и сопряженные точки переходят в сопряженные точки. В том особом случае, когда окружность превращается в прямую, сопряженные точки превращаются в точки, симметричные относительно этой прямой.

Действительно, пусть $\left|\frac{z-p}{z-q}\right|=k$ — уравнение рассматриваемой окружности или прямой (с сопряженными точками p и q). Преобразование

$$w=\frac{az+b}{cz+d}, \qquad z=\frac{dw-b}{-cw+a}$$

превращает это уравнение в уравнение

$$\left|\frac{dw-b-p(-cw+a)}{dw-b-q(-cw+a)}\right|=k,$$

т. е. в уравнение

$$\left|\frac{w-\dfrac{ap+b}{cp+d}}{w-\dfrac{aq+b}{cq+d}}\right|=k\left|\frac{cq+d}{cp+d}\right|.$$

Этим теорема доказана.

Пример. Инверсией относительно окружности называется преобразование, переводящее каждую точку в сопряженную. Доказать, что линейное преобразование с единственной неподвижной точкой p можно получить как результат (I) инверсии относительно некоторой окружности, скажем с центром z_0, проходящей через точку p, и (II) инверсии относительно окружности, касающейся первой окружности в точке p, с центром в точке w_0, отвечающей точке z_0 при рассматриваемом линейном преобразовании.

6.2.3. *Найти все линейные отображения полуплоскости* $\operatorname{Im}(z)\geqslant 0$ *на единичный круг* $|w|\leqslant 1$.

Точкам z, $\bar{z}$, симметричным относительно вещественной оси, отвечают точки w, $\frac{1}{\bar{w}}$, сопряженные относительно единичной окружности. В частности, начало и бесконечно удаленная точка плоскости w отвечают сопряженным значениям z.

Пусть $w=\frac{az+b}{cz+d}$ — искомое отображение. Ясно, что $c\neq 0$: иначе бесконечно удаленные точки плоскостей z и w отвечали бы друг другу. Точки $w=0$ и $w=\infty$ отвечают точкам $-b/a$ и $-d/c$. Таким образом, мы можем написать

$$-\frac{b}{a}=\alpha, \qquad -\frac{d}{c}=\bar{\alpha},$$

т. е. $w=\frac{a}{c}\frac{z-\alpha}{z-\bar{\alpha}}$. Точке $z=0$ должна отвечать точка окружности $|w|=1$, так что

$$\left|\frac{a}{c}\cdot\frac{-\alpha}{-\bar{\alpha}}\right|=\left|\frac{a}{c}\right|=1.$$

Поэтому можно написать $a=ce^{i\lambda}$, где λ — вещественное число, и мы получаем:

$$w=e^{i\lambda}\frac{z-\alpha}{z-\bar{\alpha}}. \qquad (1)$$

Так как $w=0$, если $z=\alpha$, то точка α должна лежать в верхней полуплоскости, т. е. $\operatorname{Im}(\alpha)>0$. При этом условии функция (1) производит требуемое отображение. Действительно, если значение z вещественно, то, очевидно, $|w|=1$, а если $\operatorname{Im}(z)>0$, то z ближе к α, чем к $\bar{\alpha}$, так что $|w|<1$.

Это преобразование зависит от трех произвольных постоянных: λ, $\operatorname{Re}(\alpha)$ и $\operatorname{Im}(\alpha)$. Поэтому существует преобразование вида (1), переводящее три заданные точки вещественной оси в три заданные точки единичной окружности.

Пример. Общее линейное отображение полуплоскости $\operatorname{Re}(z)\geqslant 0$ на круг $|w|\leqslant 1$ имеет вид

$$w=e^{i\lambda}\frac{z-\alpha}{z+\bar{\alpha}} \qquad (\operatorname{Re}(\alpha)>0).$$

6.2.4. *Найти все линейные отображения единичного круга $|z|\leqslant 1$ на единичный круг $|w|\leqslant 1$.*

Пусть $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$. Точки $w=0$, $w=\infty$ должны отвечать некоторым сопряженным точкам $z=\alpha$, $z=\dfrac{1}{\bar{\alpha}}$ с $|\alpha|<1$. Следовательно,

$$-\frac{b}{a}=\alpha, \quad -\frac{d}{c}=\frac{1}{\bar{\alpha}}, \quad w=\frac{a}{c}\frac{z-\alpha}{z-\dfrac{1}{\bar{\alpha}}}=\frac{a\bar{\alpha}}{c}\frac{z-\alpha}{\bar{\alpha}z-1}.$$

Точке $z=1$ отвечает некоторая точка окружности $|w|=1$. Следовательно,

$$\left|\frac{a\bar{\alpha}}{c}\frac{1-\alpha}{\bar{\alpha}-1}\right|=\left|\frac{a\bar{\alpha}}{c}\right|=1,$$

так что $w=e^{i\lambda}\dfrac{z-\alpha}{\bar{\alpha}z-1}$, где λ — вещественное число.

