чением самой точки a. Тогда a называется изолированной особой точкой функции $f(z)$.

Мы по-прежнему предполагаем, что функция $f(z)$ однозначна. Согласно § 2.7 мы можем разложить ее в ряд Лорана по степеням $z-a$, причем внутреннюю окружность C' можем взять сколь угодно малой. Таким образом,

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n+\sum_{n=1}^{\infty} b_n(z-a)^{-n} \qquad (0<|z-a|<R).$$

Возможны три случая. Первая возможность: все коэффициенты b_n могут оказаться нулями. В этом случае $f(z)$ только в точке a отличается от некоторой функции, аналитической при $|z-a|<R$; например, может случиться, что $f(z)=1$ всюду, кроме точки a, и $f(a)=0$. Это скорее искусственная особенность, не представляющая дальнейшего интереса для теории.

Вторая возможность: ряд отрицательных степеней $z-a$ может содержать только конечное число членов. В этом случае говорят, что точка $z=a$ есть *полюс* функции $f(z)$. Если b_m — последний отличный от нуля коэффициент, то

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n+\sum_{n=1}^{m} b_n(z-a)^{-n}, \ \ldots$$

и говорят, что полюс имеет порядок m. При $m=1, 2, \ldots$ полюс называется простым, двойным, ...

Если функция $f(z)$ имеет в точке a полюс порядка m, то, очевидно, функция $(z-a)^m f(z)$ аналитична и не обращается в нуль при $z=a$. Тогда и функция $\varphi(z)=\frac{1}{(z-a)^m f(z)}$ аналитична и не обращается в нуль при $z=a$. Следовательно, функция $\frac{1}{f(z)}=$ $=(z-a)^m\varphi(z)$ имеет тогда при $z=a$ нуль порядка m.

Подобные же соображения показывают, что, наоборот, нуль порядка m функции $f(z)$ есть полюс порядка m функции $1/f(z)$.

Конечный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(z-a)^n$ называется *главной частью* функции $f(z)$ при $z=a$.

Если при $z=a$ функция $f(z)$ имеет полюс, то $|f(z)|\to\infty$ при $z\to a$.

В самом деле,

$$\left|\sum_{n=1}^{m} b_n(z-a)^{-n}\right|=|z-a|^{-m}\left|\sum_{n=1}^{m} b_n(z-a)^{m-n}\right|\geqslant$$
$$\geqslant|z-a|^{-m}\left\{|b_m|-\sum_{n=1}^{m-1}|b_n||z-a|^{m-n}\right\},$$

и так как содержимое скобок стремится к $|b_m|$, то вся правая часть стремится к бесконечности. (В действительности предыдущая оценка показывает больше: функция доминируется последним членом главной части.)

Если $f(z)=O(|z-a|^{-k})$ при $|z-a|\to 0$, то особенность есть, самое большее, полюс порядка k; в частности, если $f(z)=O(1)$, то может встретиться лишь особенность описанного выше тривиального типа.

Рассуждение, аналогичное изложенному в § 2.5.2, но с b_n вместо a_n и с r, стремящимся к 0, а не к ∞, показывает, что $b_n=0$ при $n>k$. Ясно также, что достаточно, чтобы предыдущее условие было выполнено на последовательности контуров, стягивающихся к точке.

Примеры. (I) Функции $\operatorname{ctg} z$ и $\operatorname{cosec} z$ имеют простые полюсы в точках $z=0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$

(II) Функции $\operatorname{tg} z$ и $\sec z$ имеют простые полюсы в точках $z=\pm\frac{1}{2}\pi$, $\pm\frac{3}{2}\pi, \ldots$

(III) Найти полюсы функций $\frac{1}{\sin z\pm\sin a}$, $\frac{1}{\cos z\pm\cos a}$.

(IV) Функция $\operatorname{cosec} z^2$ имеет один двойной полюс и бесконечно много простых полюсов.

(V) Найти полюсы функций

$$\frac{1}{z^2+1},\quad \frac{1}{z^4+1},\quad \frac{1}{z^4+2z^2+1}.$$

2.7.2. Существенные особенности. Третья возможность состоит в том, что в разложении функции $f(z)$ по степеням $z-a$ ряд отрицательных степеней может оказаться бесконечным. В этом случае точка $z=a$ называется *существенно особой* и

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(z-a)^n},$$

причем последний ряд бесконечен, но сходится при всех значениях z, кроме значения $z=a$.

Сложность поведения функции в окрестности существенно особой точки демонстрируется следующей теоремой Вейерштрасса.

Для любых положительных чисел ρ, ε и любого числа c существует точка z, лежащая в круге $|z-a|<\rho$, в которой $|f(z)-c|<\varepsilon$.

Это значит, что $f(z)$ стремится к любому наперед заданному пределу, когда z стремится к a по соответствующим образом выбранной последовательности значений.

Мы начнем с доказательства того, что для любых двух положительных чисел ρ и M в круге $|z-a|<\rho$ можно найти значения z, в которых $|f(z)|>M$. Если это неверно, то $|f(z)|\leqslant M$

при $|z-a|<\rho$, так что если радиус окружности C' есть R', то

$$|b_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C'} (w-a)^{n-1} f(w)\, dw \right| \leqslant MR'^n.$$

Это так для всех положительных значений n и R', и, заставляя R' стремиться к нулю, мы видим, что $b_n=0$ при $n \geqslant 1$. Следовательно, существенной особенности нет, а это противоречит предположению *).

Рассмотрим теперь произвольное конечное значение c. Если функция $f(z)-c$ имеет нули внутри каждой окружности $|z-a|<\rho$, то доказывать нечего; если же этого нет, то существует столь малое ρ, что $f(z)-c$ не имеет нулей при $|z-a|<\rho$. Тогда функция $\varphi(z)=\frac{1}{f(z)-c}$ аналитична при $|z-a|<\rho$, если не считать точки $z=a$. Точка же $z=a$ является для $\varphi(z)$ существенно особой; действительно, $f(z)=\frac{1}{\varphi(z)}+c$, и если бы точка $z=a$ была полюсом для $\varphi(z)$, то функция $f(z)$ была бы в ней аналитична, а если бы функция $\varphi(z)$ была аналитична в точке $z=a$, то функция $f(z)$ была бы в ней аналитична или имела бы полюс.

Теперь из первой части доказательства следует, что в круге $|z-a|<\rho$ существует точка z, в которой $|\varphi(z)|>1/\varepsilon$, т. е.

$$|f(z)-c|<\varepsilon.$$

Этим теорема доказана.

Эта теорема обнаруживает резкое различие между полюсами и существенными особенностями. В то время как вблизи полюса $f(z)$ стремится к бесконечности, вблизи существенно особой точки $f(z)$ не имеет единственного предельного значения и даже бесконечное число раз подходит сколь угодно близко к любому наперед заданному значению.

Примеры. (I) Функции $e^{1/z}$, $\sin\frac{1}{z}$, $\cos\frac{1}{z}$ имеют изолированные существенные особенности при $z=0$.

(II) Функция $\operatorname{cosec}\frac{1}{z}$ имеет особенность при $z=0$, но это не изолированная особенность, а предельная точка для полюсов, расположенных в точках $z=\frac{1}{n\pi}$. Такую точку мы также называем существенно особой.

(III) Функция $e^{1/z}$ принимает в окрестности точки $z=0$ бесконечное число раз любое значение, кроме 0. Она стремится к 0, когда $z \to 0$ вдоль вещественной оси в положительном направлении.

---

*) Предложение, высказанное и доказанное в этом абзаце, есть, конечно, частный случай последней теоремы предыдущего параграфа. Доказательство также повторяет сказанное там. (*Примечание переводчика.*)

2.7.3. «Бесконечно удаленная» точка. Мы можем рассматривать «бесконечность» как некую точку, производя подстановку $z = 1/w$. Поведение функции $f(z)$ «в бесконечности» есть поведение функции $f(1/w)$ вблизи точки $w = 0$. Мы говорим, что функция $f(z)$ аналитична, имеет простой полюс, и т. д., в бесконечности, если $f(1/w)$ обладает этим свойством при $w = 0$. Так, функция $f(z) = z^2$ имеет в бесконечности двойной полюс.

Функция $f(z)$, аналитическая всюду, включая бесконечно удаленную точку, есть постоянная.

Действительно, так как функция $f(z)$ аналитична при всех конечных значениях z, то для них

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

так что

$$f\left(\frac{1}{w}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{w^n};$$

а так как функция $f(1/w)$ аналитична при $w = 0$, то $a_n = 0$ при $n = 1, 2, \ldots$, т. е. $f(z) = a_0$.

Функция, не имеющая особенностей, отличных от полюсов, есть рациональная функция.

Прежде всего, полюсов может быть только конечное число. В противном случае полюсы имели бы предельную точку — конечную или бесконечно удаленную — и в этой предельной точке функция не могла бы быть аналитической и не могла бы иметь полюс, что противоречит предположению.

Пусть $a, b, \ldots, k$ — полюсы функции $f(z)$, расположенные в конечных точках, и $\alpha, \beta, \ldots, \varkappa$ — их кратности. Функция

$$g(z) = f(z)(z-a)^{\alpha} \ldots (z-k)^{\varkappa}$$

аналитична всюду, за возможным исключением бесконечно удаленной точки, где она, самое большее, имеет полюс. Следовательно, при всех конечных значениях z

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \qquad g\left(\frac{1}{w}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^{-n}.$$

Так как особенность функции $g(1/w)$ при $w = 0$, если она имеется, есть полюс, то ряд должен оборваться, т. е. $g(z)$ есть многочлен. Следовательно, $f(z)$ есть отношение двух многочленов, т. е. рациональная функция.

Обратно, *рациональная функция не имеет особенностей, отличных от полюсов.*

2.8. Равномерно сходящиеся ряды аналитических функций. *Пусть*:

(I) *все функции последовательности* $u_1(z), u_2(z), \ldots$ *аналитичны внутри области* D;

(II) *ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ *равномерно сходится в каждой области* D', *внутренней к* D.

Тогда функция $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ *аналитична внутри* D, *и все ее производные могут быть вычислены почленным дифференцированием* *).

Пусть C — простой замкнутый контур, лежащий внутри D, и z — точка внутри C.

Если бы уже было известно, что $f(z)$ — аналитическая функция, то можно было бы написать:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{w-z}\, dw. \tag{1}$$

Мы же, наоборот, получим эту формулу из наших данных и воспользуемся ею для доказательства аналитичности функции $f(z)$.

При любом n

$$u_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{u_n(w)}{w-z}\, dw.$$

Следовательно,

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{u_n(w)}{w-z}\, dw.$$

Так как ряд $\sum u_n(w)$ равномерно сходится на C, то его можно умножить на $\frac{1}{w-z}$ и почленно проинтегрировать. Таким образом,

$$\int_C \left\{\sum \frac{u_n(w)}{w-z}\right\} dw = \sum \int_C \frac{u_n(w)}{w-z}\, dw$$

и

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \left\{\sum \frac{u_n(w)}{w-z}\right\} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\omega)}{w-z}\, dw.$$

Этим мы доказали формулу (1).

---

*) Как видно из дальнейшего, автор называет область D' внутренней к D, если она содержится в D, ограничена и находится на положительном расстоянии от границы области D. (*Примечание переводчика.*)

Теперь, как в § 2.4.1, мы можем вывести из формулы (1), что $f(z)$ имеет производную, которая дается формулой

$$f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(w)}{(w-z)^2}\,dw.$$

Ограниченность функции $f(w)$ следует здесь из равномерной сходимости ряда. Следовательно, функция $f(z)$ аналитична.

Снова пользуясь равномерной сходимостью ряда, мы можем написать:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(w)}{(w-z)^2}\,dw=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \sum_{n=1}^{\infty} u_n(w)\frac{dw}{(w-z)^2}=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{u_n(w)}{(w-z)^2}\,dw=\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(z).$$

Следовательно, ряд можно продифференцировать почленно. Кроме того, ряд производных равномерно сходится в каждой области, внутренней к D. Действительно, если D' — такая область, то можно считать, что она лежит внутри кривой C и что расстояние любой ее точки z от C не меньше положительного числа δ. Тогда

$$\left|\sum_{n=N}^{N'} u_n'(z)\right|=\left|\sum_{N}^{N'}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{u_n(w)}{(w-z)^2}\,dw\right|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \sum_{N}^{N'} u_n(w)\frac{dw}{(w-z)^2}\right|\leqslant\frac{\varepsilon l}{2\pi\delta^2},$$

где l — длина кривой C, а ε — максимум модуля функции $\sum\limits_{N}^{N'} u_n(w)$ на C. Правая часть не зависит от z и стремится к нулю, когда N и N' независимо друг от друга стремятся к бесконечности, что и доказывает равномерную сходимость ряда $\sum u_n'(z)$ в D'.

Всю процедуру можно теперь повторить, отправляясь от ряда производных, что доказывает теорему уже во всей полноте.

2.8.1. Замечания к предыдущей теореме. (I) Мы уже указывали (§ 2.3.7) на различие между условиями почленной дифференцируемости вещественных рядов и рядов аналитических функций. В случае вещественного ряда приходится предполагать, что ряд производных равномерно сходится. В предыдущей теореме подобные условия не нужны; ряд производных действительно равномерно сходится, но это не предполагается, а доказывается.

(II) Если бы мы предположили только, что ряд функций, аналитических на некотором простом замкнутом контуре C и внутри него, равномерно сходится на C, то и в этом случае мы могли бы доказать, как выше, что сумма $f(z)$ аналитична всюду внутри C.

(III) Нельзя доказать, что функция $f(z)$ аналитична на границе области D или что ряд производных сходится на границе, если даже предположить, что все функции $u_n(z)$ аналитичны на границе и что ряд $\sum u_n(z)$ равномерно сходится на границе. Рассмотрим, например, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$. Он равномерно сходится при $|z| \leqslant 1$. Но ряд производных не является равномерно сходящимся в окрестности значения $z=1$, и функция, представляемая этим рядом, не является аналитической при $z=1$. Именно,

$$f'(z) = -\frac{\log(1-z)}{z}.$$

(IV) Теорема может быть сформулирована как теорема о последовательностях функций: если функции $f_n(z)$ аналитичны внутри D и последовательность $f_1(z), f_2(z), \ldots$ равномерно сходится к $f(z)$ в каждой области, внутренней к D, то функция $f(z)$ аналитична внутри D и последовательность $f_1'(z), f_2'(z), \ldots$ равномерно сходится к $f'(z)$ в каждой области, внутренней к D.

Примеры. (I) Функция $\zeta(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ аналитична при $\mathrm{Re}(s) > 1$. [Действительно, ряд равномерно сходится во всякой конечной области, в которой всюду $\mathrm{Re}(s) \geqslant a > 1$; ср. § 1.2, пример.]

