части вещественной оси от начала до бесконечности, а система $-\sqrt{r}e^{\frac{1}{2}i\theta}$ есть другая ветвь той же функции в той же области. Подобным же образом функция $\log z$ имеет в этой области бесконечное множество ветвей, определяемых формулой

$$\log r + i(\theta + 2n\pi) \qquad (-\pi < \theta < \pi);$$

каждое целое число n дает свою ветвь.

Следует иметь в виду, что не существует единственного способа разложения функции на ветви; например, мы могли бы в предыдущих случаях разрезать плоскость от начала до бесконечности вдоль любой другой полупрямой. Однако, как бы мы это ни делали, мы всегда получим одно и то же число ветвей; например, функция $\sqrt{z}$ имеет две ветви. Вопрос о числе ветвей будет еще рассмотрен позже.

4.2. Особенности аналитической функции. Единственными особыми точками, рассмотренными нами до сих пор, были изолированные особые точки функции, аналитической и однозначной в некоторой области, а также точки, предельные для таких особых точек. Они были подразделены на полюсы и существенно особые точки. Теперь эта классификация оказывается недостаточной.

Мы будем говорить теперь, что однозначная аналитическая функция *регулярна* в каждой точке, внутренней для одного из кругов, использованных при ее продолжении из начального элемента, и что она сингулярна в каждой точке, предельной для точек регулярности, которая не является сама точкой регулярности. Точка, в которой функция сингулярна, называется особой точкой. Это определение охватывает полюсы и существенные особенности, которые мы рассматривали выше; но могут встретиться и особенности, не являющиеся изолированными. В § 4.7 мы построим функцию, для которой каждая точка единичной окружности является особой. Точки этого рода обычно также называют существенно особыми.

Термин «регулярная функция», как мы его здесь употребляем, означает больше, чем термин «аналитическая функция». Согласно определению § 2.1.4 функция может быть аналитической в точке, не будучи там регулярной. Пусть, например, $f(z) = e^{-1/z}$ при $-\frac{1}{4}\pi \leqslant \arg z \leqslant \frac{1}{4}\pi$, $|z| > 0$ и $f(z) = 0$ в остальных точках. Нетрудно проверить, что $f(z)$ аналитична при $z = 0$ и что $f'(0) = 0$. Рассмотрим, однако, контур, состоящий из сторон треугольника с вершинами в точках 0 и $1 \pm \frac{1}{2}i$. Функция аналитична всюду внутри этого контура и на самом контуре, но она, очевидно, не регулярна при $z = 0$. Однако указанное различие не так уж важно, поскольку его приходится делать только для функций, в некотором роде искусственных, подобных рассмотренной.

В теории многозначных функций встречаются особые точки другого рода, известные как *точки разветвления*. Предположим, что при продолжении функции $f(z)$ вдоль любой достаточно малой окружности с центром z_0 мы возвращаемся к исходной точке со значением функции, отличным от того, с которого мы начинали. Тогда z_0 называется точкой разветвления функции $f(z)$. Например, если мы продолжим функцию $\sqrt{z}=\sqrt{r}e^{\frac{1}{2}i\theta}$ вдоль окружности с центром $z=0$ и радиусом r от $\theta=0$ до $\theta=2\pi$, то значение функции изменится от $\sqrt{r}$ до $-\sqrt{r}$. Следовательно, $z=0$ есть точка разветвления функции $\sqrt{z}$. Подобным же образом $z=0$ есть точка разветвления функций $1/\sqrt{z}$ и $\log z$.

Заметим, что точка разветвления не обязана быть точкой «бесконечности» функции.

Ветвь многозначной функции может, конечно, иметь полюсы и существенные особенности, и точка может быть особой для одной ветви функции, не будучи особой для другой ветви. Например, точка $z=1$ является полюсом для той ветви функции $1/\log z$, которая соответствует ветви функции $\log z$, обращающейся при $z=1$ в нуль, но не является полюсом ни для какой другой ветви. Для многозначных функций общее определение регулярных и особых точек не столь просто, как для однозначных функций, и обычно бывает достаточно рассматривать отдельные ветви. Мы определяем регулярную точку ветви таким же образом, как для однозначной функции; но такая особая точка, как точка разветвления, не может быть приписана отдельной ветви.

Примеры. (I) Функция z^a, определенная как $e^{a\log z}$, имеет бесконечно много значений, если только a не является рациональным вещественным числом; в последнем случае она имеет конечное число значений.

(II) Функция $z^{1/3}(1-z)^{1/2}$ имеет шесть значений.

(III) Одна из ветвей функции $\frac{1}{z}\log\frac{1}{1-z}$ представляется при $|z|<1$ рядом

$$\frac{1}{z}\left(z+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{3}z^3+\dots\right),$$

и $z=0$ есть регулярная точка этой ветви; но для всякой другой ветви точка $z=0$ служит полюсом.

(IV) Функция $\left\{\log\frac{1}{1-z}\right\}^{1/2}$ имеет особенности при $z=0$ и $z=1$; $z=0$ есть точка разветвления двузначной функции, соответствующей одной из ветвей логарифма.

(V) Рассмотреть особенности функции $\log\log z$.

4.2.1. *Если радиус сходимости ряда*

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$$

конечен, то функция $f(z)$ имеет по крайней мере одну особенность на границе круга сходимости.

Пусть C — граница круга сходимости, R — его радиус и C' — концентрическая с C окружность радиуса $R' < R$. Пусть ρ — радиус сходимости степенного ряда, построенного для точки z, лежащей на C'. Как в § 4.1.5, ρ есть непрерывная функция от z. Кроме того, $\rho \geqslant R - R'$, так что, если δ — нижняя грань значений ρ на C', то $\delta \geqslant R - R'$.

Если $\delta > R - R'$, то круги сходимости с центрами в точках окружности C' все вместе покрывают кольцо $R' - \delta < |z| < R' + \delta$ и функция $f(z)$ оказывается регулярной в круге $|z| < R' + \delta$, большем чем круг $|z| < R$. Следовательно (теорема Коши — Тейлора), радиус сходимости ряда $\sum a_n z^n$ больше R, что заключает в себе противоречие.

Итак, $\delta = R - R'$. Поскольку непрерывная функция должна достигать на C' своей нижней грани, то на C' имеется точка, скажем $R'e^{i\alpha}$, в которой $\rho = R - R'$. Оказывается, что $Re^{i\alpha}$ есть особая точка функции $f(z)$. Действительно, если бы эта точка была регулярной, то функция $f(z)$ была бы регулярна в некотором круге с центром $z = Re^{i\alpha}$, а тогда радиус сходимости в точке $R'e^{i\alpha}$ был бы больше $R - R'$.

Этим существование особенности на границе круга сходимости установлено. Мы можем говорить о ней, как об особенности, ближайшей к началу, или как об одной из ближайших. Таким образом, можно сказать, что граница круга сходимости проходит через ближайшую к началу особую точку функции.

4.2.2. *Если при продолжении аналитической функции $f(z)$ вдоль двух путей, ведущих из z_0 в z_1, получаются различные значения $f(z_1)$, то между этими путями функция $f(z)$ должна иметь особенность.*

Мы строим две цепи областей, скажем $D_1, \ldots, D_m$ и $D'_1, \ldots$ $\ldots, D'_n$, в которых: соседние области каждой цепи перекрываются; D_1 и D'_1 содержат z_0; D_m и D'_n содержат z_1; функция $f_k(z)$ аналитична в D_k, функция $g_k(z)$ аналитична в D'_k; $f_k(z) = f_{k-1}(z)$ — в общей части областей D_k и D_{k-1}, $g_k(z) = g_{k-1}(z)$ — в общей части областей D'_k и D'_{k-1}; $f_1(z) = g_1(z)$ — в общей части областей D_1 и D'_1.

Мы должны доказать, что если функцию можно продолжить до любой точки, лежащей между путями, то $f_m(z_1) = g_n(z_1)$.

Если δ достаточно мало, то существует такая полигональная линия, ведущая из некоторой лежащей в $D_1D'_1$ точки a в некоторую лежащую в $D_mD'_n$ точку b, с вершинами в точках вида $(p\delta,\ q\delta)$, что круги радиуса 2δ с центрами в этих вершинах лежат целиком в первой цепи и каждый содержит центр следующего. Этой цепью кругов может быть заменена первая цепь областей. Подобной же цепью кругов, с тем же самым δ, может быть заменена и вторая цепь областей.

Теперь мы можем последовательно заменять первую цепь новыми цепями, состоящими из кругов радиуса 2δ с центрами в точках вида $(p\delta, q\delta)$, каждый из которых перекрывается с предыдущей цепью и с кругами своей цепи, лежащими от него по обе стороны, так что непокрытого пространства не остается. То, что все радиусы можно взять не меньшими 2δ, следует из предыдущей теоремы в силу отсутствия особенностей. Из общего принципа единственности продолжения следует, что по всем этим цепям мы придем к z_1 с одним и тем же значением $f(z_1)$. Таким образом, мы через конечное число шагов перейдем от одной из наших первоначальных цепей кругов к другой; так как функция регулярна в каждой точке между заданными путями, то процесс не может оборваться.

4.3. Римановы поверхности. Функция $\sqrt{z}$ двузначна. Но если мы положим $z = re^{i\theta}$ и условимся различать одинаковые значения z, отвечающие различным значениям θ, то ее можно представить как однозначную функцию. Допустим, что мы рассматриваем значения z, соответствующие значениям θ в интервале $\pi < \theta < 3\pi$, как отличные от значений z, соответствующих значениям θ при $-\pi < \theta < \pi$, но значения z в интервале $3\pi < \theta < 5\pi$ рассматриваем опять как те же, что в интервале $-\pi < \theta < \pi$, и т. д. Это эквивалентно замене обыкновенной плоскости z двумя плоскостями. Мы можем представлять их себе наложенными друг на друга, надрезанными вдоль отрицательной части вещественной оси и соединенными крест-накрест вдоль надреза. Полученная таким образом конфигурация называется римановой поверхностью функции $\sqrt{z}$.

Если мы будем перемещаться вдоль пути, обходящего начало, отправляясь от отрицательной части вещественной оси в верхней плоскости, то мы один раз обойдем верхнюю плоскость, потом перейдем в нижнюю плоскость, один раз обойдем ее и возвратимся в верхнюю плоскость.

Это соответствует способу, которым мы получаем два различных значения $\sqrt{z}$. В верхней плоскости $-\pi < \theta < \pi$, так что $-\frac{1}{2}\pi < \frac{1}{2}\theta < \frac{1}{2}\pi$, в нижней плоскости $\pi < \theta < 3\pi$, так что $\frac{1}{2}\pi < \frac{1}{2}\theta < \frac{3}{2}\pi$. Если θ возрастает далее, то мы возвращаемся в верхнюю плоскость и значения повторяются. Таким образом, на своей римановой поверхности $\sqrt{z}$ есть однозначная функция.

Функцию $\log z$ мы представляем подобным же образом на бесконечно многих наложенных друг на друга плоскостях, каждая из которых надрезана вдоль отрицательной части вещественной оси и соединена нижним ребром с верхним ребром плоскости, лежащей под ней. В этом случае при обходе начала возврата к исходной точке нет.

Для функции $\sqrt{(z-a)(z-b)}$ мы можем произвести разрез в каждой из двух плоскостей вдоль отрезка прямой, соединяющего точки $z=a$ и $z=b$, и соединить плоскости крест-накрест вдоль разреза.

Число ветвей многозначной функции может быть определено как минимальное число плоскостей, нужных для образования римановой поверхности, на которой функция однозначна.

Для построения римановых поверхностей более сложных функций требуется значительное искусство. Они имеют большое значение в общей теории многозначных функций, однако их дальнейшее рассмотрение выходит за рамки этой главы.

4.4. Функции, определенные интегралами. Мы знаем, что если z — положительное вещественное число, то

$$\int_0^\infty e^{-zt}\,dt=\frac{1}{z}. \tag{1}$$

Но интеграл равномерно сходится во всякой конечной области, где $\operatorname{Re}(z)\geqslant a>0$, и потому представляет аналитическую функцию, регулярную при $\operatorname{Re}(z)>0$. Таким образом, функция

$$F(z)=\int_0^\infty e^{-zt}\,dt-\frac{1}{z}$$

регулярна при $\operatorname{Re}(z)>0$ и $=0$ на вещественной оси. Следовательно, $F(z)=0$ всюду, где функция $F(z)$ регулярна, т. е. формула (1) верна для всех комплексных значений z, вещественная часть которых положительна. Мы можем положить $z=x+iy$ $(x>0)$ и разделить вещественные и мнимые части; мы получим хорошо известные формулы:

$$\int_0^\infty e^{-xt}\cos yt\,dt=\frac{x}{x^2+y^2},\qquad \int_0^\infty e^{-xt}\sin yt\,dt=\frac{y}{x^2+y^2}. \tag{2}$$

Примеры. (1) Доказать, что

$$\int_0^\infty e^{-zt^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{z}}\qquad (\operatorname{Re}(z)>0).$$

[Если предположить формулу известной для вещественных значений z, то общую формулу можно получить с помощью аналитического продолжения или с помощью теоремы Коши, поворачивая прямую интегрирования на угол $-\frac{1}{2}\arg z$.]

(II) Доказать, что $\int\limits_0^\pi \frac{dt}{1-z\cos t} = \frac{\pi}{\sqrt{1-z^2}}$, если только z не есть вещественное число, большее чем 1 по абсолютной величине.

4.4.1. Гамма-функция. Формула

$$\Gamma(z) = \int\limits_0^\infty e^{-w} w^{z-1}\, dw \tag{1}$$

определяет $\Gamma(z)$ как аналитическую функцию, регулярную при $\operatorname{Re}(z) > 0$ (§ 2.8.5). Сама по себе она ничего не говорит нам о поведении $\Gamma(z)$ на мнимой оси или слева от нее.

Рассмотрим, однако, функцию

$$f(z) = \int\limits_C e^{-w}(-w)^{z-1}\, dw, \tag{2}$$

где C состоит из части вещественной оси от ∞ до δ, окружности $|w| = \delta$, описываемой в положительном направлении, и той же части вещественной оси, но от δ до ∞. Значения многозначной функции $(-w)^{z-1} = e^{(z-1)\log(-w)}$ определяются тем, что при $w = -\delta$ значение $\log(-w)$ должно быть положительным. Контурный интеграл равномерно сходится в каждой конечной области плоскости z, и возникает лишь вопрос о сходимости в бесконечности; но он относится к случаю, уже рассмотренному в § 1.5.1. Следовательно, функция $f(z)$ регулярна при всех конечных значениях z.

Если $w = \rho e^{i\varphi}$, то на контуре $\log w = \log\rho + i(\varphi - \pi)$. Поэтому интегралы, взятые вдоль вещественной оси, дают в сумме

$$\int\limits_\delta^\infty \{-e^{-\rho+(z-1)(\log\rho - i\pi)} + e^{-\rho+(z-1)(\log\rho+i\pi)}\}\, d\rho = -2i\sin z\pi \int\limits_\delta^\infty e^{-\rho}\rho^{z-1}\, d\rho.$$

На окружности

$$|(-w)^{z-1}| = |e^{(z-1)\{\log\delta + i(\varphi-\pi)\}}| = e^{(x-1)\log\delta - y(\varphi-\pi)} = O(\delta^{x-1}).$$

Поэтому при $\delta \to 0$ и $x > 0$ интеграл вдоль окружности есть $O(\delta^x) = o(1)$, и, заставляя δ стремиться к нулю, мы видим, что

$$f(z) = -2i\sin z\pi \int\limits_0^\infty e^{-\rho}\rho^{z-1}\, d\rho = -2i\sin z\pi\,\Gamma(z) \qquad (\operatorname{Re}(z) > 0).$$

Но функция $\frac{1}{2} i f(z)\operatorname{cosec} z\pi$ регулярна при всех значениях z, за возможным исключением полюсов функции $\operatorname{cosec} z\pi$, т. е. точек $z = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; кроме того, при $\operatorname{Re}(z) > 0$ она равна $\Gamma(z)$. Поэтому мы можем считать эту функцию продолжением функции $\Gamma(z)$ на всю плоскость z. Мы уже знаем, что функция $\Gamma(z)$ регулярна при $z = 1, 2, \ldots$ Следовательно, единственные возможные полюсы — это точки $z = 0, -1, -2, \ldots$

Эти точки действительно являются полюсами функции $\Gamma(z)$. В самом деле, если z — отрицательное целое число или нуль, то $(-w)^{z-1}$ есть однозначная функция и интеграл (2) может быть вычислен с помощью теории вычетов. Именно,

$$f(-n) = -\frac{2\pi i}{n!},$$

так что вычет функции $\Gamma(z)$ есть

$$\lim_{z\to -n} \frac{2\pi i}{n!} \frac{z+n}{2i \sin z\pi} = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Все формулы, полученные нами для гамма-функции, могут быть теперь распространены на комплексные значения z. Например, функциональное соотношение

$$\Gamma(z)\ \Gamma(1-z) = \pi \operatorname{cosec} z\pi,$$

доказанное нами в предположении, что z — вещественное число и $0<z<1$, остается верным для всех нецелых значений z.