Это и есть нужный результат. Действительно, если $z=e^{i\theta}$, $\alpha=\rho e^{i\varphi}$, то

$$|w|=\left|\frac{e^{i\theta}-\rho e^{i\varphi}}{\rho e^{i(\theta-\varphi)}-1}\right|=1;$$

если же $z=re^{i\theta}$ с $r<1$, то

$$|z-\alpha|^2-|\bar{\alpha}z-1|^2=r^2-2r\rho\cos(\theta-\varphi)+\rho^2-$$
$$-\{\rho^2r^2-2\rho r\cos(\theta-\varphi)+1\}=(r^2-1)(1-\rho^2)<0,$$

так что $|w|<1$.

Если, кроме того, точке $z=0$ отвечает точка $w=0$, то $\alpha=0$ и преобразование принимает вид

$$w=e^{i\lambda}z.$$

Если еще $\frac{dw}{dz}=1$ при $z=0$, то

$$w=z.$$

Пример. Общее линейное отображение круга $|z|\leqslant\rho$ на круг $|w|\leqslant\rho'$ имеет вид

$$w=\rho\rho' e^{i\lambda}\frac{z-\alpha}{\bar{\alpha}z-\rho^2} \qquad (|\alpha|<\rho).$$

6.2.5. *Пусть функция $f(z)$ регулярна при $|z|<1$. Если* $\operatorname{Re} f(z)>0$ *и* $f(0)=a>0$, *то* $|f'(0)|\leqslant 2a$.

Одна оценка этого типа получается из теоремы Каратеодори и ее следствий (§§ 5.5—5.5.1). Нижеследующее рассуждение в существенном таково же, но может быть теперь представлено в форме, которая бросает свет на общий метод.

Предположим, что при некотором линейном преобразовании $g=\varphi(f)$ прямой $\operatorname{Re} f=0$ отвечает окружность $|g|=1$, а точке $f=a$ — точка $g=0$. Тогда $|g(z)|<1$ при $\operatorname{Re} f(z)>0$, т. е. при $|z|<1$, и $g(0)=0$. С условиями такого вида уже легко иметь дело. Мы можем написать

$$|g'(0)|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=1-\varepsilon}\frac{g(z)}{z^2}\,dz\right|\leqslant\frac{1}{1-\varepsilon},$$

что ввиду произвольности ε приводит к неравенству $|g'(0)|\leqslant 1$.

Методом § 6.2.3 нетрудно установить, что нужное нам линейное преобразование есть $g(z)=\frac{f(z)-a}{f(z)+a}$, так что

$$f(z)=a\,\frac{1+g(z)}{1-g(z)}.$$

Следовательно, $f'(z)=\frac{2ag'(z)}{\{1-g(z)\}^2}$, и

$$|f'(0)|=2a\,|g'(0)|\leqslant 2a.$$

6.3. Другие преобразования.

6.3. Другие преобразования. Теперь мы рассмотрим некоторые нелинейные функции.

6.3.1. Функция $w=z^2$. Если $z=re^{i\theta}$ и $w=\rho e^{i\varphi}$, то $\rho e^{i\varphi}=r^2e^{2i\theta}$. Таким образом,

$$\rho=r^2, \quad \varphi=2\theta,$$

т. е. расстояние от начала возводится в квадрат, а полярный угол удваивается. Угловая область $\alpha<\arg z<\beta$ отображается на угловую область $2\alpha<\arg w<2\beta$; если $\beta-\alpha>\pi$, то угловая область в плоскости w накрывает часть этой плоскости дважды. Возникающая из-за этого неопределенность исчезает после замены плоскости w римановой поверхностью, описанной в § 4.3.

Если $z=x+iy$, $w=u+iv$, то

$$u+iv=(x+iy)^2=x^2-y^2+2ixy,$$

т. е. $u=x^2-y^2$, $v=2xy$. Следовательно, прямые $u=a$, $v=b$ отвечают прямоугольным гиперболам

$$x^2-y^2=a, \quad 2xy=b.$$

Последние пересекаются под прямым углом, если не считать случая $a=0$, $b=0$, когда они пересекаются в начале под углом $\frac{1}{4}\pi$. Поскольку производная $\frac{dw}{dz}$ имеет в начале простой нуль, это согласуется с общими теоремами о преобразовании углов.

Примеры. (I) Доказать, что прямым $x=\text{const}$, $y=\text{const}$ отвечают системы софокусных парабол.

(II) Рассмотреть таким же образом функцию $w=z^n$ с $n=3, 4, \ldots$

6.3.2. Функция $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$. Здесь значение w становится бесконечным при $z=0$, а производная

$$\frac{dw}{dz}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{z^2}\right)$$

обращается в нуль при $z=\pm 1$. Можно ожидать, что эти точки будут играть при преобразовании специальную роль.

Полагая $z=re^{i\theta}$, $w=u+iv$, мы видим, что

$$u=\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\theta, \quad v=\frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\theta,$$

а после исключения θ получаем уравнение

$$\frac{u^2}{\frac{1}{4}\left(r+\frac{1}{r}\right)^2}+\frac{v^2}{\frac{1}{4}\left(r-\frac{1}{r}\right)^2}=1.$$

Это — эллипс в плоскости w, отвечающий каждой из окружностей $|z|=r$, $|z|=1/r$. При $r\to 1$ бо́льшая полуось эллипса стремится к 1, а меньшая к 0. При $r\to 0$ и при $r\to\infty$ обе полуоси стремятся к бесконечности. Отсюда видно, что каждой из двух областей, на которые единичная окружность разбивает плоскость z, отвечает вся плоскость w, взрезанная вдоль вещественной оси от -1 до 1. Само́й единичной окружности $|z|=1$ отвечает отрезок с концами -1, 1, проходимый дважды.