(II) При $\mathrm{Re}(s) > 1$

$$\zeta'(s) = -\sum_{n=2}^{\infty} n^{-s}\log n,$$

и, вообще, $\zeta^{(k)}(s) = -(1)^k \sum\limits_{n=2}^{\infty} n^{-s}\log^k n$.

(III) В какой области ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nz}{2^n}$ представляет аналитическую функцию?

(IV) Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nz}{n^2}$ равномерно сходится на вещественной оси, но не в какой-либо *области* плоскости z; таким образом, предыдущая теорема ничего не говорит об аналитическом характере функции, которую он представляет.

2.8.2. Другое доказательство теоремы. Первую часть теоремы § 2.8 можно вывести также из теоремы Морера (§ 2.4.2). Действительно, поскольку ряд $\sum u_n(z)$ равномерно сходится, его можно интегрировать почленно вдоль любого контура C. Таким образом,

$$\int_C f(z)\,dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_C u_n(z)\,dz.$$

Поскольку все функции $u_n(z)$ аналитичны, в случае замкнутого контура все члены справа равны нулю. Следовательно, в этом случае $\int\limits_C f(z)\,dz=0$, и в силу теоремы Морера функция $f(z)$ аналитична.

2.8.3. Определение аналитических функций посредством интегралов. *Пусть $f(z, w)$ — функция комплексных переменных z и w, определенная и непрерывная для всех значений z в некоторой области D и всех значений w на некотором контуре C. Допустим, что $f(z, w)$ есть аналитическая функция от z в D для каждого значения w на C. Тогда*

$$F(z)=\int\limits_C f(z, w)\,dw$$

есть аналитическая функция от z в D и

$$F'(z)=\int\limits_C \frac{\partial f}{\partial z}\,dw.$$

Подобные же формулы верны для старших производных.

Мы можем считать, что контур C состоит из единственной регулярной кривой, на которой $w=u+iv$ и $u=u(t)$, $v=v(t)$, причем $t_0\leqslant t\leqslant t_1$ и производные $u'(t)$, $v'(t)$ непрерывны.

Пусть Γ — контур, лежащий в D, на котором $z=x+iy$ и $x=x(s)$, $y=y(s)$, причем $s_0\leqslant s\leqslant s_1$ и производные $x'(s)$ $y'(s)$ непрерывны. Пусть ζ — точка, лежащая внутри Γ. Тогда

$$f(\zeta, w)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{f(z, w)}{z-\zeta}\,dz,$$

$$F(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C dw\int\limits_\Gamma \frac{f(z, w)}{z-\zeta}\,dz.$$

Мы можем обратить порядок этих двух интегрирований. Действительно, комплексный интеграл представляется, согласно § 2.3, как комбинация вещественных интегралов, что позволяет представить предыдущий повторный комплексный интеграл в виде

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} dt\int\limits_{s_0}^{s_1}\{\varphi(s, t)+i\psi(s, t)\}\,ds,$$

где φ и ψ — непрерывные вещественные функции от s и t; а повторный интеграл такого типа, как мы знаем (§ 1.8.1), может быть обращен. Следовательно,

$$F(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{dz}{z-\zeta}\int\limits_C f(z, w)\,dw=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{F(z)}{z-\zeta}\,dz.$$

Итак, для функции $F(z)$ получена интегральная формула Коши, и теперь доказательство того, что она аналитична и что дифференцирование может быть произведено под знаком интеграла, проводится так же, как доказательство соответствующих утверждений в теореме о равномерно сходящихся рядах *).

Примеры. (I) Если функция $f(t)$ непрерывна в замкнутом интервале (a, b), то функции

$$F(z)=\int_a^b \cos ztf(t)\,dt, \quad G(z)=\int_a^b \sin ztf(t)\,dt$$

аналитичны при всех конечных значениях z.

(II) При тех же условиях функция $\int_a^b \frac{f(t)}{z-t}\,dt$ аналитична всюду, за возможным исключением вещественных значений z, лежащих в интервале (a, b).

2.8.4. Несобственные интегралы. Пусть C — *кривая, уходящая в бесконечность. Предположим, что условия предыдущей теоремы выполнены на каждой ограниченной части кривой C и что интеграл $\int_C f(z, w)\,dw$ равномерно сходится. Тогда и заключения предыдущей теоремы сохраняют силу.*

Пусть C_n — часть кривой C, лежащая внутри окружности $|z|=n$, и пусть $F_n(z)=\int_{C_n} f(z, w)\,dw$. Согласно теореме о конечных интегралах, все функции $F_n(z)$ аналитичны. Кроме того, при $n\to\infty$

$$F_n(z)\to F(z)$$

равномерно относительно z, так что, согласно теореме о равномерно сходящихся последовательностях, функция $F(z)$ аналитична. Наконец,

$$F'(z)=\lim_{n\to\infty} F'_n(z)=\lim_{n\to\infty}\int_{C_n}\frac{\partial f}{\partial z}\,dw=\int_C \frac{\partial f}{\partial z}\,dw.$$

2.8.5. Несобственные интегралы второго рода. Подобная же теорема верна в случае конечного контура C, на одном из концов которого $f(z, w)\to\infty$. Интеграл представляет аналитическую функцию, если его сходимость равномерна. Точная формулировка и доказательство вполне аналогичны предыдущим.

---

*) Оставленная читателю часть доказательства устанавливает и тот не включенный в формулировку теоремы факт, что производная $\frac{\partial f}{\partial x}$ непрерывна. Эта непрерывность придает смысл доказываемой формуле и позволяет повторить процесс дифференцирования. (*Примечание переводчика.*)

Примеры. (I) Функция

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-w}w^{z-1}dw$$

аналитична при $\operatorname{Re}(z)>0$. [Сходимость этого интеграла изучалась в § 1.5.1, пример (I). Он равномерно сходится во всякой конечной области, в которой всюду $\operatorname{Re}(z)\geqslant a>0$. Каждая точка, в которой $\operatorname{Re}(z)>0$, является внутренней для такой области.]

(II) В каких областях интегралы

$$\int_0^\infty e^{-zw^2}\,dw,\qquad \int_0^\infty \frac{\sin w}{w^z}\,dw,\qquad \int_0^\infty \frac{\cos w}{w^z}\,dw$$

представляют аналитические функции?

(III) Интеграл $\int_0^\infty \frac{\sin wz}{w}\,dw$ равномерно сходится в некоторых интервалах вещественных значений z, но это не так ни в какой *области* плоскости z. Таким образом, предыдущие теоремы ничего не говорят об аналитическом характере функции, которую он представляет.

2.9. Замечание о рядах Лорана. Предположим, что мы каким-либо образом получили для функции $f(z)$ формулу

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(z-a)^n \qquad (R'<z<R),$$

— например, функция может быть определена этой формулой. Должен ли непременно этот ряд совпадать с рядом Лорана функции $f(z)$? Оказывается, что это так. Действительно, если C — окружность $|z-a|<\rho$, причем $R'<\rho<R$, то коэффициент Лорана a_n определяется формулой

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{A_m}{2\pi i}\int_C \frac{(z-a)^m}{(z-a)^{n+1}}\,dz$$

(почленное интегрирование оправдывается равномерной сходимостью), правая же часть равна A_n (см. § 2.3, примеры (III) и (IV)).

ГЛАВА III

ВЫЧЕТЫ. КОНТУРНОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ. НУЛИ

3.1. Вычет относительно особой точки. Мы знаем (§ 2.7.1), что в окрестности изолированной особой точки $z=a$ однозначная аналитическая функция $f(z)$ допускает разложение вида

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n+\sum_{n=1}^{\infty} b_n (z-a)^{-n}.$$

Особенно важен коэффициент b_1. Он называется *вычетом* функции $f(z)$ относительно точки $z=a$. Согласно формулам для коэффициентов разложения Лорана,

$$b_1=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} f(z)\,dz,$$

где γ — любая окружность с центром $z=a$, не охватывающая других особых точек функции. Легко проверить, что если $z=a$ — простой полюс, то

$$b_1=\lim_{z\to a}(z-a)f(z).$$

3.1.1. Теорема о вычетах. *Пусть функция $f(z)$ однозначна и аналитична на простом замкнутом контуре C и внутри него всюду, за исключением конечного числа внутренних точек $z_1, z_2, \ldots$ $\ldots, z_n$. Пусть $R_1, R_2, \ldots, R_n$ — вычеты функции $f(z)$ относительно этих точек. Тогда*

$$\int_C f(z)\,dz=2\pi i\,(R_1+R_2+\ldots+R_n).$$

Пусть $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ — окружности с центрами $z_1, z_2, \ldots, z_n$ и столь малыми радиусами, что они лежат целиком внутри C и не перекрываются. Функция $f(z)$ аналитична в области, заключенной между контуром C и этими окружностями, так что, согласно теореме Коши (§ 2.3.5),

$$\int_C f(z)\,dz=\int_{\gamma_1} f(z)\,dz+\ldots+\int_{\gamma_n} f(z)\,dz.$$

Но $\int\limits_{\gamma_1} f(z)\,dz = 2\pi i R_1, \ \ldots, \ \int\limits_{\gamma_n} f(z)\,dz = 2\pi i R_n$, что и завершает доказательство.

3.1.2. Контурное интегрирование. Теорема о вычетах может быть использована для вычисления многих вещественных определенных интегралов. Обычно берут контур, часть которого проходит по вещественной оси, и заставляют остальную его часть стремиться к бесконечности. Этот процесс называется контурным интегрированием. Наилучшим образом он может быть разъяснен на примерах.

3.1.2.1. Хорошо известно, что $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$.

Чтобы доказать это контурным интегрированием, рассмотрим интеграл $\int \frac{dz}{1+z^2}$, взятый по контуру, состоящему из отрезка вещественной оси от $-R$ до R и лежащей над ним полуокружности, для которой он служит диаметром. Так как

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right),$$

то подынтегральная функция имеет полюс с вычетом $1/(2i)$ в точке $z=i$, которая лежит внутри контура, если $R>1$. Применяя теорему о вычетах, мы видим, что интеграл равен π.

На полуокружности $|1+z^2| \geqslant R^2-1$, так что интеграл, взятый вдоль полуокружности, по абсолютной величине не превосходит $\frac{\pi R}{R^2-1}$ и потому стремится к нулю при $R\to\infty$. Следовательно,

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{-R}^{R} \frac{dx}{1+x^2} = \pi,$$

и остается заметить, что подынтегральная функция четна.

Таким же путем может быть вычислен интеграл любой четной рациональной функции, которая надлежащим образом ведет себя в бесконечности.

Конечно, нам известен неопределенный интеграл функции $\frac{1}{1+x^2}$ (это $\operatorname{arctg} x$), и мы могли бы вычислить предыдущий интеграл, пользуясь этим. Изложенный метод оказывается наиболее полезным в тех случаях, когда неопределенный интеграл неизвестен.

3.1.2.2. В § 1.7.6 было показано, что $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$. Чтобы доказать это контурным интегрированием, рассмотрим интеграл

$\int \frac{e^{iz}}{z}\,dz$, взятый по контуру, состоящему из: отрезка вещественной оси от $z=\rho$ до $z=R$, где $0<\rho<R$; полуокружности Γ радиуса R с центром в начале, лежащей над вещественной осью; отрезка вещественной оси от $-R$ до $-\rho$; и, наконец, полуокружности γ радиуса ρ с центром в начале, лежащей над вещественной осью. Мы заставим ρ уменьшаться, а R расти. Малая полуокружность нужна для того, чтобы обойти особенность подынтегральной функции при $z=0$, а большая — для того, чтобы замкнуть контур.

Функция e^{iz}/z не имеет особенностей внутри контура, и потому значение интеграла есть 0. Таким образом,

$$\int\limits_{\rho}^{R} \frac{e^{ix}}{x}\,dx + \int\limits_{\Gamma} \frac{e^{iz}}{z}\,dz + \int\limits_{-R}^{-\rho} \frac{e^{-ix}}{-x}\,dx + \int\limits_{\gamma} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = 0.$$

Сумма интегралов, взятых по отрезкам вещественной оси, равна

$$\int\limits_{\rho}^{R} \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{x}\,dx = 2i \int\limits_{\rho}^{R} \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Интеграл, взятый вдоль Γ, стремится к нулю при $R\to\infty$. Действительно,

$$\left|\int\limits_{\Gamma} \frac{e^{iz}}{z}\,dz\right| = \left|\int\limits_{0}^{\pi} e^{iRe^{i\theta}}\,i\,d\theta\right| \leqslant \int\limits_{0}^{\pi} e^{-R\sin\theta}\,d\theta \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{\rho}^{\delta} d\theta + \int\limits_{\delta}^{\pi-\delta} e^{-R\sin\delta}\,d\theta + \int\limits_{\pi-\delta}^{\pi} d\theta < 2\delta + \pi e^{-R\sin\delta}.$$

Сначала мы выбираем δ произвольно малым, а затем, при фиксированном δ, делаем произвольно малым и второй член справа, выбирая R достаточно большим. Следовательно, левая часть неравенства стремится к нулю.

Наконец,

$$\int\limits_{\gamma} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = \int\limits_{\gamma} \frac{dz}{z} + \int\limits_{\gamma} \frac{e^{iz}-1}{z}\,dz.$$

Подынтегральная функция в последнем интеграле остается ограниченной при $\rho\to 0$, так что, по § 2.3.1, он стремится к нулю. Первый интеграл справа допускает явное вычисление, именно

$$\int\limits_{\gamma} \frac{dz}{z} = \int\limits_{\pi}^{0} i\,d\theta = -i\pi.$$

Таким образом, заставляя ρ стремиться к 0, а R к ∞, мы видим, что $2i\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx - i\pi = 0$, а это и утверждалось.

Заметим, что интеграл, взятый вдоль полуокружности γ в отрицательном направлении, стремится к вычету относительно точки $z=0$, умноженному на $-i\pi$. Легко проверить, что это так для любого *простого* полюса, но не для полюса более высокого порядка.

Заметим еще, что мы рассмотрели вместо комплексного интеграла $\int \frac{\sin z}{z}\,dz$ другой вспомогательный интеграл потому, что функция $\sin z/z$ не ведет себя надлежащим образом в бесконечности.

3.1.2.3. *При* $0<a<1$

$$\int\limits_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

Рассмотрим интеграл $\int \frac{z^{a-1}}{1+z}\,dz$, взятый вдоль вещественной оси от $z=\rho$ до $z=R$, затем в положительном направлении вдоль окружности Γ радиуса R с центром в начале, затем вдоль вещественной оси в обратном направлении от $z=R$ до $z=\rho$ и, наконец, в отрицательном направлении вдоль окружности γ радиуса ρ с центром в начале. Это — замкнутый контур, не охватывающий начало. Подобный контур нужен потому, что функция не однозначна в области, содержащей начало, так что к контуру, охватывающему начало, не могла бы быть применена теорема о вычетах. Значения многозначной функции z^{a-1} определены тем, что на первой части контура они вещественны. В остальных точках они даются формулой $r^{a-1}e^{(a-1)i\theta}$, где $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$.

