуждение может быть проведено теперь в обратном порядке, так что верно и обратное неравенство. Следовательно, имеет место равенство.

Это доказательство сохраняет силу, если α или β (или α и β) бесконечны.

Конечно, простота доказательства объясняется тем, что мы сделали далеко идущие предположения. Применяя эту теорему, мы должны будем выводить равенства (1) и (2) из чего-то другого, например из равномерной сходимости. В действительности их приходится каждый раз обосновывать из-за того, что мы имеем дело с интегралом Римана. Из одной ограниченности интеграла

$$\int_\alpha^\beta dy \int_a^c f(x, y)\,dx$$

при $c \to b$ нельзя вывести, что функция $\int_a^b f(x, y)\,dx$ интегрируема по Риману. Перейдя к интегралу Лебега, мы увидим, что трудности этого рода исчезают.

Теорема верна не только для положительной, но и для любой вещественной или комплексной функции $f(x, y)$, для которой сходится один из интегралов

$$\int_a^b dx \int_\alpha^\beta |f(x, y)|, \quad \int_\alpha^\beta dy \int_a^b |f(x, y)|\,dx.$$

Это обобщение производится так же, как в случае рядов. Если функция $f(x, y)$ вещественна, то мы рассматриваем функции $|f(x, y)| \pm f(x, y)$, если функция $f(x, y)$ комплексна — функции $|f(x, y)| \pm \operatorname{Re} f(x, y)$, $|f(x, y)| \pm \operatorname{Im} f(x, y)$.

1.8.6. Гамма-функция. Функция

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\,dt, \tag{1}$$

как мы уже заметили (§§ 1.5.1, 1.5.2), непрерывна при $\operatorname{Re}(x) > 0$. Теперь мы в состоянии исследовать ее свойства более полно. В этом и следующем параграфах мы будем предполагать x и y вещественными, предоставляя читателю исследовать, в какой мере результаты верны при комплексных значениях переменных.

Если $x > 1$, то можно интегрировать по частям, так что

$$\Gamma(x) = [-t^{x-1}e^{-t}]_0^\infty + (x-1)\int_0^\infty t^{x-2}e^{-t}\,dt.$$

Внеинтегральный член пропадает, и, таким образом,

$$\Gamma(x) = (x-1)\,\Gamma(x-1) \qquad (x > 1). \tag{2}$$

Так как $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\,dt = 1$, то при положительном целом $x = n$ повторное применение равенства (2) показывает, что

$$\Gamma(n) = (n-1)! \tag{3}$$

Эта формула позволяет считать $\Gamma(x)$ обобщением факториала.

Рассмотрим теперь произведение

$$\Gamma(x)\,\Gamma(y) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt \int_0^\infty u^{y-1}e^{-u}\,du \qquad (x > 0,\ y > 0).$$

Мы можем трактовать его как повторный интеграл. Полагая $u = tv$ и обращая, пока формально, порядок интегрирования, мы получаем равенства:

$$\Gamma(x)\,\Gamma(y) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt \int_0^\infty t^y v^{y-1}e^{-tv}\,dv =$$

$$= \int_0^\infty v^{y-1}\,dv \int_0^\infty t^{x+y-1}e^{-t(1+v)}\,dt =$$

$$= \int_0^\infty v^{y-1}\,dv \int_0^\infty \frac{w^{x+y-1}e^{-w}\,dw}{(1+v)^{x+y}} =$$

$$= \Gamma(x+y) \int_0^\infty \frac{v^{y-1}}{(1+v)^{x+y}}\,dv.$$

Из них следует, что

$$\frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = \varphi(x, y) \qquad (x > 0,\ y > 0), \tag{4}$$

где

$$\varphi(x, y) = \int_0^\infty \frac{v^{y-1}}{(1+v)^{x+y}}\,dv = 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\cos\theta)^{2x-1}(\sin\theta)^{2y-1}\,d\theta =$$

$$= \int_0^1 \lambda^{x-1}(1-\lambda)^{y-1}\,d\lambda.$$

Трудность доказательства лежит в обращении повторного интеграла

$$\int_0^\infty dt \int_0^\infty t^{x+y-1} v^{y-1} e^{-t(1+v)}\, dv.$$

Поскольку каждый из двух интегралов является несобственным у каждого предела интегрирования, если показатели степеней у t и v отрицательны, здесь должна быть несколько раз применена теорема § 1.8.5. Легко проверить, что оба интеграла равномерно сходятся во всяком конечном интервале, не примыкающем к началу. Следовательно, интегралы, взятые в пределах $(0, T; v_0, V)$ и $(t_0, T; 0, V)$, могут быть обращены, если $t_0 > 0$, $v_0 > 0$. Далее, поскольку подынтегральная функция положительна, интеграл, взятый в пределах $(0, T; 0, V)$, также может быть обращен. Может быть обращен в силу равномерной сходимости и интеграл в пределах $(t_0, T; 0, \infty)$, а потому и интеграл в пределах $(0, T; 0, \infty)$. Подобным же образом может быть обращен интеграл $(0, \infty; 0, V)$ и, наконец, весь интеграл.

Полагая в равенстве (4) $x = y = 1/2$, мы видим, что

$$\left\{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right\}^2 = 2\Gamma(1) \int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\theta = \pi,$$

а так как значение $\Gamma(1/2)$, очевидно, положительно, то

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}. \tag{5}$$

С другой стороны, при $y = x$ равенство (4) показывает, что

$$\frac{\{\Gamma(x)\}^2}{\Gamma(2x)} = \int_0^1 \lambda^{x-1}(1-\lambda)^{x-1}\, d\lambda = 2\int_0^{1/2} \lambda^{x-1}(1-\lambda)^{x-1}\, d\lambda.$$

Подстановка $\lambda = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\mu}$, в силу которой $\lambda(1-\lambda) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\mu$, превращает этот интеграл в

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\mu\right)^{x-1} \mu^{-1/2}\, d\mu = 2^{1-2x} \int_0^1 (1-\mu)^{x-1}\mu^{-1/2}\, d\mu =$$

$$= 2^{1-2x} \frac{\Gamma(x)\Gamma(1/2)}{\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)}.$$

Таким образом, мы получаем «формулу удвоения»:

$$\Gamma(2x)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2^{2x-1}\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right). \tag{6}$$

1.8.7. Асимптотическое поведение $\Gamma(x)$ при $x \to \infty$. Рассмотрим сначала случай, когда x — натуральное число, скажем n, так что $\Gamma(x) = (n-1)!$ Мы воспользуемся хорошо известным методом сравнения суммы вида $\sum \varphi(n)$ с соответствующим интегралом $\int \varphi(t)\,dt$. Мы можем написать:

$$\log\{(n-1)!\} = \sum_{\nu=1}^{n-1} \log \nu.$$

Очевидно,

$$\int_{\nu-(1/2)}^{\nu+(1/2)} \log t\,dt = \int_0^{1/2} \{\log(\nu+t) + \log(\nu-t)\}\,dt =$$
$$= \int_0^{1/2} \left\{\log \nu^2 + \log\left(1 - \frac{t^2}{\nu^2}\right)\right\} dt = \log \nu + C_\nu,$$

где $C_\nu = O(1/\nu^2)$. Следовательно,

$$\log \Gamma(n) = \log\{(n-1)!\} = \int_{1/2}^{n-1/2} \log t\,dt - \sum_{\nu=1}^{n-1} C_\nu =$$
$$= \left(n - \frac{1}{2}\right)\log\left(n - \frac{1}{2}\right) - \left(n - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\log\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \sum_{\nu=1}^{\infty} C_\nu + o(1) =$$
$$= \left(n - \frac{1}{2}\right)\log n - n + C + o(1), \quad (1)$$

где C — некоторая постоянная.

Этот результат можно распространить на нецелые значения x при помощи следующей леммы.

Лемма. *Если a — постоянная, то при $x \to \infty$*

$$\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+a)} \sim x^{-a}. \quad (2)$$

Предположим сначала, что $a > 1$. Тогда

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(a)}{\Gamma(x+a)} = \int_0^1 (1-\lambda)^{a-1}\lambda^{x-1}\,d\lambda = \int_0^\infty (1-e^{-t})^{a-1}e^{-xt}\,dt =$$
$$= \int_0^\infty t^{a-1}e^{-xt}\,dt - \int_0^\infty \{t^{a-1} - (1-e^{-t})^{a-1}\}\,e^{-xt}\,dt.$$

Первый интеграл справа равен $\Gamma(a)x^{-a}$, а второй есть $O(x^{-a-1})$; действительно,

$$1 - e^{-t} < t \quad (t > 0), \qquad 1 - e^{-t} > t - \frac{1}{2}t^2 \quad (0 < t < 1),$$

из чего следует, что второй интеграл положителен и меньше, чем

$$\int_0^1 \left\{1-\left(1-\frac{1}{2}t\right)^{a-1}\right\} t^{a-1}e^{-xt}\,dt+\int_1^\infty t^{a-1}e^{-xt}\,dt<$$

$$< K\int_0^1 t^a e^{-xt}\,dt+\int_1^\infty t^a e^{-xt}\,dt < Kx^{-a-1},$$

где K зависит только от a.

Этим лемма доказана для случая $a>1$. Для других значений a она получается после этого из формулы § 1.8.6 (2).

Если теперь x — нецелое число, то $x=n+a$, где n — целое число и $0<a<1$. Из (2) и (1) следует, что

$$\log\Gamma(x)=\log\Gamma(n+a)=\log\Gamma(n)+a\log n+o(1)=$$

$$=\left(n-\frac{1}{2}\right)\log n-n+C+a\log n+o(1)=$$

$$=\left(x-a-\frac{1}{2}\right)\log(x-a)-x+a+C+a\log(x-a)+o(1)=$$

$$=\left(x-\frac{1}{2}\right)\log x-x+C+o(1), \tag{3}$$

а это — формула (1) с x вместо n.

Чтобы найти C, воспользуемся формулой удвоения § 1.8.6 (6). Логарифмируя ее и пользуясь соотношением (3), мы получаем равенство

$$\left(2x-\frac{1}{2}\right)\log 2x-2x+C+\log\sqrt{\pi}+o(1)=(2x-1)\log 2+$$

$$+\left(x-\frac{1}{2}\right)\log x+x\log\left(x+\frac{1}{2}\right)-2x-\frac{1}{2}+2C+o(1),$$

из которого следует, что $C=\log\sqrt{2\pi}$. Окончательно:

$$\Gamma(x)=x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x}\sqrt{2\pi}\,\{1+o(1)\}. \tag{4}$$

Это равенство известно как теорема Стирлинга.