Разрешая уравнение относительно z, мы видим, что обратная функция есть двузначная функция от w. Можно устранить всякую многозначность, заменив плоскость w римановой поверхностью, состоящей из двух листов, разрезанных от —1 до 1 и соединенных крест-накрест вдоль разрезов. При обходе каждой из точек $w=\pm 1$ мы получаем новое значение z, но если пройти вокруг обеих этих точек, то получится исходное значение z.

Пример. Какая кривая плоскости w отвечает прямой $x=1$? Рассмотреть результат как пример к § 6.1.1.

6.3.3. Логарифмическая функция. *Если* $w=\log z$, *то угловой области* $\alpha<\arg z<\beta$ *отвечает бесконечная полоса* $\alpha<v<\beta$.

Действительно, если $z=re^{i\theta}$, то одно из значений w есть $\log r+i\theta$, так что $u=\log r$, $v=\theta$. Когда r меняется от 0 до ∞, u меняется от $-\infty$ до ∞, а это значит, что полупрямые, составляющие указанный угол, переходят в прямые, составляющие указанную полосу.

Если мы рассмотрим все значения $\log z$, т. е. значения

$$w=\log r+i(\theta+2k\pi),$$

где k — произвольное целое число, то получим не одну полосу в плоскости w, а бесконечно много полос, отвечающих всевозможным k.

При обратном отображении полосы $\alpha<v<\beta$ на угол плоскости z часть этой плоскости накрывается более чем один раз, если $\beta-\alpha>2\pi$. Мы устраним всякую неопределенность, если заменим плоскость z римановой поверхностью, состоящей из бесконечно многих листов, каждый из которых взрезан вдоль вещественной оси от 0 до $-\infty$ и соединен вдоль разреза своим верхним ребром с нижним ребром лежащего под ним листа. Тогда полосе ширины 2π в плоскости w будет отвечать один лист римановой поверхности и каждой точке римановой поверхности будет отвечать в точности одна точка плоскости w.

Примеры. (I) Исследовать свойства отображения $w=\operatorname{tg} z$, рассматривая его как композицию отображений

$$\zeta=e^{2iz}, \quad w=\frac{1}{i}\frac{\zeta-1}{\zeta+1},$$

и получить этим путем риманову поверхность обратной функции $z=\operatorname{arctg} w$.

[Курант, *Геометрическая теория функций комплексной переменной*, стр. 145.]

(II) Рассмотреть свойства отображения $w=z^{\alpha}$ при произвольном значении α.

[Функция z^{α} определена как $e^{\alpha \log z}$. Рассмотреть отдельно рациональные, иррациональные и комплексные значения α.]

6.3.4. *Если* $w=\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}z$, *то полоса плоскости* z, *лежащая между прямыми* $x=0$, $x=\frac{1}{2}\pi$, *отображается на внутренность единичного круга плоскости* w, *взрезанную вдоль вещественной оси от* $w=-1$ *до* $w=0$.

Мы можем написать $w=\frac{1-\cos z}{1+\cos z}$.

Если $z=\frac{1}{2}\pi+iy$, то $\cos z=-i\operatorname{sh} y$ и $|w|=1$. Нетрудно проверить, что, когда y меняется от $-\infty$ до ∞, $\arg w$ меняется от $-\pi$ до π, так что w описывает один раз всю единичную окружность.

Если $z=iy$, то $\cos z=\operatorname{ch} y$ и значения w вещественны. Когда y меняется от $+\infty$ до 0, w меняется от -1 до 0, а когда y меняется от 0 до $-\infty$, w возвращается от 0 к -1.

Таким образом, граница полосы переходит в границу взрезанного круга, и нетрудно поверить, что во внутренность круга переходит внутренность полосы.

Пример. Доказать, что прямой $x=\frac{1}{4}\pi$ отвечает петля замкнутой кривой, пересекающая вещественную ось в точках $w=-1$ и $w=\frac{1}{3+2\sqrt{2}}$.

6.4. Однолистные функции. Мы будем говорить, что функция $f(z)$ *однолистна* в некоторой области D, если она аналитична и однозначна в D и принимает в D каждое свое значение только один раз.

Если функция $w=f(z)$ однолистна, то она отображает область D плоскости z на некоторую область D' плоскости w таким образом, что точки этих областей оказываются во взаимно однозначном соответствии.