Одно из следствий этой формулы состоит в том, что $1/\Gamma(z)$ есть целая функция. Действительно, в силу этой формулы все полюсы функции $\Gamma(1-z)$ гасятся нулями функции $\sin z\pi$.

Мы можем теперь доказать для $\Gamma(z)$ формулу, подобную формулам §§ 3.2.2—3.2.3. Согласно формуле (4) из § 1.8.6

$$\frac{\Gamma(z-h)\Gamma(h)}{\Gamma(z)} = \frac{1}{h} + \int_0^1 \{(1-t)^{z-h-1}-1\} t^{h-1}\,dt =$$

$$= \frac{1}{h} + \int_0^1 \{(1-t)^{z-1}-1\} t^{-1}\,dt + o(1) \qquad (0<h<x)$$

при $h\to 0$. Левая часть равна

$$\frac{1}{\Gamma(z)}\left\{\Gamma(z) - h\Gamma'(z) + \ldots\right\}\left\{\frac{1}{h} + A + \ldots\right\},$$

где A — постоянная. Приравнивая постоянные члены, мы видим, что

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \int_0^1 \{1-(1-t)^{z-1}\}\frac{dt}{t} - A \qquad (x>0).$$

Далее, $\frac{1}{t} = \sum (1-t)^n$, и почленное интегрирование дает:

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+z}\right) - A.$$

Эта процедура оправдана, согласно § 1.7.7, если $z>1$; но результат сохраняет силу, согласно принципу аналитического продолжения, для всех значений z, кроме неположительных целых значений.

Эту формулу нетрудно преобразовать к виду

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}+\frac{1}{z}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+z}\right)-C,$$

где C — другая постоянная. Интегрируя и переходя к экспоненциалам, мы получаем равенство

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=e^{Cz}z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-z/n}.$$

При $z=1$ оно означает, что

$$1=e^{C}\prod_{1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{-1/n}.$$

Следовательно,

$$C=-\log\prod_{1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{-\frac{1}{n}}=\lim_{N\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{N}-\log N\right)=\gamma;$$

γ есть постоянная Эйлера.

4.4.2. Формула Стирлинга для комплексных значений z. Из формулы предыдущего параграфа следует, что

$$\log\Gamma(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{z}{n}-\log\left(1+\frac{z}{n}\right)\right\}-\gamma z-\log z, \tag{1}$$

где взяты главные значения всех логарифмов. Нетрудно проверить, что

$$\int_0^N\frac{[u]-u+\frac{1}{2}}{u+z}\,du=\sum_{n=0}^{N-1}\int_n^{n+1}\left(\frac{n+\frac{1}{2}+z}{u+z}-1\right)du=$$

$$=\sum_{n=1}^{N-1}\left\{\frac{z}{n}-\log\left(1+\frac{z}{n}\right)\right\}-\log\{(N-1)!\}-z\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{N-1}\right)-$$

$$-\left(z+\frac{1}{2}\right)\log z+\left(N-\frac{1}{2}+z\right)\log(N+z)-N.$$

Пользуясь теперь формулой (1) из § 1.8.7 и соотношениями

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{N-1}=\log N+\gamma+o(1),$$

$$\log(N+z)=\log N+\frac{z}{N}+O\left(\frac{1}{N^2}\right)$$

и заставляя N стремиться к бесконечности, мы видим, что

$$\log \Gamma(z)=\left(z-\frac{1}{2}\right)\log z - z+\frac{1}{2}\log 2\pi+\int_0^{\infty}\frac{[u]-u+\frac{1}{2}}{u+z}\,du. \qquad (2)$$

Положим $\varphi(u)=\int_0^u\left([v]-v+\frac{1}{2}\right)dv$. Функция $\varphi(u)$ ограничена, так как при целом n, очевидно, $\varphi(n+1)=\varphi(n)$. Таким образом, последний член в формуле (2) представляется как

$$\int_0^{\infty}\frac{\varphi'(u)}{u+z}\,du=\int_0^{\infty}\frac{\varphi(u)}{(u+z)^2}\,du=O\left\{\int_0^{\infty}\frac{du}{u^2+r^2-2ur\cos\delta}\right\}=O\left(\frac{1}{r}\right)$$

равномерно при $-\pi+\delta\leqslant\arg z\leqslant\pi-\delta$. Это и есть обобщение формулы Стирлинга на комплексные значения z.

Примеры. (I) Для всякой постоянной a при $|z|\to\infty$

$$\log\Gamma(z+a)=\left(z+a-\frac{1}{2}\right)\log z-z+\frac{1}{2}\log 2\pi+O\left(\frac{1}{|z|}\right)$$

равномерно при $-\pi+\delta\leqslant\arg z\leqslant\pi-\delta$.

(II) Для всякого фиксированного значения x при $y\to\pm\infty$

$$|\Gamma(x+iy)|\sim e^{-\frac{1}{2}\pi|y|}\,|y|^{x-\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}.$$

(III) Показать, что разложение $\varphi(u)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1-\cos 2\nu\pi u}{2\pi^2\nu^2}$ может быть вставлено в предыдущую формулу с последующим почленным интегрированием. Вывести из этого, что интеграл в формуле (2) равен

$$\frac{1}{12z}+O\left(\frac{1}{|z|^2}\right).$$

Этот процесс последовательного вычисления новых членов может быть продолжен неограниченно повторным интегрированием по частям.

(IV) Доказать, что при $a>0$, $c>0$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\Gamma(z)\,a^{-z}\,dz=e^{-a}.$$

[Взять интеграл вдоль контура прямоугольника $x=c$, $x=-n-\frac{1}{2}$, $y=\pm Y$. При фиксированном n интегралы, взятые вдоль горизонтальных сторон, стремятся к нулю, когда $Y\to\infty$. Далее,

$$\Gamma\left(-n-\frac{1}{2}+iy\right)=$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+iy\right)}{\left(-n-\frac{1}{2}+iy\right)\left(-n+\frac{1}{2}+iy\right)\dots\left(-\frac{1}{2}+iy\right)}=O\left(\frac{e^{-A|y|}}{n!}\right),$$

так что интеграл, взятый вдоль прямой $\left(-n-\frac{1}{2}-i\infty,\ -n-\frac{1}{2}+i\infty\right)$, стремится к нулю при $n\to\infty$. Остальное следует из теоремы о вычетах.]

(V) Доказать, что при $0<c<k$, $0<a<1$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\Gamma(z)\Gamma(k-z)a^{-z}\,dz=\frac{\Gamma(k)}{(1+a)^k}.$$

4.4.3. Дзета-функция. Функция $\zeta(z)$, первоначально определенная рядом

$$\zeta(z)=\frac{1}{1^z}+\frac{1}{2^z}+\ldots\qquad(\operatorname{Re}(z)>1),\tag{1}$$

как было показано (§ 1.7.8 (II)), представляется также формулой

$$\zeta(z)=\frac{1}{\Gamma(z)}\int\limits_0^\infty\frac{w^{z-1}}{e^w-1}\,dw\qquad(\operatorname{Re}(z)>1).\tag{2}$$

Мы можем воспользоваться этой формулой для того, чтобы продолжить $\zeta(z)$ через прямую $x=1$ таким же образом, как мы продолжили $\Gamma(z)$ через прямую $x=0$. Действительно, в точности тем же методом можно доказать, что при $\operatorname{Re}(z)>1$

$$\zeta(z)=-\frac{1}{2i\sin z\pi\Gamma(z)}\int\limits_C\frac{(-w)^{z-1}}{e^w-1}\,dw,\tag{3}$$

где, как и раньше, контур C приходит из положительной бесконечности и один раз обходит начало в положительном направлении. Единственное различие состоит в том, что теперь он должен оставлять в своей внешней области все полюсы функции $1/(e^w-1)$, отличные от точки $w=0$, т. е. все точки $w=\pm 2i\pi$, $\pm 4i\pi$, ...

Пользуясь функциональным уравнением гамма-функции, мы можем представить эту формулу в виде

$$\zeta(z)=\frac{i\Gamma(1-z)}{2\pi}\int\limits_C\frac{(-w)^{z-1}}{e^w-1}\,dw.$$

Как и в случае функции Γ, контурный интеграл есть целая функция от z. Поэтому формула осуществляет продолжение функции $\zeta(z)$ на всю плоскость. Единственными возможными особыми точками являются полюсы функции $\Gamma(1-z)$, т. е. точки $z=1, 2, \ldots$ Но мы уже знаем, что функция $\zeta(z)$ регулярна при $z=2, 3, \ldots$ Следовательно, единственный возможный полюс есть точка $z=1$. Это действительно полюс, притом простой, с вычетом 1. В самом деле, при $z=1$ контурный интеграл, согласно теореме о вычетах, равен

$$\int\limits_C \frac{dw}{e^w-1} = 2\pi i,$$

а $\Gamma(1-z)$ имеет при $z=1$ простой полюс с вычетом -1.

Хорошо известно, что

$$\frac{1}{e^w-1} = \frac{1}{w} - \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} B_n w^{2n-1}}{(2n)!},$$

где B_n — рациональные числа (числа Бернулли). Пользуясь этим и теоремой о вычетах, можно вычислить $\zeta(-n)$ с любым положительным целым n. Вычисление дает:

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2}, \quad \zeta(-2m) = 0 \quad (m = 1,\ 2,\ \ldots),$$

$$\zeta(-2m-1) = \frac{(-1)^{m+1} B_{m+1}}{2m+2} \qquad (m = 0,\ 1,\ \ldots).$$

4.4.4. Функциональное уравнение дзета-функции. Функция ζ удовлетворяет функциональному уравнению

$$\zeta(1-z) = 2^{1-z}\pi^{-z} \cos\frac{1}{2}\pi z\,\Gamma(z)\,\zeta(z).$$

Чтобы доказать это, воспользуемся формулой (3) предыдущего параграфа, в которой теперь z может иметь любое значение, и продеформируем контур C в контур C_n, составленный из контура квадрата с центром в начале и сторонами, параллельными осям, длина каждой из которых равна $(4n+2)\pi$, и части вещественной оси от точки $(2n+1)\pi$ до $+\infty$. В процессе деформации мы пройдем через полюсы подынтегральной функции, расположенные в точках $2i\pi,\ 4i\pi,\ \ldots,\ 2ni\pi$ и $-2i\pi,\ \ldots,\ -2ni\pi$. Вычет относительно точки $2\nu i\pi$ с $\nu > 0$ равен

$$e^{(z-1)\left(\log 2\nu\pi - \frac{1}{2} i\pi\right)} = (2\nu\pi)^{z-1}\, i e^{-\frac{1}{2} i\pi z},$$

а вычет относительно точки $-2\nu i\pi$ равен

$$e^{(z-1)\left(\log 2\nu\pi + \frac{1}{2} i\pi\right)} = -(2\nu\pi)^{z-1}\, i e^{\frac{1}{2} i\pi z}.$$

Сумма этих двух вычетов равна $(2\nu\pi)^{z-1}\, 2\sin\frac{1}{2}\pi z$. Таким образом, формула (3) из § 4.4.3 дает:

$$\sin\pi z\,\Gamma(z)\,\zeta(z) = -\frac{1}{2i}\int\limits_{C_n} \frac{(-w)^{z-1}}{e^w-1}\,dw + 2\pi\sin\frac{1}{2}\pi z \sum_{\nu=1}^{n} (2\nu\pi)^{z-1}.$$

Пусть теперь $\operatorname{Re}(z) < 0$. На контуре квадрата

$$|(-w)^{z-1}| = e^{(x-1)\log|w| - y\arg(-w)} = O(n^{x-1})$$

и $|e^w-1|>A$, в то время как длина этого контура есть $O(n)$. Следовательно, соответствующая часть интеграла есть $O(n^x)$ и, значит, стремится к нулю. Остающаяся часть интеграла, очевидно, также стремится к нулю. Переходя к пределу при $n\to\infty$, мы получаем равенство

$$\sin\pi z\,\Gamma(z)\,\zeta(z)=2\pi\sin\frac{1}{2}\pi z\,(2\pi)^{z-1}\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu^{z-1}=$$
$$=2\pi\sin\frac{1}{2}\pi z\,(2\pi)^{z-1}\zeta(1-z),$$

равносильное доказываемому. Этим последнее установлено при $\mathrm{Re}(z)<0$ и, следовательно, для всех значений z.

4.4.5. Другое доказательство. Совершенно иначе проводится следующее доказательство *). Положим

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}. \tag{1}$$

Этот ряд ограниченно сходится, и $f(x)=(-1)^m\frac{1}{4}\pi$ при $m\pi<x<(m+1)\pi$ $(m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$; действительно,

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2nx}{2n},$$

так что мы можем сослаться на пример (II) § 1.7.6. Ограниченная сходимость позволяет умножить соотношение (1) на x^{p-1} $(0<p<1)$ и проинтегрировать почленно в любом конечном интервале $(0,\ X)$. Это дает:

$$\int_0^X x^{p-1}f(x)\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\int_0^X x^{p-1}\sin(2n+1)x\,dx. \tag{2}$$

Далее, мы можем заменить интервал $(0,\ X)$ интервалом $(0,\ \infty)$. Это вытекает из соотношения

$$\lim_{X\to\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\int_X^{\infty}x^{p-1}\sin(2n+1)x\,dx=0, \tag{3}$$

которое получается интегрированием по частям. Именно, послед-

---

*) Hardy [15].

ний интеграл равен

$$X^{p-1}\frac{\cos(2n+1)X}{2n+1}+\frac{p-1}{2n+1}\int\limits_X^\infty x^{p-2}\cos(2n+1)x\,dx=$$

$$=O\left(\frac{X^{p-1}}{2n+1}\right)+O\left(\frac{1}{2n+1}\int\limits_X^\infty x^{p-2}\,dx\right)=O\left(\frac{X^{p-1}}{2n+1}\right),$$

что и доказывает соотношение (3).

Вставляя теперь в формулу (2) значение $f(x)$ и вычисляя интегралы в правой части по § 3.1.2.7, мы получаем равенство

$$\frac{1}{4}\pi\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\int\limits_{m\pi}^{(m+1)\pi}x^{p-1}dx=\Gamma(p)\sin\frac{1}{2}p\pi\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^{p+1}}.$$

Ряд в правой части сходится к

$$(1-2^{-p-1})\,\zeta(p+1),$$

а ряд в левой части есть

$$\frac{\pi^p}{p}\left[1+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\{(m+1)^p-m^p\}\right].$$

Ряд в скобках сходится при вещественном $p<1$ и при комплексном p с $\operatorname{Re}(p)<1$, и как показывает небольшое уточнение предыдущих рассмотрений, его сходимость равномерна при $\operatorname{Re}(p)\leqslant 1-\delta<1$. Его сумма есть поэтому аналитическая функция от p, регулярная при $\operatorname{Re}(p)<1$. Но при вещественном $p<0$ она равна

$$2(1^p-2^p+3^p-\ldots)=2(1-2^{p+1})\,\zeta(-p).$$

Согласно теории аналитического продолжения она такова же вообще при $\operatorname{Re}(p)<1$.

Итак, при $0<p<1$

$$\frac{\pi^{p+1}}{2p}(1-2^{p+1})\,\zeta(-p)=\Gamma(p)\sin\frac{1}{2}p\pi\,(1-2^{-p-1})\,\zeta(p+1),$$

и, полагая $p=z-1$, мы получаем то же функциональное уравнение, что и выше. Доказательство проходит только при $1<z<2$, но результат, полученный для этих значений, сохраняет силу, согласно теории аналитического продолжения, для всех значений z.