1.9. Дифференцирование интегралов. Две следующие теоремы достаточны в большинстве случаев, которые обычно встречаются.

Если функции $f(x, y)$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны в прямоугольнике $a\leqslant x\leqslant b$, $y_0-\eta\leqslant y\leqslant y_0+\eta$ $(\eta>0)$, то при $y=y_0$

$$\frac{d}{dy}\int_a^b f(x, y)\,dx=\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}\,dx. \tag{1}$$

Положим $\varphi(y)=\int_a^b f(x, y)\,dx$, $g(x, y)=\frac{\partial f}{\partial y}$. Мы можем написать

$$\frac{\varphi(y_0+k)-\varphi(y_0)}{k}=$$

$$=\frac{1}{k}\int_a^b \{f(x, y_0+k)-f(x, y_0)\}\,dx=\int_a^b g(x, y_0+\theta k)\,dx,$$

где $0<\theta<1$. Так как функция $g(x, y)$ равномерно непрерывна, то (ср. § 1.5.2)

$$\lim_{k\to 0}\int_a^b g(x, y_0+\theta k)\,dx=\int_a^b g(x, y_0)\,dx,$$

что и требуется.

Пусть равенство (1) *верно для всех значений b, бóльших a. Если интеграл $\int_a^\infty f\,dx$ сходится, а интеграл $\int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}\,dx$ равномерно сходится в интервале $(y_0-\eta, y_0+\eta)$, то*

$$\frac{d}{dy}\int_a^\infty f(x, y)\,dx=\int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}\,dx.$$

Это можно вывести из соответствующей теоремы о рядах (§ 1.7.2). Действительно, положим

$$\int_{a+n-1}^{a+n} f(x, y)\,dx=u_n(y).$$

Очевидно, $\int_a^\infty f(x, y)\,dx=\sum u_n(y)$, так что, в силу предыдущей теоремы,

$$\int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}\,dx=\sum\int_{a+n-1}^{a+n}\frac{\partial f}{\partial y}\,dx=\sum\frac{d}{dy}\int_{a+n-1}^{a+n} f(x, y)\,dx=\sum\frac{d}{dy}u_n(y).$$

Теперь остается применить теорему о рядах.

РАЗЛИЧНЫЕ ПРИМЕРЫ

1. Исследовать на равномерную сходимость ряды

$$\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{x^2+n^2},\quad \sum_{n=1}^\infty\frac{1}{x^2n^2},\quad \sum_{n=1}^\infty\frac{1}{x^2-n^2},\quad \sum_{n=1}^\infty\frac{\sin nx}{n^\alpha}\qquad (\alpha>0).$$

2. Исследовать на равномерность сходимости ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \frac{z^n}{1+z^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \frac{z^n}{1+z^n}$$

при положительном вещественном z и при произвольном комплексном z.

3. Исследовать на равномерную сходимость интегралы

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+y^2}, \quad \int_0^\infty e^{-xy}\,dx, \quad \int_0^\infty \operatorname{ch} xy\, e^{-x^2}\,dx.$$

4. Исследовать на равномерную сходимость интеграл $\int_0^\infty \frac{\sin^2 xy}{x^2}\,dx$. Вычислить его дифференцированием по y.

5. Функция Бесселя $J_\nu(z)$ определяется при $\nu > -1$ формулой

$$J_\nu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{1}{2} z\right)^{\nu+2n}}{n!\,\Gamma(\nu+n+1)}.$$

Доказать, что при $\nu > -1/2$

$$J_\nu(z) = \frac{z^\nu}{2^{\nu-1}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos(z\cos\theta)\sin^{2\nu}\theta\,d\theta$$

и что при $\mu > -1$, $\nu > -1$

$$J_{\mu+\nu+1}(z) = \frac{z^{\nu+1}}{2^\nu\Gamma(\nu+1)} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} J_\mu(z\sin\theta)\sin^{\mu+1}\theta\cos^{2\nu+1}\theta\,d\theta.$$

6. Доказать, что при $0 < b < a$

$$\int_0^\infty e^{-ax} J_0(bx)\,dx = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

и что

$$\int_0^\infty e^{-x} J_0(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

7. Доказать, что $\int_0^\infty J_\nu(at)\,e^{-t^2} t^{\nu+1}\,dt = \frac{a^\nu}{2^{\nu+1}} e^{-\frac{1}{4}a^2}$.

8. Доказать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\infty \frac{\sin nx}{n^2 x}\,dx = \int_0^\infty \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2 x} \right\} dx.$$

9. Показать, что повторные интегралы

$$\int_1^\infty dx \int_1^\infty \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dy, \qquad \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dy,$$

$$\int_1^\infty dx \int_1^\infty \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy, \qquad \int_0^1 dx \int_1^\infty (ae^{-axy}-be^{-bxy})\,dy$$

не равны интегралам, которые получаются из них после обращения порядка интегрирования.

10. Доказать, что

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2xy\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,e^{-y^2},$$

двумя способами: (i) путем разложения функции $\cos 2xy$ по степеням x и почленного интегрирования; (ii) показав, что интеграл удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{dI}{dy} = -2yI.$$

11. Положим $\varphi(y) = \int_0^\infty \frac{\sin xy}{x(a^2+x^2)}\,dx$. Доказать, что $\varphi''(y) - a^2\varphi(y)$ есть постоянная, и вывести из этого, что

$$\varphi(y) = \frac{\pi}{2a^2}(1-e^{-ay}) \qquad (y > 0).$$

12. Вывести из предыдущего примера значения интегралов

$$\int_0^\infty \frac{\cos xy}{a^2+x^2}\,dx, \qquad \int_0^\infty \frac{x\sin xy}{a^2+x^2}\,dx.$$

13. Положим $\varphi(p, q, a, b) = \Gamma(p)\int_0^\infty \frac{e^{-bx}x^{q-1}}{(a+cx)^p}\,dx$, где a, b, p и q положительны. Доказать, что

$$\varphi(p, q, a, b) = \varphi(q, p, b, a).$$

14. Положим $\psi(y) = \int_0^\infty e^{-x^2-\frac{y^2}{x^2}}\,dx$. Доказать, что

$$\psi(y) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,e^{-2y} \qquad (y > 0),$$

двумя способами: (i) установив, что $\psi'(y) = -2\psi(y)$; (ii) с помощью подстановки $w = x - \frac{y}{x}$.

15. Показать, что повторный интеграл

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty \cos 2mx \cdot ye^{-y^2(1+x^2)}\,dy$$

может быть обращен, и вывести этим путем значение первого интеграла примера 12 из значений интегралов примеров 10 и 14.

16. Доказать, что при $\lambda > 0$, $\mu > 0$

$$\int_0^\infty e^{-x^2}x^{2\lambda-1}\,dx \int_0^\infty e^{-y^2}y^{2\mu-1}\,dy = \int_0^\infty e^{-r^2}r^{2\lambda+2\mu-1}\,dr \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^{2\lambda-1}\theta \sin^{2\mu-1}\theta\,d\theta,$$

и получить этим путем другое доказательство формул § 1.8.6.

17. Показать, что в повторном интеграле

$$\int_0^\infty \sin ax\,dx \int_0^\infty f(y)\,e^{-xy}\,dy$$

можно обратить порядок интегрирования, если сходятся интегралы $\int_0^1 |f(y)|\,dy$, $\int_1^\infty |f(y)|\,y^{-2}\,dy$. Вывести из этого, что

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = a \int_0^\infty \frac{J_0(y)}{a^2+y^2}\,dy.$$

[Интеграл $\int_\xi^X \sin ax\,dx \int_0^\infty f(y)\,e^{-xy}\,dy$ может быть обращен, так как внутренний интеграл равномерно сходится при $0 < \xi \leqslant x \leqslant X$. Поэтому достаточно доказать, что интегралы

$$\int_0^\infty f(y)\,dy \int_0^\xi \sin ax\,e^{-xy}\,dx, \qquad \int_0^\infty f(y)\,dy \int_X^\infty \sin ax\,e^{-xy}\,dx$$

стремятся к нулю при $\xi \to 0$ и $X \to \infty$. Можно считать, что $a > 0$. Так как $|\sin ax| \leqslant ax$, то абсолютная величина первого интеграла не превышает

$$\int_0^\infty |f(y)|\,dy \int_0^\xi axe^{-xy}\,dx < a\int_0^Y |f(y)|\,dy \int_0^\xi x\,dx +$$
$$+ a\int_Y^\infty |f(y)|\,dy \int_0^\infty xe^{-xy}\,dx = \frac{1}{2}a\xi^2 \int_0^Y |f(y)|\,dy + a\int_Y^\infty |f(y)|\,y^{-2}\,dy,$$

правую же часть можно сделать сколь угодно малой, выбрав надлежащим образом сначала Y, а затем ξ. Абсолютная величина второго интеграла допускает оценку

$$\left| \int_0^\infty f(y)\frac{y\sin aX + a\cos aX}{a^2+y^2}\,e^{-Xy}\,dy \right| < \frac{1}{a}\int_0^\infty |f(y)|\,e^{-Xy}\,dy,$$

так что и он стремится к нулю.]

18. При $\alpha > 0$, $\beta > 0$

$$\int_y^x (x-t)^{\alpha-1}(t-y)^{\beta-1}\,dt = \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(x-y)^{\alpha+\beta-1}.$$

19. Если $\alpha > 0$, $\beta > 0$ и $\lambda < y$ или $\lambda > x$, то

$$\int_y^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}(t-y)^{\beta-1}}{|t-\lambda|^{\alpha+\beta}}\,dt = \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\,\frac{(x-y)^{\alpha+\beta-1}}{|x-\lambda|^{\beta}\,|y-\lambda|^{\alpha}}.$$

[Применить надлежащее линейное преобразование интервала (y, x) и воспользоваться предыдущим примером.]