Если функция $f(z)$ однолистна в D, то $f'(z)\neq 0$ в D. Действительно, предположим, что $f'(z_0)=0$. Тогда функция $f(z)-f(z_0)$ имеет в точке z_0 нуль порядка $n\geqslant 2$. Так как $f(z)$ — не постоянная, то можно найти окружность $|z-z_0|=\delta$, на которой функция $f(z)-f(z_0)$ не имеет нулей и внутри которой функция $f'(z)$ не имеет нулей, отличных от z_0. Пусть m — нижняя грань функции $|f(z)-f(z_0)|$ на этой окружности. Если $0<|a|<m$, то, согласно теореме Руше, функция $f(z)-f(z_0)-a$ имеет в круге n нулей, и она не может иметь там двойных нулей, так как $f'(z)$ не имеет там нулей, отличных от z_0. Но это противоречит тому, что $f(z)$ принимает каждое свое значение только один раз.

Однолистная функция от однолистной функции однолистна: если функция $f(z)$ однолистна в D и функция $F(w)$ однолистна в D', то функция $F\{f(z)\}$ однолистна в D. Действительно, так как функция F однолистна, то из равенства $F\{f(z_1)\}=F\{f(z_2)\}$ следует, что $f(z_1)=f(z_2)$, а так как функция f однолистна, то из равенства $f(z_1)=f(z_2)$ следует, что $z_1=z_2$.

6.4.1. Обратные функции. В условиях предыдущего параграфа каждой точке области D' отвечает в точности одна точка области D. Мы можем поэтому рассматривать z как функцию от w и написать $z=\varphi(w)$. Эта функция называется обратной по отношению к функции $w=f(z)$.

Обратная функция однолистна в D'. Действительно, она однозначна. Каждое свое значение она принимает только один раз, так как функция $f(z)$ однозначна. Наконец, она аналитична. В самом деле, если $f(z_0)=w_0$, то, как легко установить, рассматривая интеграл

$$\int \frac{f'(z)}{f(z)-w}\,dz,$$

$f(z)$ принимает в любой заданной окрестности точки z_0 каждое значение w, достаточно близкое к w_0. Следовательно, функция $z=\varphi(w)$ непрерывна, и так как $f'(z_0)\neq 0$, то при $w\to w_0$

$$\frac{\varphi(w)-\varphi(w_0)}{w-w_0}\to\frac{1}{f'(z_0)}.$$

6.4.2. Единственность конформного отображения. *Однолистная функция $w=f(z)$, отображающая единичный круг на единичный круг так, что центр круга и некоторое заданное в центре круга направление остаются неизменными, есть тождественное отображение $w=z$.*

Так как $|f(z)|\leqslant 1$ при $|z|=1$ и $f(0)=0$, то, согласно лемме Шварца (§ 5.2),

$$|w|=|f(z)|\leqslant|z|.$$

Применяя лемму Шварца к обратной функции, мы видим, что и $|z|\leqslant|w|$. Следовательно, $|w|=|z|$, т. е.

$$\left|\frac{f(z)}{z}\right|=1 \qquad (|z|\leqslant 1).$$

Так как функция, постоянная по модулю, сама постоянна, из этого следует, что $f(z)=az$, где $|a|=1$. После этого остающееся условие показывает, что $a=1$.

Заметим, что функция $w=z^2$ удовлетворяет всем предыдущим условиям, кроме условия однолистности.

Однолистная функция, отображающая единичный круг на единичный круг, есть линейная функция.

Пусть функция $w=f(z)$ отображает единичный круг на единичный круг и $f(0)=w_0$. Согласно § 6.2.4 можно найти линейную функцию $l(w)$, отображающую единичный круг на единичный круг, с $l(w_0)=0$. Функция $l\{f(z)\}$ отображает единичный круг на единичный круг, и $l\{f(0)\}=0$. Следовательно (предыдущая теорема), $l\{f(z)\}=az$. Так как функция, обратная линейной, линейна, то $f(z)$ есть линейная функция от z.

6.4.3. *Пусть функция $f(z)$ регулярна при $z=0$, и пусть $f'(0)\neq 0$. Тогда функция $f(z)$ однолистна в непосредственной окрестности точки $z=0$, т. е. в круге $|z|<\rho$ с достаточно малым ρ.*

Мы можем считать, что $f(0)=0$. Так как $f'(0)\neq 0$, то начало является для $f(z)$ простым нулем. Поэтому можно найти окружность C с центром $z=0$, на которой $f(z)\neq 0$ и внутри которой $f(z)$ не имеет нулей, отличных от точки $z=0$. Пусть m — нижняя грань функции $|f(z)|$ на C.

Так как функция $f(z)$ непрерывна и при $z=0$ обращается в нуль, то можно найти окружность $|z|=\rho$, внутри которой $|f(z)|<m$. Покажем, что функция $w=f(z)$ однолистна в круге $|z|<\rho$. Пусть w' — любое число с $|w'|<m$. В силу теоремы Руше (§ 3.4.2) число нулей функции $f(z)-w'$ внутри C равно числу нулей функции $f(z)$ внутри C, т. е. единице. Следовательно, внутри C имеется в точности одна точка z' с $f(z')=w'$. Область, составленная из таких значений z', отображается однолистно на круг $|w|<m$ и содержит круг $|z|<\rho$.