Внутри контура имеется один полюс, именно точка $z=-1$, с вычетом $e^{(a-1)i\pi}$. Следовательно,

$$\int\limits_\rho^R \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx + \int\limits_\Gamma \frac{z^{a-1}}{1+z}\,dz + \int\limits_R^\rho \frac{x^{a-1}e^{(a-1)2i\pi}}{1+x}\,dx + \int\limits_\gamma \frac{z^{a-1}}{1+z}\,dz = 2\pi i e^{(a-1)i\pi}.$$

Сумма двух интегралов, взятых вдоль отрезков вещественной оси, равна

$$(1-e^{2i\pi(a-1)})\int\limits_\rho^R \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx = -2ie^{ia\pi}\sin a\pi \int\limits_\rho^R \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx.$$

Два других интеграла стремятся к нулю при $R\to\infty$, $\rho\to 0$. Действительно, на Γ

$$\left|\frac{z^{a-1}}{1+z}\right| \leqslant \frac{R^{a-1}}{R-1},$$

так что $\left|\int\limits_{\Gamma} \frac{z^{a-1}}{1+z}\,dz\right| \leqslant \frac{R^{a-1}}{R-1} 2\pi R = \frac{2\pi R^a}{R-1}$, а правая часть стремится к нулю при $R \to \infty$, поскольку $a<1$. Подобным же образом $\left|\int\limits_{\gamma} \frac{z^{a-1}}{1+z}\,dz\right| \leqslant \frac{2\pi\rho^a}{1-\rho}$, и правая часть стремится к нулю при $\rho \to 0$, так как $a>0$. Этим формула доказана.

3.1.2.4. Предыдущая формула имеет применение в теории Г-функции. Именно, полагая $y=1-x$ в формуле (4) из § 1.8.6, мы видим, что $\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\int\limits_0^\infty \frac{u^{-x}}{1+u}\,du=\frac{\pi}{\sin(1-x)\pi}$, т. е.

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin x\pi},$$

если $0<x<1$.

3.1.2.5. *При* $n=0, 1, 2, \ldots$

$$\int\limits_0^\infty x^n e^{-x^{1/4}} \sin x^{1/4}\,dx=0.$$

При подстановке $x=t^4$ этот интеграл принимает вид

$$4\int\limits_0^\infty t^{4n+3} e^{-t} \sin t\,dt.$$

Рассмотрим интеграл $\int z^{4n+3} e^{(i-1)z}\,dz$, взятый вдоль вещественной оси от 0 до R, затем в положительном направлении вдоль окружности радиуса R до мнимой оси и затем вдоль мнимой оси до начала координат. На дуге окружности

$$|e^{(i-1)z}| = e^{-R\cos\theta - R\sin\theta} \leqslant e^{-R},$$

так что

$$\left|\int z^{4n+3} e^{(i-1)z}\,dz\right| \leqslant \frac{1}{2}\pi R^{4n+4} e^{-R} \to 0.$$

Следовательно,

$$\int\limits_0^\infty x^{4n+3} e^{(i-1)x}\,dx - \int\limits_0^\infty (iy)^{4n+3} e^{(i-1)iy}\, i\,dy = 0.$$

Написав в последнем интеграле x вместо y, мы видим, что

$$\int\limits_0^\infty x^{4n+3} e^{-x} (e^{ix} - e^{-ix})\,dx = 0,$$

откуда и получается доказываемое равенство.

3.1.2.6. *Если $c>0$, то*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{a^z}{z}\,dz=\begin{cases}1 & (a>1),\\ 0 & (0<a<1).\end{cases}$$

Если $a>1$, т. е. $\log a>0$, то мы рассматриваем интеграл вдоль контура, состоящего из отрезка прямой с концами $c-iR$, $c+iR$ и полуокружности с теми же концами, расположенной от него слева. Если радиус R достаточно велик, то этот контур охватывает полюс $z=0$ с вычетом 1, и, как в § 3.1.2.1, можно доказать, что интеграл, взятый вдоль полуокружности, стремится к нулю при $R\to\infty$.

Если $a<1$, то мы замыкаем отрезок полуокружностью, расположенной от него справа. Теперь внутри контура нет полюса, и мы получаем вторую строку формулы.

3.1.2.7. Интеграл, представляющий Г-функцию. Мы можем написать:

$$\int_0^\infty x^{p-1}e^{-ax}\,dx=\frac{\Gamma(p)}{a^p}\qquad (a>0,\ p>0):$$

Если бы мы имели право произвести в этом интеграле подстановку $x=it$, то мы получили бы формулу

$$\int_0^\infty (it)^{p-1}e^{-ait}i\,dt=\frac{\Gamma(p)}{a^p},$$

а после умножения на $e^{-\frac{1}{2}ip\pi}$ и отделения вещественной части от мнимой — формулы

$$\int_0^\infty t^{p-1}\cos at\,dt=\frac{\Gamma(p)\cos\frac{1}{2}p\pi}{a^p},\qquad \int_0^\infty t^{p-1}\sin at\,dt=\frac{\Gamma(p)\sin\frac{1}{2}p\pi}{a^p}.\qquad (1)$$

Конечно, обычное правило интегрирования подстановкой не оправдывает такого рода «комплексных подстановок». Однако эту подстановку можно оправдать, применив теорему Коши. Рассмотрим интеграл $\int z^{p-1}e^{-az}\,dz$, взятый вдоль контура, состоящего из отрезка вещественной оси от $z=\rho$ до $z=R$, дуги окружности $|z|=R$ от вещественной оси до мнимой, отрезка мнимой оси от $z=iR$ до $z=i\rho$ и дуги окружности $|z|=\rho$ от $z=i\rho$ до исходной точки $z=\rho$. В силу теоремы Коши интеграл вдоль этого контура есть 0. Как и в предыдущих случаях, можно доказать, что интеграл, взятый вдоль дуги окружности $|z|=\rho$, стремится к нулю при $\rho\to 0$, если $p>0$, и что интеграл, взятый вдоль дуги окружности $|z|=R$, стремится к нулю при $R\to\infty$, если $p<1$. Следовательно, интеграл вдоль мнимой полуоси равен интегралу вдоль вещественной полуоси, взятому с обратным знаком. Вычисляя последний, мы получаем формулы (1) для $0<p<1$.

3.1.2.8. Иногда пользуются обратной процедурой и выводят значение вычета из значения интеграла.

Если p — четное положительное целое число, то вычет функции $\operatorname{tg}^{p-1}\pi z$ относительно точки $z=1/2$ равен $\frac{1}{\pi}(-1)^{\frac{1}{2}p}$.

Этот вычет может быть представлен как

$$\frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{-iR}^{1-iR}+\int_{1-iR}^{1+iR}+\int_{1+iR}^{iR}+\int_{iR}^{-iR}\right\}\operatorname{tg}^{p-1}\pi z\,dz,$$

причем $\int_{1-iR}^{1+iR}=\int_{-iR}^{iR}=-\int_{iR}^{-iR}$ ($\operatorname{tg}\pi z$ есть периодическая функция с периодом 1). Следовательно, вычет равен

$$\frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{-iR}^{1-iR}+\int_{1+iR}^{iR}\right\}\operatorname{tg}^{p-1}\pi z\,dz.$$

Но

$$\operatorname{tg}\pi z=\frac{1}{i}\,\frac{e^{2i\pi x-2\pi y}-1}{e^{2i\pi x-2\pi y}+1}\to\begin{cases}-1/i\\+1/i\end{cases}\quad\left(y\to\begin{matrix}+\infty\\-\infty\end{matrix}\right).$$

Следовательно, при $R\to\infty$

$$\int_{-iR}^{1-iR}\operatorname{tg}^{p-1}\pi z\,dz\to\left(\frac{1}{i}\right)^{p-1},$$

$$\int_{1+iR}^{iR}\operatorname{tg}^{p-1}\pi z\,dz\to-\left(-\frac{1}{i}\right)^{p-1}=\left(\frac{1}{i}\right)^{p-1},$$

и вычет равен $\frac{1}{\pi i}\left(\frac{1}{i}\right)^{p-1}=\frac{1}{\pi i^{p}}=\frac{1}{\pi}(-1)^{\frac{1}{2}p}$.

3.1.3. *Рассмотрим поведение функции*

$$f(t)=\int_{0}^{\infty}e^{ixt-x^{1/4}}\sin x^{1/4}\,dx$$

при $t\to\infty$.

По причинам, которые выяснятся позже, удобно начать с интегрирования по частям. Интегрируя множитель e^{ixt} и замечая, что внеинтегральный член обращается в нуль на обоих концах интервала интегрирования, мы получаем формулу

$$f(t)=\frac{i}{4t}\int_0^\infty e^{ixt-x^{1/4}}(\cos x^{1/4}-\sin x^{1/4})\,x^{-3/4}\,dx.$$

Как и в предыдущих примерах, мы заменяем круговые функции экспоненциальными и вместо функции $f(t)$ рассматриваем функцию

$$\varphi(t)=\frac{1}{4}\int_0^\infty e^{ixt-x^{1/4}+ix^{1/4}}x^{-3/4}\,dx.$$

Полагая $x=u^4/t$, мы видим, что

$$\varphi(t)=t^{-1/4}\int_0^\infty e^{iu^4-(1-i)ut^{-1/4}}\,du.$$

Повернем прямую интегрирования на угол λ, воспользовавшись теоремой Коши как в § 3.1.2.7. Мы получим равенство

$$\varphi(t)=t^{-1/4}\int_0^\infty e^{iv^4e^{4i\lambda}-(1-i)ve^{i\lambda}t^{-1/4}}e^{i\lambda}\,dv.$$

Это преобразование законно, если вещественная часть коэффициента при v^4 отрицательна для всех значений, через которые проходит λ при вращении прямой интегрирования, т. е. если $\sin 4\lambda>0$ или $\lambda<\frac{1}{4}\pi$.

Мы положим $\lambda=\frac{1}{8}\pi$. Этим мы достигнем того, что множитель $e^{iv^4e^{4i\lambda}}$ будет с максимальной возможной скоростью стремиться к нулю при $v\to\infty$. При таком выборе λ

$$\varphi(t)=t^{-1/4}e^{i\pi/8}\int_0^\infty e^{-4-(1-i)ve^{i\pi/8}t^{-1/4}}\,dv.$$

Если $t\to\infty$, то последний интеграл, будучи равномерно сходящимся, стремится к пределу

$$\int_0^\infty e^{-v^4}\,dv=\frac{1}{4}\int_0^\infty e^{-w}w^{-3/4}\,dw=\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right).$$

Следовательно, $\varphi(t)\sim\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)e^{i\pi/8}t^{-1/4}$. Та же асимптотическая формула и таким же образом получается для функции $\psi(t)=\frac{1}{4}\int_0^\infty e^{ixt-x^{1/4}-ix^{1/4}}x^{-3/4}\,dx$, так что, окончательно,

$$f(t)=\frac{i}{t}\left\{\frac{\varphi(t)+\psi(t)}{2}-\frac{\varphi(t)-\psi(t)}{2i}\right\}\approx\frac{1}{4}\,i\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)e^{i\pi/8}t^{-5/4}.$$

Аналогичные вычисления мы могли бы, конечно, проделать и до интегрирования по частям. Читатель может проверить, что они приводят лишь к формуле $f(t)=o(t^{-1})$.

3.2. Разложение мероморфной функции. Функция называется *мероморфной* в некоторой области, если она аналитична во всякой внутренней области всюду, за возможным исключением конечного числа полюсов. Это название подчеркивает отличие таких функций от *голоморфных*, т. е. аналитических, функций.

Простейшими мероморфными функциями являются рациональные функции. Мы знаем, что рациональная функция может быть разложена на простые дроби. Подобное же представление мы получим теперь для одного более широкого класса мероморфных функций.

Пусть $f(z)$ — функция, не аналитическая только в тех точках конечной части плоскости, которые являются ее полюсами. Ради простоты мы предположим, что все эти полюсы — простые. Пусть это — точки $a_1, a_2, \ldots$, причем $0<|a_1|\leqslant|a_2|\leqslant|a_3|\leqslant\ldots$, и пусть $b_1, b_2, \ldots$ — вычеты относительно этих точек. Предположим, что существует такая последовательность замкнутых контуров C_n, что: C_n охватывает полюсы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и только эти полюсы; минимальное расстояние R_n точек контура C_n от начала стремится к бесконечности вместе с n; длина L_n контура C_n есть $O(R_n)$; $f(z)=o(R_n)$ на C_n. Последнее условие выполнено, если, например, функция $f(z)$ равномерно ограничена на всех контурах C_n.

При этих условиях

$$f(z)=f(0)+\sum_{n=1}^{\infty} b_n\left(\frac{1}{z-a_n}+\frac{1}{a_n}\right)$$

для всех точек z, кроме полюсов.

Чтобы доказать это, рассмотрим интеграл

$$I=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n}\frac{f(w)}{w(w-z)}\,dw,$$

где z — точка, лежащая внутри C_n. Подынтегральная функция имеет в точках a_m полюсы, с вычетами $\dfrac{b_m}{a_m(a_m-z)}$. Кроме того, она имеет в точках $w=z$ и $w=0$ вычеты $f(z)/z$ и $-f(0)/z$. Следовательно,

$$I=\sum_{m=1}^{n}\frac{b_m}{a_m(a_m-z)}-\frac{f(0)}{z}+\frac{f(z)}{z}.$$

С другой стороны,

$$|I|\leqslant\frac{L_n}{2\pi R_n(R_n-|z|)}\max_{C_n}|f(w)|.$$

В силу наших условий правая часть стремится к нулю при $n \to \infty$. Следовательно,

$$\frac{f(z)}{z} = \frac{f(0)}{z} - \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n} \frac{b_m}{a_m(a_m - z)},$$

откуда и получается доказываемая формула.