20. Доказать, что при $c > b > 0$, $c-a-b > 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(a+1)\ldots(a+n-1)}{n!}\int_0^1 t^{b+n-1}(1-t)^{c-b-1}\,dt = \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-a-b-1}\,dt.$$

Вывести из этого, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a\ldots(a+n-1)\,b\ldots(b+n-1)}{n!\,c\ldots(c+n-1)} = \frac{\Gamma(c)\,\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\,\Gamma(c-b)}.$$

ГЛАВА II

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

2.1. Функции комплексного переменного. Построить функцию комплексного переменного $z=x+iy$ так же легко, как функцию действительного переменного x. Каждое конечное или сходящееся бесконечное выражение, содержащее z, дает такую функцию. Например, z^2, $\frac{1}{z}$, e^z — функции комплексного переменного z. Читатель *Чистой математики* Харди знаком со многими такими функциями.

В этой и следующей главах все функции предполагаются однозначными в той области, в которой они определены.

Наша первая задача — дать общее определение, охватывающее все такие функции.

Мы могли бы сказать, что w есть функция от z, если каждому значению z в некоторой области соответствует одно или более чем одно значение w. Это определение построено по образцу обычного определения функции действительного переменного. Оно совершенно законно, но, как объяснено в *Чистой математике* Харди, оно бесполезно, потому что слишком широко. Оно отождествляет функцию комплексного переменного с комплексной функцией $u(x, y)+iv(x, y)$ двух действительных переменных x и y. Конечно, это не то, что мы имели в виду, начиная говорить о функциях комплексного переменного.

Чтобы найти нужное определение, мы рассмотрим в комплексной области свойства функции, которые представляются нам желательными, и попытаемся выяснить, какие из этих свойств позволяют отличать «настоящие» функции от «ненастоящих».

2.1.1. Непрерывность. Пусть $f(z)$ — функция от z в предыдущем широком смысле. *Она называется непрерывной в точке $z=z_0$, если для всякого положительного числа ε можно найти такое положительное число δ, что при $|z-z_0|<\delta$*

$$|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon.$$

Это определение вполне удовлетворительно, но оно ведет недалеко. Непрерывная функция от z есть просто непрерывная комплексная функция двух вещественных переменных x и y. Действительно, пусть $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ и $z_0=x_0+iy_0$; тогда

$$|u(x, y)-u(x_0, y_0)| \leqslant |f(z)-f(z_0)| < \varepsilon,$$

если $|z-z_0|<\delta$, а это так, если

$$|x-x_0|<\delta/\sqrt{2}, \quad |y-y_0|<\delta/\sqrt{2}.$$

Следовательно, функция $u(x, y)$ непрерывна, и такова же функция $v(x, y)$. Обратно, если функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ непрерывны, то и функция $f(z)$ непрерывна.

2.1.2. Дифференцируемость. Из класса непрерывных функций мы выделяем подкласс функций, которые допускают дифференцирование. Значение этого термина в комплексной области должно быть теперь определено.

Следуя рецептам вещественного дифференциального исчисления, мы пишем

$$f'(z_0)=\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

и говорим, что функция $f(z)$ дифференцируема, если предел в правой части существует. Этот предел называется производной или дифференциальным коэффициентом функции $f(z)$. Как и в определении непрерывности, приближение точки z к ее пределу z_0 может происходить всевозможными способами. Более точно, предыдущая формула означает, что для всякого положительного числа ε можно найти такое положительное число δ, что при $0<|z-z_0|<\delta$

$$\left|f'(z_0)-\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right|<\varepsilon.$$

Таким образом, мы требуем, чтобы отношение $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ стремилось к некоторому пределу, по какому бы пути точка z ни приближалась к точке z_0, и чтобы все эти пределы были равны между собой. Наше требование является поэтому весьма ограничительным.

Однако этим свойством дифференцируемости обладают многие известные функции. Постоянная дифференцируема. Целая положительная степень переменного z дифференцируема; действительно, известное доказательство, проводимое для x^n, применимо слово в слово к z^n. Подобным же образом сумма и произведение двух (и любого конечного числа) дифференцируемых функций — дифференцируемые функции, и частное двух дифференцируемых функций дифференцируемо, если знаменатель не обращается в нуль. Наконец, дифференцируемая функция от дифференцируемой функции дифференцируема. Все эти теоремы доказываются для функций от z так же, как для функций от x.

Например, всякая рациональная функция от z дифференцируема для всех значений z, не являющихся нулями ее знаменателя.

2.1.3. Мы приходим к естественному вопросу, соответствует ли это свойство дифференцируемости какому-нибудь простому свойству функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$, которые служат действительной частью и мнимой частью функции $f(z)$.

Предположим сначала, что разность $z-z_0$ вещественна, так что $z_0=x_0+iy_0$, $z=x+iy_0$. Тогда

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\frac{\{u(x, y_0)+iv(x, y_0)\}-\{u(x_0, y_0)+iv(x_0, y_0)\}}{x-x_0}=$$
$$=\frac{u(x, y_0)-u(x_0, y_0)}{x-x_0}+i\frac{v(x, y_0)-v(x_0, y_0)}{x-x_0}.$$

Если это выражение стремится к пределу при $x \to x_0$, то его вещественная часть стремится к пределу и его мнимая часть стремится к пределу. Но это означает просто, что в точке (x_0, y_0) существуют частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ и

$$f'(z_0)=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{x=x_0,\ y=y_0}. \tag{1}$$

Подобным же образом, если разность $z-z_0$ чисто мнима, скажем, $z_0=x_0+iy_0$, $z=x_0+iy$, то

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\frac{\{u(x_0, y)+iv(x_0, y)\}-\{u(x_0, y_0)+iv(x_0, y_0)\}}{iy-iy_0}=$$
$$=\frac{v(x_0, y)-v(x_0, y_0)}{y-y_0}-i\frac{u(x_0, y)-u(x_0, y_0)}{y-y_0}.$$

Если это выражение имеет предел при $y \to y_0$, то в точке (x_0, y_0) существуют частные производные $\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ и

$$f'(z_0)=\left(\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{x=x_0,\ y=y_0}. \tag{2}$$

Сравнивая равенства (1) и (2) и приравнивая вещественные и мнимые части, мы видим, что

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}\qquad (x=x_0,\ y=y_0). \tag{3}$$

Итак, следствия предположения *дифференцируемости* являются куда более впечатляющими, чем следствия предположения *непрерывности*. Мало того, что функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ обладают частными производными первого порядка, эти производные связаны еще дифференциальными уравнениями (3). Последние называются уравнениями Коши — Римана.

Таким образом, даже если $u(x, y)$ и $v(x, y)$ имеют частные производные первого порядка, $u+iv$ не является, вообще говоря, дифференцируемой функцией от z.

Примеры. (I) Пусть $f(z)=\operatorname{Re}(z)=x$. Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial v}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial v}{\partial y}=0.$$

Таким образом, все частные производные существуют, но уравнения Коши — Римана не удовлетворяются ни при каком значении z.

(II) Пусть $f(z)=|z|^2=x^2+y^2$. Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=2y, \quad \frac{\partial v}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial v}{\partial y}=0.$$

Уравнения Коши — Римана удовлетворяются только в точке $z=0$.

2.1.4. Аналитические функции. Поскольку рассмотренное нами свойство значительно превосходит то, что мы привыкли думать о дифференцируемости, мы даем ему специальное название. Функция, которая дифференцируема в этом смысле, называется *аналитической*.

Аналитичность и есть то отличительное свойство «настоящих» функций комплексного переменного, которое мы искали.

Мы видели, что соотношения Коши — Римана составляют *необходимое* условие аналитичности функции. Однако они не являются *достаточным* условием. Этого можно было ожидать, поскольку мы получили эти соотношения как всего лишь частные проявления дифференцируемости.

Рассмотрим, например, функцию $f(z)=\sqrt{|xy|}$. Она обращается в нуль на обеих осях, так что при $z=0$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

и уравнения Коши — Римана удовлетворяются. Но функция $f(z)$ не дифференцируема при $z=0$. Действительно, $\frac{f(z)}{z}=\frac{\sqrt{|xy|}}{x+iy}$, и если $x=\alpha r$, $y=\beta r$, где α и β — постоянные, а $r>0$, то при $r\to 0$ это отношение стремится к $\frac{\sqrt{|\alpha\beta|}}{\alpha+i\beta}$. Таким образом, предел не является единственным и функция не аналитична.

Этот пример показывает, что функция $f(z)$ может не быть аналитической, если известно только, что отношение $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ стремится к пределу вдоль двух прямых, образующих прямой угол. В действительности нельзя ограничиться вообще никаким специальным классом путей. Рассмотрим, например, функцию

$$f(z)=\frac{xy^2(x+iy)}{x^2+y^4} \quad (z\neq 0), \qquad f(0)=0.$$

Легко проверить, что $\lim \frac{f(z)-f(0)}{z}=0$, если $z\to 0$ вдоль любой прямой. Но на кривой $x=y^2$

$$\frac{f(z)-f(0)}{z}=\frac{y^4}{y^4+y^4}=\frac{1}{2}.$$

Следовательно, функция $f(z)$ не аналитична при $z=0$.

2.1.5. *Предположим, однако, что все четыре частные производные первого порядка существуют в некоторой области и непрерывны во всех точках этой области. Тогда соотношения Коши — Римана составляют необходимое и достаточное условие аналитичности функции $f(z)$ во всех точках области.*

Мы уже видели, что условие необходимо. Чтобы доказать, что оно достаточно, мы воспользуемся теоремой о среднем значении функции двух переменных (*Ч. М.*, § 159).

Рассмотрим в области точку (x, y) и близкую точку $(x+\delta x, y+\delta y)$. Мы можем написать

$$\delta u=u(x+\delta x,\ y+\delta y)-u(x,\ y)=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\varepsilon\right)\delta x+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\eta\right)\delta y,$$

где ε и η стремятся к нулю вместе с δx и δy. Подобным же образом

$$\delta v=\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\varepsilon'\right)\delta x+\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\eta'\right)\delta y.$$

Пользуясь уравнениями Коши — Римана, мы выводим из этого, что

$$\delta u+i\delta v=\left(\frac{du}{dx}+i\frac{dv}{dx}\right)(\delta x+i\delta y)+\rho,$$

где $|\rho|\leqslant(|\varepsilon|+|\varepsilon'|)|\delta x|+(|\eta|+|\eta'|)|\delta y|$. Таким образом,

$$\frac{f(z+\delta z)-f(z)}{\delta z}=\frac{\delta u+i\delta v}{\delta x+i\delta y}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\rho}{\delta x+i\delta y},$$

где $\left|\frac{\rho}{\delta x+i\delta y}\right|\leqslant|\varepsilon|+|\varepsilon'|+|\eta|+|\eta'|\to 0$. Следовательно, функция $f(z)$ аналитична.