Другое доказательство можно получить, рассматривая степенной ряд $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, где $a_1\neq 0$. Если $f(z_1)=f(z_2)$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(z_1^n-z_2^n\right)=0,$$

т. е.

$$(z_1-z_2)\left\{a_1+\sum_{n=2}^{\infty} a_n\left(z_1^{n-1}+z_1^{n-2}z_2+\ldots+z_2^n\right)\right\}=0.$$

Если $|z_1|<\rho$ и $|z_2|<\rho$, то модуль второго сомножителя больше, чем $|a_1|-\sum\limits_{n=2}^{\infty} n|a_n|\rho^{n-1}$, а эта разность положительна, если ρ достаточно мало. Следовательно, $z_1=z_2$.

6.4.4. *Предел равномерно сходящейся последовательности однолистных функций есть либо однолистная функция, либо постоянная. Более полно: если функции $f_1(z)$, $f_2(z)$, ... однолистны в D и $f_n(z)\to f(z)$ равномерно в D, то функция $f(z)$ либо однолистна в D, либо постоянна.*

Что предельная функция может быть постоянной, показывает пример $f_n(z)=z/n$.

Ясно, что функция $f(z)$ аналитична и однозначна в D. Если она не однолистна, то существуют две точки, z_1 и z_2, в которых она принимает одно и то же значение w_0. Построим два круга с центрами z_1, z_2, лежащие в D, не пересекающиеся между собой и обладающие тем свойством, что на их контурах функция $f(z)-w_0$ не обращается в нуль; это возможно, если $f(z)$ — не постоянная. Пусть m — нижняя грань функции $|f(z)-w_0|$ на указанных контурах. Найдем столь большое n, что на этих контурах $|f(z)-f_n(z)|<m$. В силу теоремы Руше функция

$$f_n(z)-w_0=\{f(z)-w_0\}+\{f_n(z)-f(z)\}$$

имеет в двух взятых кругах столько же нулей, сколько функция $f(z)-w_0$, т. е. по крайней мере два. Следовательно, функция $f_n(z)$ не однолистна, что противоречит предположению. Этим теорема доказана.

6.4.5. *Пусть C — простой замкнутый контур, ограничивающий область D. Пусть $w=f(z)$ — аналитическая функция, регулярная в D и на C и принимающая каждое свое значение на C только один раз. Тогда функция $f(z)$ однолистна в D.*

В плоскости w контуру C соответствует некоторый контур C'. Он замкнут, так как функция $f(z)$ однозначна, и не имеет самопересечений, так как $f(z)$ не принимает на C ни одного значения дважды. Пусть D' — область, ограниченная контуром C'.

Пусть функция $f(z)$ принимает в точке z_0 области D значение, которого она не принимает на C. Число нулей функции $f(z)-f(z_0)$ в D равно

$$\frac{1}{2\pi}\Delta_C \arg\{f(z)-f(z_0)\},$$

где Δ_C обозначает приращение вдоль C. Это число положительно, так как по крайней мере один такой нуль существует. Но оно равно также

$$\frac{1}{2\pi}\Delta_{C'} \arg(w-w_0),$$

где $w_0=f(z_0)$, а это 0, если точка w_0 лежит вне C', и ± 1, если точка w_0 лежит внутри C'; знак зависит от направления, в котором обходится C'. Следовательно, это 1, т. е. точка w_0 лежит внутри C', C' обходится в положительном направлении и $f(z)$ принимает в D значение w_0 в точности один раз. Таким образом, D однолистно отображается на D'.

6.4.6. Обобщения. Условие предыдущей теоремы, состоящее в том, что функция $f(z)$ аналитична на контуре, может быть несколько ослаблено. Положение мало меняется, если в некоторых точках контура C функция $f(z)$ не аналитична, но непрерывна. Предположим, что на контуре C имеется особая точка z_1, и пусть C_1 — контур, в который превратится C, если мы произведем небольшой вырез около z_1. Число нулей функции $f(z)-w_0$ внутри C_1 равно

$$\frac{1}{2\pi}\Delta_{C_1} \arg\{f(z)-w_0\} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1} \frac{f'(z)}{f(z)-w_0}\,dz,$$

и при стягивании выреза к точке z_1 этот интеграл стремится к такому же интегралу, взятому вдоль C, если функция $f(z)$ непрерывна и $f'(z)=O(|z-z_1|^{\alpha})$, где $\alpha > -1$. Поэтому доказательство § 6.4.5 применимо и здесь.

Функция $f(z)$ может иметь на контуре и полюс; тогда область D' простирается в бесконечность. Теорема § 6.4.5 остается в силе, если порядок полюса равен единице и контур является достаточно простым. Предположим, например, что надлежащее преобразование переменного z перемещает область D в полуплоскость $\operatorname{Re}(z) \geqslant 0$, а полюс в точку $z=0$. Пусть

$$w = f(z) = \frac{1}{z} + g(z),$$

причем функция $g(z)$ регулярна в D. Для z из D

$$\operatorname{Re}(w) \geqslant \min \operatorname{Re} g(z);$$

обозначим этот минимум через a. Пусть $b < a$. Если z лежит в D, то $|w-b| \geqslant a-b$. Следовательно, функция

$$\zeta = \frac{1}{w-b} = \frac{z}{1+zg(z)-bz}$$

регулярна в D. К этой функции применима предыдущая теорема, и так как w есть однолистная функция от ζ, то теорема верна и для функции $w=f(z)$. В случае полюсов более высокого порядка теорема может оказаться неверной.