4.5. Принцип отражения. *Пусть $f(x)$ — аналитическая функция, регулярная в области D, пересекающейся с вещественной осью, и вещественная на вещественной оси. Тогда $f(z)$ принимает в сопряженных точках сопряженные значения.*

Пусть z_0 — внутренняя точка области D, лежащая на вещественной оси. Тогда для достаточно малых значений $|z-z_0|$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n.$$

Все коэффициенты a_n вещественны. Действительно,

$$a_0=f(z_0), \quad a_1=f'(z_0), \ \ldots$$

Вещественность коэффициента a_0 очевидна. Коэффициент a_1 может быть вычислен как предел отношения $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ при $z \to z_0$ по вещественным значениям. Следовательно, и коэффициент a_1 является вещественным, и таким же образом вещественны все коэффициенты.

Этим в круге сходимости ряда сопряженность значений функции $f(z)$ в сопряженных точках установлена. В полном объеме теорема может быть получена теперь аналитическим продолжением. Действительно, степенные разложения вокруг сопряженных точек всегда будут иметь сопряженные коэффициенты.

4.5.1. Один из методов аналитического продолжения описывается «принципом отражения» Римана — Шварца. Этот принцип содержится в следующей теореме, которая является своего рода обращением предыдущей.

Предположим, что часть границы некоторой области D плоскости z есть прямолинейный отрезок l. Пусть $w=f(z)$ — аналитическая функция, регулярная в D и непрерывная на l, и пусть w пробегает в своей плоскости прямолинейный отрезок λ, когда z пробегает l. Пусть z_1 — образ точки z при отражении в l, и w_1 — образ точки w при отражении в λ. Тогда функция $w_1 = w_1(z_1)$ является аналитическим продолжением функции w.

Прежде всего, w_1 есть аналитическая функция от z_1. Действительно, нетрудно проверить, что если точке z' соответствует точка w' и z_1', w_1' — образы этих точек при отражениях, то $|z_1'-z_1| = |z'-z|$, $|w_1'-w_1|=|w'-w|$ и

$$\arg(z_1'-z_1)=2\alpha-\arg(z'-z), \quad \arg(w_1'-w_1)=2\beta-\arg(w'-w),$$

где α — угол между l и вещественной осью, а β — угол между λ и вещественной осью. Если теперь $z' \to z$, то существует предел $\lim\frac{w'-w}{z'-z}$, и следовательно, существуют оба предела *)

$$\lim\left|\frac{w'-w}{z'-z}\right|, \quad \lim\{\arg(w'-w)-\arg(z'-z)\}.$$

---

*) Второй предел может не существовать, если первый равен нулю, но тогда существование предела $\lim\frac{w_1'-w_1}{z_1'-z_1}$ очевидно: он равен нулю. (*Примечание переводчика.*)

Поэтому существуют пределы

$$\lim\left|\frac{w_1'-w_1}{z_1'-z_1}\right|, \quad \lim\{\arg(w_1'-w_1)-\arg(z_1'-z_1)\},$$

и с ними существует предел $\lim\frac{w_1'-w_1}{z_1'-z_1}$, а это и значит, что w_1 есть аналитическая функция от z_1.

Ясно далее, что $w_1=w$ на l.

Чтобы доказать, что эти функции являются аналитическими продолжениями друг друга, возьмем внутри l произвольную точку и опишем вокруг нее окружность C, столь малую, что ограничиваемый ею круг целиком покрывается областью D и ее образом D_1 при отражении в l. Пусть c — граница части этого круга, лежащей в D, и c_1 — граница части, лежащей в D_1. Пусть $\varphi(z)=w$ в части круга, лежащей в D, и $\varphi(z)=w_1$ в остальной части круга. Функция $\varphi(z)$ непрерывна, и достаточно доказать, что она аналитична.

Пусть z_0 — точка, лежащая внутри круга и внутри D. Тогда (см. конец § 2.3.5)

$$\varphi(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{\varphi(z)}{z-z_0}\,dz.$$

Так как функция $\frac{\varphi(z)}{z-z_0}$ регулярна в D_1, то

$$0=\frac{1}{2\pi i}\int_{c_1}\frac{\varphi(z)}{z-z_0}\,dz.$$

При сложении этих равенств интегралы, взятые вдоль l, сокращаются, и мы получаем формулу

$$\varphi(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\varphi(z)}{z-z_0}\,dz. \tag{1}$$

Ясно, что та же формула получится, если z_0 лежит внутри круга и внутри D_1, а так как обе части формулы (1) непрерывны, то она остается верной и в случае, когда z_0 есть внутренняя к C точка отрезка l. Поскольку правая часть этой формулы есть аналитическая функция от z_0, регулярная внутри C (ср. § 2.8), этим теорема доказана.

Метод доказательства в действительности дает более общую теорему: *если функции $f(z)$, $f_1(z)$ аналитичны и регулярны в областях D, D_1, разделенных контуром C, на котором они непрерывны и принимают одинаковые значения, то они являются аналитическими продолжениями друг друга.*

4.6. Мультипликационная теорема Адамара *). Следующая проблема, рассмотренная Адамаром, дает хороший пример применения принципов теории аналитического продолжения. Предположим, что ряд $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ сходится при $|z|<R$, что ряд $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ сходится при $|z|<R'$ и что особенности функций $f(z)$ и $g(z)$ известны. Что можно сказать об особенностях функции

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n, \tag{1}$$

у которой коэффициенты ряда являются произведениями коэффициентов предыдущих рядов?

Общая теорема состоит в том, что *если $f(z)$ имеет особые точки $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, а $g(z)$ — особые точки $\beta_1, \beta_2, \ldots$, то особые точки функции $F(z)$ находятся среди точек $\alpha_m\beta_n$.*

Предположим, чтобы рассмотреть простейший случай, что $f(z)$ имеет только одну особенность $z=\alpha$ и $g(z)$ — только одну особенность $z=\beta$.

Прежде всего, функция $F(z)$ регулярна при достаточно малых значениях z, а именно, при $|z|<RR'$. Действительно, если $\varepsilon>0$, то

$$|a_n(R-\varepsilon)^n|<K, \quad |b_n(R'-\varepsilon)^n|<K,$$

так что $|a_n b_n|<\frac{K}{\{(R-\varepsilon)(R'-\varepsilon)\}^n}$. Поскольку ε произвольно мало, радиус сходимости ряда (1) по меньшей мере равен RR'.

Теорема Адамара получается из интегральной формулы

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C f(w)\,g\left(\frac{z}{w}\right)\frac{dw}{w}, \tag{2}$$

где C — охватывающий начало контур, на котором $|w|<R$, $|z/w|<R'$. Чтобы доказать эту формулу, подставим в интеграл ряд

$$g\left(\frac{z}{w}\right)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n\left(\frac{z}{w}\right)^n$$

и произведем почленное интегрирование, которое возможно в силу равномерной сходимости. Мы получим:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(w)\,g\left(\frac{z}{w}\right)\frac{dw}{w}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n z^n}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)}{w^{n+1}}dw=\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n,$$

*) Hadamard [3].

что и требуется. Для того чтобы были выполнены неравенства $|w|<R$, $|z/w|<R'$, необходимо, конечно, неравенство $|z|<RR'$. Если оно выполнено, то в качестве C можно взять, например, любую окружность, лежащую между окружностями $|w|=R$ и $|w|=|z|/R'$.

В рассматриваемом простейшем случае, когда функции $f(z)$, $g(z)$ имеют по одной особой точке, $R=|\alpha|$, $R'=|\beta|$.

Продолжим теперь функцию $F(z)$ за пределы круга $|z|<RR'$ путем деформации контура C. Пока C остается фиксированным, z в формуле (2) может принимать любые значения, при которых $\frac{z}{\beta}$ остается внутри C. Действительно, по § 2.8.3 правая часть формулы (2) есть аналитическая функция от z для всех указанных значений z, откуда сразу получается продолжение функции $F(z)$ на все такие значения.

Пусть контур C деформируется в другой контур, C_1, охватывающий точку $z=0$ и не охватывающий точки $z=\alpha$. Положим

$$F_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} f(w)\,g\left(\frac{z}{w}\right)\frac{dw}{w}. \tag{3}$$

Согласно теореме Коши $F_1(z)=F(z)$, если только точка $w=z/\beta$ лежит внутри обоих контуров C, C_1. Действительно, подынтегральная функция регулярна, как функция от w, между C и C_1.

Итак, формула (3) обеспечивает продолжение функции $F(z)$ на все значения z, для которых $\frac{z}{\beta}$ лежит внутри C_1.

Единственное ограничение, наложенное на z, состоит поэтому в том, что точка z/β должна лежать внутри контура, не охватывающего точки $z=\alpha$. Но такой контур можно найти для любого значения z, кроме значения $z=\alpha\beta$.

Итак, функция $F(z)$ регулярна при $z\neq\alpha\beta$. Однако доказательство применимо только к одной ветви функции $F(z)$, которую мы можем назвать главной, именно к той, которая получается из начального элемента без обхода точки $\alpha\beta$.

В общем случае детали доказательства становятся, конечно, более сложными, но метод остается тем же.

Примеры. (I) Если $f(z)=\frac{1}{a-z}$, $g(z)=\frac{1}{b-z}$, то $F(z)=\frac{1}{ab-z}$.

(II) Если $f(z)=\frac{1}{1-z^2}$, $g(z)=\frac{z}{1-z^2}$, то $F(z)=0$, так что точки $\alpha\beta$ *не обязательно* являются особыми для $F(z)$.

4.7. Функции с естественными границами.

Положим

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!};$$

$f(z)$ есть аналитическая функция, регулярная при $|z|<1$. Пусть $z=re^{2p\pi i/q}$; рассмотрим поведение функции $f(z)$ при $r\to 1$. Мы можем написать:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{q-1} z^{n!}+\sum_{n=q}^{\infty} z^{n!}=f_1(z)+f_2(z).$$

$f_1(z)$ есть многочлен и при $r\to 1$ стремится к конечному пределу. Если $n\geqslant q$, то q есть делитель числа $n!$, так что $z^{n!}=r^{n!}$ и

$$f_2(z)=\sum_{n=q}^{\infty} r^{n!},$$

правая же часть при $r\to 1$ стремится к бесконечности. Следовательно, $f(z)\to\infty$ при $r\to 1$, а это означает, что $z=e^{2p\pi i/q}$ есть особая точка функции $f(z)$. Но точки этого рода лежат на единичной окружности всюду плотно, так что не существует дуги, на которой функция $f(z)$ регулярна. Поэтому продолжить функцию через единичную окружность невозможно, и, таким образом, единичная окружность является естественной границей функции.

Такое же заключение верно для функции

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$$

— мы полагаем $z=re^{2p\pi i/2^s}$ и рассуждаем как выше.

4.7.1. Ряд Ламберта*). Положим

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} d(n)\,z^n \qquad (|z|<1),$$

где $d(n)$ обозначает число делителей числа n. Мы покажем, что единичная окружность является естественной границей и этой функции.

Рассмотрим двойной ряд $\sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty} z^{\mu\nu}$. Если мы расположим его как простой степенной ряд, то получим $f(z)$, если же просуммируем его по строкам, то придем к равенству

$$f(z)=\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{z^{\mu}}{1-z^{\mu}} \qquad (|z|<1).$$

Это преобразование законно, так как при $|z|<1$ двойной ряд абсолютно сходится.

*) См. Кнопп [1].

Пусть $z = re^{2p\pi i/q}$, где p и q — взаимно простые целые числа, причем $p > 0$, а $q > 1$. Мы покажем, что при $r \to 1$

$$(1-r) f(z) \to \infty.$$

Мы можем написать

$$f(z) = \sum_1 \frac{z^\mu}{1-z^\mu} + \sum_2 \frac{z^\mu}{1-z^\mu},$$

где в первой сумме $\mu \equiv 0 \pmod q$, а вторая сумма распространена на все остальные значения μ. Если $\mu = mq$, то

$$z^\mu = (re^{2\pi i p/q})^{mq} = r^{mq},$$

так что

$$(1-r)\sum_1 = (1-r)\sum_{m=1}^{\infty} \frac{r^{mq}}{1-r^{mq}} = \frac{1-r}{1-r^q}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1-r^q}{1-r^{mq}} r^{mq} =$$

$$= \frac{1}{1+r+\ldots+r^{q-1}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{r^{mq}}{1+r^q+\ldots+r^{(m-1)q}} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{q} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{r^{mq}}{m} = \frac{1}{q} \log \frac{1}{1-r^q} \to \infty.$$

С другой стороны, если $\mu \not\equiv 0 \pmod q$, то

$$|1-z^\mu|^2 = |1 - r^\mu e^{2\pi i p\mu/q}|^2 =$$

$$= |1-r^\mu|^2 + 4r^\mu \sin^2 \frac{p\mu\pi}{q} \geqslant 4r^\mu \sin^2 \frac{\pi}{q}.$$

Таким образом,

$$\left|(1-r)\sum_2\right| \leqslant \frac{1-r}{2\sin(\pi/q)} \sum_{\mu=0}^{\infty} r^{\frac{1}{2}\mu} = \frac{1+\sqrt{r}}{2\sin(\pi/q)} \leqslant \frac{1}{\sin(\pi/q)}.$$

Следовательно, как и в предыдущих случаях, единичная окружность является естественной границей функции $f(z)$.

РАЗЛИЧНЫЕ ПРИМЕРЫ

1. Функция $f(z) = z - \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{3} z^3 - \ldots$ может быть продолжена на бóльшую область посредством ряда

$$\log 2 - \frac{1-z}{2} - \frac{(1-z)^2}{2 \cdot 2^2} - \frac{(1-z)^3}{3 \cdot 2^3} - \ldots$$

2. Степенные ряды

$$z + \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{3} z^3 + \ldots$$

и

$$i\pi-(z-2)+\frac{1}{2}(z-2)^2-\frac{1}{3}(z-2)^3+\ldots$$

не имеют никакой общей области сходимости, но представляют аналитические продолжения одной и той же функции.

3. Функции, определенные рядами

$$1+az+a^2z^2+\ldots$$

и

$$\frac{1}{1-z}-\frac{(1-a)z}{(1-z)^2}+\frac{(1-a)^2z^2}{(1-z)^3}-\ldots,$$

являются аналитическими продолжениями друг друга.

4. Если $f(z)$ и $g(z)$ — целые функции, то интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int\left\{\frac{f(w)}{w-z}+\frac{zg\left(\frac{1}{w}\right)}{zw-w^2}\right\}dw,$$

взятый вдоль единичной окружности, представляет $f(z)$ внутри нее и $g(1/z)$ вне ее.

5. Пусть $F(\alpha,\ \beta;\ \gamma;\ z)$ обозначает ряд

$$1+\frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}z+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot2\cdot\gamma(\gamma+1)}z^2+\ldots$$

Показать: что ряды

$$f(z)=F(a,\ 1;\ c;\ z)$$

и

$$g(z)=\frac{1}{1-z}F\left(c-a,\ 1;\ c;\ \frac{z}{z-1}\right)$$

имеют некоторую общую область сходимости; что в этой области сумма каждого из этих рядов удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$z(1-z)\frac{d^2u}{dz^2}+\{c-(a+2)z\}\frac{du}{dz}-au=0;$$

что $f(0)=g(0)$ и $f'(0)=g'(0)$; что, следовательно, функции $f(z)$ и $g(z)$ являются аналитическими продолжениями друг друга.

6. Функция $\dfrac{1}{\sqrt{2-z}+1}$ допускает около точки $z=0$ два степенных разложения с радиусами сходимости 1 и 2.

7. Рассмотреть особенности функций

$$\exp\left\{\frac{1}{\sqrt{2-z}+1}\right\},\quad \log\left\{\frac{1}{\sqrt{2-z}+1}\right\}.$$

8. Показать, что формулы (2) § 4.4, которые были доказаны там для вещественных значений x и y, остаются верными при любых комплексных значениях x и y, удовлетворяющих условию $|\operatorname{Im}(y)|<\operatorname{Re}(x)$.

9. Доказать, что

$$\Gamma(z)=\int_1^\infty e^{-w}w^{z-1}\,dw+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,(z+n)},$$

и заново установить этим путем аналитические свойства функции $\Gamma(z)$.