2.1.6. *Внутри круга сходимости степенной ряд представляет аналитическую функцию.*

Позже мы увидим, что это — всего лишь частный случай общей теоремы о рядах, представляющих аналитические функции. Но нижеследующее прямое доказательство может быть дано уже теперь. Пусть при $|z|<R$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n.$$

Тогда при $\rho < R$ числа $a_n \rho^n$ ограничены, скажем, $|a_n \rho^n| \leqslant K$. Положим *)

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}.$$

Если $|z| < \rho$ и $|z| + |h| < \rho$, то

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} - g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{(z+h)^n - z^n}{h} - n z^{n-1} \right\}.$$

Но

$$\left| \frac{(z+h)^n - z^n}{h} - n z^{n-1} \right| = \left| \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} z^{n-2} h + \ldots + h^{n-1} \right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} |z|^{n-2} |h| + \ldots + |h|^{n-1} =$$
$$= \frac{(|z| + |h|)^n - |z|^n}{|h|} - n |z|^{n-1}.$$

Таким образом,

$$\left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - g(z) \right| \leqslant K \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\rho^n} \left\{ \frac{(|z| + |h|)^n - |z|^n}{|h|} - n |z|^{n-1} \right\} =$$
$$= K \left\{ \frac{1}{|h|} \left(\frac{\rho}{\rho - |z| - |h|} - \frac{\rho}{\rho - |z|} \right) - \frac{\rho}{(\rho - |z|)^2} \right\} = \frac{K \rho |h|}{(\rho - |z| - |h|)(\rho - |z|)^2},$$

правая же часть стремится к нулю вместе с h. Следовательно, $g(z)$ есть производная функции $f(z)$.

2.1.7. Функции, аналитические в области. Функция называется аналитической в области, если она аналитична во всех точках этой области. В дальнейшем мы всегда рассматриваем функции, аналитические *в некоторой области*. Тот факт, что какая-нибудь функция (вроде $|z|^2$) оказывается аналитической в отдельной точке или даже на некоторой кривой, не представляет особого интереса. Только из того, что функция аналитична в некоторой *области*, вытекают интересные следствия.

Примеры. (I) Функция $\log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \ldots$ аналитична при $|z| < 1$.

(II) Функции

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \quad \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$$

аналитичны при всех конечных значениях z.

---

*) Этот ряд также сходится при $|z| < R$. Доказательство таково же, как в вещественном случае; см. § 1.7.3. (*Примечание переводчика.*)

(III) Функция $f(z)=e^{-z^{-4}}$ $(z\neq 0)$, $f(0)=0$ аналитична при всех значениях z, кроме значения $z=0$. В точке $z=0$ уравнения Коши — Римана удовлетворяются; действительно, при $z=0$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x^{-4}}}{x}=0,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x}=0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\lim_{y\to 0}\frac{e^{-y^{-4}}}{y}=0,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\lim_{y\to 0}\frac{0}{y}=0,$$

так что $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$. Несмотря на это, функция $f(z)$ не аналитична при $z=0$; действительно, если $z=re^{i\pi/4}$, то

$$f(z)=\exp\left\{-\left(re^{i\pi/4}\right)^{-4}\right\}=e^{r^{-4}},$$

а это выражение стремится при $r\to 0$ к бесконечности.

2.2. Комплексное дифференциальное исчисление. Читатель, возможно, ждет, что мы поступим теперь так же, как поступают при построении вещественного дифференциального исчисления. Там, выделив уже сам по себе достаточно специальный класс дифференцируемых функций, рассматривают следующий за ним еще более специальный класс функций, имеющих вторую производную. Некоторые из этих функций имеют производную третьего порядка, и т. д. Наконец, среди функций, имеющих производные всех порядков, выбирают те, которые могут быть разложены в степенной ряд по теореме Тейлора.

Подобного процесса последовательной специализации аналитических функций комплексного переменного не существует. Функция, аналитическая в некоторой области, имеет в каждой точке этой области производные всех порядков и может быть разложена в окрестности каждой точки области в степенной ряд, такой же, как в теореме Тейлора.

Все эти факты являются следствиями определения аналитической функции, в которое входит только ее первая производная.

Может быть, теперь читатель ждет, что мы прямо приступим к доказательству существования второй производной у любой аналитической функции. Мы не в состоянии это сделать.

Перечисленные теоремы были, конечно, доказаны, иначе мы не могли бы сообщить читателю, что они верны. Но до сих пор они не были доказаны непосредственно. Их доказательство основано на комплексном интегральном исчислении, и к нему мы должны теперь обратиться.

2.3. Комплексное интегрирование. Теорема Коши. Читатель *Чистой математики* Харди должен знать, что такое комплексный интеграл (*Ч. М.*, § 229). Мы, однако, введем это понятие несколько иным путем.

Пусть A и B — концы дуги C кривой, определенной уравнениями $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, где φ и ψ — функции от t с непрерывными производными $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$. Предположим, что при изменении t от значения t_A до значения t_B точка (x, y) перемещается вдоль кривой от A к B.

Пусть $f(z)$ — комплексная функция от z, непрерывная вдоль C. Пусть $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$. Пусть $z_0, z_1, \ldots, z_n$ — точки на C, причем z_0 есть A, а z_n есть B. Рассмотрим сумму

$$\sum_{m=1}^{n} f(\zeta_m)(z_m - z_{m-1}), \tag{1}$$

где ζ_m — точка кривой, лежащая между z_{m-1} и z_m. Если положить $\zeta_m=\xi_m+i\eta_m$, $u_m=u(\xi_m, \eta_m)$, $v_m=v(\xi_m, \eta_m)$, то эта сумма примет вид:

$$\sum_{m=1}^{n} (u_m+iv_m)(x_m+iy_m-x_{m-1}-iy_{m-1}).$$

Но

$$x_m - x_{m-1} = \varphi(t_m) - \varphi(t_{m-1}) = \varphi'(\tau_m)(t_m - t_{m-1}),$$

$$y_m - y_{m-1} = \psi(t_m) - \psi(t_{m-1}) = \psi'(\tau'_m)(t_m - t_{m-1}),$$

где $t_{m-1} \leqslant \tau_m \leqslant t_m$, $t_{m-1} \leqslant \tau'_m \leqslant t_m$. Следовательно, сумма равна

$$\sum_{m=1}^{n} (u_m+iv_m)\{\varphi'(\tau_m)+i\psi'(\tau'_m)\}(t_m-t_{m-1}). \tag{2}$$

Так как все наши функции непрерывны и потому равномерно непрерывны, то мы можем по заданному ε найти такое δ, что если для всех m выполнено неравенство $|t_m - t_{m-1}| < \delta$, то для всех m

$$|u_m\varphi'(\tau_m) - u(x_m, y_m)\varphi'(t_m)| < \varepsilon.$$

Но

$$\sum_{m=1}^{n} \varepsilon(t_m - t_{m-1}) = \varepsilon(t_B - t_A);$$

следовательно, если ε и δ стремятся к нулю, то сумма

$$\sum_{m=1}^{n} u_m\varphi'(\tau_m)(t_m - t_{m-1})$$

стремится к тому же пределу, что и сумма

$$\sum_{m=1}^{n} u(x_m, y_m)\varphi'(t_m)(t_m - t_{m-1}),$$

т. е. к пределу $\int\limits_{t_A}^{t_B} u\{\varphi(t),\ \psi(t)\}\,\varphi'(t)\,dt$. Подобным же образом стремятся к пределам другие члены суммы (2), и мы видим, что вся сумма стремится к пределу

$$\int\limits_{t_A}^{t_B} (u+iv)\{\varphi'(t)+i\psi'(t)\}\,dt. \tag{3}$$

Последний интеграл понимается обычным образом как сумма двух вещественных интегралов, один из которых умножен на i.

Этот предел и принимается за определение интеграла функции $f(z)$ вдоль C и обозначается через $\int\limits_C f(z)\,dz$.

В частности, изложенное применимо к функции $f(z)$, аналитической в некоторой области, содержащей C.

Некоторые из наиболее очевидных свойств вещественных интегралов сразу распространяются на комплексные интегралы; например,

$$\int\limits_C \{f(z)+g(z)\}\,dz=\int\limits_C f(z)\,dz+\int\limits_C g(z)\,dz,$$

и, если k есть постоянная, $\int\limits_C kf(z)\,dz=k\int\limits_C f(z)\,dz$.

Если C' — тот же контур C, описываемый в противоположном направлении, то $\int\limits_{C'} f(z)\,dz=-\int\limits_C f(z)\,dz$.

Примеры. (I) Пусть $f(z)=k\,(=\text{const})$, и пусть C — любая кривая, соединяющая точки $z=a$ и $z=b$. Тогда

$$\sum_{m=1}^{n} f(\zeta_m)(z_m-z_{m-1})=k\sum_{m=1}^{n}(z_m-z_{m-1})=k(b-a).$$

Следовательно, $\int\limits_C k\,dz=k(b-a)$. Поскольку правая часть не зависит от выбора кривой C, мы можем представить это равенство в виде

$$\int\limits_a^b k\,dz=k(b-a).$$

(II) Пусть $f(z)=z$, и пусть C — любая кривая, соединяющая точки $z=a$ и $z=b$.

Если $\zeta_m=z_m$, то

$$\sum_{m=1}^{n} f(\zeta_m)(z_m-z_{m-1})=\sum_{m=1}^{n} z_m(z_m-z_{m-1}),$$

Если же $\zeta_m = z_{m-1}$, то сумма равна

$$\sum_{m=1}^{n} z_{m-1}(z_m - z_{m-1}).$$

Эти суммы стремятся к общему пределу; следовательно, к нему же стремится их полусумма

$$\frac{1}{2}\sum (z_m^2 - z_{m-1}^2) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2).$$

Таким образом, $\int\limits_C z\,dz = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$, и интеграл опять не зависит от выбора кривой C.