Примеры. (I) Пусть $w = \frac{1}{i}\frac{z+1}{z-1}$. Если $z=e^{i\theta}$, то

$$w = \frac{1}{i}\frac{e^{i\theta}+1}{e^{i\theta}-1} = -\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\theta.$$

Таким образом, когда z описывает единичную окружность от $\theta=0$ до $\theta=2\pi$, w пробегает вещественную ось от $-\infty$ до ∞. Единственная особенность на окружности есть простой полюс. Следовательно, единичный круг плоскости z отображается однолистно на верхнюю половину плоскости w. Это, конечно, нетрудно проверить и прямо.

(II) Пусть $w = -\frac{1}{i}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^3$. Если $z=e^{i\theta}$, то

$$w = -\operatorname{ctg}^3\frac{1}{2}\theta.$$

Следовательно, точки единичной окружности плоскости z и точки вещественной оси плоскости w взаимно однозначно соответствуют друг другу. Но поскольку на окружности имеется тройной полюс, мы не можем вывести из этого никаких заключений о соответствии между точками областей. И действительно,

$$w = i\left(\frac{x+iy+1}{x+iy-1}\right)^3 = i\,\frac{(x^2+y^2-1)^3-12(x^2+y^2-1)\,y^2}{\{(x-1)^2+y^2\}^3} + \ldots,$$

так что в вещественную ось $v=0$ отображаются три окружности:

$$(x^2+y^2-1)\,(x^2+y^2-2\sqrt{3}\,y-1)\,(x^2+y^2+2\sqrt{3}\,y-1)=0.$$

При этом $v>0$, если z лежит вне всех этих окружностей или вне одной окружности и внутри двух других.

Читателю следует начертить области плоскости z, переходящие в верхнюю половину плоскости w.

6.5. Функция $w=\int\limits_0^z \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$. Мы знаем, что эта функция равна $\arcsin z$. Посмотрим, однако, что можно сказать о соответствующем отображении плоскости z в плоскость w на основании этого интегрального представления.

Посмотрим, на какую часть плоскости w отображается первый квадрант плоскости z. Если $z=iy$ — чисто мнимое число, то $w=$ $=\int\limits_0^y \frac{i\,ds}{\sqrt{1+s^2}}$ — тоже чисто мнимое число, и если $y\to\infty$, то и $w\to\infty$. Таким образом, мнимые оси переходят друг в друга.

Когда z возрастает вдоль вещественной оси от 0 до 1, w возрастает вдоль вещественной оси от 0 до

$$\int\limits_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Обозначим этот интеграл через I. В действительности $I=\frac{1}{2}\pi$, однако здесь нам незачем это знать.

Пусть теперь путь интегрирования обходит точку $z=1$ сверху, скажем, по небольшой полуокружности. Тогда $\arg(1-t)$ убывает от 0 до $-\pi$, так что $\arg(1-t)^{-1/2}$ возрастает от 0 до $\frac{1}{2}\pi$. Таким образом, подынтегральная функция становится чисто мнимой, и мы можем написать:

$$w=I+i\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}.$$

Наконец, когда z стремится вдоль вещественной оси к бесконечности, w стремится к бесконечности вдоль прямой $u=I$.

Следовательно, граница первого квадранта плоскости z переходит в границу полуполосы $0<u<I$, $v>0$ плоскости w.

Функция однолистна в этой области. Мы не можем вывести это из § 6.4.5, не прибегая к дальнейшим рассмотрениям, так как обе области простираются в бесконечность. Но это легко усмотреть непосредственно. Действительно, если t находится в первом квадранте, то мнимая часть числа t^2-1 положительна, так что угол $\arg\sqrt{1-t^2}$ заключен между $-\frac{1}{2}\pi$ и 0. Следовательно,

$$f(z_2)-f(z_1)=\int\limits_{z_1}^{z_2} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}},$$

и интеграл, взятый вдоль прямой, имеет вид $k\int\frac{d\lambda}{\rho e^{i\varphi}}$, где λ — действительное переменное, $\rho>0$ и $-\frac{1}{2}\pi<\varphi<0$. Очевидно, такой интеграл не может быть равен нулю. Поэтому функция не может принимать какое-либо значение дважды.

Далее, четверть окружности $|z|=R$, лежащая в первом квадранте, переходит при отображении в кривую, соединяющую стороны полосы и не имеющую (согласно только что доказанному) двойных точек, и эта кривая лежит целиком на большом расстоянии от вещественной оси, если радиус R достаточно велик. Поэтому из теоремы § 6.4.5 следует, что первый квадрант однолистно отображается на всю полуполосу.

Следующая задача состоит в продолжении функции за пределы рассмотренной области. Это продолжение можно осуществить методом отражения (§ 4.5.1). Действительно, обе области имеют кусочно-прямолинейные границы.