Из доказательства видно также, что *если все полюсы лежат вне некоторого замкнутого контура, то внутри него ряд сходится равномерно.*

3.2.1. Мы предоставляем читателю изменения, которые нужно произвести, если функция $f(z)$ имеет полюсы более высокого порядка. Более важным является обобщение на функции, не удовлетворяющие на контурах C_n условию $f(z) = o(R_n)$. Пусть это условие не выполнено, но существует такое положительное целое число p, что $f(z) = O(R_n^p)$ или, хотя бы, $f(z) = o(R_n^{p+1})$ на C_n. Рассмотрим интеграл

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{f(w)}{w^{p+1}(w - z)}\, dw.$$

Вычисления проводятся, как выше, за исключением того, что вычет относительно точки $w = 0$ теперь равен

$$-\frac{1}{z}\left\{\frac{f(0)}{z^p} + \frac{f'(0)}{z^{p-1}} + \ldots + \frac{f^{(p)}(0)}{p!}\right\}.$$

Интеграл опять стремится к 0 при $n \to \infty$, и, таким образом,

$$f(z) = f(0) + zf'(0) + \ldots + \frac{z^p f^{(p)}(0)}{p!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n z^{p+1}}{a_n^{p+1}(z - a_n)},$$

т. е.

$$f(z) = \sum_{q=0}^{p} \frac{f^{(q)}(0)\, z^q}{q!} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{1}{z - a_n} + \frac{1}{a_n} + \frac{z}{a_n^2} + \ldots + \frac{z^p}{a_n^{p+1}}\right).$$

3.2.2. Применение к тригонометрическим функциям. Рассмотрим функцию

$$f(z) = \operatorname{cosec} z - \frac{1}{z} \quad (z \neq 0), \qquad f(0) = 0.$$

В точке $z = n\pi$, где n — любое положительное или отрицательное целое число, $\sin z$ имеет простой нуль, так что $f(z)$ имеет простой полюс. Вычет равен

$$\lim_{z\to n\pi} (z - n\pi)\left(\operatorname{cosec} z - \frac{1}{z}\right) = \lim_{\zeta\to 0} \frac{\zeta}{\sin(\zeta + n\pi)} = \lim_{\zeta\to 0} \frac{(-1)^n \zeta}{\sin \zeta} = (-1)^n.$$

Но при $z=0$ особенности нет, так как

$$\frac{z-\sin z}{z\sin z}=\frac{O(|z|^3)}{z^2+O(|z|^4)}=O(1).$$

Пусть C_n — квадрат с вершинами в точках $\left(n+\frac{1}{2}\right)(\pm 1 \pm i)\pi$. Функция $1/z$, очевидно, равномерно ограничена на контурах этих квадратов. Покажем, что и функция $\operatorname{cosec} z$ равномерно ограничена на них. Для этого рассмотрим раздельно области

$$\text{(I)}\quad y>\frac{1}{2}\pi,\qquad \text{(II)}\quad -\frac{1}{2}\pi\leqslant y\leqslant\frac{1}{2}\pi,\qquad \text{(III)}\quad y<-\frac{1}{2}\pi.$$

В первой области $|\operatorname{cosec} z|=\left|\frac{2i}{e^{iz}-e^{-iz}}\right|\leqslant\frac{2}{e^{\frac{1}{2}\pi}-e^{-\frac{1}{2}\pi}}$, и то же верно в третьей области. Кроме того, так как функция $|\operatorname{cosec} z|$ ограничена на отрезке прямой, соединяющем точки $\frac{1}{2}(1-i)\pi$, $\frac{1}{2}(1+i)\pi$ и имеет период π, то она равномерно ограничена на отрезках с концами $\left(n+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)\pi$, $\left(n+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)\pi$. Следовательно, функция $\operatorname{cosec} z$ равномерно ограничена и на частях контуров C_n, лежащих в области (II), т. е. на всех контурах.

Теорема § 3.2 утверждает поэтому, что

$$\operatorname{cosec} z-\frac{1}{z}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'(-1)^n\left(\frac{1}{z-n\pi}+\frac{1}{n\pi}\right),$$

где штрих означает, что при суммировании значение $n=0$ должно быть опущено. Поскольку при переходе от контура C_{n-1} к контуру C_n мы охватываем два новых полюса, именно $n\pi$ и $-n\pi$, мы должны были бы при суммировании взять соответствующие вычеты в одни скобки. Поскольку, однако, сходится как часть ряда с $n>0$, так и часть ряда с $n<0$, эти скобки могут быть опущены.

Если соединить члены, соответствующие значениям $\pm n$, то разложение примет вид:

$$\operatorname{cosec} z=\frac{1}{z}+2z\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2\pi^2-z^2}.$$

Примеры. (I) Получить разложения

$$\sec z = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(n+\frac{1}{2}\right)}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 \pi^2 - z^2},$$

$$\operatorname{tg} z = 2z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 \pi^2 - z^2},$$

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} + 2z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 - n^2\pi^2}.$$

(II) Получить соответствующие разложения для гиперболических функций.

(III) Доказать, что $\frac{1}{e^z - 1} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2} + 2z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 + 4n^2\pi^2}$.

(IV) Доказать, что $\operatorname{cosec}^2 z = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z - n\pi)^2}$.

3.2.3. Разложение целой функции в бесконечное произведение. Целая функция есть функция, аналитическая при всех конечных значениях z. Например, e^z, $\cos z$, $\sin z$ — целые функции. Целая функция может рассматриваться как обобщение многочлена, и подобно тому как мы распространили формулу разложения на простые дроби с рациональных функций на некоторые другие мероморфные функции, можно распространить формулу разложения на множители с многочленов на некоторые другие целые функции.

Пусть $f(z)$ — целая функция от z. Предположим, что она имеет простые нули в точках $a_1, a_2, \ldots$ и не имеет других нулей. В окрестности точки a_n

$$f(z) = (z - a_n)\, g(z),$$

причем функция $g(z)$ аналитична и не обращается в нуль. Следовательно, $\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z - a_n} + \frac{g'(z)}{g(z)}$, причем последний член аналитичен в точке a_n. Таким образом, функция $\frac{f'(z)}{f(z)}$ имеет при $z = a_n$ простой полюс с вычетом 1.

Предположим теперь, что $\frac{f'(z)}{f(z)}$ есть функция типа, рассмотренного в § 3.2. Тогда

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{f'(0)}{f(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z - a_n} + \frac{1}{a_n}\right).$$

Интегрируя от 0 до z вдоль пути, не проходящего через полюсы, мы видим, что

$$\log f(z) - \log f(0) = z\frac{f'(0)}{f(0)} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\log(z-a_n) - \log(-a_n) + \frac{z}{a_n}\right\}.$$

Значения логарифмов зависят от выбранного пути, но если мы перейдем к экспоненциалам, то всякая многозначность исчезнет и мы получим разложение

$$f(z) = f(0)\, e^{zf'(0)/f(0)} \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{z/a_n}.$$

Например, нашим условиям удовлетворяет функция $f(z) = \frac{\sin z}{z}$, так что мы получаем хорошо известные формулы:

$$\frac{\sin z}{z} = \prod_{n=-\infty}^{\infty}{}'\left(1-\frac{z}{n\pi}\right)e^{\frac{z}{n\pi}}, \quad \sin z = z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right).$$

Подобным же образом

$$\cos z = \prod_{n=1}^{\infty}\left\{1 - \frac{z^2}{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2\pi^2}\right\}.$$

Если же функция $f'(z)/f(z)$ удовлетворяет лишь условиям § 3.2.1, то для $f(z)$ получается формула вида

$$f(z) = f(0)\exp\left[c_1 z + \ldots + c_{p+1}z^{p+1}\right]\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)\times$$
$$\times\exp\left[\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\frac{z^2}{a_n^2} + \ldots + \frac{1}{p+1}\frac{z^{p+1}}{a_n^{p+1}}\right].$$

3.3. Суммирование некоторых рядов. Метод контурного интегрирования часто дает эффект при суммировании рядов вида $\sum f(n)$, где $f(z)$ — достаточно простая аналитическая функция от z.

Пусть C — замкнутый контур, охватывающий точки $m, m+1, \ldots, n$ и не охватывающий других целых точек, и пусть функция $f(z)$ аналитична на этом контуре и внутри него, за возможным исключением конечного числа полюсов, скажем, простых, расположенных в отличных от $m, m+1, \ldots, n$ внутренних точках $a_1, \ldots, a_k$, с вычетами $b_1, \ldots, b_k$. Рассмотрим интеграл $\int_C \pi \operatorname{ctg} \pi z f(z)\,dz$. Функция $\pi \operatorname{ctg} \pi z$ имеет внутри C простые полюсы $z=m, m+1, \ldots, n$, и ее вычет относительно каждого из них равен 1. Следовательно, функция $\pi \operatorname{ctg} \pi z f(z)$ имеет относительно них вычеты $f(m)$, $f(m+1)$, $\ldots$, $f(n)$. Присоединяя сюда вычеты относительно полюсов функции $f(z)$, мы видим, что

$$\int_C \pi \operatorname{ctg} \pi z f(z)\, dz = 2\pi i \{f(m)+f(m+1)+\ldots+f(n)+$$
$$+b_1 \pi \operatorname{ctg} \pi a_1 + \ldots + b_k \pi \operatorname{ctg} \pi a_k\}.$$

Предположим, например, что $f(z)$ есть рациональная функция, не имеющая целочисленных полюсов, и что в бесконечности $f(z)$ есть $O(|z|^{-2})$. В качестве C_n возьмем контур квадрата с вершинами $\left(n+\frac{1}{2}\right)(\pm 1 \pm i)$. Тогда, как в § 3.2, интеграл вдоль C_n стремится к нулю при $n \to \infty$, и мы получаем формулу

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{m=-n}^{n} f(m) = -\pi \{b_1 \operatorname{ctg} \pi a_1 + \ldots + b_k \operatorname{ctg} \pi a_k\}.$$

Подобным же образом, взяв вместо $\pi \operatorname{ctg} \pi z$ функцию $\pi \operatorname{cosec} \pi z$, можно получить формулы для сумм вида $\sum (-1)^m f(m)$.

Рассмотрим, например, ряд $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(a+n)^2}$, где a — нецелое число. Функция $f(z) = \frac{1}{(a+z)^2}$ имеет при $z=-a$ двойной полюс. Согласно теореме Тейлора,

$$\operatorname{ctg} \pi z = \operatorname{ctg}(-\pi a) + (\pi z + \pi a)\{-\operatorname{cosec}^2(-\pi a)\} + \ldots,$$

так что вычет функции $\frac{\operatorname{ctg} \pi z}{(z+a)^2}$ относительно точки $z=-a$ равен $-\pi \operatorname{cosec}^2 \pi a$. Следовательно,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(a+n)^2} = \pi^2 \operatorname{cosec}^2 \pi a.$$

3.4. Полюсы и нули мероморфной функции. *Пусть функция $f(z)$ аналитична на замкнутом контуре C и внутри него, за возможным исключением конечного числа полюсов, расположенных во внутренних точках. Если она не обращается в нуль на контуре, то*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = N - P,$$

где N — число нулей, а P — число полюсов, лежащих внутри контура; при этом каждый нуль и каждый полюс считается столько раз, какова его кратность.

Пусть $z=a$ — нуль порядка m. Тогда в окрестности этой точки $f(z) = (z-a)^m g(z)$, причем функция $g(z)$ аналитична и не обращается в нуль. Следовательно,

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{m}{z-a}+\frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Последний член аналитичен при $z=a$, так что функция $f'(z)/f(z)$ имеет при $z=a$ простой полюс с вычетом m. Следовательно, сумма ее вычетов относительно нулей функции $f(z)$ равна N.

Подобным же образом сумма вычетов относительно полюсов функции $f(z)$ равна $-P$ (нужно только изменить знак у m).

Можно доказать тем же методом, что *если в предыдущих условиях нули расположены в точках $a_1, \ldots, a_m$, а полюсы в точках $b_1, \ldots, b_n$, и функция $\varphi(z)$ аналитична внутри C и на C, то*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\varphi(z)\,dz=\sum_{\mu=1}^{m}\varphi(a_\mu)-\sum_{\nu=1}^{n}\varphi(b_\nu).$$

3.4.1. Если функция $f(z)$ аналитична внутри C и на C, то теорема предыдущего параграфа сводится к формуле

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz=N.$$

Эту формулу можно представить несколько иначе. Так как

$$\frac{d}{dz}\log\{f(z)\}=\frac{f'(z)}{f(z)},$$

то $\int \frac{f'(z)}{f(z)}dz=\Delta_C\log\{f(z)\}$, где Δ_C обозначает изменение вдоль контура C. (С какого значения логарифма мы начинаем — безразлично.) Кроме того,

$$\log\{f(z)\}=\log|f(z)|+i\arg\{f(z)\}$$

и функция $\log|f(z)|$ однозначна. Таким образом,

$$N=\frac{1}{2\pi}\Delta_C\arg\{f(z)\}.$$

3.4.2. Теорема Руше. *Если функция $f(z)$ и $g(z)$ аналитичны внутри замкнутого контура C и на самом контуре, причем $|g(z)|<|f(z)|$ на C, то функция $f(z)$ и $f(z)+g(z)$ имеют внутри C одинаковое число нулей.*

Прежде всего ясно, что ни функция $f(z)$, ни функция $f(z)+g(z)$ не имеет нулей на C. Следовательно, если N — число нулей функции $f(z)$, а N' — число нулей функции $f(z)+g(z)$ внутри C, то

$$2\pi N=\Delta_C\arg f,$$

$$2\pi N'=\Delta_C\arg(f+g)=\Delta_C\arg f+\Delta_C\arg\left(1+\frac{g}{f}\right).$$

Поэтому, чтобы доказать, что $N=N'$, достаточно доказать, что

$$\Delta_C \arg\left(1+\frac{g}{f}\right)=0.$$

Так как $|g|<|f|$, то точка $w=1+\frac{g}{f}$ всегда находится внутри окружности плоскости w с центром 1 и радиусом 1. Таким образом, если $w=\rho e^{i\varphi}$, то значение φ всегда заключено между $-\frac{1}{2}\pi$ и $\frac{1}{2}\pi$. Поэтому угол $\arg\left(1+\frac{g}{f}\right)=\varphi$ возвращается к своему исходному значению, когда z описывает C, — он не может увеличиться или уменьшиться на кратное числа 2π. Этим теорема доказана.

Другое доказательство состоит в следующем. Положим $\varphi(z)=g(z)/f(z)$. Мы можем написать

$$N'=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)+g'(z)}{f(z)+g(z)}\,dz=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'+f'\varphi+f\varphi'}{f(1+\varphi)}\,dz=$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_C\left(\frac{f'}{f}+\frac{\varphi'}{1+\varphi}\right)dz=N+\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\varphi'}{1+\varphi}\,dz,$$

последний же интеграл равен нулю, в чем мы убеждаемся, разлагая $1/(1+\varphi)$ по степеням φ и интегрируя почленно.

3.4.3. В качестве примера рассмотрим одну из задач, которые могут быть решены с помощью предыдущих теорем.

В каких квадрантах лежат корни уравнения

$$z^4+z^3+4z^2+2z+3=0?$$

Уравнение не имеет вещественных корней. Что оно не имеет положительных корней — очевидно. После подстановки $z=-x$ оно принимает вид:

$$x^4-x^3+4x^2-2x+3=0.$$

При $0<x<1$ сумма первых трех членов положительна и такова же сумма двух последних. При $x>1$ сумма первых двух членов положительна и такова же сумма трех последних.