10. Доказать, что при $0 < \operatorname{Re}(z) < 1$

$$\int_0^\infty t^{z-1} \cos t \, dt = \Gamma(z) \cos \frac{1}{2} \pi z$$

и что при $-1 < \operatorname{Re}(z) < 1$

$$\int_0^\infty t^{z-1} \sin t \, dt = \Gamma(z) \sin \frac{1}{2} \pi z.$$

11. Доказать, что при $0 < \operatorname{Re}(z) < 1$

$$\zeta(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty w^{z-1} \left(\frac{1}{e^w - 1} - \frac{1}{w} \right) dw$$

и что при $-1 < \operatorname{Re}(z) < 0$

$$\zeta(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty w^{z-1} \left(\frac{1}{e^w - 1} - \frac{1}{w} + \frac{1}{2} \right) dw.$$

[Рассмотреть соответствующие контурные интегралы как в § 4.4.3.]

12. Вывести функциональное уравнение дзета-функции из первой формулы примера 11 и формулы примера 10 главы III (см. гл. III, Различные примеры).

13. Вывести функциональное уравнение дзета-функции из второй формулы примера II и примера III § 3.2.2.

14. Функция $L(z)$ определяется при $\operatorname{Re}(z) > 1$ формулой $L(z) = \frac{1}{1^z} - \frac{1}{3^z} + \frac{1}{5^z} - \ldots$ Показать, что $L(z)$ есть целая функция от z, удовлетворяющая функциональному уравнению

$$L(1-z) = 2^z \pi^{-z} \sin \frac{1}{2} \pi z \, \Gamma(z) \, L(z).$$

15. Пусть функция $f(z)$ определяется при $|z| < 1$ формулой $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)^s}$ $(s > 0)$. Показать, что

$$f(z) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t - z} \, dt$$

и что, следовательно, функция $f(z)$ регулярна всюду, за возможным исключением положительной части вещественной оси.

Деформируя интервал интегрирования в надлежащую кривую, показать, что главная ветвь функции $f(z)$ регулярна всюду, за исключением точки $z = 1$.

16. Показать, что особенности главной ветви функции $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n z^n}{(n+1)^s}$ одни и те же для всех вещественных значений s.

17. Функции $f(x)$ и $g(x)$ связаны при вещественных значениях x соотношениями

$$f(x)=\sum_{-\infty}^{\infty} e^{ixt}g(t)\,dt, \quad g(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt}f(t)\,dt.$$

Показать, что не существует конечного интервала, вне которого $(x)=0$, $g(x)=0$, если только обе функции не равны нулю всюду.

[Если $f(x)=0$ при $x<a$ и при $x>b$, то функция $g(x)$ аналитична.]

18. Пусть $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$. Показать, что

$$f(z)=f(z^2)+z,$$

и вывести из этого, что окружность $|z|=1$ является естественной границей функции.

19. Если α — вещественное иррациональное число, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n\left(z-e^{2in\alpha\pi}\right)}$$

представляет две различные аналитические функции, одну в единичном круге, другую вне его, и единичная окружность является естественной границей каждой из этих функций. Если α — рациональное число, то ряд представляет единственную рациональную функцию. [В первом случае функция не ограничена, когда $z\to e^{2in\alpha\pi}$ вдоль радиуса-вектора.]

20. Для функции $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^z+n}\right)$ прямая $\operatorname{Re}(z)=1$ является естественной границей.

[Каждая точка этой прямой является предельной для нулей.]

21. Пусть $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ($|z|<1$) и $\varphi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n z^n}{n!}$. Тогда интеграл

$$F(z)=\int_0^{\infty} e^{-t}\varphi(zt)\,dt$$

осуществляет продолжение функции $f(z)$ через каждую дугу границы круга сходимости, на которой эта функция регулярна.

[Это — метод продолжения Бореля *). Прежде всего, $F(z)=f(z)$ всюду, где ряд для $f(z)$ сходится; действительно, согласно § 1.7.9 мы можем ввести ряд для $f(z)$ под знак интеграла и произвести почленное интегрирование. Далее, если функция $f(z)$ может быть как-либо продолжена, то $F(z)$ существует в большей области. Действительно, пусть z — регулярная точка для $f(z)$. Мы можем написать (ср. § 4.6):

$$\varphi(zt)=\frac{1}{2\pi i}\int_C f(w)\,e^{\frac{zt}{w}}\,\frac{dw}{w},$$

где C — контур, охватывающий начало и не охватывающий особенностей функции $f(w)$. Следовательно,

$$|\varphi(zt)|<Ke^{Mt},$$

*) См. Borel, *Leçons sur les séries divergentes*, стр. 94.

где K не зависит от z и t, а M есть максимум функции $\mathrm{Re}\,(z/w)$ для всех значений w на C. Для доказательства сходимости интеграла, представляющего $F(z)$, нам нужно неравенство $M<1$. Если точка w лежит вне круга с центром $\frac{1}{2}z$ и радиусом $\frac{1}{2}|z|$, то $\mathrm{Re}\,(z/w)<1$, и мы берем в качестве C окружность с центром $\frac{1}{2}z$ несколько большего радиуса, скажем $\frac{1}{2}|z|+\delta$; на нем $M=\frac{|z|}{|z|+\delta}$. Контур C не должен охватывать особенностей функции $f(w)$, и он не будет их охватывать, если z лежит в области D, построенной следующим образом. Через каждую особую точку функции $f(w)$ мы проводим прямую, перпендикулярную прямой, соединяющей эту точку с началом. D есть область, ограниченная этими прямыми. Ясно, что она содержит единичный круг, и нетрудно проверить, что все наши условия выполнены, если z лежит внутри D и δ достаточно мало. Теперь уже легко доказать, что интеграл Бореля продолжает $f(z)$ на всю область D.]

22. Проверить теорему Бореля для функций

$$\frac{1}{1-z}, \quad \frac{1}{1-z^2}, \quad \frac{1}{1-z^4}.$$

ГЛАВА V

ТЕОРЕМА О МАКСИМУМЕ МОДУЛЯ

5.1. Теорема о максимуме модуля. Пусть $f(z)$ — аналитическая функция, регулярная в некоторой области D и на ее границе C, которую мы предположим простым замкнутым контуром. Тогда функция $|f(z)|$ непрерывна, так как

$$||f(z+h)|-|f(z)|| \leqslant |f(z+h)-f(z)|$$

и правая часть стремится к нулю вместе с h. Следовательно, $|f(z)|$ имеет максимальное значение, которое достигается по крайней мере в одной точке. Основная теорема этой главы состоит в том, что $|f(z)|$ достигает своего максимума не в какой-либо внутренней точке области D, а на ее границе C. Мы можем сказать, таким образом, что *если* $|f(z)| \leqslant M$ *на* C, *то то же неравенство верно во всех точках области* D.

Вот более точная формулировка теоремы.

Если $f(z)$ — *не постоянная и* $|f(z)| \leqslant M$ *на* C, то $|f(z)| < M$ *во всех внутренних точках области* D.

Мы дадим несколько доказательств этой теоремы.

5.1.1. Первое доказательство. Оно опирается на лемму: *если функция* $\varphi(x)$ *непрерывна,* $\varphi(x) \leqslant k$ *и*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(x)\,dx \geqslant k, \tag{1}$$

то $\varphi(x)=k$. Доказательство леммы: если $\varphi(\xi)<k$, то существует целый интервал $(\xi-\delta, \xi+\delta)$, в котором $\varphi(x) \leqslant k-\varepsilon$ с $\varepsilon>0$; но тогда

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx \leqslant 2\delta(k-\varepsilon)+(b-a-2\delta)k=(b-a)k-2\delta\varepsilon,$$

что противоречит неравенству (1).

Чтобы доказать теорему, предположим, что $|f(z)|$ принимает в некоторой внутренней точке z_0 области D значение, не меньшее любого другого своего значения. Пусть Γ — окружность с центром

z_0, лежащая целиком в D. Тогда

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz. \tag{2}$$

Полагая $z - z_0 = re^{i\theta}$, $\frac{f(z)}{f(z_0)} = \rho e^{i\varphi}$ (ρ и φ — функции от θ), мы можем представить формулу (2) в виде

$$1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho e^{i\varphi} d\theta. \tag{3}$$

Следовательно, $1 \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho\, d\theta$. Но, согласно предположениям, $\rho \leqslant \leqslant 1$, так что, в силу леммы, $\rho = 1$ для всех значений θ.

Переходя теперь в равенстве (3) к вещественным частям, мы видим, что $1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos\varphi\, d\theta$, так что, в силу леммы, $\cos\varphi = 1$. Следовательно, $f(z) = f(z_0)$ на Γ, а потому и всюду, т. е. $f(z)$ есть постоянная.

5.1.2. Второе доказательство. В принципе оно сходно с первым, но вместо интеграла Коши мы пользуемся тем фактом (§ 2.5), что если $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, то

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}.$$

В тех же предположениях, что и выше, левая часть не превышает $|f(z_0)|^2$, т. е. $|a_0|^2$. Таким образом,

$$|a_0|^2 + |a_1|^2 r^2 + |a_2|^2 r^4 + \ldots \leqslant a_0^2$$

при некотором положительном значении r. Следовательно, $a_1 = = a_2 = \ldots = 0$, т. е. $f(z)$ есть постоянная.

5.1.3. Третье доказательство. Если z_0 — внутренняя точка области D, то мы можем разложить функцию $f(z)$ в степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ с положительным радиусом сходимости. Полагая затем $z - z_0 = re^{i\theta}$, $a_n = A_n e^{i\alpha_n}$, мы можем написать:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n e^{i(\alpha_n + n\theta)}.$$

Таким образом,

$$|f(z)|^2=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}A_mA_nr^{m+n}e^{i(\alpha_m+m\theta-\alpha_n-n\theta)}. \quad (1)$$

Предположим сначала, что $a_0\neq 0$. Так как ряд абсолютно сходится, то его можно расположить по степеням r и полученный степенной ряд будет иметь положительный радиус сходимости. Пусть k — наименьшее из положительных значений n, для которых $a_n\neq 0$. Тогда

$$|f(z)|^2=A_0^2+2A_0A_kr^k\cos(\alpha_0-\alpha_k-k\theta)+\sum_{n=k+1}^{\infty}c_nr^n, \quad (2)$$

причем $|c_n|<c^n$ для некоторого c. Следовательно,

$$\left|\sum_{n=k+1}^{\infty}c_nr^n\right|<\sum_{n=k+1}^{\infty}c^nr^n=\frac{c^{k+1}r^{k+1}}{1-cr},$$

а это при достаточно малом r меньше, чем $A_0A_kr^k$. При таком значении r разность $|f(z)|^2-A_0^2$ принимает как положительные, так и отрицательные значения, когда θ изменяется от 0 до 2π (средний член в правой части равенства (2) меняется между $-2A_0A_kr^k$ и $2A_0A_kr^k$). Следовательно, A_0 не есть ни максимум, ни минимум функции $|f(z)|$.

Доказательство не проходит, если не существует отличного от нуля коэффициента a_n с $n>0$. Но тогда $f(z)=a_0$ для всех значений z.

Наконец, если $a_0=0$, то $|f(z_0)|=0$. Это значение не может быть максимумом: оно является минимумом.

Этим теорема доказана. Между прочим, мы доказали, что $|f(z)|$ *не может иметь в D минимума, отличного от нуля.* Это можно доказать также, применяя теорему о максимуме к функции $1/f(z)$.

5.1.4. Гармонические функции. Соответствующая теорема о гармонических функциях состоит в том, что *функция, гармоническая и не постоянная в некоторой области, не может иметь максимума во внутренней точке этой области.* Действительно, пусть u — вещественная часть функции $f(z)$. Если u имеет максимум в некоторой внутренней точке, то этим же свойством обладает и e^u, т. е. модуль $|e^{f(z)}|$ аналитической функции $e^{f(z)}$. Но уже было доказано, что это невозможно.

Теорема может быть доказана также рассуждением, сходным с изложенным в § 5.1.3. Мы опишем его общий ход, не вдаваясь во все детали. Пусть $u(x, y)$ — вещественная часть аналитической функции $f(z)=\sum a_nz^n$, регулярной при $z=0$. Тогда

$$u(x, y)=\mathrm{Re}\sum a_n(x+iy)^n,$$

и мы получаем для $u(x, y)$ двойной степенной ряд. Его коэффициенты — те же, что и в теореме Тейлора, т. е.

$$u(x, y)-u(0, 0)=u_x x+u_y y+\frac{1}{2}(u_{xx}x^2+2u_{xy}xy+u_{yy}y^2)+\ldots$$

Необходимое условие максимума состоит в том, что $u_x=u_y=0$. Но так как $u(x, y)$ — гармоническая функция, то $u_{xx}+u_{yy}=0$. Следовательно, u_{xx} и u_{yy} имеют противоположные знаки, и мы можем сделать разность $u(x, y)-u(0, 0)$ сначала положительной, а затем отрицательной, беря сначала $x=0$ и значение y малым, а затем $y=0$ и значение x малым.

Примеры. (I) Пусть функция $f(z)$ регулярна при $|z|\leqslant a$ и $|f(z)|>m$ на окружности $|z|=a$. Если $|f(0)|<m$, то $f(z)$ имеет по крайней мере один нуль в круге $|z|<a$.

[Действительно, $|f(z)|$ имеет минимум внутри круга, и этот минимум должен быть равен нулю.]

(II) Воспользоваться предыдущим примером для доказательства того, что всякое алгебраическое уравнение имеет корень.

5.1.5. Теорема о максимуме модуля верна также для функции $f(z)$, которая регулярна, но не однозначна в области, если только функция $|f(z)|$ однозначна (пример: $f(z)=\sqrt{z}$ в кольцевой области, окружающей начало). Действительно, предыдущее доказательство сохраняет силу для любой ветви такой функции.

5.1.6. Пусть $f(z)$ — аналитическая функция, регулярная при $|z|<R$, и пусть $M(r)$ обозначает максимум $|f(z)|$ при $|z|=r$. *Тогда $M(r)$ есть монотонно возрастающая функция от r при $r<R$.* Действительно, из предыдущей теоремы сразу следует, что $M(r_1)\leqslant M(r_2)$, если $r_1<r_2$, и что $M(r_1)$ может равняться $M(r_2)$ только в случае, когда $f(z)$ — постоянная.

Подобным же образом функция $A(r)$, определенная в 2.5.3 как максимум функции $\operatorname{Re} f(z)$ при $|z|=r$, есть возрастающая функция от r. Действительно,

$$e^{A(r)}=\max_{|z|=r}|e^{f(z)}|.$$

5.2. Лемма Шварца. Теорема Витали. Теорема Монтеля. *Пусть $f(z)$ — аналитическая функция, регулярная при $|z|\leqslant R$. Если $|f(z)|\leqslant M$ при $|z|=R$ и $f(0)=0$, то*

$$|f(re^{i\theta})|\leqslant\frac{Mr}{R}\qquad(0\leqslant r\leqslant R).$$

Это предложение известно как лемма Шварца.

Положим $\varphi(z)=f(z)/z$. Функция $\varphi(z)$ регулярна при $|z|\leqslant R$, и $|\varphi(z)|\leqslant M/R$ на окружности $|z|=R$. То же неравенство верно поэтому и внутри круга. Поскольку $|\varphi(z)|=|f(z)|/r$, этим лемма доказана.

5.2.1. Теорема Витали о сходимости*). *Пусть $f_1(z)$, $f_2(z)$, ... — последовательность функций, регулярных в некоторой области D, и пусть $|f_n(z)| \leqslant M$ для любого n и любой точки z в D. Если эта последовательность сходится на некотором множестве точек, имеющем предельную точку внутри D, то она равномерно сходится во всякой области, внутренней к D, так что предел есть аналитическая функция от z.*

Достаточно рассмотреть случай, когда D — круг, а предельная точка — его центр. Действительно, если в этом случае теорема верна, то в общем случае равномерная сходимость гарантирована в некотором внутреннем к D круге с центром в предельной точке. Это заключение можно повторить, приняв произвольную точку круга за центр нового круга, и, таким образом, тем же методом, каким мы пользовались в теории аналитического продолжения, можно доказать, что всякая область, ограниченная контуром, внутренним к D, есть область равномерной сходимости.