(III) Вычислить интеграл $\int\limits_C \frac{dz}{z}$, где C — окружность с центром в начале и радиусом ρ.

[Здесь можно положить $x = \rho\cos\theta = \varphi(\theta)$, $y = \rho\sin\theta = \psi(\theta)$; θ изменяется от 0 до 2π. Так как

$$\varphi'(\theta) + i\psi'(\theta) = -\rho\sin\theta + \rho i\cos\theta = \rho i e^{i\theta},$$

то интеграл равен

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{\rho e^{i\theta}}\rho i e^{i\theta} d\theta = i\int\limits_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i.]$$

(IV) Подобным же образом доказать, что $\int\limits_C z^n dz = 0$, где n — произвольное целое число, положительное или отрицательное, но не равное -1.

2.3.1. Оценка комплексного интеграла. Длину кривой $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — функции с непрерывными производными, можно определить интегралом

$$\int [\{\varphi'(t)\}^2 + \{\psi'(t)\}^2]^{\frac{1}{2}} dt,$$

взятым между надлежащими пределами. Это определение мотивировано в *Ч. М.*, § 149.

Если M — верхняя грань функции $|f(z)|$ на кривой C и L — длина этой кривой, то $\left|\int f(z)\,dz\right| \leqslant ML$.

Прежде всего, если $F(t)$ — непрерывная комплексная функция действительного переменного t, то

$$\left|\int\limits_a^b F(t)\,dt\right| \leqslant \int\limits_a^b |F(t)|\,dt. \qquad (1)$$

Действительно, $\left|\sum F(t_m)(t_m - t_{m-1})\right| \leqslant \sum |F(t_m)|(t_m - t_{m-1})$. Неравенство (1) получается из этого неравенства после перехода к пределу.

Теперь мы можем написать в наших обычных обозначениях:

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| = \left|\int_{t_A}^{t_B} (u+iv)\{\varphi'(t)+i\psi'(t)\}\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{t_A}^{t_B} M\,[\{\varphi'(t)\}^2+\{\psi'(t)\}^2]^{\frac{1}{2}}\,dt = ML.$$

2.3.2. Контуры. Под контуром мы понимаем непрерывную кривую, состоящую из конечного числа дуг рассмотренного выше типа, т. е. дуг, определяемых уравнениями $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ с непрерывными производными $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$. Контур замкнут, если конец последней дуги совпадает с началом первой.

Пусть C — замкнутый контур. Предположим, что существует такой интервал (a, b), что при $a<x'<b$ прямая $x=x'$ пересекает C ровно в двух точках, скажем $y_1(x')$ и $y_2(x')$, где $y_1<y_2$, в то время как при $x'<a$ и при $x'>b$ прямая $x=x'$ не пересекает C. Или же предположим, что существует такой интервал (α, β), что при $\alpha<y'<\beta$ прямая $y=y'$ пересекает C ровно в двух точках, скажем, $x_1(y')$ и $x_2(y')$, где $x_1<x_2$, в то время как при $y'<\alpha$ и при $y'>\beta$ прямая $y=y'$ не пересекает C.

В первом случае точка (x, y) называется внутренней по отношению к C, если $a<x<b$ и $y_1(x)<y<y_2(x)$. Во втором случае определение аналогично. Точка, не внутренняя к C и не лежащая на C, называется внешней по отношению к C.

Контур, удовлетворяющий одному из двух предыдущих условий, называется простым замкнутым контуром. Например, окружность, контур квадрата, эллипс в любом расположении являются простыми замкнутыми контурами. Определение внутренних и внешних точек, которое мы дали, может показаться читателю излишне сложным, а рассматриваемый класс кривых — излишне ограниченным. Однако общее изучение вопросов этого рода не столь просто, как может показаться, и мы оставляем его за пределами нашего изложения *). Оно известно как «analysis situs». С другой стороны, читатель, который предпочтет игнорировать эти наши объяснения и доверится геометрической интуиции, увидит, что все идет как нельзя лучше.

Мы можем расширить класс контуров, к которым применимы наши теоремы, путем «сложения» и «вычитания» простых замкнутых контуров. Пусть C и C' — простые замкнутые контуры, имеющие общую дугу или несколько смежных общих дуг, но в остальном расположенные внешне по отношению друг к другу. Мы образуем новый замкнутый контур C'' путем удаления этих общих

*) По этим вопросам см., например, Watson, *Complex Integration and Cauchy's Theorem.*

дуг. Внутренность контура C'' состоит из внутренних областей контуров C и C' и из удаленных точек границы. Подобным же образом, если все точки, внутренние к C, являются внутренними к C', то мы образуем новый замкнутый контур C'', внутренность которого состоит из точек, внутренних к C', но внешних к C.

Часто используемый замкнутый контур описанного типа образуют верхние половины окружностей $|z|=\rho$, $|z|=R$ $(0<\rho<R)$, соединенные отрезками вещественной оси.

Путем дальнейшего сложения могут быть получены еще более сложные замкнутые контуры. Сложим, например, только что рассмотренный контур с его отражением в вещественной оси и удалим общую для них часть этой оси от $z=-R$ до $z=-\rho$. Мы получим замкнутый контур с вполне определенной внутренностью и вполне определенной внешностью; внешность состоит из областей $|z|<\rho$ и $|z|>R$. При обходе контура отрезок с концами $z=\rho$, $z=R$ проходится дважды, в противоположных направлениях.

2.3.3. Теорема Коши. Краеугольным камнем теории аналитических функций является следующая теорема Коши.

Если функция $f(z)$ аналитична внутри простого замкнутого контура C и на самом контуре, то $\int\limits_C f(z)\,dz=0$.

Чтобы доказать это, разделим область, внутреннюю к C, на большое число мелких частей сетью прямых, параллельных вещественной и мнимой осям. Пусть эта сеть разбивает внутреннюю область на M квадратов с контурами $C_1, \ldots, C_M$ и N неправильных областей с границами $D_1, \ldots, D_N$, частично входящими в C. Тогда

$$\int\limits_C f(z)\,dz=\sum_{m=1}^{M}\int\limits_{C_m} f(z)\,dz+\sum_{n=1}^{N}\int\limits_{D_n} f(z)\,dz, \tag{1}$$

где каждый из контуров проходится в положительном направлении (против часовой стрелки). Рассмотрим, например, два квадрата, $ABCD$ и $DCEF$, с общей стороной CD. В первом квадрате сторона CD описывается от C к D, во втором — от D к C. Следовательно, интегралы, взятые вдоль CD, сокращаются. Так сокращаются все интегралы, кроме тех, которые берутся вдоль частей самого контура C. Этим формула (1) доказана.

Воспользуемся теперь тем, что функция $f(z)$ аналитична. Для каждой точки z_0, лежащей внутри C или на C,

$$\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}-f'(z_0)\right|<\varepsilon,$$

если только $0<|z-z_0|<\delta=\delta(z_0)$. Таким образом, при $|z-z_0|<\delta$

$$|f(z)-f(z_0)-(z-z_0)f'(z_0)|\leqslant\varepsilon|z-z_0|. \tag{2}$$

Если взять какую-нибудь определенную область, ограниченную контуром C_m или D_n, и в ней некоторую точку z_0, то, очевидно, стороны контура можно уменьшить настолько, что неравенство (2) будет выполнено для всех точек z этой области. Однако сразу не видно, что сеть прямых может быть выбрана так, чтобы условие (2) оказалось выполненным (с некоторыми z_0) одновременно во всех частичных областях. Мы покажем, что такой выбор сети действительно возможен.

Для всякого ε можно построить сеть, в каждой частичной области которой существует такая точка z_0, что неравенство (2) *выполнено для всех точек z этой частичной области.*

Это означает, по существу, что функция *равномерно дифференцируема* в области, ограниченной контуром C *).

Предположим на время, что это доказано. Рассмотрим квадрат с контуром C_m и со стороной l_m. В силу неравенства (2) функция $\varphi(z)$, определяемая равенством

$$f(z)=f(z_0)+(z-z_0)f'(z_0)+\varphi(z),$$

удовлетворяет неравенству $|\varphi(z)|\leqslant\varepsilon|z-z_0|$. Мы можем написать:

$$\int_{C_m} f(z)\,dz=\int_{C_m}\{f(z_0)+(z-z_0)f'(z_0)\}\,dz+\int_{C_m}\varphi(z)\,dz.$$

Первый интеграл справа равен нулю; см. § 2.3, примеры (I) и (II). Кроме того, так как $|z-z_0|\leqslant\sqrt{2}l_m$ и длина контура C_m равна $4l_m$, то

$$\left|\int_{C_m}\varphi(z)\,dz\right|<\varepsilon\sqrt{2}\,l_m\cdot 4l_m.$$

В случае неправильной области с контуром D_n его длина не превышает $4l_n+s_n$, где l_n — сторона квадрата, в котором лежит область, а s_n — длина кривой части контура D_n. Следовательно,

$$\left|\int_{D_n}\varphi(z)\,dz\right|<\varepsilon\sqrt{2}\,l_n(4l_n+s_n).$$

---

*) Здесь необходима осторожность. Равномерная дифференцируемость есть равномерная относительно x сходимость отношения $\dfrac{f(x')-f(x)}{x'-x}$ к производной $f'(x)$. Она равносильна непрерывности производной $f'(x)$ и действительно имеет место для всякой аналитической функции комплексного переменного, но, конечно, не для всякой дифференцируемой функции вещественного переменного. Рассматриваемое же свойство, как это видно из § 2.3.4, является простым следствием дифференцируемости; аналогичным свойством обладает всякая дифференцируемая функция вещественного переменного. (*Примечание переводчика.*)

Складывая интегралы по всем контурам C_m и D_n, мы получаем неравенство

$$\left|\int\limits_C f(z)\,dz\right| < 4\sqrt{2}\,\varepsilon\sum(l_m^2+l_n^2)+\varepsilon\sqrt{2}\,l\sum s_n, \tag{3}$$

где l — наибольшее из чисел l_n. Но сумма $\sum(l_m^2+l_n^2)$ представляет собой площадь некоторой области, лежащей внутри C, и потому ограничена; именно, если $(a,\ b,\ \alpha,\ \beta)$ — прямоугольник, содержащий C, то

$$\sum(l_m^2+l_n^2)\leqslant(b-a)(\beta-\alpha).$$

Сумма же $\sum s_n$ равна длине контура C. Таким образом, правая часть неравенства (3) меньше постоянной, умноженной на ε. Но левая часть не зависит от ε. Следовательно, она равна 0.