После подстановки $z=iy$ уравнение принимает вид:

$$y^4-iy^3-4y^2+2iy+3=0.$$

Вещественная и мнимая части этого многочлена не обращаются в нуль одновременно. Следовательно, не существует и чисто мнимых корней.

Рассмотрим теперь $\Delta\arg(z^4+\ldots+3)$ вдоль контура, охватывающего часть первого квадранта, ограниченную дугой окружности $|z|=R$ при большом R. Изменение вдоль отрезка вещественной оси равно нулю. На дуге окружности $z=Re^{i\theta}$, так что

$$\Delta\arg(z^4+\ldots)=\Delta\arg(R^4e^{4i\theta})+\Delta\arg\{1+O(R^{-1})\}=2\pi+O(R^{-1}).$$

На отрезке мнимой оси

$$\arg(z^4+\ldots)=\operatorname{arctg}\left(\frac{-y^3+2y}{y^4-4y^2+3}\right).$$

Числитель дроби, стоящей в скобках, обращается в нуль при $y=\sqrt{2}$, знаменатель — при $y=\sqrt{3}$ и $y=1$. Следовательно, при изменении y от ∞ до 0 дробь изменяется следующим образом:

$$\begin{array}{ccccccccc} y=\infty & & \sqrt{3} & & \sqrt{2} & & 1 & & 0 \\ 0, & -, & \infty, & +, & 0, & -, & \infty, & +, & 0. \end{array}$$

Следовательно, на отрезке мнимой оси $\arg(z^4+\ldots)$ уменьшается на 2π, так что при достаточно большом R изменение функции $\arg(z^4+\ldots)$ вдоль всего контура равно нулю.

Итак, в первом квадранте нулей нет.

Так как нули распадаются на пары сопряженных, то отсюда следует, что *нулей нет и в четвертом квадранте* и что *во втором и третьем квадрантах имеется по два нуля.*

Изложенный метод применим к любому алгебраическому уравнению.

3.4.4. Основная теорема алгебры. *Всякий многочлен степени n имеет n корней.*

Прежде всего, многочлен z^n имеет n корней: все они равны нулю. Рассмотрим произвольный многочлен $a_0+a_1z+\ldots+a_nz^n$ с $a_n\neq 0$. Положим

$$f(z)=a_nz^n, \quad g(z)=a_0+a_1z+\ldots+a_{n-1}z^{n-1}$$

и возьмем в качестве контура C теоремы Руше окружность радиуса $R>1$ с центром в начале. На C

$$|f(z)|=|a_n|R^n,$$

$$|g(z)|\leqslant|a_0|+|a_1|R+\ldots+|a_{n-1}|R^{n-1}\leqslant(|a_0|+\ldots+|a_{n-1}|)R^{n-1}.$$

Следовательно, $|g|<|f|$ на C, если $R>\frac{|a_0|+\ldots+|a_{n-1}|}{|a_n|}$. Согласно теореме Руше функция $f(z)+g(z)$ имеет поэтому n нулей в круге с центром в начале, радиус которого удовлетворяет этому условию.

Теорема может быть доказана также следующим образом. Предположим, что наш многочлен не имеет нулей; тогда функция $\frac{1}{a_0+\ldots+a_nz^n}$ аналитична при всех значениях z (ее особыми точками могли бы быть только нули знаменателя). Так как она ограничена при $|z|\to\infty$, то, согласно теореме Лиувилля, она постоянна, т. е. многочлен состоит из единственного члена a_0.

Этим доказано только, что при $n\geqslant 1$ многочлен имеет по крайней мере один корень; тот факт, что число корней равно n, должен быть еще выведен отсюда обычным алгебраическим рассуждением.

3.4.5. Теорема Гурвица*). *Пусть $f_1(z)$, $f_2(z)$, ... — последовательность функций, аналитических в некоторой области D, ограниченной простым замкнутым контуром, и пусть $f_n(z) \to f(z)$ равномерно в D. Предположим, что функция $f(z)$ не равна тождественно нулю. Тогда точка z_0, лежащая внутри D, в том и только в том случае является нулем функции $f(z)$, если в D имеется такая сходящаяся к z_0 последовательность точек z_1, z_2, ..., что z_n есть нуль функции $f_n(z)$ при $n > n_0 = n_0(z_0)$.*

Это нетрудно вывести из теоремы Руше. Мы можем выбрать ρ столь малым, чтобы круг $|z - z_0| \leqslant \rho$ лежал целиком внутри D и не содержал нулей функции $f(z)$, за возможным исключением самой точки z_0. Тогда $|f(z)|$ имеет на окружности $|z - z_0| = \rho$ положительную нижнюю границу, скажем $|f(z)| \geqslant m > 0$. Фиксировав ρ и m, найдем столь большое n_0, что на окружности

$$|f_n(z) - f(z)| < m \qquad (n > n_0).$$

Так как $f_n(z) = f(z) + \{f_n(z) - f(z)\}$, то из теоремы Руше следует, что при $n > n_0$ функция $f_n(z)$ имеет в круге столько же нулей, сколько $f(z)$, т. е. что $f_n(z)$ имеет там по крайней мере один нуль, если z_0 есть нуль функции $f(z)$, и не имеет там нулей в противном случае. Этим теорема доказана.

Пример $f_n(z) = e^z/n$ доказывает необходимость предположения, что функция $f(z)$ не равна нулю тождественно. Пример, в котором $f_n(z) = 1 - \frac{z^n}{n}$, а D — единичный круг, показывает, что теорема неприменима к точкам границы области D; действительно, $f_n(z) \to 1$ равномерно в D и на границе, но каждая точка границы является предельной для нулей функций $f_n(z)$.

3.5. Функции $|f(z)|$, $\mathrm{Re}\{f(z)\}$, $\mathrm{Im}\{f(z)\}$. Пусть $f(z)$ — функция, аналитическая в некоторой области, и пусть $u(x, y)$, $v(x, y)$ — ее вещественная и мнимая части. Мы пишем:

$$u_x = \frac{\partial}{\partial x} u(x, y), \quad u_y = \frac{\partial}{\partial y} u(x, y),$$

и аналогичным образом обозначаем производные высших порядков.

Мы уже показали, что во всех точках области удовлетворяются уравнения Коши — Римана $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$.

Так как производная $f''(z)$ существует и непрерывна, то существуют и непрерывны и все частные производные второго порядка от u и v. Следовательно,

$$u_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(v_y) = \frac{\partial}{\partial y}(v_x) = -u_{yy},$$

*) Hurwitz [1].

т. е. функция u удовлетворяет следующему уравнению в частных производных (уравнению Лапласа):

$$u_{xx}+u_{yy}=0.$$

Аналогично устанавливается, что тому же уравнению удовлетворяет функция v.

Функции, удовлетворяющие этому дифференциальному уравнению, называются *гармоническими* или *потенциальными функциями*. Модуль $|f(z)|$ аналитической функции $f(z)$ не является, вообще говоря, гармонической функцией; но $\log|f(z)|$ есть гармоническая функция, так как это — вещественная часть функции $\log\{f(z)\}$.

3.5.1. Множества точек, где $|f|=\text{const}$, $\operatorname{Re} f=\text{const}$, $\operatorname{Im} f=\text{const}$, являются кривыми в плоскости z.

Если $|f(z)|=\text{const}$ *всюду в области, где функция* $f(z)$ *аналитична, то в этой области* $f(z)=\text{const}$.

Действительно, если $|f(z)|=c$, то $u^2+v^2=c^2$. Следовательно, $uu_x+vv_x=0$, $uu_y+vv_y=0$, или, в силу соотношений Коши — Римана,

$$uu_x-vu_y=0, \quad uu_y+vu_x=0.$$

Исключая u_y, мы видим, что $(u^2+v^2)u_x=0$. Следовательно, $u_x=0$, и аналогично доказывается, что равны нулю u_y, v_x и v_y. Следовательно, u и v — постоянные, т. е. $f(z)$ есть постоянная.

Еще легче доказать, что если одна из функций u, v является постоянной, то и $f(z)$ — постоянная. Мы предоставляем доказательство читателю.

3.5.2. *Нули функции* $f(z)$ — *точки пересечения кривых* $u=0$ *и* $v=0$. Это очевидно.

В простом нуле кривые $u=0$ и $v=0$ пересекаются под прямым углом. Это прямо следует из уравнений Коши — Римана и видно также из следующих соображений. Пусть рассматриваемый нуль есть точка $z=0$. Мы можем написать

$$f(z)=ae^{i\alpha}z+O(|z|^2),$$

так что

$$u=ar\cos(\alpha+\theta)+O(r^2), \quad v=ar\sin(\alpha+\theta)+O(r^2).$$

Ясно, что направления касательных к кривым $u=0$, $v=0$ задаются углами $\theta=\frac{1}{2}\pi-\alpha$, $\theta=-\alpha$.

Точка, в которой значение $f(z)$ *вещественно и* $f'(z)=0$, *есть двойная точка кривой* $v=0$.

Действительно, в такой точке $v=0$, $v_x=0$, $v_y=0$, а это и есть условие, определяющее двойную точку.

Кривые $|f(z)|=\text{const}$ называются *линиями уровня*.

Пример. Доказать, что двойной нуль функции $f(z)$ является двойной точкой каждого из кривых $u=0$, $v=0$ и что эти кривые пересекаются в этой точке под углом $\pi/4$.

3.5.3. *Точка линии уровня в том и только в том случае является двойной, если это нуль функции $f'(z)$.*

Линия уровня определяется уравнением $u^2+v^2=c^2$, и ее точка является двойной в том и только в том случае, если

$$uu_x+vv_x=0, \quad uu_y+vv_y=0.$$

Оба эти условия удовлетворяются, если $f'(z)=0$. Чтобы сделать обратное заключение, представим второе уравнение в виде

$$-uv_x+vu_x=0,$$

после чего возвысим то и другое в квадрат и сложим. Мы получим равенство

$$(u_x^2+v_x^2)(u^2+v^2)=0.$$

Следовательно, $u_x=0$ и $v_x=0$, а потому и $f'(z)=0$.

3.5.4. Линии уровня и нули функции $f(z)$. *Если C — простая замкнутая линия уровня и функция $f(z)$ аналитична внутри C и на C, то $f(z)$ имеет внутри C по крайней мере один нуль.*

Пусть на C

$$f(z)=u+iv=ce^{i\varphi},$$

так что c — постоянная. Тогда

$$c=\sqrt{u^2+v^2}, \quad \varphi=\operatorname{arctg}\frac{v}{u}.$$

Пусть s — длина на C, отсчитываемая от некоторой точки этой кривой. Тогда

$$0=\frac{dc}{ds}=\left(u\frac{du}{ds}+v\frac{dv}{ds}\right)\frac{1}{c}, \tag{1}$$

$$\frac{d\varphi}{ds}=\left(u\frac{dv}{ds}-v\frac{du}{ds}\right)\frac{1}{c^2}. \tag{2}$$

Производная $\frac{d\varphi}{ds}$ не может обратиться в нуль на C. Действительно, если бы она обратилась в нуль, то, возвышая в квадрат и складывая предыдущие соотношения, мы получили бы равенство

$$(u^2+v^2)\left\{\left(\frac{du}{ds}\right)^2+\left(\frac{dv}{ds}\right)^2\right\}=0,$$

т. е. равенства $\frac{du}{ds}=0$, $\frac{dv}{ds}=0$. Но

$$\frac{du}{ds}=u_x\frac{dx}{ds}+u_y\frac{dy}{ds},$$

$$\frac{dv}{ds}=v_x\frac{dx}{ds}+v_y\frac{dy}{ds}=-u_y\frac{dx}{ds}+u_x\frac{dy}{ds},$$

так что новое возвышение в квадрат и суммирование привели бы к равенству

$$(u_x^2+u_y^2)\left\{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2\right\}=0.$$

Второй множитель равен 1, и потому $u_x=0$, $u_y=0$ и $f'(z)=0$. Но на линии уровня без двойных точек это невозможно.

Итак, производная $\frac{d\varphi}{ds}$ имеет во всех точках кривой C один и тот же знак, т. е. вдоль этой кривой угол φ либо монотонно возрастает, либо монотонно убывает. Следовательно, его изменение вдоль контура C не равно нулю.

Но изменение угла φ вдоль контура C равно числу нулей функции $f(z)$, лежащих внутри C, умноженному на 2π. Следовательно, по крайней мере один такой нуль существует *).

3.5.5. *Если $f(z)$ имеет n нулей внутри C, то $f'(z)$ имеет $n-1$ нулей внутри C.*

Пусть на C

$$f(z)=ce^{i\varphi}.$$

Тогда $f'(z)=cie^{i\varphi}\frac{d\varphi}{dz}$, и

$$\arg\{f'(z)\}=\text{const}+\varphi+\arg\frac{d\varphi}{dz}.$$

Следовательно,

$$\Delta_C\arg\{f'(z)\}=\Delta_C\arg\{f(z)\}+\Delta_C\arg\frac{d\varphi}{dz},$$

где Δ_C обозначает изменение вдоль C. Пусть n' — число нулей функции $f'(z)$. Предыдущая формула показывает, что

$$2\pi n'=2\pi n+\Delta_C\arg\frac{d\varphi}{dz}. \qquad (1)$$

Но $\frac{d\varphi}{dz}=\frac{d\varphi}{ds}\frac{ds}{dz}$, и, как мы уже видели, производная $\frac{d\varphi}{ds}$ сохраняет на C постоянный знак. Следовательно,

$$\Delta_C\arg\frac{d\varphi}{dz}=\Delta_C\arg\frac{ds}{dz}.$$

Далее, $\frac{dz}{ds}=\frac{dx}{ds}+i\frac{dy}{ds}=\cos\psi+i\sin\psi=e^{i\psi}$, где ψ — угол между касательной к C и осью x. Следовательно,

$$\Delta_C\arg\frac{ds}{dz}=-\Delta_C\psi=-2\pi,$$

и, деля равенство (1) на 2π, мы получаем равенство $n'=n-1$.

*) Читатель, которого не удовлетворят эти аргументы, может вывести доказываемую теорему из принципа максимума модуля (гл. V): поскольку максимум функции $|f(z)|$, рассматриваемой внутри C и на C, достигается на C, ее минимум достигается внутри C и потому равен нулю. (*Примечание переводчика.*)

3.5.6. Следующая теорема иногда доставляет полезные сведения о нулях функции *).

Пусть C — простой замкнутый контур, и пусть функция $f(z)$ аналитична внутри C и на C. Если $\operatorname{Re}\{f(z)\}$ обращается на C в нуль в $2k$ различных точках, то $f(z)$ имеет внутри C не более k нулей.