Примем предельную точку за начало. Пусть R — радиус круга D. Пусть

$$f_n(z) = a_{0,n} + a_{1,n}z + \ldots \qquad (|z| \leqslant R). \tag{1}$$

Тогда $|f_n(z) - f_n(0)| \leqslant |f_n(z)| + |f_n(0)| \leqslant 2M$. Но $f_n(z) - f_n(0)$ есть нуль при $z = 0$, так что, в силу леммы Шварца,

$$|f_n(z) - f_n(0)| \leqslant 2M|z|/R, \qquad (|z| \leqslant R).$$

Пусть z' $(\neq 0)$ — точка, в которой последовательность сходится. Тогда

$$|f_n(0) - f_{n+m}(0)| \leqslant |f_n(0) - f_n(z')| + |f_n(z') - f_{n+m}(z')| + \\ + |f_{n+m}(z') - f_{n+m}(0)| \leqslant \frac{4M|z'|}{R} + |f_n(z') - f_{n+m}(z')|.$$

Мы можем выбрать z' таким образом, чтобы первый член справа был произвольно мал. Затем, так как $f_n(z')$ стремится к некоторому пределу, мы можем выбрать n столь большим, чтобы второй член был произвольно мал для всех положительных значений m. Следовательно, $f_n(0)$, т. е. $a_{0,n}$, стремится к некоторому пределу, скажем a_0.

Рассмотрим теперь функцию

$$g_n(z) = \frac{f_n(z) - a_{0,n}}{z} = a_{1,n} + a_{2,n}z + \ldots$$

Она также стремится к некоторому пределу в точке z', поскольку, как мы только что показали, $a_{0,n}$ имеет предел. Далее,

$$|g_n(z)| \leqslant 2M/R$$

---

*) Доказательство принадлежит Йенчу; см. Jentzsch [1].

при $|z|=R$, а потому и при $|z|<R$. Таким образом, функции $g_n(z)$ удовлетворяют тем же условиям, что и функции $f_n(z)$ (если не считать *значения* их верхней грани), и, следовательно, $a_{1,n}$ стремится к некоторому пределу, скажем a_1. Подобным же образом $a_{\nu,n}$ стремится к некоторому пределу при любом значении ν.

Наконец, сходимость ряда (1) равномерна относительно n и z при $|z|\leqslant R-\varepsilon$. Действительно, в силу неравенства Коши, $|a_{\nu,n}|\leqslant M/R^\nu$, так что $|a_{\nu,n}z^n|\leqslant M((R-\varepsilon)/R)^\nu$ при $|z|\leqslant R-\varepsilon$. Следовательно, сумма ряда равномерно стремится к пределу вместе с его членами. Этим теорема доказана.

5.2.2. *Из всякой последовательности функций, регулярных и ограниченных в D в смысле предыдущей теоремы, можно выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся в каждой области, внутренней к D.*

Пусть $f_1(z)$, $f_2(z)$, ... — заданная последовательность функций, и пусть $|f_n(z)|\leqslant M$ в D. Пусть z_1, z_2, ... — последовательность точек, имеющих предельную точку внутри D. Все точки $w_n=f_n(z_1)$ лежат внутри круга $|w|\leqslant M$ плоскости w; следовательно, они имеют по крайней мере одну предельную точку, т. е. существует такая последовательность значений n, скажем n_1, n_2, ..., что последовательность функций

$$f_{n_1}(z),\ f_{n_2}(z),\ \ldots \tag{1}$$

сходится в точке z_1.

Подобным же образом из этой последовательности можно выбрать последовательность $f_{p_1}(z)$, $f_{p_2}(z)$, ..., сходящуюся в точке z_2, из нее — подпоследовательность $f_{q_1}(z)$, $f_{q_2}(z)$, ..., сходящуюся в точке z_3, и т. д.

Рассмотрим последовательность

$$f_{n_1}(z),\ f_{p_2}(z),\ f_{q_3}(z),\ \ldots,$$

образованную диагональными членами таблицы, составленной из предыдущих последовательностей. Каждая из этих диагональных функций принадлежит последовательности (1), и потому диагональная последовательность сходится в точке z_1; каждая функция, начиная со второй, принадлежит последовательности (2), и потому диагональная последовательность сходится в точке z_2; и т. д. Таким образом, диагональная последовательность сходится в каждой из точек z_1, z_2, ... В силу теоремы Витали она равномерно сходится поэтому в каждой области, внутренней к D.

5.2.3. Теорема Монтеля*). *Пусть $f(z)$ — аналитическая функция от z, регулярная в полуполосе S, определенной неравенствами $a<x<b$, $y>0$. Если функция $f(z)$ ограничена в S и при некотором фиксированном значении ξ переменного x (заключенном*

*) Montel [1], Hardy [18], Bohr [4].

между a и b) стремится к пределу l, когда $y \to \infty$, то $f(z)$ стремится к l на каждой полупрямой $x = x_0$ $(a < x_0 < b)$; при $a + \delta \leqslant x \leqslant b - \delta$ это стремление равномерно.

Рассмотрим в прямоугольнике R, определенном неравенствами $a < x < b$, $0 < y < 2$, последовательность функций $f_n(z) = f(z + in)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Так как $f_n(z) \to l$ в каждой точке отрезка $x = \xi$, то, согласно теореме Витали, $f_n(z) \to l$ равномерно в каждой области, внутренней к R, и, в частности, в прямоугольнике $a + \delta \leqslant x \leqslant b - \delta$, $1/2 \leqslant y \leqslant 3/2$. Этим теорема доказана.

Эту теорему можно перенести на другие области посредством конформных преобразований. Положим, например, $z = i \log w$. Тогда рассмотренная полоса плоскости z превратится в угол плоскости w, и теорема утверждает, что если аналитическая функция $\varphi(w)$ ограничена в угле $\alpha < \arg w < \beta$ и $\varphi(w) \to l$, когда $w \to \infty$ вдоль некоторой полупрямой $\arg w = \text{const}$, лежащей в этом угле, то $\varphi(w) \to l$ равномерно в каждом угле $\alpha + \delta \leqslant \arg w \leqslant \beta - \delta$.

5.2.4. Следующая теорема дает представление о другом направлении, в котором может быть применена теорема о максимуме модуля.

Пусть функция $f(z)$ регулярна в круге $|z - a| \leqslant R$, и пусть в нем $|f(z)| \leqslant M$ и $f(a) \neq 0$. Тогда число нулей функции $f(z)$ в круге $|z - a| \leqslant \frac{1}{3} R$ не превосходит $A \log \frac{M}{|f(a)|}$.

Мы можем считать, что $a = 0$. Пусть $z_1, z_2, \ldots, z_n$ — нули функции $f(z)$ при $|z| \leqslant \frac{1}{3} R$. Положим

$$g(z) = f(z) \prod_{m=1}^{n} \left(1 - \frac{z}{z_m}\right)^{-1}.$$

Функция $g(z)$ регулярна при $|z| \leqslant R$, и если $|z| = R$, то $\left|\frac{z}{z_m}\right| \geqslant 3$ $(m = 1, 2, \ldots, n)$. Следовательно,

$$|g(z)| \leqslant M \prod_{m=1}^{n} (3 - 1)^{-1} = 2^{-n} M$$

при $|z| = R$, а потому и при $|z| < R$. В частности, это верно при $z = 0$. Поскольку $g(0) = f(0)$, мы видим, что $|f(0)| \leqslant 2^{-n} M$, и, следовательно,

$$n \leqslant \frac{1}{\log 2} \log \frac{M}{|f(0)|}.$$

Это и есть оценка, которую мы хотели получить.

Множитель 1/3 может быть, конечно, заменен любым числом, меньшим 1/2. Более полный результат можно извлечь из теоремы

Иенсена (§ 3.6.1). Если $r_1, r_2, \ldots, r_N$ — нули в круге $|z| \leqslant R$, то

$$\log \frac{R^N}{r_1 r_2 \ldots r_N} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\theta})| \, d\theta - \log |f(0)| \leqslant \log M - \log |f(0)|.$$

Пусть $r_1, r_2, \ldots, r_n$ — нули в круге $|z| \leqslant \delta R$, где $0 < \delta < 1$. Тогда левая часть не меньше, чем

$$\log \frac{R^n}{r_1 r_2 \ldots r_n} \geqslant \log \left(\frac{1}{\delta}\right)^n = n \log \frac{1}{\delta}.$$

Следовательно, $n \leqslant \dfrac{1}{\log \frac{1}{\delta}} \log \dfrac{M}{|f(0)|}$.

5.3. Теорема Адамара о трех окружностях. *Пусть $f(z)$ — однозначная аналитическая функция, регулярная при $r_1 < |z| < r_3$. Пусть $r_1 < r_2 < r_3$ и пусть M_1, M_2, M_3 — максимумы функции $|f(z)|$ на окружностях $|z| = r_1$, $|z| = r_2$, $|z| = r_3$. Тогда*

$$M_2^{\log (r_3/r_1)} \leqslant M_1^{\log (r_3/r_2)} M_3^{\log (r_2/r_1)}. \tag{1}$$

Положим $\varphi(z) = z^{\lambda} f(z)$, где λ — постоянная, которая будет определена позже. Функция $\varphi(z)$ регулярна в кольцевой области $r_1 < |z| < r_3$, и функция $|\varphi(z)|$ однозначна. Следовательно, максимум функции $|\varphi(z)|$ достигается на одной из граничных окружностей, т. е.

$$|\varphi(z)| \leqslant \max (r_1^{\lambda} M_1, r_3^{\lambda} M_3).$$

Следовательно, на окружности $|z| = r_2$

$$|f(z)| \leqslant \max (r_1^{\lambda} r_2^{-\lambda} M_1, \ r_3^{\lambda} r_2^{-\lambda} M_3). \tag{2}$$

Выберем теперь λ наиболее выгодным образом. Это произойдет, если мы сделаем стоящие в скобках выражения равными, т. е. определим λ уравнением $r_1^{\lambda} M_1 = r_3^{\lambda} M_3$. Таким образом, $\lambda = -\dfrac{\log(M_3/M_1)}{\log(r_3/r_1)}$. При этом значении λ неравенство (2) означает, что

$$M_2 \leqslant (r_2/r_1)^{-\lambda} M_1.$$

Следовательно,

$$M_2^{\log (r_3/r_1)} \leqslant \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{\log (M_3/M_1)} M_1^{\log (r_3/r_1)} = M_1^{\log (r_3/r_2)} M_3^{\log (r_2/r_1)},$$

что и утверждалось.

Заметим, что равенство может встретиться только в случае, когда $\varphi(z)$ есть постоянная, т. е. когда $f(z)$ есть постоянная, умноженная на некоторую степень z.

5.3.1. Выпуклые функции. Функция $\varphi(x)$ действительного переменного x называется *выпуклой вниз* или просто *выпуклой*, если в любом интервале (x_1, x_2) кривая $y=\varphi(x)$ лежит под хордой, соединяющей точки $\{x_1, \varphi(x_1)\}$, $\{x_2, \varphi(x_2)\}$. Аналитически это условие означает, что

$$\varphi(x) < \frac{x_2-x}{x_2-x_1}\varphi(x_1) + \frac{x-x_1}{x_2-x_1}\varphi(x_2) \qquad (x_1 < x < x_2). \tag{1}$$

Функция называется выпуклой в широком смысле, если допускается и равенство.

Выпуклая функция непрерывна. Действительно, при $x \to x_1$ неравенство (1) показывает, что $\varphi(x_1+0) \leqslant \varphi(x_1)$, а при $x_2 \to x$ — что $\varphi(x) \leqslant \varphi(x+0)$. Следовательно, $\varphi(x) = \varphi(x+0)$ для всех значений x, и точно так же $\varphi(x-0) = \varphi(x)$ для всех значений x. Таким образом, функция непрерывна.

Полагая в неравенстве (1) $x = \frac{1}{2}(x_1+x_2)$, мы получаем неравенство

$$\varphi\left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2\right) < \frac{1}{2}\{\varphi(x_1) + \varphi(x_2)\}. \tag{2}$$

Это условие принимают иногда за определение выпуклости *) вместо неравенства (1). Оно менее ограничительно, чем определение, принятое нами, и из него не следует непрерывность.

Одно из достаточных условий выпуклости функции $\varphi(x)$ состоит в том, что $\varphi''(x) > 0$. Действительно, при этом условии $\varphi'(x)$ возрастает, так что

$$\frac{1}{x-x_1}\int_{x_1}^{x} \varphi'(t)\,dt < \varphi'(x) < \frac{1}{x_2-x}\int_{x}^{x_2} \varphi'(t)\,dt \qquad (x_1 < x < x_2),$$

а это дает неравенство (1).

5.3.2. Теорема о трех окружностях как теорема о выпуклости. Теорему Адамара о трех окружностях можно переформулировать, сказав, что $\log M(r)$ *есть выпуклая функция от* $\log r$. Действительно, ее можно представить в виде

$$\log M(r_2) \leqslant \frac{\log r_3 - \log r_2}{\log r_3 - \log r_1}\log M(r_1) + \frac{\log r_2 - \log r_1}{\log r_3 - \log r_1}\log M(r_3);$$

знак равенства появляется только в случае, когда функция есть постоянная, умноженная на некоторую степень z.

---

*) См., например, Полиа и Сеге, Задачи и теоремы из анализа, ч. I, стр. 75.

5.4. Средние значения функции $|f(z)|$. Средние значения

$$I_1(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|\,d\theta,\qquad I_2(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^2 d\theta$$

обладают свойствами, подобными свойствам функции $M(r)$.

5.4.1. *$I_2(r)$ монотонно возрастает вместе с r, и $\log I_2(r)$ есть выпуклая функция от $\log r$.*

Пусть $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$. То, что $I_2(r)$ монотонно возрастает, видно из формулы (см. § 2.5)

$$I_2(r)=\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2r^{2n}.$$

Чтобы доказать выпуклость, положим $u=\log r$, и пусть I_2', I_2'' обозначают производные по u. Тогда

$$\frac{d^2}{du^2}(\log I_2)=\frac{I_2I_2''-I_2'^2}{I_2^2},$$

в силу же неравенства Шварца

$$I_2'^2=\left(\sum|a_n|^2\,2ne^{2nu}\right)^2\leqslant\left(\sum|a_n|^2e^{2nu}\right)\left(\sum|a_n|^2\,4n^2e^{2nu}\right)=I_2I_2'',$$

что и требовалось *).

5.4.2. *$I_1(r)$ монотонно возрастает вместе с r, и $\log I_1(r)$ есть выпуклая функция от $\log r$.*

Это можно доказать методом, подобным тому, которым мы доказали предыдущую теорему **), но доказательство не столь просто, поскольку не существует простого выражения функции I_1 через коэффициенты a_n. Мы применим совсем другой метод ***).

Пусть $0<r_1<r_2<r_3$. Определим функции $k(\theta)$ и $F(z)$ формулами

$$k(\theta)f(r_2e^{i\theta})=|f(r_2e^{i\theta})|\qquad(0\leqslant\theta\leqslant2\pi),$$

$$F(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(ze^{i\theta})\,k(\theta)\,d\theta.$$

---

*) В силу известного свойства неравенства Коши — Шварца оно превращается здесь в равенство только в случае, когда $f(z)=az^k$, где k — неотрицательное целое число. В этом случае $\log I_2(r)$ есть линейная функция от $\log r$. В остальных случаях производная $\frac{d^2}{du^2}\log I_2$ строго положительна и $\log I_2(r)$ действительно есть выпуклая функция от $\log r$. Аналогичное замечание относится к теореме следующего параграфа. (*Примечание переводчика.*)

**) См. Hardy [8] и Landau, *Ergebnisse der Funktionentheorie*, § 23.

***) Полиа и Сеге, *Задачи и теоремы из анализа*, Отдел 3, № 308.

Функция $F(z)$ регулярна при $|z| \leqslant r_3$, и ее модуль достигает своего максимума в этом круге на его границе, скажем, при $z = r_3 e^{i\lambda}$. Следовательно,

$$I_1(r_2) = F(r_2) \leqslant |F(r_3 e^{i\lambda})| \leqslant I_1(r_3),$$

чем доказана первая часть теоремы.

Определим теперь α условием

$$r_1^\alpha I_1(r_1) = r_3^\alpha I_1(r_3).$$

Мы можем написать

$$r_2^\alpha I_1(r_2) = r_2^\alpha F(r_2) \leqslant \max_{r_1 \leqslant |z| \leqslant r_3} |z^\alpha F(z)| \leqslant r_1^\alpha I_1(r_1) = r_3^\alpha I_1(r_3),$$

после чего доказательство заканчивается так же, как доказательство теоремы Адамара о трех окружностях.