2.3.4. Мы должны еще оправдать сделанное выше предположение. Это достигается хорошо известным методом подразделения. Начнем с сети прямых, параллельных вещественной и мнимой осям, в которой соседние прямые находятся друг от друга на одном и том же расстоянии l. Некоторые частичные области этой сети могут содержать точки z_0 с требуемым свойством. Их мы в дальнейшем не меняем. Каждую из оставшихся областей мы подразделяем новыми прямыми, делящими расстояния между предыдущими прямыми пополам. Если после этого еще остаются области, не обладающие требуемым свойством, то мы таким же образом подразделяем и их. A priori возможны два случая: процесс может оборваться после конечного числа шагов, и тогда доказательство закончено, и может продолжаться неограниченно. Во втором случае среди областей первоначально взятой сети имеется по крайней мере одна, допускающая неограниченное подразделение, не приводящее к нужному результату. Обозначим эту область, включая границу, через R_1. После первого подразделения мы получим ее часть R_2, обладающую тем же свойством, и т. д. Так возникает бесконечная последовательность областей $R_1, R_2, \ldots$, которые мы рассматриваем вместе с их границами. Каждая из них содержит следующую, и ни в одной из них неравенство (2) не имеет места ни при каком выборе точки z_0.

Пусть z_0 — точка, общая всем областям R_n. Так как размеры области R_n неограниченно убывают, то при достаточно большом n, скажем при $n>n_0$, заведомо $|z-z_0|<\delta$ для всех точек z из R_n. Но функция $f(z)$ аналитична в точке z_0. Следовательно, при таком выборе точки z_0 неравенство (2) заведомо выполняется в области R_n, если $n>n_0$. Мы пришли к противоречию, и теорема доказана.

2.3.5. Теорема Коши может быть сразу распространена на замкнутые контуры более сложных типов, рассмотренных в § 2.3.2. Кроме того, она может быть представлена в несколько иной форме. Пусть, например, z_0 и z_1 — точки, соединенные двумя различными кривыми, C и C'. Предположим, что, заменив направление кривой C' противоположным и объединив C и C' в одну кривую, мы получим простой замкнутый контур или замкнутый контур одного из типов, рассмотренных в § 2.3.2. Пусть $f(z)$ — функция, аналитическая во всей области, заключенной между кривыми C и C', и на самих этих кривых. Тогда теорема Коши показывает, что

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{C'} f(z)\,dz. \tag{1}$$

Пусть теперь C — простой замкнутый контур и C' — другой простой замкнутый контур, лежащий целиком внутри C. Пусть $f(z)$ — функция, аналитическая во всех точках кольцевидной области, заключенной между C и C'. Тогда

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{C'} f(z)\,dz. \tag{2}$$

Действительно, мы можем соединить C и C' прямолинейным отрезком l, скажем, параллельным вещественной оси. Область, заключенная между C и C' и разрезанная вдоль l, является внутренней для замкнутого контура Γ, состоящего из кривой C, которая обходится положительно, кривой C', которая обходится отрицательно, и отрезка l, который проходится дважды, в противоположных направлениях. Мы можем написать:

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_C f(z)\,dz - \int_{C'} f(z)\,dz + \int_l f(z)\,dz - \int_l f(z)\,dz.$$

Так как интеграл вдоль Γ равен нулю, то этим равенство (2) доказано.

Подобная же теорема верна для любого конечного числа контуров C', C'', ..., лежащих внутри C, если функция $f(z)$ аналитична в области, заключенной между ними. Именно,

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{C'} f(z)\,dz + \int_{C''} f(z)\,dz + \ldots \tag{3}$$

Другое важное замечание состоит в том, что в теореме Коши аналитичность функции $f(z)$ на C не является необходимой: достаточно, чтобы функция $f(z)$ была аналитической внутри C и непрерывной на C. Действительно, можно показать, что если функция $f(z)$ непрерывна и контур C' лежит внутри C и стремится к C, то

$$\int_C f(z)\,dz = \lim \int_{C'} f(z)\,dz. \tag{4}$$

Не стоит точно описывать, каким должно быть приближение контура C' к контуру C в общем случае; например, равенство (4) гарантировано, если C есть окружность и C' — концентрическая с ней окружность. Так как интеграл, стоящий в правой части равенства (4), равен нулю при любом расположении контура C' внутри C, то и левая часть этого равенства есть 0.

2.3.6. Комплексный интеграл как функция своего верхнего предела. Пусть $f(z)$ — функция, аналитическая в области D. Положим $F(z)=\int\limits_{z_0}^{z} f(w)\,dw$, где путь интегрирования — произвольный контур, соединяющий z_0 с z и лежащий целиком внутри D. Из теоремы Коши следует, что значение $F(z)$ зависит только от z, но не от выбора указанного пути. Это уже учтено нашим обозначением.

Функция $F(z)$ аналитична в D. Действительно,

$$F(z+\delta z)-F(z)=\int\limits_{z}^{z+\delta z} f(w)\,dw,$$

причем интеграл можно считать взятым по прямолинейному отрезку соединяющему z с $z+\delta z$. Следовательно,

$$\frac{F(z+\delta z)-F(z)}{\delta z}-f(z)=\frac{1}{\delta z}\int\limits_{z}^{z+\delta z}\{f(w)-f(z)\}\,dw.$$

Так как функция $f(z)$ непрерывна, то

$$|f(w)-f(z)|<\varepsilon \qquad (|w-z|<\delta).$$

Таким образом, при $0<|\delta z|<\delta$

$$\left|\frac{f(z+\delta z)-F(z)}{\delta z}-f(z)\right|<\varepsilon.$$

Этим доказано, что функция $F(z)$ аналитична и что ее производная есть $f(z)$.

Как и в теории функций действительного переменного, мы называем $F(z)$ *неопределенным интегралом* функции $f(z)$.

Предположим, с другой стороны, что нам известна некоторая аналитическая функция $G(z)$, всюду в области D удовлетворяющая условию $G'(z)=f(z)$. Тогда

$$\frac{d}{dz}\{F(z)-G(z)\}=0.$$

Положим $F(z)-G(z)=X+iY$. Согласно § 2.1.3,

$$\frac{\partial X}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial X}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial Y}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial Y}{\partial y}=0.$$

Следовательно, X и Y — постоянные, т. е. $F-G$ есть постоянная. Таким образом, для любых a, b из D

$$\int\limits_{a}^{b} f(z)\,dz=G(b)-G(a).$$

2.3.7. Интегрирование и дифференцирование комплексных рядов. *Равномерно сходящийся ряд аналитических функций комплексного переменного можно почленно интегрировать в области равномерной сходимости вдоль любого пути.*

Это можно доказать в точности так же, как в вещественном случае (следует воспользоваться неравенством § 2.3.1).

Ряд аналитических функций можно почленно дифференцировать в любой точке внутри области, где ряд производных равномерно сходится.

И эта теорема может быть доказана так же, как в вещественном случае. Позже (§ 2.8) она будет заменена, однако, гораздо более полезной теоремой, типичной для теории функций комплексного переменного и не имеющей аналога среди теорем главы I.

2.4. Интеграл Коши. Пусть $f(z)$ — функция, аналитическая внутри простого замкнутого контура C и на самом контуре. Рассмотрим функцию $\frac{f(w)}{w-z}$ от w. Она аналитична внутри C и на C всюду, кроме точки $w=z$, где знаменатель обращается в нуль. Следовательно,

$$\int_C \frac{f(w)}{w-z}\,dw = \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw,$$

где γ — любой замкнутый контур, лежащий внутри C и охватывающий точку $w=z$. Мы берем в качестве γ окружность с центром z и радиусом ρ. Так как функция $f(w)$ непрерывна, то ρ можно взять столь малым, чтобы на γ было выполнено неравенство $|f(w)-f(z)|<\varepsilon$. Очевидно,

$$\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw = f(z)\int_\gamma \frac{dw}{w-z} + \int_\gamma \frac{f(w)-f(z)}{w-z}\,dw.$$

Первый член справа равен $2\pi i f(z)$ (§ 2.3, пример (III)). Второй член, согласно § 2.3.1, по абсолютной величине не превосходит

$$\frac{\varepsilon}{\rho}\cdot 2\pi\rho = 2\pi\varepsilon.$$

Следовательно,

$$\left|\int_C \frac{f(w)}{w-z}\,dw - 2\pi i f(z)\right| < 2\pi\varepsilon.$$

Но левая часть не зависит от ε. Поэтому она должна быть нулем, и, таким образом,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)}{w-z}\,dw.$$

Это — интегральная формула Коши. Она выражает значение функции $f(z)$ в произвольной точке, лежащей внутри C, через ее значения на C.

2.4.1. Производные аналитической функции. Пусть z — произвольная точка, лежащая внутри C, и $z+h$ — близкая точка, также лежащая внутри C. Тогда

$$f(z+h)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)}{w-z-h}\,dw.$$

Вычитая из этой формулы предыдущую и деля на h, мы видим, что

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h}=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)}{(w-z)(w-z-h)}\,dw. \tag{1}$$

При $h\to 0$ подынтегральное выражение стремится к $\frac{f(w)}{(w-z)^2}$. Чтобы доказать, что можно перейти к пределу под знаком интеграла, рассмотрим разность

$$\int_C \frac{f(w)}{(w-z)(w-z-h)}\,dw-\int_C \frac{f(w)}{(w-z)^2}\,dw=h\int_C \frac{f(w)}{(w-z)^2(w-z-h)}\,dw. \tag{2}$$

Пусть $|f(w)|\leqslant M$ на C, и пусть расстояние от z до C (т. е. минимум функции $|w-z|$ на C) есть δ. Пусть длина C равна L. Тогда при $|h|<\delta$

$$\left|\int_C \frac{f(w)}{(w-z)^2(w-z-h)}\,dw\right|\leqslant\frac{ML}{\delta^2(\delta-|h|)},$$

правая же часть ограничена при $|h|\to 0$. Таким образом, правая часть равенства (2) стремится к нулю вместе с $|h|$, что вместе с равенством (1) приводит к равенству

$$f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)}{(w-z)^2}\,dw. \tag{3}$$

Это — формула Коши для $f'(z)$.