Если $f(z)=u+iv$ и n — число нулей функции $f(z)$ внутри C, то $n=\frac{1}{2\pi}\Delta_C\left(\operatorname{arctg}\frac{v}{u}\right)$. Взяв какую-нибудь точку, где $u\neq 0$, в качестве начальной, мы можем принять за начальное значение $\operatorname{arctg}\frac{v}{u}$ то, которое заключено между $-\frac{1}{2}\pi$ и $\frac{1}{2}\pi$. Перейти из этого интервала, скажем, в интервал $\left(\frac{1}{2}\pi,\ \frac{3}{2}\pi\right)$ мы можем только в случае, если u обратится в нуль, а перейти, далее, в интервал $\left(\frac{3}{2}\pi,\ \frac{5}{2}\pi\right)$ — только в случае, если u снова обратится в нуль. Таким образом, если u дважды обращается в нуль на C, то число $\Delta_C\operatorname{arctg}\frac{v}{u}$, самое большее, равно 2π, а n, самое большее, равно 1. Эти же соображения позволяют, очевидно, охватить общий случай.

3.6. Интеграл Пуассона. Теорема Иенсена. *Пусть функция $f(z)$ аналитична в области, содержащей круг $|z|\leqslant R$, и пусть $u(r,\ \theta)$ — ее вещественная часть. Тогда при $0\leqslant r<R$*

$$u(r,\ \theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}\,u(R,\ \varphi)\,d\varphi.$$

Эта формула известна как интеграл Пуассона. Такая же формула верна для мнимой части $v(r,\ \theta)$ функции $f(z)$.

Эти формулы аналогичны формуле Коши, выражающей значение функции $f(z)$ в точке, лежащей внутри контура, через ее значения на контуре. Однако они не могут быть получены из формулы Коши простым отделением действительной части от мнимой.

Мы дадим два доказательства.

Первое доказательство. Можно считать без ущерба для общности, что все коэффициенты a_n разложения $f(z)=\sum a_nz^n$ вещественны. Действительно, в общем случае $a_n=\alpha_n+i\beta_n$, так что

$$f(z)=\sum\alpha_nz^n+i\sum\beta_nz^n=f_1(z)+if_2(z)$$

*) См., например, Backlund [1].

и $\operatorname{Re} f = \operatorname{Re} f_1 - \operatorname{Im} f_2$. Поскольку $|\alpha_n| \leqslant |a_n|$ и $|\beta_n| \leqslant |a_n|$, функции f_1 и f_2 аналитичны при $|z| \leqslant R$. Таким образом, общий случай сводится к нашему специальному случаю.

Заметим, что в этом специальном случае $f(re^{-i\theta}) = u - iv$, если $f(re^{i\theta}) = u + iv$.

Пусть z_1 — точка окружности $|z| = R$, и пусть $f(z_1) = u_1 + iv_1$. Согласно формуле Коши,

$$u + iv = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{u_1 + iv_1}{z_1 - z}\, dz_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(u_1 + iv_1) Re^{i\varphi}\, d\varphi}{Re^{i\varphi} - re^{i\theta}}. \tag{1}$$

Так как точка R^2/z лежит вне круга, то

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{u_1 + iv_1}{z_1 - \frac{R^2}{z}}\, dz_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(u_1 + iv_1) Re^{i\varphi}\, d\varphi}{Re^{i\varphi} - R^2 r^{-1} e^{-i\theta}}.$$

После изменения знака φ это дает равенство

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(u_1 - iv_1) Re^{-i\varphi}\, d\varphi}{Re^{-i\varphi} - R^2 r^{-1} e^{-i\theta}} = 0,$$

т. е. равенство

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(u_1 - iv_1) re^{i\theta}\, d\varphi}{re^{i\theta} - Re^{i\varphi}} = 0.$$

Вычитая эту формулу из формулы (1), мы видим, что

$$u + iv = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ u_1 \frac{Re^{i\varphi} + re^{i\theta}}{Re^{i\varphi} - re^{i\theta}} + iv_1 \right\} d\varphi,$$

и, отделяя вещественные части, получаем доказываемую формулу.

Второе доказательство. Пусть

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n + i\beta_n) r^n e^{in\theta} \qquad (r \leqslant R).$$

Как в § 2.5.3,

$$\alpha_n R^n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(R, \varphi) \cos n\varphi\, d\varphi, \qquad \beta_n R^n = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(R, \varphi) \sin n\varphi\, d\varphi$$

при $n > 0$ и

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(R, \varphi)\, d\varphi.$$

Следовательно,

$$u(r,\ \theta)=\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha_n\cos n\theta-\beta_n\sin n\theta)\,r^n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(R,\ \varphi)\,d\varphi+$$
$$+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{R^n}\int_0^{2\pi}u(R,\ \varphi)(\cos n\theta\cos n\varphi+\sin n\theta\sin n\varphi)\,d\varphi=$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}u(R,\ \varphi)\left\{\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\cos n(\theta-\varphi)\left(\frac{r}{R}\right)^n\right\}d\varphi.$$

Обращение порядка суммирования и интегрирования оправдывается равномерной сходимостью. Окончательная формула получается после суммирования ряда, стоящего в скобках.

3.6.1. Теорема Иенсена. *Пусть $f(z)$ — функция, аналитическая при $|z|<R$. Предположим, что $f(0)\neq 0$, и пусть $r_1,\ r_2,\ \ldots$ — модули нулей функции $f(z)$ в круге $|z|<R$, расположенные в неубывающем порядке. Тогда при $r_n\leqslant r\leqslant r_{n+1}$*

$$\log\frac{r^n\,|f(0)|}{r_1r_2\ldots r_n}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\theta})|\,d\theta. \tag{1}$$

Здесь нуль порядка p считается p раз. Формула интересна тем, что связывает модуль функции с модулями ее нулей.

Она может быть представлена в другой форме, в некоторых отношениях более полезной. Обозначим через $n(x)$ число нулей функции $f(z)$ в круге $|z|\leqslant x$. Мы можем написать:

$$\log\frac{r^n}{r_1\ldots r_n}=n\log r-\sum_{m=1}^{n}\log r_m=$$
$$=\sum_{m=1}^{n-1}m(\log r_{m+1}-\log r_m)+n(\log r-\log r_n)=$$
$$=\sum_{m=1}^{n-1}m\int_{r_m}^{r_{m+1}}\frac{dx}{x}+n\int_{r_n}^{r}\frac{dx}{x}.$$

Так как $m=n(x)$ при $r_m\leqslant x<r_{m+1}$ и $n=n(x)$ при $r_n\leqslant x<r$, то правая часть равна $\int_0^r\frac{n(x)}{x}dx$, и формула Иенсена принимает вид:

$$\int_0^r\frac{n(x)}{x}dx=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\theta})|\,d\theta-\log|f(0)|. \tag{2}$$

Мы дадим два доказательства этой теоремы.

Первое доказательство. Если $f(z)$ не имеет нулей на окружности $|z|=r$, то

$$n(r)=\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})}\,re^{i\theta}\,d\theta. \tag{3}$$

Формально формула Иенсена получается отсюда после деления на r, интегрирования по r и отделения вещественных частей. Однако законность этой процедуры не очевидна, поскольку подынтегральная функция обращается в бесконечность. Мы применим поэтому несколько иной метод.

В интервале между модулями r_n, r_{n+1} двух последовательных нулей каждая из двух частей формулы Иенсена имеет непрерывную производную. Производная левой части равна n/r, а производная правой части есть

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d}{dr}\{\log|f(re^{i\theta})|\}\,d\theta=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d}{dr}\left\{\log f(re^{i\theta})+\log\overline{f(re^{-i\theta})}\right\}d\theta=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\frac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})}e^{i\theta}+\overline{\frac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})}}\,e^{-i\theta}\right\}d\theta=$$

$$=\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})}e^{i\theta}\,d\theta\right\}.$$

В силу формулы (3) правая часть этого равенства равна n/r. Следовательно, в каждом таком интервале производные равны между собой, так что одна часть формулы Иенсена может отличаться от другой только на постоянную.

Но при $r=0$ эти части, очевидно, равны между собой. Следовательно, достаточно доказать, что они изменяются непрерывно, когда r проходит через значение r_n.

Для левой части это очевидно. Что касается правой части, то достаточно рассмотреть случай, когда имеется только один нуль с модулем r_n, причем можно считать, что его аргумент равен нулю. Тогда

$$\log|f(re^{i\theta})|=\log\left|1-\frac{r}{r_n}e^{i\theta}\right|+\psi(r,\ \theta),$$

причем функция ψ непрерывна в окрестности значения $r=r_n$. Следовательно, достаточно доказать, что интеграл

$$\int_0^{2\pi} \log\left|1-\frac{r}{r_n}e^{i\theta}\right| d\theta$$

непрерывен при $r=r_n$. Но при $r/r_n<2$

$$9 \geqslant \left|1-\frac{r}{r_n}e^{i\theta}\right|^2 = 1-2\frac{r}{r_n}\cos\theta+\frac{r^2}{r_n^2} = \sin^2\theta+\left(\cos\theta-\frac{r}{r_n}\right)^2 \geqslant \sin^2\theta;$$

следовательно, при $\delta<\pi$

$$\left|\int_{-\delta}^{\delta} \log\left|1-\frac{r}{r_n}e^{i\theta}\right| d\theta\right| < \int_{-\delta}^{\delta} \{\log 3+|\log|\sin\theta||\}\, d\theta <$$
$$< \int_{-\delta}^{\delta} \{A+|\log|\theta||\}\, d\theta < A\delta\log\frac{1}{\delta}.$$

Мы можем выбрать δ столь малым, чтобы правая часть была произвольно малой для всех значений r вблизи r_n, при фиксированном же δ остаток интеграла, очевидно, непрерывен. Следовательно, и весь интеграл непрерывен.

Второе доказательство. Оно состоит из нескольких пунктов.

(I) Если $f(z)$ не имеет нулей при $|z|\leqslant r$, то $\log f(z)$ есть аналитическая функция при $|z|\leqslant r$ и

$$\log f(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} \frac{\log f(z)}{z}\, dz = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\{f(re^{i\theta})\}\, d\theta.$$

Приравнивая вещественные части, мы получаем доказываемую формулу.

(II) Если $a_1=r_1e^{i\theta_1}$ и $0<r_1<r$, то, согласно теореме Коши,

$$\int_{|w|=1/r} \log(1-w\bar{a}_1)\frac{dw}{w} = 0,$$

где взято главное значение логарифма. Следовательно, при соответствующим образом выбранных значениях логарифмов,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1/r} \log\left(1-\frac{1}{w\bar{a}_1}\right)\frac{dw}{w} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1/r} \log\left(-\frac{1}{w\bar{a}_1}\right)\frac{dw}{w} =$$
$$= \log\left(-\frac{1}{\bar{a}_1}\right) - \frac{1}{4\pi i}\left[\log^2 w\right]_{\arg w=0}^{\arg w=2\pi} =$$
$$= \log\left(-\frac{1}{\bar{a}_1}\right) - \frac{1}{4\pi i}\left(\log\frac{1}{r}+2\pi i\right)^2 + \frac{1}{4\pi i}\log^2\frac{1}{r}.$$

Отделяя действительные части, мы получаем равенство

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|1-\frac{r}{r_1}e^{i(\theta_1-\theta)}\right|d\theta=\log\frac{r}{r_1}.$$

Это — формула Иенсена для $f(z)=1-\frac{z}{a_1}$.

(III) Предыдущая формула может быть распространена на случай $r=r_1$ путем применения теоремы Коши к окружности $|w|=1/r$ с небольшим круговым вырезом, исключающим точку $w=1/\bar{a}_1$. Интеграл, взятый по границе выреза, стремится к нулю вместе с его радиусом, и доказательство завершается как выше.

(IV) В общем случае

$$f(z)=\left(1-\frac{z}{a_1}\right)\left(1-\frac{z}{a_2}\right)\ldots\left(1-\frac{z}{a_n}\right)\varphi(z),$$

причем $\varphi(z)$ не имеет нулей при $|z|<r_{n+1}$ и $\varphi(0)=f(0)$. Это позволяет свести общий случай к рассмотренным специальным случаям сложением.

Теорема обобщается на функции, имеющие не только нули, но и полюсы. Пусть функция $f(z)$ удовлетворяет тем же условиям, что и выше, но пусть теперь она имеет в круге $|z|\leqslant r$ нули $a_1, \ldots, a_m$ и полюсы $b_1, \ldots, b_n$. Тогда

$$\log\left\{\left|\frac{b_1\ldots b_n}{a_1\ldots a_m}f(0)\right|r^{m-n}\right\}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\theta})|\,d\theta. \qquad (4)$$

Действительно, если $f(z)=\dfrac{g(z)}{\left(1-\frac{z}{b_1}\right)\ldots\left(1-\frac{z}{b_n}\right)}=\dfrac{g(z)}{h(z)}$, то

$$\log\frac{r^m g(0)}{|a_1\ldots a_m|}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|g(re^{i\theta})|\,d\theta$$

и

$$\log\frac{r^n}{|b_1\ldots b_n|}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|h(re^{i\theta})|\,d\theta,$$

так что нужно лишь вычесть вторую формулу из первой.

3.6.2. Формула Пуассона—Иенсена. *Пусть функция $f(z)$ имеет внутри круга $|z|\leqslant R$ нули в точках $a_1, a_2, \ldots, a_m$ и полюсы в точках $b_1, b_2, \ldots, b_n$, и пусть она аналитична и не обращается в нуль во всех остальных внутренних и граничных* *точках круга. Тогда*

$$\log|f(re^{i\theta})| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}\log|f(Re^{i\varphi})|\,d\varphi - \\ - \sum_{\mu=1}^{m}\log\left|\frac{R^2-\bar{a}_\mu re^{i\theta}}{R(re^{i\theta}-a_\mu)}\right| + \sum_{\nu=1}^{n}\log\left|\frac{R^2-\bar{b}_\nu re^{i\theta}}{R(re^{i\theta}-b_\nu)}\right|.$$

Эта формула содержит как специальные случаи и формулу Пуассона, и формулу Иенсена. Если нет ни нулей, ни полюсов, то она сводится к формуле Пуассона для вещественной части функции $\log f(z)$. С другой стороны, при $r=0$ мы получаем общую формулу Иенсена:

$$\log|f(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(Re^{i\varphi})|\,d\varphi - \log\left\{\left|\frac{b_1b_2\ldots b_n}{a_1a_2\ldots a_n}\right|R^{m-n}\right\}.$$

Доказательство опять состоит из нескольких пунктов.

(I) Если $f(z)=z-a$, где $|a|<R$, то формула сводится к равенству

$$\log|re^{i\theta}-a| = \\ = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}\log|Re^{i\varphi}-a|\,d\varphi - \log\left|\frac{R^2-\bar{a}re^{i\theta}}{R(re^{i\theta}-a)}\right|,$$

т. е. к равенству

$$\log\left|R-\frac{\bar{a}re^{i\theta}}{R}\right| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}\log|Re^{i\varphi}-a|\,d\varphi.$$

Но это — формула Пуассона для вещественной части функции $\log\left(R-\frac{\bar{a}z}{R}\right)$, которая аналитична при $|z|\leqslant R$.