5.5. Теорема Бореля и Каратеодори *). Эта теорема позволяет указать верхнюю границу для модуля функции на окружности $|z| = r$ по границе ее вещественной или мнимой части на большей концентрической окружности $|z| = R$.

Пусть $f(z)$ — аналитическая функция, регулярная при $|z| \leqslant R$, и пусть $M(r)$ и $A(r)$ обозначают, как обычно, максимумы функций $|f(z)|$ и $\operatorname{Re} f(z)$ на окружности $|z| = r$. Тогда при $0 < r < R$

$$M(r) \leqslant \frac{2r}{R-r} A(r) + \frac{R+r}{R-r} |f(0)|.$$

Теорема очевидна, если $f(z)$ есть постоянная. Если $f(z)$ — не постоянная, то мы предполагаем сначала, что $f(0) = 0$. Тогда $A(R) > A(0) = 0$.

Положим $\varphi(z) = \dfrac{f(z)}{2A(R) - f(z)}$. Функция $\varphi(z)$ регулярна при $|z| \leqslant R$, так как вещественная часть знаменателя не обращается в нуль. Кроме того, $\varphi(0) = 0$, и если $f(z) = u + iv$, то

$$|\varphi(z)|^2 = \frac{u^2 + v^2}{\{2A(R) - u\}^2 + v^2} \leqslant 1,$$

так как $-2A(R) + u \leqslant u \leqslant 2A(r) - u$. В силу леммы Шварца $|\varphi(z)| \leqslant r/R$, откуда следует, что

$$|f(z)| = \left| \frac{2A(R)\varphi(z)}{1 + \varphi(z)} \right| \leqslant \frac{2A(R)r}{R-r},$$

а это и есть доказываемое неравенство для случая $f(0) = 0$.

---

*) См. Borel [1] и Landau, *Ergebnisse*, § 24.

Если $f(0) \neq 0$, то мы применяем уже полученный результат к функции $f(z) - f(0)$. Это дает:

$$|f(z) - f(0)| \leqslant \frac{2r}{R-r} \max_{|z|=R} \operatorname{Re}\{f(z) - f(0)\} \leqslant \frac{2r}{R-r}\{A(R) + |f(0)|\},$$

и мы снова получаем доказываемое неравенство.

При $A(R) \geqslant 0$ из него следует, что

$$M(r) \leqslant \frac{R+r}{R-r}\{A(R) + |f(0)|\}.$$

Рассматривая вместо $f(z)$ функции $-f(z)$, $if(z)$, $-if(z)$, мы получим аналогичные оценки, в которых место $A(r)$ занимают $\min \operatorname{Re} f(z)$, $\max \operatorname{Im} f(z)$, $\min \operatorname{Im} f(z)$.

Таким образом, неравенство доказано. Вид его правой части можно изменять в известных пределах. Однако она должна, наряду с $A(R)$, содержать член, подобный $|f(0)|$, так как иначе неравенство не выполнялось бы для функции $f(z) + ik$, где k — достаточно большое вещественное число. Она должна содержать также множитель, подобный $\frac{1}{R-r}$, который стремится к бесконечности при $r \to R$. Чтобы обнаружить это, рассмотрим функцию $f(z) = -i \log(1-z)$, и пусть $0 < r < R < 1$. Тогда $A(R) < \frac{1}{2}\pi$, как бы близко к 1 ни было R, и $f(0) = 0$. Но $M(R) \to \infty$ при $r \to 1$.

5.5.1. Эти принципы могут быть распространены на производные функции $f(z)$. *В условиях предыдущей теоремы при* $A(R) \geqslant 0$

$$\max_{|z|=r} |f^{(n)}(z)| \leqslant \frac{2^{n+2} n! R}{(R-r)^{n+1}}\{A(R) + |f(0)|\}.$$

Действительно,

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw, \tag{1}$$

где C — окружность с центром $w = z$ и радиусом $\delta = \frac{1}{2}(R-r)$. На этой окружности

$$|w| \leqslant r + \frac{1}{2}(R-r) = \frac{1}{2}(R+r),$$

так что, в силу теоремы Каратеодори,

$$\max |f(w)| \leqslant \frac{R + \frac{1}{2}(R+r)}{R - \frac{1}{2}(R+r)}\{A(R) + |f(0)|\} < \frac{4R}{R-r}\{A(R) + |f(0)|\}.$$

Пользуясь теперь формулой (1), мы видим, что

$$|f^{(n)}(z)| \leqslant \frac{n!}{\delta^n} \frac{4R}{R-r}\{A(R) + |f(0)|\} = \frac{2^{n+2} n! R}{(R-r)^{n+1}}\{A(R) + |f(0)|\}.$$

5.6. Теоремы Фрагмена и Линделефа *). Фрагмену и Линделефу принадлежит следующее важное обобщение теоремы о максимуме модуля.

Пусть C — простой замкнутый контур, и пусть функция $f(z)$ регулярна внутри C и на C во всех точках, за исключением одной лежащей на C точки P. Пусть $|f(z)| \leqslant M$ на C при $z \neq P$.

Предположим, далее, что существует такая функция $\omega(z)$, регулярная и не обращающаяся в нуль внутри C и на C, что $|\omega(z)| \leqslant 1$ внутри C и что для всякого положительного ε можно найти внутри C сколь угодно близко от P кривую, соединяющую точки контура C, лежащие по разные стороны от P, на которой

$$|\{\omega(z)\}^{\varepsilon} f(z)| \leqslant M.$$

Тогда $|f(z)| \leqslant M$ во всех точках, внутренних к C.

Чтобы доказать это, рассмотрим функцию

$$F(z) = \{\omega(z)\}^{\varepsilon} f(z),$$

которая регулярна внутри C и на C во всех точках, кроме P. Если z_0 — точка, внутренняя к C, то мы можем, в силу условий, наложенных на $\omega(z)$, найти кривую, охватывающую z_0, на которой $|F(z)| \leqslant M$. Следовательно, $|F(z_0)| \leqslant M$, т. е.

$$|f(z_0)| \leqslant M |\omega(z_0)|^{-\varepsilon}.$$

Ввиду произвольности ε это значит, что $|f(z_0)| \leqslant M$. Этим теорема доказана.

Нетрудно понять, что исключительная точка P может быть заменена любым конечным числом или даже бесконечным множеством точек, если только для них существуют функции $\omega(z)$ с соответствующими свойствами.

В следующих параграфах мы изложим несколько теорем этого типа. Обычно бывает проще заново построить для рассматриваемой области специальную вспомогательную функцию, чем пользоваться предыдущей теоремой. На практике исключительная точка всегда является бесконечно удаленной.

5.6.1. Предыдущая теорема позволяет получить много важных результатов, относящихся к поведению функции в окрестности существенно особой точки. Произведя надлежащее преобразование, мы всегда можем сделать исключительную точку бесконечно удаленной. Основная теорема может быть сформулирована следующим образом:

Пусть $f(z)$ — аналитическая функция от $z = re^{i\theta}$, регулярная в области D, заключенной между двумя полупрямыми, которые образуют угол $\frac{\pi}{\alpha}$ с вершиной в начале, а также на самих полу-

---

*) Phragmén и Lindelöf [1].

прямых. Пусть на полупрямых

$$|f(z)| \leqslant M \tag{1}$$

и при $r \to \infty$ *равномерно во всем угле*

$$f(z) = O\left(e^{r^\beta}\right) \tag{2}$$

с $\beta < \alpha$. *Тогда неравенство* (1) *выполнено во всей области* D.

Мы можем считать, без ущерба для общности, что полупрямые определяются уравнениями $\theta = \pm \frac{\pi}{2\alpha}$. Положим

$$F(z) = e^{-\varepsilon z^\gamma} f(z),$$

где $\beta < \gamma < \alpha$ и $\varepsilon > 0$. Ясно, что

$$|F(z)| = e^{-\varepsilon r^\gamma \cos \gamma\theta} |f(z)|. \tag{3}$$

Так как $\gamma < \alpha$, то на полупрямых $\cos \gamma\theta > 0$. Следовательно, на полупрямых $|F(z)| \leqslant |f(z)| \leqslant M$. Далее, на дуге $|\theta| \leqslant \frac{\pi}{2\alpha}$ окружности $|z| = R$

$$|F(z)| \leqslant e^{-\varepsilon R^\gamma \cos \frac{\gamma\pi}{2\alpha}} |f(z)| < A e^{R^\beta - \varepsilon R^\gamma \cos \frac{\gamma\pi}{2\alpha}},$$

и правая часть стремится к нулю при $R \to \infty$. Таким образом, если R достаточно велико, то $|F(z)| \leqslant M$ и на этой дуге. Следовательно, $|F(z)| \leqslant M$ во всей области $|\theta| \leqslant \frac{\pi}{2\alpha}$, $r \leqslant R$ (теорема о максимуме модуля), а так как R произвольно велико, то и во всей области D. В силу формулы (3) из этого следует, что в D

$$|f(z)| \leqslant M e^{\varepsilon r^\gamma},$$

и доказательство завершается переходом к пределу при $\varepsilon \to 0$.

Очевидно, нет необходимости предполагать, что функция $f(z)$ регулярна в области $|z| \leqslant r_0$, если существует дуга $|z| = r_1 > r_0$, на которой выполнено неравенство (1). С этой модификацией теорема верна и при $\alpha < 1/2$, когда область D покрывает часть плоскости более чем один раз и функция может не быть однозначной. Можно также заменить полупрямые кривыми, уходящими в бесконечность. Читатель не встретит трудностей при проведении деталей этих обобщений.

5.6.2. Важно указать на соотношение между фигурирующим в теореме углом и порядком роста функции $f(z)$ в бесконечности. Чем шире угол, тем ниже должен быть порядок функции $f(z)$ для того, чтобы теорема была верна.

В следующей теореме этот порядок недостаточно мал для того, чтобы было применимо предыдущее доказательство, и нужны более тонкие соображения.

Заключение предыдущей теоремы сохраняет силу, если о поведении функции $f(z)$ при $r \to \infty$ известно только, что для всякого положительного δ

$$f(z) = O\left(e^{\delta r^{\alpha}}\right)$$

равномерно во всем угле.

Как и выше, мы можем считать, что речь идет об угле $-\frac{\pi}{2\alpha} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2\alpha}$. Рассмотрим функцию

$$F(z) = e^{-\varepsilon z^{\alpha}} f(z).$$

Функция $|F(z)|$ стремится к нулю на вещественной оси и потому имеет там некоторую верхнюю грань M'. Положим

$$M'' = \max(M, M').$$

Применив к каждому из двух частичных углов $\left(-\frac{\pi}{2\alpha}, 0\right)$, $\left(0, \frac{\pi}{2\alpha}\right)$ предыдущую теорему, мы видим, что во всем угле

$$|F(z)| \leqslant M''.$$

Но в действительности $M' \leqslant M$. В самом деле, $|F(z)|$ принимает значение M' в некоторой точке вещественной оси, так что предположение $M' > M$ противоречит теореме о максимуме модуля. Таким образом,

$$|F(z)| \leqslant M,$$

т. е. $|f(z)| \leqslant M\left|e^{\varepsilon z^{\alpha}}\right|$, и доказательство завершается переходом к пределу при $\varepsilon \to 0$.

5.6.3. *Пусть $f(z) \to a$ при $z \to \infty$ вдоль двух полупрямых. Если функция $f(z)$ регулярна и ограничена в заключенном между ними угле, то $f(z) \to a$ равномерно во всем угле.*

Без ущерба для общности можно считать, что $a = 0$. Можно считать также, что угол меньше π, так как к этому случаю подстановкой вида $z = w^k$ сводится общий случай. Таким образом, мы можем считать, что рассматриваются полупрямые $\theta = \pm\theta'$, причем $\theta' < \frac{1}{2}\pi$.

Положим $F(z) = \frac{z}{z+\lambda} f(z)$, где $\lambda > 0$. Очевидно,

$$|F(z)| = \frac{r}{\sqrt{r^2 + 2r\lambda\cos\theta + \lambda^2}} |f(z)| < \frac{r}{\sqrt{r^2+\lambda^2}} |f(z)|.$$

Пусть $|f(z)| \leqslant M$ всюду, и пусть $|f(z)| < \varepsilon$, если $r > r_1 = r_1(\varepsilon)$ и $\theta = \pm\theta'$. Положим $\lambda = r_1 M/\varepsilon$. При $r \leqslant r_1$

$$|F(z)| < \frac{r}{\lambda} M < \varepsilon,$$

и $|F(z)| < |f(z)| < \varepsilon$, если $r > r_1$ и $\theta = \pm\theta'$. Согласно § 5.6.1, из этого следует, что $|F(z)| \leqslant \varepsilon$ во всей области, и, таким образом,

$$|f(z)| \leqslant \left(1 + \frac{\lambda}{r}\right) |F(z)| < 2\varepsilon,$$

если $r > \lambda$. Этим теорема доказана.

5.6.4. *Пусть $f(z) \to a$ при $z \to \infty$ вдоль некоторой полупрямой и $f(z) \to b$ при $z \to \infty$ вдоль другой полупрямой. Если функция $f(z)$ регулярна и ограничена в угле, заключенном между этими полупрямыми, то $b = a$ и $f(z) \to a$ равномерно во всем угле.*

Пусть $f(z) \to a$ вдоль полупрямой $\theta = \alpha$ и $f(z) \to b$ вдоль полупрямой $\theta = \beta$, причем $\alpha < \beta$. Функция $\left\{f(z) - \frac{1}{2}(a+b)\right\}^2$ регулярна и ограничена в угле и стремится к $\frac{1}{4}(a-b)^2$ вдоль обеих полупрямых. Следовательно, она равномерно стремится к этому пределу во всем угле, т. е. функция

$$\left\{f(z) - \frac{1}{2}(a+b)\right\}^2 - \frac{1}{4}(a-b)^2 = \{f(z) - a\}\{f(z) - b\}$$

равномерно стремится к нулю. Поэтому для всякого ε существует дуга $\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$ окружности с центром в начале, на которой

$$|\{f(z) - a\}\{f(z) - b\}| \leqslant \varepsilon.$$

В каждой точке этой дуги верно по крайней мере одно из неравенств $|f(z) - a| \leqslant \sqrt{\varepsilon}$, $|f(z) - b| \leqslant \sqrt{\varepsilon}$, и мы можем считать, что при $\theta = \alpha$ верно первое неравенство, а при $\theta = \beta$ — второе неравенство. Пусть θ_0 — верхняя грань значений θ, для которых верно первое неравенство. θ_0 является или точкой, в которой верно первое неравенство, или точкой, предельной для таких точек, или точкой, в которой верно второе неравенство, или точкой, предельной для таких точек. Поскольку функция $f(z)$ непрерывна, из этого следует, что в точке θ_0 выполнены оба неравенства, так что в этой точке

$$|a - b| \leqslant |f(z) - a| + |f(z) - b| \leqslant 2\sqrt{\varepsilon}.$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, мы видим, что $a = b$. Наконец, согласно предыдущей теореме, $f(z) \to a$ равномерно.

Эти теоремы имеют очевидное сходство с теоремой Монтеля (§ 5.2.3). Однако в теореме Монтеля полупрямая, вдоль которой функция стремится к пределу, должна быть внутренней к области ограниченности, так что эти теоремы только в том случае становятся следствиями теоремы Монтеля, если область ограниченности предполагается несколько большей.

5.6.5. Теорема Фрагмена—Линделефа для других областей. Угол, фигурирующий в предыдущей теореме, может быть преобразован в другие области, например в полосу, Применим, например, теорему § 5.6.1 к области $r \geqslant 1$, $|\theta| \leqslant \frac{\pi}{2\alpha}$ и положим $s = i \log z$, $f(z) = \varphi(s)$. Если $s = \sigma + it$, то полупрямые $\arg z = \pm \frac{\pi}{2\alpha}$ переходят в параллельные прямые $\sigma = \pm \frac{\pi}{2\alpha}$, причем $t = \log|z|$. Следовательно, *если* $|\varphi(s)| \leqslant M$ *на верхних половинах этих параллельных прямых и на соединяющем их отрезке вещественной оси, причем в ограниченной ими полуполосе*

$$\varphi(\sigma + it) = O\left(e^{e^{\rho t}}\right) \qquad (\rho < \alpha), \tag{1}$$

то $|\varphi(s)| \leqslant M$ *во всей полуполосе.*

Другая теорема того же типа, которая потребуется нам в теории рядов Дирихле, состоит в следующем.