Как уже было сказано, мнимые оси переходят друг в друга. Применяя отражение в этих прямых, мы видим, что второму квадранту плоскости z отвечает полуполоса $-I<u<0$, $v>0$ плоскости w. Следовательно, верхней половине плоскости z отвечает полуполоса $-I<u<I$, $v>0$.

Теперь произведем отражение верхней половины плоскости z в отрезке $(0, 1)$ вещественной оси. Мы получим нижнюю половину плоскости z. В плоскости w мы получим полуполосу $-I<u<I$, $v<0$.

Таким образом, полная полоса $-I<u<I$ отвечает целой плоскости z, но при этом в точках $z=\pm 1$ имеются особенности, полный обход которых невозможен; можно, например, считать, что плоскость z взрезана вдоль вещественной оси от $-\infty$ до -1 и от 1 до ∞.

Новому отражению в интервале $(1, \infty)$ вещественной оси плоскости z соответствует отражение в прямой $u=I$ плоскости w. Следовательно, нижней половине плоскости z, в которую мы перешли справа от точки $z=1$, отвечает полуполоса $I<u<3I$, $v>0$.

Очевидно, что этот процесс можно продолжать неограниченно. Плоскость w разбивается на полосы ширины $2I$, каждая из которых служит образом всей плоскости z.

Если отразить точку w_0 полосы $-I<u<I$ сначала в прямой $u=I$, а затем в прямой $u=3I$, то получится точка w_0+4I. При этом соответствующая точка z_0, дважды отразившись в вещественной оси, возвратится в исходное положение. Следовательно, точкам w_0 и w_0+4I отвечает одно и то же значение z_0, т. е. если $z=g(w)$, то $g(w)=g(w+4I)$. Таким образом, обратная функция $g(w)$ периодична с периодом $4I$.

Пример. Доказать, что функция

$$w=\int\limits_0^z \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \qquad (0<k<1)$$

отображает верхнюю половину плоскости z на прямоугольник плоскости w, ограниченный прямыми $u=-K$, $u=K$, $v=0$, $v=K'$, где

$$K=\int\limits_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \quad K'=\int\limits_1^{1/k} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}}.$$

Доказать, что обратная функция имеет два периода: $4K$ и $2iK'$. [Курант, *Геометрическая теория функций комплексной переменной*, стр. 239—240.]

6.6. Отображение многоугольника на полуплоскость. Функции предыдущего параграфа дают примеры отображений многоугольника на полуплоскость. Такие отображения существуют для *всякого* многоугольника. Полное доказательство завело бы нас слишком далеко, но в общих чертах мы можем его описать.

Рассмотрим в плоскости w многоугольник с n сторонами и с углами $\alpha_1\pi$, $\alpha_2\pi, \ldots, \alpha_n\pi$ $(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=n-2)$. Если $\alpha_m<1$ $(m=1, 2, \ldots, n)$, то многоугольник является выпуклым. Некоторые из чисел α_m могут быть и больше единицы, но контур не должен иметь самопересечений. Будем считать, что вершины многоугольника должны отвечать точкам $a_1, a_2, \ldots, a_n$ вещественной оси плоскости z. Когда точка z перемещается по вещественной оси, точка w перемещается по контуру. Пока z не пройдет через одну из точек $a_1, \ldots, a_n$, точка w остается на одной и той же стороне многоугольника; следовательно, все это время угол $\arg\frac{dw}{dz}$ остается постоянным.

Но это условие выполняется, если

$$\frac{dw}{dz}=C(z-a_1)^{\alpha_1-1}(z-a_2)^{\alpha_2-1}\ldots(z-a_n)^{\alpha_n-1}.$$

Когда z обходит точку a_1 сверху по маленькой полуокружности, $\arg(z-a_1)$ убывает от π до 0, а аргументы других сомножителей возвращаются к своим первоначальным значениям. Следовательно, при этом $\arg\frac{dw}{dz}$ убывает на $\pi(\alpha_1-1)$, т. е. в плоскости w производится поворот на угол $\pi(1-\alpha_1)$ в положительном направлении. Это соответствует углу $\pi\alpha_1$ многоугольника.

Сказанное дает основание искать отображающую функцию в виде

$$w=C\int\limits_{z_0}^{z}(t-a_1)^{\alpha_1-1}(t-a_2)^{\alpha_2-1}\ldots(t-a_n)^{\alpha_n-1}\,dt.$$

При $|t| \to \infty$ подынтегральная функция есть $O(1/|t|^2)$; следовательно, при $z \to \pm\infty$ интеграл сходится, притом к одному и тому же значению (интеграл, взятый по полуокружности с неограниченно раздвигающимися концами на вещественной оси, стремится к нулю). Таким образом, когда z пробегает вещественную ось, w описывает замкнутый контур, и согласно предыдущему этот контур является полигоном с углами $\alpha_1\pi, \ldots, \alpha_n\pi$. Замыкая, как выше, вещественную ось бесконечно большой полуокружностью, мы можем применить теоремы §§ 6.4.5—6.4.6, которые и показывают, что верхняя полуплоскость однолистно отображается на внутренность многоугольника.