(II) Подобно этому, если $f(z)=\frac{1}{z-b}$, то формула сводится к формуле Пуассона для вещественной части функции $\log\left(R-\frac{\bar{b}z}{R}\right)$.

(III) Если функция $f(z)$ аналитична и не имеет ни нулей, ни полюсов в круге $|z|\leqslant R$, то формула совпадает с формулой Пуассона для вещественной части функции $\log f(z)$.

(IV) Общий случай сводится к этим специальным случаям сложением.

3.7. Теорема Карлемана. В предыдущих теоремах рассматриваемая область была кругом. Мы заключим главу доказательством двух теорем того же типа, что и теорема Иенсена, относящихся соответственно к полуплоскости и прямоугольнику.

Теорема Карлемана*). *Пусть функция $f(z)$ аналитична при $|z| \geqslant \rho$, $-\frac{1}{2}\pi \leqslant \arg z \leqslant \frac{1}{2}\pi$, и пусть она имеет нули $r_1 e^{i\theta_1}$, $r_2 e^{i\theta_2}$, ..., $r_n e^{i\theta_n}$ внутри контура, состоящего из полуокружностей $|z| = \rho$, $|z| = R$, $-\frac{1}{2}\pi \leqslant \arg z \leqslant \frac{1}{2}\pi$ и соединяющих их отрезков мнимой оси, и не имеет нулей на контуре. Тогда*

$$\sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{1}{r_\nu} - \frac{r_\nu}{R^2}\right) \cos\theta_\nu = \frac{1}{\pi R} \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \log|f(Re^{i\theta})| \cos\theta \, d\theta +$$
$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{\rho}^{R} \left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{R^2}\right) \log|f(iy) f(-iy)| \, dy + O(1),$$

где $O(1)$ обозначает функцию от ρ и R, которая при фиксированном ρ остается ограниченной, когда $R \to \infty$.

Рассмотрим интеграл $I = \frac{1}{2\pi i} \int \log f(z) \left(\frac{1}{z^2} + \frac{1}{R^2}\right) dz$, взятый вдоль контура в положительном направлении от начальной точки $z = i\rho$ с как-либо выбранным в ней начальным значением логарифма. Интеграл, взятый вдоль малой полуокружности, ограничен. На отрезке отрицательной части мнимой оси мы полагаем $z = -iy$; соответствующая часть интеграла равна

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\rho}^{R} \log\{f(-iy)\} \left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{R^2}\right) dy.$$

Интеграл, взятый вдоль большой полуокружности, равен

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \log\{f(Re^{i\theta})\} \left(\frac{e^{-2i\theta}}{R^2} + \frac{1}{R^2}\right) iRe^{i\theta} \, d\theta =$$
$$= \frac{1}{\pi R} \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \log\{f(Re^{i\theta})\} \cos\theta \, d\theta.$$

Интегрирование вдоль отрезка положительной части мнимой оси дает

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\rho}^{R} \log\{f(iy)\} \left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{R^2}\right) dy.$$

*) Carleman [1].

Складывая вещественные части этих интегралов, мы получаем правую часть формулы Карлемана.

С другой стороны, интегрирование по частям показывает, что

$$I=\frac{1}{2\pi i}\left[\log f(z)\left(\frac{z}{R^2}-\frac{1}{z}\right)\right]+\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f'(z)}{f(z)}\left(\frac{1}{z}-\frac{z}{R^2}\right)dz.$$

Когда мы обходим контур, $\log f(z)$ возрастает на $2\pi i n$, и потому внеинтегральный член чисто мним. Последний же член, в силу теоремы о вычетах, равен

$$\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{1}{r_\nu e^{i\theta_\nu}}-\frac{r_\nu e^{i\theta_\nu}}{R^2}\right),$$

и его вещественная часть есть правая часть формулы Карлемана.

Формула легко обобщается на случай, когда $f(z)$ имеет нули на мнимой оси: мы делаем небольшие вырезы вокруг этих нулей и переходим к пределу.

3.7.1. *Пусть функция $f(z)$ аналитична и ограничена при $x \geqslant 0$, и пусть $r_1e^{i\theta_1}$, $r_2e^{i\theta_2}$, ... — ее нули в правой полуплоскости. Тогда ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\theta_n}{r_n}$ *сходится.*

При этих условиях правая часть формулы Карлемана ограничена сверху, скажем, $< M$. Таким образом,

$$\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{1}{r_\nu}-\frac{r_\nu}{R^2}\right)\cos\theta_\nu < M$$

для всех значений R. Каждый член слева положителен, и если $r_\nu<\frac{1}{2}R$, то $\frac{1}{r_\nu}-\frac{r_\nu}{R^2}>\frac{3}{4r_\nu}$. Следовательно,

$$\sum_{r_\nu<\frac{1}{2}R}\frac{\cos\theta_\nu}{r_\nu}<\frac{4M}{3},$$

что и доказывает сходимость ряда.

Нетрудно проверить, что теорема остается верной, если мы заменим условие $f(z)=O(1)$ условием $f(z)=O\left(e^{|z|^\alpha}\right)$ с $\alpha<1$. Но при $\alpha=1$ теорема не верна, как показывает пример $f(z)=\cos z$.

3.7.2. Предыдущей теоремой можно воспользоваться для доказательства следующего предложения.

Пусть функция $f(z)$ аналитична при $x \geqslant 0$, и пусть $f(z)= O(e^{-a|z|})$ с $a>0$ равномерно при $|\arg z| \leqslant \frac{1}{2}\pi$, когда $z\to\infty$. Тогда $f(z)=0$ тождественно.

Для доказательства рассмотрим функцию $F(z)=f(z)\sin bz$, где $0<b<a$. Она аналитична и ограничена при $x\geqslant 0$, она имеет нули в точках $z=\frac{n\pi}{b}$, и ряд $\sum\frac{b}{n\pi}$ расходится. Но это несовместимо с теоремой предыдущего параграфа, если только функция $F(z)$ не равна нулю тождественно. Следовательно, $F(z)=0$ и, таким образом, $f(z)=0$.

Условия этой теоремы будут ослаблены в § 5.8.

3.8. Теорема Литтлвуда *). Пусть C — контур прямоугольника, ограниченного прямыми $x=x_1$, $x=x_2$, $y=y_1$, $y=y_2$, где $x_1<x_2$, $y_1<y_2$. Пусть функция $f(z)$ аналитична и не обращается в нуль на C и мероморфна внутри C. Положим $F(z)=\log f(z)$, определив логарифм следующим образом: мы начинаем с обычного определения при $x=x_2$ и получаем значения в других точках из значений $\log(x_2+iy)$ путем непрерывного изменения вдоль прямых $y=\text{const}$. Если, однако, мы встречаем на такой прямой нуль или полюс функции $f(z)$, то мы определяем $F(z)$ как $F(z\pm i0)$ — в зависимости от того, приближаемся ли мы к этой прямой сверху или снизу.

Пусть $\nu(x')$ обозначает избыток числа нулей функции $f(z)$ над числом ее полюсов в той части прямоугольника, где $x>x'$. Тогда

$$\int_C F(z)\,dz=-2\pi i\int_{x_1}^{x_2}\nu(x)\,dx.$$

Рассмотрим сначала функцию $f(z)=z-a$, где a — некоторая точка прямоугольника. Пусть $a=\alpha+i\beta$, и пусть C' — контур, полученный следующим образом: сначала мы перемещаемся вдоль C в положительном направлении от точки (x_2, y_1) до точки (x_1, β), затем — вдоль прямой $y=\beta$ до точки $\alpha-\varepsilon+i\beta$, затем — в отрицательном направлении вдоль полной окружности радиуса ε с центром $z=a$, затем — назад вдоль прямой $y=\beta$ и, наконец, вдоль остающейся части контура C к исходной точке. Функция $F(z)$ аналитична внутри C' и на C', так что

$$\int_{C'} F(z)\,dz=0.$$

Интеграл, взятый вдоль малой окружности, стремится к нулю вместе с ее радиусом; следовательно,

$$\int_C F(z)\,dz=-\int_{x_1}^{\alpha}\{F_1(z)-F_2(z)\}\,dx,$$

где $F_1(z)$ и $F_2(z)$ — значения функции $F(z)$ на пути от $x_1+i\beta$ к $\alpha+i\beta$ и на пути обратно. Так как F_2 получается из F_1 после

*) Littlewood [4].

обхода простого нуля $z=a$ функции $f(z)$ в отрицательном направлении, то

$$F_2(z)=F_1(z)-2\pi i.$$

Следовательно,

$$\int\limits_G F(z)\,dz=-2\pi i\int\limits_{x_1}^{\alpha}dx=-2\pi i\int\limits_{x_1}^{x_2}\nu(x)\,dx,$$

где $\nu(x)=1$ при $x_1<x<\alpha$ и $=0$ при $\alpha<x<x_2$, а это и утверждалось.

Общая формула получается из доказанной простым суммированием членов, соответствующих различным полюсам и нулям функции $f(z)$.

РАЗЛИЧНЫЕ ПРИМЕРЫ

1. Вычислить интегралы

$$\int\limits_0^\infty \frac{dx}{x^4+1},\quad \int\limits_0^\infty \frac{x^2\,dx}{x^4+1},\quad \int\limits_0^\infty \frac{dx}{x^6+1}$$

контурным интегрированием.

2. Вычислить интегралы

$$\int\limits_0^\infty \frac{\cos x}{a^2+x^2}\,dx,\quad \int\limits_0^\infty \frac{\cos x}{(a^2+x^2)^2}\,dx,\quad \int\limits_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx,\quad \int\limits_0^\infty \frac{\sin^3 x}{x^3}\,dx$$

контурным интегрированием.

3. Доказать, что при $c>0$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{a^z}{z^2}\,dz=\begin{cases}\log a & (a>1),\\ 0 & (0<a<1).\end{cases}$$

4. Доказать, что интеграл $\int \frac{dz}{\sqrt{4z^2+4z+3}}$, взятый вдоль единичной окружности с положительным начальным значением радикала при $z=1$, равен $i\pi$.

5. Путем интегрирования функции $\frac{\log^2 z}{1+z^2}$ вдоль обычного полукругового контура доказать, что

$$\int\limits_0^\infty \frac{\log^2 z}{1+z^2}\,dz=\frac{\pi^3}{8}.$$

6. Вычисляя интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int\frac{dz}{(z-a)\left(z-\frac{1}{a}\right)}$$

вдоль единичной окружности, доказать, что при $0<a<1$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1+a^2-2a\cos\theta} = \frac{2\pi}{1-a^2}.$$

Каково значение интеграла при $a>1$?

7. Доказать, что при $b>a>-1$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^a\theta\cos b\theta\, d\theta = \frac{\pi\Gamma(a+1)}{2^{a+1}\Gamma\left(\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b+1\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b+1\right)}.$$

[Взять интеграл $\int\left(z+\frac{1}{z}\right)^a z^{b-1}\,dz$ вокруг правой половины единичного круга.]

8. Вычисляя интеграл $\int\frac{z\,dz}{a-e^{-iz}}$ вдоль контура прямоугольника с вершинами $-\pi$, π, $\pi+in$, $-\pi+in$ и переходя к пределу при $n\to\infty$, показать, что *)

$$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x\,dx}{1+a^2-2a\cos x} = \frac{\pi}{a}\log(1+a) \quad (0<a<1), \qquad \frac{\pi}{a}\log\frac{1+a}{a} \quad (a>1).$$

9. Показать, что функция $f(x)=\operatorname{sech}\left(x\sqrt{\frac{1}{2}\pi}\right)$ удовлетворяет уравнению

$$f(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(x)\cos xt\,dx.$$

[Взять интеграл $\int\cos tz\operatorname{sech} az\,dz$ вдоль контура прямоугольника с вершинами $\pm n$, $\pm n+\frac{i\pi}{a}$ и перейти к пределу при $n\to\infty$.]

10. Показать, что функция $f(x)=\frac{1}{e^{x\sqrt{2\pi}}-1}-\frac{1}{x\sqrt{2\pi}}$ удовлетворяет уравнению

$$f(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(x)\sin xt\,dx.$$

[Взять интеграл $\int\frac{\sin zt}{e^{az}-1}\,dz$, где $a>0$, вдоль контура прямоугольника с вершинами 0, n, $n+\frac{2i\pi}{a}$, $\frac{2i\pi}{a}$ и перейти к пределу при $n\to\infty$.]

*) Lindelöf, Calcul des Résidus, стр. 48—49.

11. Доказать, что при $0<a<1$ и $0<c<1$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{dz}{a^z\sin\pi z}=\frac{1}{\pi(1+a)}.$$

12. Доказать, что при $a>0$, $-\frac{1}{2}\pi<a\lambda<\frac{1}{2}\pi$

$$\int\limits_0^\infty e^{-r^a\cos a\lambda}\cos(r^a\sin a\lambda)\,dr=\cos\lambda\cdot\frac{1}{a}\Gamma\left(\frac{1}{a}\right),$$

$$\int\limits_0^\infty e^{-r^a\cos a\lambda}\sin(r^a\sin a\lambda)\,dr=\sin\lambda\cdot\frac{1}{a}\Gamma\left(\frac{1}{a}\right).$$

13. Просуммировать ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4+a^4}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^4+a^4}$.

14. Доказать, что если $-\pi<a<\pi$ и x — нецелое число, то

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n\sin na}{x^2-n^2}=\frac{1}{2}\pi\frac{\sin ax}{\sin\pi x}.$$

15.Докозать, что *)

$$\frac{\operatorname{cth}\pi}{1^7}+\frac{\operatorname{cth}2\pi}{2^7}+\frac{\operatorname{cth}3\pi}{3^7}+\ldots=\frac{19\pi^7}{56\,700}.$$

16. Доказать, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3\sin\sqrt{2}\,n\pi}=-\frac{13\pi^3}{360\sqrt{2}}$.

[Харди. Рассмотреть интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int\frac{1}{\sin\pi z\sin\theta\pi z}\frac{dz}{z^3},$$

где $\theta=\sqrt{2}-1$. Ряд сходится; действительно, если m — ближайшее к $n\sqrt{2}$ целое число, то

$$|n\sqrt{2}-m|=\frac{|2n^2-m^2|}{n\sqrt{2}+m}\geqslant\frac{1}{n\sqrt{2}+m}>\frac{A}{n},$$

и, следовательно, $\operatorname{cosec}\sqrt{2}\,n\pi=O(n)$.]