Пусть функция $\varphi(s)$ *регулярна в полосе* $\sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_2$ *и представляет собой там* $O(e^{\varepsilon|t|})$ *при любом положительном* ε. *Если*

$$\varphi(\sigma_1 + it) = O(|t|^{k_1}), \quad \varphi(\sigma_2 + it) = O(|t|^{k_2}),$$

то равномерно при $\sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_2$

$$\varphi(\sigma + it) = O(|t|^{k(\sigma)}),$$

где $k(\sigma)$ — *линейная функция от* σ, *принимающая при* $\sigma = \sigma_1$, σ_2 *значения* k_1, k_2.

В действительности теорема верна при более общих условиях вида (1). При сформулированных условиях она допускает следующее прямое доказательство.

Предположим сначала, что $k_1 = 0$, $k_2 = 0$, так что функция $\varphi(s)$ ограничена при $\sigma = \sigma_1$, $\sigma = \sigma_2$. Пусть M — верхняя граница функции $|\varphi(s)|$ на этих прямых и на соединяющем их отрезке вещественной оси. Положим $g(s) = e^{\varepsilon s i}\varphi(s)$. При $\sigma = \sigma_1$, σ_2 и $t \geqslant 0$

$$|g(s)| = e^{-\varepsilon t}|\varphi(s)| \leqslant M.$$

Кроме того, $|g(s)| \to 0$ при $t \to \infty$ и $\sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_2$, так что, если T достаточно велико, то $|g(s)| \leqslant M$ при $t = T$ и $\sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_2$. Следовательно, $g(s) \leqslant M$ во всех точках прямоугольника $\sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_2$, $0 \leqslant t \leqslant T$. Следовательно, $|g(s)| \leqslant M$ во всех точках полуполосы, т. е.

$$|\varphi(s)| \leqslant e^{\varepsilon t} M.$$

Заставляя ε стремиться к нулю, мы видим, что $|\varphi(s)| \leqslant M$ при $t > 0$. Подобным же образом $|\varphi(s)| \leqslant M$ при $t < 0$. Этим в рассматриваемом специальном случае теорема доказана.

Переходя к общему случаю, положим

$$\psi(s) = (-is)^{k(s)} = e^{k(s)\log(-is)},$$

где взято главное значение логарифма. Эта функция регулярна при $\sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_2$, $t \geqslant 1$. Кроме того, если $k(s) = as + b$, то

$$\operatorname{Re}\{k(s)\log(-is)\} = \operatorname{Re}[\{k(\sigma) + iat\}\log(t - i\sigma)] = k(\sigma)\log t + O(1).$$

Следовательно, $|\psi(s)| = t^{k(\sigma)}e^{O(1)}$. Рассмотрим функцию $\Phi(s) = \varphi(s)\{\psi(s)\}^{-1}$. Она удовлетворяет условиям, которым удовлетворяла функция $\varphi(s)$ в первой части доказательства, и потому ограничена в полосе. Таким образом,

$$\varphi(s) = O(|\psi(s)|) = O(t^{k(\sigma)}).$$

5.7. Функция Фрагмена — Линделефа $h(\theta)$. В нескольких предыдущих теоремах мы рассмотрели поведение функции при стремлении z к бесконечности в различных направлениях. Теперь мы займемся более систематическим изучением этого вопроса.

Рассмотрим сначала функцию $f(z) = e^{(a+ib)z^\rho}$. Мы можем написать:

$$|f(z)| = e^{r^\rho(a\cos\rho\theta - b\sin\rho\theta)}.$$

Поведение функции $\log|f(z)|$ зависит в первую очередь от сомножителя r^ρ, который не зависит от θ. Различное поведение в различных направлениях определяется сомножителем

$$h(\theta) = a\cos\rho\theta - b\sin\rho\theta = r^{-\rho}\log|f(z)|.$$

Конечно, это очень специальный случай; но общий случай отличается от него не столь значительно, как можно было бы ожидать.

В последующих параграфах мы будем предполагать, что функция $f(z)$ регулярна при $\alpha < \theta < \beta$, $|z| \geqslant r_0$ и имеет «порядок ρ» в этом угле; последнее означает, что для всякого положительного ε равномерно относительно θ

$$\overline{\lim}\, \frac{\log|f(re^{i\theta})|}{r^{\rho+\varepsilon}} = 0$$

и что это не так при отрицательных значениях ε. (Например, рассмотренная выше функция имеет порядок ρ.) Общее определение функции $h(\theta)$ содержится в формуле

$$h(\theta) = \overline{\lim_{r\to\infty}}\, \frac{\log|f(re^{i\theta})|}{V(r)},$$

причем $V(r)$ допускает известную свободу выбора. Выбор должен быть, естественно, таким, чтобы функция $h(\theta)$ была конечной и не равнялась тождественно нулю. Мы рассмотрим простейший случай $V(r) = r^\rho$; но те же рассуждения можно было бы почти без изменения применить к любой функции вида $r^\rho(\log r)^p \times (\log\log r)^q\ldots$

5.7.0.1. Здесь удобно ввести способ выражения, содержащий слово «бесконечность» или символ ∞ и не используемый в элементарном анализе. Мы будем писать $\lim\varphi_n = \infty$ в том же смысле, в каком пишем $\varphi_n \to \infty$, и будем говорить, что $\varphi(x)$ имеет бесконечное значение или $= \infty$, если функция $\varphi(x)$ определена как предел последовательности функций $\varphi_n(x)$, которая при рассматриваемом значении x расходится к бесконечности. Таким же образом мы будем пользоваться символом $-\infty$. Например, мы можем написать

$$\int_0^1 \frac{dt}{t} = \infty,$$

если левая часть определена как $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1$; равенство же $h(\theta) = \infty$ означает, что $r^{-\rho} \log |f(re^{i\theta})|$ принимает сколь угодно большие значения при $r \to \infty$.

Новым является здесь то, что мы пишем «$=\infty$», как будто бы мы определили число «∞». Напомним, что мы этого не делали и что «бесконечность» остается всего лишь символом *).

5.7.1. *Пусть* $\alpha < \theta_1 < \theta_2 < \beta$ *и* $\theta_2 - \theta_1 < \pi/\rho$, *и пусть* $h(\theta_1) \leqslant h_1$, $h(\theta_2) \leqslant h_2$. *Пусть* $H(\theta)$ — *функция вида* $a \cos \rho\theta + b \sin \rho\theta$, *принимающая при* $\theta = \theta_1$, θ_2 *значения* h_1, h_2. *Тогда*

$$h(\theta) \leqslant H(\theta) \qquad (\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2).$$

Как нетрудно проверить,

$$H(\theta) = \frac{h_1 \sin \rho(\theta_2 - \theta) + h_2 \sin \rho(\theta - \theta_1)}{\sin \rho(\theta_2 - \theta_1)},$$

однако эта явная формула не нужна для доказательства.

Пусть $H_\delta(\theta) = a_\delta \cos \rho\theta + b_\delta \sin \rho\theta$ принимает при $\theta = \theta_1$, θ_2 значения $h_1 + \delta$, $h_2 + \delta$ $(\delta > 0)$. Положим $F(z) = f(z) e^{-(a_\delta - ib_\delta) z^\rho}$. Очевидно,

$$|F(z)| = |f(z)| e^{-H_\delta(\theta) r^\rho}, \tag{1}$$

так что при больших r

$$|F(re^{i\theta_1})| = O\left(e^{(h_1+\delta) r^\rho - H_\delta(\theta_1) r^\rho}\right) = O(1).$$

То же верно с θ_2, h_2 вместо θ_1, h_1. Согласно теореме § 5.6.1, из этого следует, что функция $F(z)$ ограничена в угле (θ_1, θ_2). Поэтому формула (1) показывает, что

$$f(z) = O\left(e^{H_\delta(\theta) r^\rho}\right) \tag{2}$$

равномерно в угле. Следовательно, $h(\theta) \leqslant H_\delta(\theta)$ при $\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2$. Остается заметить, что $H_\delta(\theta) \to H(\theta)$ при $\delta \to 0$.

5.7.1.1. Предыдущая теорема верна и в случае, когда $h(\theta_1) = -\infty$ или $h(\theta_2) = -\infty$ или $h(\theta_1) = h(\theta_2) = -\infty$. Утверждение состоит тогда в том, что $h(\theta) = -\infty$ и при $\theta_1 < \theta < \theta_2$. Доказа-

*) *Ч. М.*, § 55.

тельство остается тем же; только по крайней мере одно из чисел h_1, h_2 теперь сколь угодно велико по абсолютной величине и отрицательно.

5.7.1.2. *Пусть* $\alpha<\theta_1<\theta_2<\theta_3<\beta$, $\theta_2-\theta_1<\frac{\pi}{\rho}$, $\theta_3-\theta_2<\frac{\pi}{\rho}$, *и пусть* $h(\theta_1)$, $h(\theta_2)$ *конечны. Пусть* $H(\theta)$ — *такая функция вида* $a\cos\rho\theta+b\sin\rho\theta$, *что*

$$h(\theta_1)\leqslant H(\theta_1),\quad h(\theta_2)=H(\theta_2).$$

Тогда

$$h(\theta_3)\geqslant H(\theta_3). \tag{1}$$

Выберем θ_1' под условиями $\theta_1<\theta_1'$, $\theta_3-\frac{\pi}{\rho}<\theta_1'<\theta_2$. Согласно § 5.7.1, $h(\theta_1')\leqslant H(\theta_1')$. Следовательно (§ 5.7.1.1), $h(\theta_3)$ не есть $-\infty$. Если неравенство (1) неверно, то можно найти такое δ, что $h(\theta_3)\leqslant \leqslant H(\theta_3)-\delta$. Положим

$$H_\delta(\theta)=H(\theta)-\delta\frac{\sin\rho(\theta-\theta_1')}{\sin\rho(\theta_3-\theta_1')}.$$

Так как $h(\theta_1')\leqslant H(\theta_1')=H_\delta(\theta_1')$, $h(\theta_3)\leqslant H(\theta_3)-\delta=H_\delta(\theta_3)$, то $h(\theta_2)\leqslant H_\delta(\theta_2)<H(\theta_2)$, что противоречит предположению.

5.7.1.3. *Если* $\theta_1<\theta_2<\theta_3$, $\theta_2-\theta_1<\pi/\rho$, $\theta_3-\theta_2<\pi/\rho$, *то*

$$h(\theta_1)\sin\rho(\theta_3-\theta_2)+h(\theta_2)\sin\rho(\theta_1-\theta_3)+h(\theta_3)\sin\rho(\theta_2-\theta_1)\geqslant 0.$$

Для всякой функции $H(\theta)$ вида $a\cos\rho\theta+b\sin\rho\theta$

$$H(\theta_1)\sin\rho(\theta_3-\theta_2)+H(\theta_2)\sin\rho(\theta_1-\theta_3)+H(\theta_3)\sin\rho(\theta_2-\theta_1)=0.$$

Выберем $H(\theta)$ под условиями $H(\theta_1)=h(\theta_1)$, $H(\theta_2)=h(\theta_2)$. Согласно предыдущей теореме, $h(\theta_3)\geqslant H(\theta_3)$, что и дает доказываемое неравенство.

Функция $h(\theta)$ *непрерывна в каждом интервале, где она конечна.*

Пусть функция $h(\theta)$ конечна в интервале $\theta_1\leqslant\theta\leqslant\theta_3$, и пусть $\theta_1<\theta_2<\theta_3$. Пусть $H_{1,2}(\theta)$ — функция вида $a\cos\rho\theta+b\sin\rho\theta$, принимающая при $\theta=\theta_1$, θ_2 значения $h(\theta_1)$, $h(\theta_2)$, и пусть $H_{2,3}(\theta)$ — функция, определенная так же по θ_2, θ_3. Согласно предыдущим теоремам,

$$H_{2,3}(\theta)\leqslant h(\theta)\leqslant H_{1,2}(\theta)\qquad(\theta_1\leqslant\theta\leqslant\theta_2),$$

$$H_{1,2}(\theta)\leqslant h(\theta)\leqslant H_{2,3}(\theta)\qquad(\theta_2\leqslant\theta\leqslant\theta_3).$$

Следовательно, в каком бы из этих двух интервалов ни лежала точка θ,

$$\frac{H_{1,2}(\theta)-H_{1,2}(\theta_2)}{\theta-\theta_2}\leqslant\frac{h(\theta)-h(\theta_2)}{\theta-\theta_2}\leqslant\frac{H_{2,3}(\theta)-H_{2,3}(\theta_2)}{\theta-\theta_2}.$$

При $\theta\to\theta_2$ крайние члены стремятся к некоторым пределам; следовательно, средний член ограничен и, таким образом, $h(\theta)\to h(\theta_2)$.

Из изложенного следует также, что $|f(re^{i\theta})| < \exp[r^\rho\{h(\theta)+\varepsilon\}]$ равномерно при $r > r_0(\varepsilon)$. (Для доказательства мы делим интервал изменения θ на $n = n(\varepsilon)$ равных частей.)

5.7.2. Геометрическая интерпретация. В случае $\rho = 1$ основное свойство функции $h(\theta)$ допускает простую геометрическую интерпретацию.

Рассмотрим для каждого значения θ в некотором интервале, где функция $h(\theta)$ конечна и положительна, радиус-вектор длины $h(\theta)$, образующий угол θ с некоторым начальным направлением, и построим перпендикуляр к этому радиусу-вектору в его конце. (Примеры: $f(z) = \operatorname{ch} z$, $f(z) = \cos z + \operatorname{ch} z$.)

Пусть h_1, h_2, h_3 — значения функции $h(\theta)$ в точках θ_1, θ_2, θ_3, причем $\theta_1 < \theta_2 < \theta_3$. Напишем уравнения трех соответствующих перпендикуляров:

$$x\cos\theta_1 + y\sin\theta_1 = h_1, \quad x\cos\theta_2 + y\sin\theta_2 = h_2,$$
$$x\cos\theta_3 + y\sin\theta_3 = h_3.$$

Первый из них пересекается с третьим в точке с координатами

$$X = \frac{h_1\sin\theta_3 - h_3\sin\theta_1}{\sin(\theta_3-\theta_1)}, \quad Y = \frac{h_3\cos\theta_1 - h_1\cos\theta_3}{\sin(\theta_3-\theta_1)}.$$

Рассмотрим условие: точка (X, Y) не лежит по ту же сторону от второго перпендикуляра, что и начало. Оно может быть представлено как неравенство

$$X\cos\theta_2 + Y\sin\theta_2 - h_2 \geqslant 0,$$

т. е. неравенство

$$h_1\sin\theta_3 - h_3\sin\theta_1)\cos\theta_2 + \\ + (h_3\cos\theta_1 - h_1\cos\theta_3)\sin\theta_2 - h_2\sin(\theta_3-\theta_1) \geqslant 0,$$

т. е. неравенство

$$h_1\sin(\theta_3-\theta_2) + h_2\sin(\theta_1-\theta_3) + h_3\sin(\theta_2-\theta_1) \geqslant 0.$$

Это в точности условие, которому удовлетворяет функция $h(\theta)$ согласно § 5.7.1.3.

Если перпендикуляры огибают некоторую кривую, то это условие означает, что точка пересечения двух касательных к кривой и начало всегда лежат по разные стороны от касательной в третьей точке, лежащей между теми, в которых взяты две первые касательные. Смысл последней формулировки геометрически очевиден: *кривая всегда вогнута к началу.*

5.8. Применения. Следующие интересные применения принципа Фрагмена — Линделефа указаны Карлсоном *).

*) См. M. Riesz [1], Hardy [14].

Пусть при $\operatorname{Re}(z)\geqslant 0$ *функция* $f(z)$ *регулярна и представляет собой* $O(e^{k|z|})$. *Если на мнимой оси* $f(z)=O(e^{-a|z|})$ *с* $a>0$, *то* $f(z)=0$ *тождественно.*

Мы применяем к функции $f(z)$ соображения § 5.7.1 с $\rho=1$, $\theta_1=0$, $\theta_2=\frac{1}{2}\pi$, $h_1=k$, $h_2=-a$; только теперь мы полагаем $\delta=0$. Формула § 5.7.1 (2) показывает, что при $0\leqslant\theta\leqslant\frac{1}{2}\pi$

$$f(z)=O\{e^{(k\cos\theta-a|\sin\theta|)r}\},\tag{1}$$

и аналогичные соображения доказывают это равенство при $-\frac{1}{2}\pi\leqslant\theta\leqslant 0$.