Конечно, существование производной $f'(z)$ мы предполагали с самого начала. Но теперь, после того как мы получили для нее эту формулу, мы можем повторить описанную процедуру. Именно,

$$\frac{f'(z+h)-f'(z)}{h}=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{2w-2z-h}{(w-z)^2(w-z-h)^2}f(w)\,dw,$$

и, рассуждая, как выше, мы видим, что при $h\to 0$ правая часть стремится к $\frac{2}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)}{(w-z)^3}\,dw$. *Следовательно, $f''(z)$, производная* *от* $f'(z)$, *существует и дается формулой*

$$f''(z)=\frac{2}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(w)}{(w-z)^3}\,dw.$$

Это рассуждение можно, очевидно, повторять неограниченно. *Следовательно, функция* $f(z)$ *имеет производные всех порядков, и* n*-я производная дается формулой*

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\,dw.$$

2.4.2. Теорема Морера. Это своего рода обращение теоремы Коши.

Если $f(z)$ — *непрерывная функция от* z *в области* D *и интеграл*

$$\int f(z)\,dz,$$

взятый по любому лежащему в D *замкнутому контуру, равен нулю, то функция* $f(z)$ *аналитична в* D.

Не имеет значения, какой точный смысл придается в этой теореме слову «контур». Она сохраняет силу, даже если мы ограничиваемся, скажем, полигонами.

Рассмотрим функцию $F(z)=\int\limits_{z_0}^{z} f(w)\,dw$. Ее значение не зависит от пути интегрирования, и

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h}-f(z)=\frac{1}{h}\int\limits_{z}^{z+h}\{f(w)-f(z)\}\,dw,$$

где в качестве пути интегрирования может быть взят отрезок прямой. Так как функция $f(z)$ непрерывна, то правая часть стремится к нулю вместе с h. Следовательно, функция $F(z)$ аналитична и ее производная равна $f(z)$. Но мы только что доказали, что производная аналитической функции аналитична. Следовательно, $f(z)$ есть аналитическая функция.

2.4.3. Ряд Тейлора. Аналитическая функция может быть разложена в степенной ряд, подобный вещественному ряду Тейлора.

Пусть функция $f(z)$ *аналитична на простом замкнутом контуре* C *и внутри него, и пусть* a — *точка внутри* C. *Тогда*

$$f(z)=f(a)+(z-a)f'(a)+\ldots+\frac{(z-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\ldots,$$

если $|z-a|<\delta$, *где* — δ — *расстояние точки* a *до ближайшей к ней точки контура* C.

Мы начинаем с формулы Коши

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(w)}{w-z}\,dw,$$

где в качестве Г взята окружность с центром a и радиусом $\rho<\delta$. Равенство имеет место, если точка z лежит внутри этой окружности, т. е. если $|z-a|<\rho$.

Мы можем написать

$$\frac{1}{w-z}=\frac{1}{w-a}+\frac{z-a}{(w-a)^2}+\ldots+\frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}}+\ldots,$$

причем ряд равномерно сходится на Г. Умножим его на $\frac{f(w)}{2\pi i}$ и проинтегрируем почленно вдоль Г. Мы получим равенство

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(w)}{w-a}\,dw+\frac{z-a}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(w)}{(w-a)^2}\,dw+\ldots+$$
$$+\frac{(z-a)^n}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}+\ldots,$$

которое вместе с формулами § 2.4.1 доказывает теорему. Ее называют иногда теоремой Коши — Тейлора.

Следует указать на отличие этого доказательства от соответствующих рассмотрений в области функций действительного переменного. В случае действительного переменного мы получаем первые n членов разложения и остаточный член, и необходимо специальное исследование, чтобы выяснить, стремится ли этот последний к нулю. В случае комплексного переменного тот факт, что остаточный член стремится к нулю, вытекает из исходных предположений. Такое положение вещей вполне естественно; действительно, сопоставляя доказанную теорему с теоремой § 2.1.6, мы видим, что *необходимым и достаточным условием разложимости функции в степенной ряд является ее аналитичность в некоторой области*. Аналитическую функцию действительного переменного мы не умеем определять иначе, как потребовав, чтобы она разлагалась в степенной ряд. Следует ожидать, что если мы начнем с других предположений, то встретимся с затруднениями. Например, радиус сходимости ряда зависит от размеров области, в которой функция аналитична. Поэтому он может зависеть от существования особенностей, лежащих в стороне от вещественной оси, о которых мы, если мы ограничиваемся вещественным переменным, не можем иметь никаких сведений.

Так, разложение $\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-\ldots$ имеет смысл только при $|x|<1$. В природе этой функции, рассматриваемой как функция *вещественного* переменного x, не видно ничего, что говорило бы в пользу этого ограничения. Однако при комплексном x оно оправдывается тем, что функция не аналитична в точках $x=\pm i$.

2.5. Неравенство Коши. *Пусть*

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad (|z|<R).$$

Если $M(r)$ — верхняя грань функции $|f(z)|$ на окружности $|z|=r$ $(r<R)$, то для всех значений n

$$|a_n|\, r^n \leqslant M(r).$$

Действительно, $a_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=r}\frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz$, так что, в силу теоремы § 2.3.1,

$$|a_n|\leqslant \frac{M(r)}{r^n}.$$

Неравенство Коши можно доказать также следующим образом. При $r<R$

$$|f(z)|^2=f(z)\overline{f(z)}=\sum_{m=0}^{\infty} a_m r^m e^{im\theta}\sum_{n=0}^{\infty}\bar{a}_n r^n e^{-in\theta}.$$

Так как оба ряда абсолютно сходятся, то мы можем перемножить их по обычному правилу (§ 1.6.5). Ряд, получающийся в результате, равномерно сходится при $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$, и мы можем почленно проинтегрировать его в этом интервале. При интегрировании все члены, у которых $m\neq n$, пропадают, так что

$$\int\limits_0^{2\pi}|f(z)|^2\,d\theta=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\bar{a}_n r^{2n}\int\limits_0^{2\pi} d\theta=2\pi\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2 r^{2n}$$

и

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2 r^{2n}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|f(z)|^2\,d\theta\leqslant\{M(r)\}^2.$$

Неравенство Коши является очевидным следствием этого неравенства.

Пример. Показать, что неравенство Коши превращается в равенство в том и только в том случае, если $f(z)$ есть некоторая степень z, умноженная на постоянную.

2.5.1. Теорема Лиувилля. *Ограниченная функция, аналитическая при всех конечных значениях z, есть постоянная.*

Мы дадим два доказательства этой важной теоремы.

Первое доказательство. Если функция $f(z)$ аналитична при всех конечных значениях z, то $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ для всех z. Если при этом $|f(z)|\leqslant M$, то, согласно неравенству Коши, $|a_n|\leqslant \leqslant Mr^{-n}$ для всех значений n и r. При $n>0$ и $r\to\infty$ правая часть стремится к нулю. Следовательно, $a_n=0$ при $n>0$, т. е. $f(z)=a_0$.

Второе доказательство. Для любых z_1, z_2

$$f(z_1)-f(z_2)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-z_1}\,dz-\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-z_2}\,dz=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{z_1-z_2}{(z-z_1)(z-z_2)}\,f(z)\,dz,$$

где C — какой-нибудь контур, охватывающий обе точки z_1, z_2. Беря в качестве C окружность с центром в начале и радиусом R, бо́льшим обоих чисел $|z_1|$, $|z_2|$, мы видим, что

$$|f(z_1)-f(z_2)|\leqslant \frac{|z_1-z_2|\,MR}{(R-|z_1|)(R-|z_2|)}.$$

При $R\to\infty$ правая часть стремится к нулю. Следовательно, $f(z_1)=f(z_2)$. Так как z_1 и z_2 произвольны, то $f(z)$ есть постоянная.

В этой теореме требование ограниченности функции можно ослабить, заменив его требованием равномерной ограниченности на какой-нибудь последовательности контуров, стремящихся к бесконечности. Это видно как из первого, так и из второго доказательства.

2.5.2. Вот более общий результат того же рода.

Если функция $f(z)$ аналитична при всех конечных значениях z и при $|z|\to\infty$

$$f(z)=O(|z|^k),$$

то $f(z)$ есть многочлен степени $\leqslant k$.

Действительно, в силу неравенства Коши

$$|a_n|\leqslant M(r)\,r^{-n}=O(r^{k-n}),$$

так что правая часть стремится к нулю при $r\to\infty$, если $n>k$. Следовательно, $a_n=0$ при $n>k$.

2.5.3. Функция $A(r)$. Обозначим через $A(r)$ верхнюю грань вещественной части функции $f(z)$ на окружности $|z|=r$. Мы начнем с доказательства одного неравенства, подобного неравенству Коши, но вместо $M(r)$ содержащего $A(r)$.

Для всех положительных n и всех r

$$|a_n|\,r^n\leqslant \max\{4A(r),\ 0\}-2\,\mathrm{Re}\,\{f(0)\}.$$

Пусть $z=re^{i\theta}$, и пусть

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = u(r,\ \theta)+iv(r,\ \theta),$$

$$a_n=\alpha_n+i\beta_n.$$

Тогда

$$u(r,\ \theta)=\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha_n\cos n\theta-\beta_n\sin n\theta)\,r^n.$$

Ряд сходится равномерно относительно θ, что позволяет умножить его на $\cos n\theta$ или $\sin n\theta$ и почленно проинтегрировать. Следовательно,

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(r,\ \theta)\cos n\theta\,d\theta=\alpha_n r^n,\qquad \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(r,\ \theta)\sin n\theta\,d\theta=-\beta_n r^n,$$

если $n>0$, и

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(r,\ \theta)\,d\theta=\alpha_0.$$

Следовательно, при $n>0$

$$a_n r^n=(\alpha_n+i\beta_n)\,r^n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(r,\ \theta)\,e^{-in\theta}\,d\theta$$

и

$$|a_n|\,r^n\leqslant\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|u(r,\ \theta)|\,d\theta,$$

так что

$$|a_n|\,r^n+2\alpha_0\leqslant\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\{|u(r,\ \theta)|+u(r,\ \theta)\}\,d\theta.$$

Но $|u|+u$ есть нуль, если $u<0$; таким образом, если $A(r)<0$, то правая часть есть нуль. Если же $A(r)\geqslant 0$, то правая часть не превышает

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} 2A(r)\,d\theta=4A(r).$$

Этим теорема доказана.