17. Пусть $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{z^{n+1}}$ ($|z|>0$) и C — замкнутый контур, охватывающий начало. Показать, что если функция $\varphi(x)$ регулярна в достаточно большой области, то

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C f(w)\,\varphi(z-w)\,dw=a_0\varphi(z)-a_1\varphi'(z)+\frac{a_2}{2!}\varphi''(z)-\ldots$$

*) Рамануджан; см. Watson [1].

18. Доказать, что

$$e^{az}-e^{bz}=(a-b)\,ze^{\frac{1}{2}(a+b)z}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{1+\frac{(a-b)^2z^2}{4n^2\pi^2}\right\}.$$

19. Показать, что, как бы мало ни было ρ, при достаточно большом n все нули функции

$$1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\ldots+\frac{1}{n!z^n}$$

лежат в круге $|z|\leqslant\rho$.

20. Если $a>e$, то уравнение $e^z=az^n$ имеет n нулей внутри единичного круга.

[Положить в теореме Руше $f(z)=az^n$, $g(z)=e^z$.]

21. Показать, что при вещественных α и β уравнение

$$z^{2n}+\alpha^2z^{2n-1}+\beta^2=0$$

имеет $n-1$ корней с положительными вещественными частями, если n нечетно, и n корней с положительными вещественными частями, если n четно.

22. Доказать, что если α не является четным целым числом, то при $t\to\infty$ вдоль вещественной оси *)

$$\int_0^{\infty}e^{-x^{\alpha}}\cos xt\,dx\sim\frac{\Gamma(\alpha+1)\sin\frac{1}{2}\pi\alpha}{t^{\alpha+1}}.$$

23. Если $f(z)=u+iv$ — аналитическая функция от $z=x+iy$ и ψ — функция от u и v, обладающая непрерывными производными двух первых порядков, то **)

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2=\left\{\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)^2\right\}|f'(z)|^2$$

и

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}\right)|f'(z)|^2.$$

24. Показать, что если $f(z)=u+iv$ — аналитическая функция от $z=x+iy$, то там, где $f(z)\neq 0$,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)|f(z)|^p=p^2|f(z)|^{p-2}|f'(z)|^2$$

и там, где $u(x,\ y)\neq 0$,

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial y^2}\right)|u|^p=p(p-1)|u|^{p-2}|f'(z)|^2.$$

25. Пусть $\varphi(t)$ — вещественная функция, интегрируемая в интервале $(a,\ b)$, и пусть функция

$$f(z)=\int_a^b e^{zt}\varphi(t)\,dt$$

имеет нули в точках $r_1e^{i\theta_1}$, $r_2e^{i\theta_2}$, ... Тогда ряд

$$\sum\frac{\cos\theta_n}{r_n}$$

абсолютно сходится.

[Функция $e^{-bz}f(z)$ ограничена при $x\geqslant 0$, а функция $e^{az}f(z)$ ограничена при $x\leqslant 0$.]

---

*) Pólya [1].

**) См. Hardy [8], стр. 270.

ГЛАВА IV

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ

4.1. Общая теория. Естественно рассматривать агрегат всех значений, скажем, z^2 или $\log z$, взятых для всех значений z, как единое целое, и каждый такой агрегат мы описываем как *аналитическую функцию*. До сих пор мы не встречались с общим понятием аналитической функции, как целого. То, с чем мы имели дело, было понятие функции, связанной с некоторой областью и определенной в этой области некоторой формулой. Так,

$$1+z+z^2+\ldots \qquad (|z|<1) \tag{1}$$

и

$$\int_0^\infty e^{-t(1-z)}\,dt \qquad (\operatorname{Re} z<1) \tag{2}$$

выступают как различные функции, значения которых оказываются одинаковыми для некоторых значений z. Но более естественно рассматривать функцию (1) как часть функции (2), а функцию (2) — как часть функции, определенной для всех значений z, отличных от 1, формулой $\frac{1}{1-z}$.

Рассмотренная функция однозначна, т. е. принимает в точности одно значение при каждом значении z (кроме значения $z=1$). Но естественно рассматривать и два значения $\sqrt{z}$ как части одной и той же функции, и наше определение должно охватывать также и случаи такого рода.

Для того чтобы связать эти новые идеи с нашей прежней теорией, нам нужен процесс, который позволил бы продолжать функцию за пределы той области, в которой она первоначально определена. Этот процесс называется *аналитическим продолжением*. Он является типичным для аналитических функций комплексного переменного и не имеет аналога в теории функций действительного переменного.

4.1.1. Аналитическое продолжение. Пусть $f_1(z)$ и $f_2(z)$ — две функции, аналитические соответственно в областях D_1 и D_2. Предположим, что области D_1 и D_2 имеют общую часть, в которой всюду $f_1(z)=f_2(z)$. Тогда мы рассматриваем значения функций $f_1(z)$ и $f_2(z)$ в точках областей D_1, D_2 как значения одной аналитической функции $f(z)$. Таким образом, функция $f(z)$ аналитична в области $D=D_1+D_2$, и $f(z)=f_1(z)$ в D_1, $f(z)=f_2(z)$ в D_2.

Функция $f_2(z)$ может рассматриваться как расширяющая область определения функции $f_1(z)$, и она называется аналитическим продолжением функции $f_1(z)$. Конечно, таким же образом и функция $f_1(z)$ есть аналитическое продолжение функции $f_2(z)$. Процесс расширения области определения заданной функции также называется аналитическим продолжением.

Для того чтобы этот процесс представлял ценность, необходимо, чтобы он давал, при соответствующих условиях, единственный результат, и мы покажем, что дело обстоит именно так. Но прежде чем приниматься за доказательство, укажем на трудности, с которыми мы встречаемся при попытке определить подобный процесс для функций действительного переменного.

Естественно считать, что если, скажем, $f(x)=\frac{1}{2}(\pi-x)$ при $0<x<\pi$, то продолжение функции $f(x)$ на другие значения x должно происходить по той же формуле. Трудность состоит в том, что две формулы могут представлять одну и ту же функцию в одном интервале, но различные функции в другом интервале, и не существует способа, который позволил бы решить, какова «правильная» формула. Например, предыдущая функция представляется при $0<x<\pi$ также рядом

$$\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 2x}{2}+\ldots,$$

но если мы определим функцию как сумму этого ряда, то обнаружим, что ее значение в интервале $(-\pi, 0)$ есть $-\frac{1}{2}(\pi+x)$.

Этот ряд не является равномерно сходящимся, но такого рода явления не исчезнут, если мы ограничимся равномерно сходящимися рядами. Например, ряд

$$\frac{x\sin x}{1}+\frac{x\sin 2x}{2}+\ldots$$

равномерно сходится в некотором интервале, содержащем точку $x=0$; тем не менее, если мы воспользуемся им для продолжения его суммы с положительных значений x на отрицательные, то придем к нежелательному заключению, что продолжение функции $\frac{1}{2}x(\pi-x)$ есть функция $-\frac{1}{2}x(\pi+x)$.

4.1.2. Единственность аналитического продолжения. Предположим, что имеется область D, перекрывающаяся с областями D_1 и D_2, и пусть последние имеют общую часть D_3, которая сама перекрывается с D. Пусть функция $f(z)$ аналитична в D, и пусть $f_1(z)$ есть продолжение функции $f(z)$ на D_1, а $f_2(z)$ — продолжение функции $f(z)$ на D_2. Тогда каждая из функций $f_1(z)$, $f_2(z)$ осуществляет продолжение функции $f(z)$ на D_3. Чтобы показать, что результаты этих двух процессов продолжения совпадают, мы должны показать, что $f_1(z)=f_2(z)$ всюду в D_3. Это следует из теоремы § 2.6, доказательство которой использует тот факт, что аналитическая функция может быть разложена в степенной ряд. Функция $f_1(z)-f_2(z)$ аналитична всюду в D_3. Она равна нулю в той части области D_3, которая покрыта областью D, так как там $f_1(z)=f_2(z)=f(z)$. Следовательно, она равна нулю всюду в D_3.

Это доказательство использует существование области, общей для D и D_3, и если такой области не существует, то результат может оказаться неверным. Может случиться, что $f_1(z)=f(z)$ в DD_1, $f_2(z)=f(z)$ в DD_2, но $f_1(z)\neq f_2(z)$ в D_3. Это не противоречит принципу единственности, так как он применим только к областям, в которых функция всюду аналитична; между тем, D, D_1 и D_2 могут окружать точку, в которой функция не аналитична, не содержа ее *).

4.1.3. Во втором рассмотренном выше случае, когда $f_1(z)\neq f_2(z)$ в D_3, мы все-таки рассматриваем совокупность значений функций $f_1(z)$ и $f_2(z)$ как единую аналитическую функцию от z, только эта функция уже не однозначна, а по крайней мере двузначна в D_3. Подобным же образом разные способы продолжения могут привести ко многим различным результатам, и тогда функция многозначна.

Читатель *Чистой математики* Харди знаком с различными значениями, принимаемыми функцией $\log z$ (хотя, конечно, в книге Харди нет даже понятия функции, аналитической в точке). Свойства некоторых других многозначных функций, таких как $z^a = e^{a\log z}$, могут быть выведены из свойств функции $\log z$.

4.1.4. Определение аналитической функции как целого. Обычно аналитическая функция бывает первоначально определена в некоторой области плоскости. Принцип аналитического продолжения дает нам возможность определить *аналитическую функцию* без указания на какую-либо частную область, в которой она задана. Она состоит из первоначальной функции и всех ее продолжений, и всех продолжений этих продолжений, и т. д. Может случиться, что при таком расширении функции $f(z)$ мы сможем достигнуть всех значений z, или всех значений z, кроме некоторых специальных точек, или, наконец, только зна-

*) Этот случай можно проиллюстрировать фигурой, в которой D, D_1, D_2 — круги с центрами в вершинах равностороннего треугольника и радиусами, чуть бо́льшими половины стороны треугольника. Функция может не быть аналитической в центре треугольника.

чений z, лежащих в некоторой области плоскости, за пределы которой мы не сможем выйти. В последнем случае эта область называется *областью существования* функции, а ее граница — *естественной границей* функции. В случае многозначных функций мы получим для некоторых или всех значений z много значений функции.

Это окончательное определение функции в целом зависит в первую очередь от частичного определения, с которого мы начали. Так как, однако, отношение между двумя функциями, каждая из которых является продолжением другой, взаимно, то все процессы могут быть обращены, и от того, с какого места мы начали построение функции, ее окончательное определение не зависит.

4.1.5. Стандартный метод продолжения. Стандартный метод продолжения есть метод степенных рядов. Предположим, что мы начинаем с ряда

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n,$$

сходящегося в круге $|z-a| < R$. Взяв в этом круге какую-нибудь точку b, отличную от a, мы вычисляем значение функции $f(b)$ и значения производных $f'(b)$, $f''(b)$, ..., и, таким образом, получаем разложение функции по степеням разности $z-b$. Новый ряд будет непременно сходиться в некотором круге с центром b, лежащим в первоначальном круге, и может сходиться в большем круге; так производится некоторое аналитическое продолжение функции. Этим способом вся аналитическая функция может быть построена из степенных рядов. Каждый степенной ряд, или, что то же самое, каждая последовательность значений $f(a)$, $f'(a)$, $f''(a)$, ... называется *элементом функции*.

Выбор этого специального метода в качестве стандартного оправдывается теоремой: *все значения функции, полученные любым методом продолжения, могут быть получены посредством степенных рядов.*

Пусть C — контур, соединяющий точки $z=a$ и $z=b$, вдоль которого мы как-либо продолжили функцию $f(z)$; это значит, что имеется такая последовательность формул, определяющих $f(z)$ в некоторой последовательности областей D_1, D_2, ..., что: (I) каждая точка контура C лежит внутри по крайней мере одной из областей D_n; (II) соседние области перекрываются и в их общих частях различные определения функции $f(z)$ совпадают.

Мы попытаемся осуществить тот же процесс посредством степенных рядов, т. е. попытаемся найти на C такую последовательность точек z_1, z_2, ..., что: круг сходимости с центром в каждой из них содержит следующую; значения функции, даваемые степенными рядами, совпадают с заданными значениями; при этом точка b может быть достигнута через конечное число шагов.

Каждой точке z на C отвечает некоторый положительный радиус сходимости ρ, и ρ *есть непрерывная функция от* z. Действительно, возьмем две близкие точки z, $z+h$ и обозначим через ρ, ρ' соответствующие радиусы сходимости. Пусть $|h|<\rho$. Так как функция $f(z)$ регулярна в круге с центром $z+h$ и радиусом $\rho-|h|$, то из теоремы Коши — Тейлора следует, что

$$\rho' \geqslant \rho-|h|. \tag{1}$$

Если $|h|<\rho'$, то, меняя местами z и $z+h$, мы заключаем из тех же соображений, что $\rho \geqslant \rho'-|h|$, т. е. что

$$\rho' \leqslant \rho+|h|. \tag{2}$$

Если же неравенство $|h|<\rho'$ не имеет места, то $\rho' \leqslant |h|$, так что неравенство (2) верно во всех случаях. Но вместе неравенства (1) и (2) показывают, что $\rho' \to \rho$ при $h \to 0$, а это мы и утверждали.

Так как функция ρ непрерывна, то она достигает на C своей нижней грани, а так как она всюду положительна, то и ее нижняя грань положительна. Обозначим эту нижнюю грань через δ.

Мы начинаем теперь с точки $z=a$ и строим степенной ряд. Пусть z_1 — точка контура, лежащая от a на расстоянии $\frac{1}{2}\delta$ вдоль контура. Она лежит внутри круга сходимости с центром a, так что мы можем построить разложение по степеням $z-z_1$. Новый радиус сходимости не меньше δ, благодаря чему мы можем, перемещаясь по контуру дальше, перейти к точке z_2, лежащей от z_1 на расстоянии $\frac{1}{2}\delta$ вдоль контура. Продолжая таким образом, мы, очевидно, через конечное число шагов достигнем точки $z=b$. Тот факт, что этим методом мы получим в точке b то же значение, что и исходным методом, следует из общей теоремы единственности.

4.1.6. Ветви многозначной функции. Мы определили аналитическую функцию как агрегат всех значений, которые могут быть получены продолжением из какого-нибудь элемента функции. В общем случае функция будет многозначной; это значит, что, отправляясь, скажем, от точки z_0 и перемещаясь по соответствующим образом выбранным путям, можно прийти к точке z_1 с различными значениями $f(z_1)$. Мы можем, однако, исключить это, ограничившись некоторой частичной областью; мы скажем тогда, что в этой области определена *ветвь* функции. Рассмотрим, например, функцию $\sqrt{z}$. Система значений, определяемая формулой $\sqrt{r}\,e^{\frac{1}{2}i\theta}$ при $-\pi<\theta<\pi$, есть ветвь этой функции в области, в которую плоскость превращается надрезом вдоль отрицательной