Положим $F(z)=e^{\omega z}f(z)$, где ω — (большое) положительное число. В силу соотношения (1) существует такая постоянная M, не зависящая от ω, что

$$|F(z)|\leqslant Me^{\{(k+\omega)\cos\theta-a|\sin\theta|\}r}\qquad\left(-\frac{1}{2}\pi\leqslant\theta\leqslant\frac{1}{2}\pi\right).\tag{2}$$

В частности, если $\theta=\pm\frac{1}{2}\pi$ или $\pm\alpha$, где $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{k+\omega}{a}$, то

$$|F(z)|\leqslant M.\tag{3}$$

Теперь мы можем применить к каждому из трех углов $\left(-\frac{1}{2}\pi,\ -\alpha\right)$, $(-\alpha,\ \alpha)$, $\left(\alpha,\ \frac{1}{2}\pi\right)$ теорему § 5.6.1. Из нее следует, что в действительности неравенство (3) имеет место при $-\frac{1}{2}\pi\leqslant\theta\leqslant\frac{1}{2}\pi$.

Следовательно, $|f(z)|\leqslant Me^{-\omega r\cos\theta}$, и, переходя к пределу при $\omega\to\infty$, мы видим, что $|f(z)|=0$. Этим теорема доказана.

5.8.1. *Пусть при* $\operatorname{Re}(z)\geqslant 0$ *функция* $f(z)$ *регулярна и представляет собой* $O(e^{k|z|})$ *с* $k<\pi$. *Если* $f(z)=0$ *при* $z=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$, *то* $f(z)=0$ *тождественно.*

Рассмотрим функцию $F(z)=f(z)\operatorname{cosec}\pi z$. Функция $\operatorname{cosec}\pi z$ ограничена на окружностях $|z|=n+\frac{1}{2}$. Следовательно, на этих окружностях $F(z)=O(e^{k|z|})$, как и на мнимой оси. Так как, сверх того, функция $F(z)$ регулярна, то при $n-\frac{1}{2}<|z|<n+\frac{1}{2}$

$$F(z)=O\left(e^{k\left(n+\frac{1}{2}\right)}\right)=O(e^{k|z|}),$$

и, таким образом, $F(z)$ есть функция этого вида во всей полуплоскости $\operatorname{Re}(z)\geqslant 0$. Кроме того, на мнимой оси

$$F(z)=O(e^{(k-\pi)|z|}),$$

что позволяет завершить доказательство ссылкой на предыдущую теорему.

РАЗЛИЧНЫЕ ПРИМЕРЫ

1. Пусть функция $f(z)$ регулярна внутри простого замкнутого контура C и на самом контуре, и пусть $|f(z)| \leqslant M$ на C. Вывести из интегральной формулы Коши для $\{f(z)\}^n$, что если z лежит внутри C, то $|f(z)|^n \leqslant KM^n$, где K — постоянная, не зависящая от n. Показать этим путем, что $|f(z)| \leqslant M$ внутри C [Ландау].

2. Воспользоваться интегралом Пуассона для доказательства того, что функция, гармоническая и не постоянная в некоторой области, не может достигать максимума во внутренней точке этой области.

3. Если при $\operatorname{Re}(z) \geqslant 0$ функция $f(z)$ регулярна и представляет собой $O\left(e^{r^{1-\varepsilon}}\right)$, причем на мнимой оси $|f(z)| \leqslant M$ и $f(1)=0$, то при $x>0$

$$|f(x+iy)| \leqslant \left\{\frac{(1-x)^2+y^2}{(1+x)^2+y^2}\right\}^{\frac{1}{2}} M.$$

$\left[\text{Рассмотреть функцию } \frac{1+z}{1-z} f(z).\right]$

4. Пусть в угле $\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2$, где $\theta_2-\theta_1<\frac{\pi}{\rho}$, функция $f(z)$ регулярна и удовлетворяет неравенствам:

$$e^{-r^{\rho+\varepsilon}} < |f(z)| < e^{r^{\rho+\varepsilon}}.$$

Пусть при $\theta=\theta_1$, θ_2 и $r \to \infty$ функция $r^{-\rho} \log |f(z)|$ стремится к пределам h_1, h_2. Пусть $H(\theta)$ — функция вида $a \cos \rho\theta + b \sin \rho\theta$, принимающая при $\theta=\theta_1$, θ_2 значения h_1, h_2. Тогда $h(\theta)=H(\theta)$ во всем интервале $\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2$.

5. Показать, что если в некотором угле $f(z)=O\left(e^{r^{1+\varepsilon}}\right)$, то функция

$$h(\theta)=\overline{\lim} \frac{\log |f(re^{i\theta})|}{r \log r}$$

обладает свойствами, подобными свойствам h-функций, рассмотренных в тексте.

Показать, что если $f(z)=\dfrac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+z\right)}$, то $h(\theta)=-\cos\theta$ для всех значений θ.

6. Пусть аналитическая функция $f(z)$ регулярна и не обращается в нуль в полуполосе $a<x<b$, $y>0$. Пусть $f(z)=O\left(y^A\right)$ равномерно во всей полуполосе при $y \to \infty$, и пусть функция $|\log f(z)|$ ограничена на средней линии $x=\frac{1}{2}(a+b)$. Доказать, что $\log f(z)=O(\log y)$ равномерно при $a+\delta<x<b-\delta$.

$\left[\text{Применить теорему Каратеодори к } \log f(z) \text{ в круге с центром } \frac{1}{2}(a+b)+iy.\right]$

7. Пусть при $\operatorname{Re}(z) \geqslant 0$ функция $f(z)$ регулярна, удовлетворяет неравенству $|f(z)| \leqslant M$ и имеет нули z_1, z_2, ... Доказать, что при $\operatorname{Re}(z)>0$

$$|f(z)| \leqslant \left|\frac{z_1-z}{\bar{z}_1+z} \frac{z_2-z}{\bar{z}_2+z} \cdots \frac{z_n-z}{\bar{z}_n+z}\right| M.$$

Вывести из этого, что если функция $f(z)$ не равна тождественно нулю, то ряд $\sum \operatorname{Re}(1/z_n)$ сходится. [См. П о л и а и С е г е, *Задачи и теоремы из анализа.* Отдел III, №№ 295, 298.]

ГЛАВА VI

КОНФОРМНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ

6.1. Конформное отображение. Если w — аналитическая функция от z, то значениям z, которые представляются точками плоскости z, отвечают значения w, которые представляются точками плоскости w. Мы говорим, что точки плоскости z преобразуются или отображаются в соответствующие точки плоскости w и что области плоскости z отображаются на соответствующие области плоскости w. Настоящая глава посвящена более детальному рассмотрению природы этого преобразования или отображения.

Пусть w — аналитическая функция от z, регулярная и однозначная в некоторой области D плоскости z. Пусть z_0 — внутренняя точка области D, и пусть C_1 и C_2 — непрерывные кривые, проходящие через z_0 и имеющие в этой точке определенные касательные, которые образуют с осью x углы α_1 и α_2.

Посмотрим, что соответствует этой фигуре в плоскости w. Однако предварительно мы наложим на функцию ограничение, мотивы которого скоро выяснятся: *мы предположим, что $f'(z_0)$ — не нуль*.

Пусть z_1 и z_2 — точки кривых C_1 и C_2, близкие к z_0. Предположим, что они находятся от z_0 на одном и том же расстоянии r, так что можно написать:

$$z_1 - z_0 = re^{i\theta_1}, \quad z_2 - z_0 = re^{i\theta_2}.$$

Тогда $\theta_1 \to \alpha_1$ и $\theta_2 \to \alpha_2$ при $r \to 0$.

В плоскости w точке z_0 отвечает некоторая точка w_0, а точкам z_1 и z_2 отвечают точки w_1 и w_2, описывающие некоторые кривые C_1' и C_2'. Пусть

$$w_1 - w_0 = \rho_1 e^{i\varphi_1}, \quad w_2 - w_0 = \rho_2 e^{i\varphi_2}.$$

Тогда, согласно определению аналитической функции,

$$\lim \frac{w_1 - w_0}{z_1 - z_0} = f'(z_0).$$

Так как $f'(z_0) \neq 0$, то мы можем представить $f'(z_0)$ в виде $\mathrm{R}e^{i\delta}$, так что

$$\lim \frac{\rho_1 e^{i\varphi_1}}{re^{i\theta_1}} = \mathrm{R}e^{i\delta}.$$

В частности, $\lim(\varphi_1-\theta_1)=\delta$, т. е. $\lim\varphi_1=\alpha_1+\delta$. Таким образом, кривая C_1' имеет в точке w_0 определенную касательную, образующую с вещественной осью угол $\alpha_1+\delta$.

Подобным же образом кривая C_2' имеет в точке w_0 определенную касательную, образующую с вещественной осью угол $\alpha_2+\delta$.

Следовательно, кривые C_1' и C_2' пересекаются под тем же углом, что и кривые C_1, C_2. При этом углы в обеих фигурах отсчитываются в одном и том же направлении.

Благодаря этому свойству аналитическое отображение называется «конформным». Всякой малой фигуре в одной плоскости соответствует в другой плоскости приблизительно подобная ей фигура, так как все углы у этих фигур приблизительно одинаковы. Чтобы получить вторую фигуру из первой, мы должны повернуть первую фигуру на угол $\delta=\arg f'(z_0)$ и затем подвергнуть ее растяжению с коэффициентом $\lim\frac{\rho_1}{r}=R=|f'(z_0)|$. Проведенный анализ показывает, что растяжение одинаково во всех направлениях.

6.1.1. Случай $f'(z_0)=0$. Предположим теперь, что $f'(z)$ имеет в точке z_0 нуль порядка n. Тогда в окрестности этой точки

$$f(z)=f(z_0)+a(z-z_0)^{n+1}+\ldots,$$

причем $a\neq 0$. Таким образом, $w_1-w_0=a(z_1-z_0)^{n+1}+\ldots$, т. е.

$$\rho_1 e^{i\varphi_1}=|a|\,r^{n+1}e^{i\{\delta+(n+1)\theta_1\}}+\ldots,$$

где $\delta=\arg a$. Следовательно,

$$\lim\varphi_1=\lim\{\delta+(n+1)\theta_1\}=\delta+(n+1)\alpha_1.$$

Подобным же образом $\lim\varphi_2=\delta+(n+1)\alpha_2$. Кривые C_1', C_2' и теперь имеют определенные касательные в точке w_0, но угол между этими касательными равен

$$\lim(\varphi_2-\varphi_1)=(n+1)(\alpha_2-\alpha_1).$$

Линейное растяжение $\lim(\rho_1/r)$ равно нулю. Таким образом, на этот раз конформность нарушается.

6.1.2. Конформные отображения, которые мы рассматривали выше, сохраняют не только углы, но и направление их отсчета: если, двигаясь от C_1 к C_2, мы совершаем поворот на угол α в положительном направлении, то, двигаясь от C_1' к C_2', мы совершаем поворот на угол α тоже в положительном направлении.

Но существуют и такие конформные отображения, при которых величины углов сохраняются, а знаки их меняются. Рассмотрим, например, преобразование $w=\bar z$, где $\bar z$ — комплексное число, сопряженное с z. Это преобразование относит каждой точке ее образ при отражении в вещественной оси. Следовательно, величины углов сохраняются, но знаки их меняются. Это верно вообще для всякого отображения вида $w = f(\bar{z})$, где $f(z)$ — аналитическая функция от z с отличной от нуля производной. Действительно, такое отображение является произведением двух отображений:

$$\text{(I)}\ Z = \bar{z}, \quad \text{(II)}\ w = f(Z).$$

При отображении (I) величины углов сохраняются, но знаки их меняются. При отображении (II) сохраняются и знаки. Следовательно, результирующее отображение сохраняет величины углов и меняет их знаки.

6.2. Линейное преобразование. Функция $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$ называется линейной функцией от z. Мы будем предполагать, что $ad - bc \neq 0$, так как в противном случае числитель и знаменатель пропорциональны между собой и w есть просто постоянная.

Каждому значению z отвечает в точности одно значение w. Единственным исключением является значение $z = -d/c$ при $c \neq 0$: в этой точке знаменатель обращается в нуль. Но если $z \to -d/c$, то $|w| \to \infty$, и мы можем отнести точке $z = -d/c$ плоскости z бесконечно удаленную точку плоскости w.

Если $c = 0$, то $w = \dfrac{a}{d}z + \dfrac{b}{d}$ и бесконечно удаленные точки плоскостей z и w отвечают друг другу.

Обратно,

$$z = \frac{dw - b}{-cw + a},$$

так что и z есть линейная функция от w.

Пример. Доказать, что в общем случае имеются два значения z, для которых $w = z$ («неподвижные точки»), и что они сливаются только в случае, когда $(a-d)^2 + 4bc = 0$.

Показать, что если имеются две различные неподвижные точки, p и q, то преобразование может быть представлено в виде

$$\frac{w-p}{w-q} = k\frac{z-p}{z-q},$$

а если имеется только одна неподвижная точка, p, то преобразование может быть представлено в виде

$$\frac{1}{w-p} = \frac{1}{z-p} + k.$$

6.2.1. Окружности. Уравнение $|z - z_0| = \rho$ есть уравнение окружности с центром z_0 и радиусом ρ.

Две точки, p и q, называются сопряженными относительно этой окружности, если они лежат на одной прямой с ее центром по одну сторону от него и произведение их расстояний от центра равно ρ^2. Таким образом, если

$$p = z_0 + le^{i\lambda},$$

то

$$q = z_0 + \frac{\rho^2}{l} e^{i\lambda}.$$

Если $z = z_0 + \rho e^{i\theta}$, т. е. z — точка нашей окружности, то

$$\left|\frac{z-p}{z-q}\right| = \left|\frac{\rho e^{i\theta} - le^{i\lambda}}{\rho e^{i\theta} - \rho^2 l^{-1} e^{i\lambda}}\right| = \frac{l}{\rho}\left|\frac{\rho e^{i\theta} - le^{i\lambda}}{le^{i\theta} - \rho e^{i\lambda}}\right| = \frac{l}{\rho}.$$

Это — новая форма уравнения окружности.

Обратно, всякое уравнение $\left|\frac{z-p}{z-q}\right| = k$ $(k \neq 1)$ определяет окружность *), по отношению к которой точки p и q являются сопряженными. Действительно, оно означает, что

$$|z|^2 - 2\mathrm{Re}(\bar{p}z) + |p|^2 = k^2\{|z|^2 - 2\mathrm{Re}(\bar{q}z) + |q|^2\},$$

т. е.

$$|z|^2 - 2\frac{\mathrm{Re}\{(\bar{p} - k^2\bar{q})z\}}{1-k^2} + \frac{|p|^2 - k^2|q|^2}{1-k^2} = 0,$$

т. е.

$$\left|z - \frac{p - k^2 q}{1-k^2}\right|^2 = \frac{|p - k^2 q|^2}{(1-k^2)^2} - \frac{|p|^2 - k^2|q|^2}{1-k^2}.$$

Но нетрудно проверить, что

$$|p - k^2 q|^2 - (1-k^2)(|p|^2 - k^2|q|^2) = k^2|p-q|^2,$$

так что уравнение принимает вид

$$\left|z - \frac{p-k^2q}{1-k^2}\right| = \frac{k|p-q|}{|1-k^2|}.$$

Таким образом, уравнение представляет окружность с центром $z_0' = \frac{p-k^2q}{1-k^2}$ и радиусом $\rho = \frac{k|p-q|}{|1-k^2|}$. Кроме того, $p - z_0 = \frac{k^2(q-p)}{1-k^2}$, $q - z_0 = \frac{q-p}{1-k^2}$, так что отношение $\frac{p-z_0}{q-z_0}$ вещественно и положительно. Наконец,

$$|p - z_0||q - z_0| = \rho^2,$$

т. е. p и q — сопряженные точки.

В особом случае $k = 1$ точка z равноудалена от точек p, q и потому лежит на перпендикуляре к соединяющему их отрезку, проведенном через его середину.

6.2.2. Линейное преобразование окружности. *При линейном преобразовании окружность переходит в окружность*

*) «Окружность Аполлония».