Имеются, конечно, аналогичные оценки, содержащие нижнюю грань функции $\operatorname{Re} f(r)$, а также верхнюю и нижнюю грани функции $\operatorname{Im} f(z)$.

2.5.4. Аналог теоремы Лиувилля для $A(r)$. *Если функция $f(z)$ аналитична при всех конечных значениях z и функ-*

ция $A(r)$ остается ограниченной при $r \to \infty$, то $f(z)$ есть постоянная. Если $A(r) < Ar^k$, где A и k — постоянные, то $f(z)$ есть многочлен степени $\leqslant k$.

В первом случае из предыдущей теоремы следует, что $|a_n| r^n = O(1)$ при $r \to \infty$ для любого $n > 0$, так что $a_n = 0$ при $n > 0$, т. е. $f(z) = a_0$. Подобным же образом во втором случае $a_n = 0$ при $n > k$, т. е. $f(z)$ есть многочлен степени $\leqslant k$.

Первая часть теоремы может быть доказана еще следующим образом. Модуль функции $\varphi(z) = e^{f(z)}$ определяется формулой $|\varphi(z)| = e^{u(r, \theta)}$. Поэтому, если $u(r, \theta) \leqslant A$, то $|\varphi(z)| \leqslant e^A$, так что $\varphi(z)$ есть постоянная в силу теоремы Лиувилля. Следовательно, и $f(z)$ есть постоянная.

2.6. Нули аналитической функции. Нуль аналитической функции $f(z)$ есть такое значение z, что $f(z) = 0$. Если функция $f(z)$ аналитична в окрестности точки $z = a$, то при достаточно малых значениях $|z - a|$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n,$$

и $z = a$ есть нуль тогда и только тогда, когда $a_0 = 0$. Если $a_n = 0$ при $n < m$, но $a_m \neq 0$, то говорят, что $f(z)$ имеет в точке a нуль порядка m. Таким образом, каждый нуль имеет определенный целый порядок; функция не может иметь нуль нецелого порядка в области, где она аналитична.

Если a есть нуль порядка m, то $f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(m-1)}(a) = 0$, в то время как $f^{(m)}(a) \neq 0$. Это следует из вида ряда Тейлора.

Нули аналитической функции — изолированные точки. Это значит, что *если функция $f(z)$ аналитична и не равна тождественно нулю в некоторой области, содержащей внутри себя точку $z = a$, то существует круг $|z - a| < \rho$ $(\rho > 0)$, в котором $f(z)$ не имеет нулей, отличных от a.*

Эта теорема может быть сформулирована еще следующим образом.

Пусть $f(z)$ — функция, аналитическая в некоторой области D. Если $f(z) = 0$ в каждой точке некоторого множества, имеющего предельную точку внутри D, то $f(z) = 0$ во всех точках области D.

Без ущерба для общности можно считать, что предельной является точка $z = 0$. Тогда функция $f(z)$ аналитична в окрестности точки $z = 0$, и потому при некотором положительном R и при $|z| < R$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Покажем, что все коэффициенты a_n равны нулю. Если это не так, то существует первый отличный от нуля коэффициент. Пусть это a_k. Мы можем написать:

$$f(z) = z^k(a_k + a_{k+1}z + \ldots) \qquad (|z| < R).$$

Если $0 < \rho < R$, то ряд сходится при $z = \rho$, так что числа $a_n\rho^n$ ограничены. Пусть $|a_n|\rho^n < K$. Тогда

$$|f(z)| \geqslant |z^k| \left(|a_k| - \frac{K|z|}{\rho^{k+1}} - \frac{K|z|^2}{\rho^{k+2}} - \ldots\right) = |z|^k \left\{|a_k| - \frac{K|z|}{\rho^k(\rho - |z|)}\right\},$$

правая же часть положительна, если число $|z|$ достаточно мало, но отлично от нуля. Это противоречит предположению, что функция $f(z)$ имеет нули, сколь угодно близкие к точке $z = 0$, но отличные от этой точки. Таким образом, все коэффициенты действительно равны нулю. Следовательно, внутри круга сходимости нашего ряда $f(z) = 0$.

Мы можем повторить этот процесс, приняв за начало любую внутреннюю точку указанного круга; действительно, для такой точки теперь выполнены все условия, которыми мы пользовались в только что проведенном доказательстве. Продолжая таким образом *), можно доказать равенство $f(z) = 0$ для любой точки z области D.

2.6.1. Эта теорема имеет следующие очевидные следствия.

(I) Если функция аналитична в области D и равна нулю во всех точках содержащейся в ней меньшей области или во всех точках лежащей внутри области D дуги непрерывной кривой, то она тождественно равна нулю в D.

(II) Если две функции аналитичны в некоторой области и принимают одинаковые значения на бесконечном множестве точек, имеющем предельную точку внутри области, то они всюду в этой области равны между собой.

Примеры. (I) Функция $\sin z$ имеет нули порядка 1 в точках $z = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$ и не имеет других нулей. Это следует из формулы $|\sin(x+iy)| = \sqrt{\sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y}$; см. *Ч. М.*, § 240, пример 2.

(II) Функция $\cos z$ имеет нули первого порядка в точках $z = \pm\frac{1}{2}\pi, \pm\frac{3}{2}\pi, \ldots$ и не имеет других нулей.

(III) Если функции $f(z)$ и $g(z)$ обе аналитичны в области D и $f(z)g(z) = 0$ в D, то $f(z) = 0$ всюду в D или $g(z) = 0$ всюду в D.

2.7. Ряд Лорана. *Пусть функция $f(z)$ аналитична в кольцевой области, ограниченной концентрическими окружностями C и C' с центром a и радиусами R и R' $(R' < R)$, а также на самих*

*) Более детально такие цепи, составленные из кругов, будут рассмотрены в гл. IV.

окружностях. Тогда функцию $f(z)$ можно разложить в ряд по положительным и отрицательным степеням разности $z-a$, сходящийся к ней во всех точках этой области.

Мы должны напомнить читателю, что речь идет об однозначных функциях. Это предположение исключает некоторые функции, однозначные ветви которых аналитичны. Рассмотрим, например, функцию $f(z)=z^p$, где p — действительное число. Она всюду аналитична, за возможным исключением точки $z=0$. Если $z=re^{i\theta}$, то

$$f(z)=r^p e^{ip\theta}.$$

Когда мы обходим окружность $r=\text{const}$, начиная, скажем, со значения $\theta=0$, $f(z)$ изменяется от r^p до $r^p e^{2ip\pi}$ и не возвращается к своему исходному значению, если p не является целым числом.

Чтобы доказать теорему, будем считать, что z лежит в кольце, и рассмотрим интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(w)}{w-z}\,dw,$$

взятый вдоль внешней кривой C в положительном направлении, затем вдоль радиуса-вектора (который мы можем считать не проходящим через точку z) до внутренней окружности C', затем вдоль C' в отрицательном направлении и, наконец, опять вдоль радиуса-вектора до исходной точки. Это — замкнутый контур, к которому мы можем применить наши предыдущие результаты (то, что часть его описывается дважды, ничему не мешает). Поэтому значение интеграла есть $f(z)$.

Так как функция $f(z)$ однозначна, то интегралы, взятые вдоль радиуса-вектора, соединяющего окружности, сокращаются, и мы получаем равенство

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)}{w-z}\,dw-\frac{1}{2\pi i}\int_{C'} \frac{f(w)}{w-z}\,dw,$$

где уже оба интеграла взяты в положительном направлении. Как в доказательстве теоремы Коши — Тейлора,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)}{w-z}\,dw=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n,$$

где $a_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\,dw$. На этот раз, однако, коэффициент a_n не равен, вообще говоря, $\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)$, поскольку функция $f(z)$ не обязана быть аналитической внутри C.

Далее, $\frac{1}{z-w}=\frac{1}{z-a}+\frac{w-a}{(z-a)^2}+\ldots+\frac{(w-a)^{n-1}}{(z-a)^n}+\ldots$ Этот ряд равномерно сходится на C'. Следовательно,

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}\frac{f(w)}{w-z}\,dw=\frac{1}{z-a}\,\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}f(w)\,dw+\ldots$$

$$\ldots+\frac{1}{(z-a)^n}\,\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}(w-a)^{n-1}f(w)\,dw+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(z-a)^n},$$

где $b_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C'}(w-a)^{n-1}f(w)\,dw$. Вместе эти два ряда и составляют разложение Лорана. Его можно представить в виде

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{n}a_n(z-a)^n,\quad \text{где}\quad a_n=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\,dw$$

для всех значений n; интеграл берется вдоль любого простого замкнутого контура, обходящего кольцо.

В том частном случае, когда функция $f(z)$ аналитична внутри C', все коэффициенты b_n обращаются в нуль (в силу теоремы Коши), и ряд сводится к ряду Тейлора.

Заметим, что часть ряда, состоящая из членов с положительными степенями $z-a$, сходится не только в кольце, но и всюду внутри окружности C. Подобным же образом часть ряда, состоящая из членов с отрицательными степенями $z—a$, сходится всюду вне C'.

Примеры. (I) Показать, что

$$e^{\frac{1}{2}c\left(z-\frac{1}{z}\right)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_nz^n,$$

где $a_n=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\cos(n\theta-c\sin\theta)\,d\theta$.

(II) Показать, что при $c>0$

$$e^{z+\frac{c^3}{2z^2}}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_nz^n,$$

где

$$a_n=\frac{e^{-\frac{1}{2}c}}{2\pi c^n}\int_0^{2\pi}e^{c(\cos\theta+\cos^2\theta)}\cos\{c\sin\theta(1-\cos\theta)-n\theta\}\,d\theta.$$

2.7.1. Изолированные особенности аналитической функции. Предположим, что функция $f(z)$ аналитична в окрестности точки a, скажем, при $|z-a|<R$, всюду, за исклю-