Показать, что постоянные можно выбрать так, чтобы получился многоугольник не только с заданными углами, но и с заданными сторонами, труднее. Однако в случае треугольника все достаточно просто. Рассмотрим, например, треугольник с вершинами $w = i\sqrt{3}$, 0, 1 $\left(\text{и углами } \frac{1}{6}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{1}{3}\pi\right)$ и потребуем, чтобы эти вершины отвечали точкам $z = -1, 0, 1$. Предыдущая формула принимает вид

$$w = C\int_{z_0}^{z} (t+1)^{-5/6}\, t^{-1/2}\, (t-1)^{-2/3}\, dt.$$

Если $z_0 = 0$, то точке $z = 0$ эта формула относит точку $w = 0$. Если мы представим ее в виде

$$w = C'\int_{0}^{z} (t+1)^{-5/6}\, t^{-1/2}\, (1-t)^{-2/3}\, dt,$$

где постоянная C' действительна и положительна, то положительному направлению одной вещественной оси будет отвечать положительное направление другой вещественной оси. Наконец, если мы выберем C' под условием

$$1 = C'\int_{0}^{1} (t+1)^{-5/6}\, t^{-1/2}\, (1-t)^{-2/3}\, dt,$$

то точке $z = 1$ будет отвечать точка $w = 1$, что и завершает решение задачи.

Примеры. (I) Доказать, что функция $w = \int\limits_0^z \frac{dt}{(1-t^2)^{2/3}}$ отображает полуплоскость на равносторонний треугольник.

(II) Доказать, что функция $w = \int\limits_0^z \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$ отображает единичный круг плоскости z на квадрат плоскости w. [Курант, *Геометрическая теория функций комплексной переменной*, стр. 235. Положить $z = \frac{\zeta - i}{\zeta + i}$.]

6.7. Отображение произвольной области на круг. Фундаментальная теорема Римана утверждает, что *всякая область с надлежащей границей может быть отображена посредством однолистной аналитической функции на круг.* Точная формулировка условий, которым должна удовлетворять область, выходит за рамки нашего изложения. Область может быть ограничена замкнутой кривой или кривой, уходящей в бесконечность в обоих направлениях (как, например, полуплоскость); она может быть полосой, ограниченной двумя такими кривыми; она может быть даже целой плоскостью, надрезанной вдоль некоторой кривой (например, вдоль вещественной оси от 0 до ∞).

Пусть D — область одного из этих типов.

Функция, однолистно отображающая какую-либо область на ограниченную область, должна быть однолистной и ограниченной. Удостоверимся сначала в том, что такие функции существуют для D. Пусть a и b — две точки, лежащие на границе области D, и пусть

$$w=\sqrt{\frac{z-a}{z-b}}.$$

В D мы можем ограничиться одной ветвью этой функции. Такая ветвь однолистна, и ее значения покрывают только часть плоскости w, так как вся плоскость w однократно покрывается значениями обеих ветвей. Пусть w_0 — какая-нибудь точка непокрытой области. Тогда функция $\frac{1}{w-w_0}$ однолистна и ограничена в D, и с ней однолистны и ограничены все функции

$$f(z)=\frac{p}{w-w_0}+q \qquad (p\neq 0).$$

Ясно, что мы можем выбрать постоянные p и q так, чтобы в заданной точке области D имели место равенства $f(z)=0$, $f'(z)=1$.

Рассмотрим семейство всех функций $f(z)$, однолистных и ограниченных в D и удовлетворяющих в заданной точке P из D условиям $f(z)=0$, $f'(z)=1$. Пусть $M(f)$ обозначает верхнюю грань модуля функции $f(z)$. Пусть ρ — нижняя грань чисел $M(f)$, взятая по всем функциям семейства.

Существует или функция $\varphi(z)$ рассматриваемого семейства, для которой $M(\varphi)=\rho$, или последовательность $f_1(z), f_2(z), \ldots$ функций этого семейства, для которой

$$\lim M(f_n)=\rho.$$

Мы покажем, что второй случай сводится к первому. Так как последовательность $f_1(z)$, $f_2(z)$, ... ограничена в D, то, по § 5.2.2, мы можем выбрать из нее подпоследовательность, равномерно сходящуюся в каждой области, внутренней к D. Пусть $f_{n_1}(z)$, $f_{n_2}(z)$, ... — такая подпоследовательность, и пусть $\varphi(z)$ — ее предел. Функция $\varphi(z)$ также принадлежит рассматриваемому семейству: ее ограниченность и равенства $\varphi(z)=0$, $\varphi'(z)=1$ в точке P очевидны, а ее однолистность следует из теоремы § 6.4.4 (что $\varphi(z)$ — не постоянная, следует из равенства $\varphi'(z)=1$). Далее, согласно определению ρ,

$$M(\varphi)\geqslant\rho.$$

С другой стороны,

$$M(f_{n_\nu})<\rho+\varepsilon \qquad (\nu>\nu_0),$$

так что $|f_{n_\nu}(z)|<\rho+\varepsilon \quad (\nu>\nu_0)$. Следовательно,

$$|\varphi(z)|\leqslant\rho+\varepsilon,$$

т. е. $M(\varphi)\leqslant\rho$.

Этим доказано существование в нашем семействе функции $\varphi(z)$, для которой $M(\varphi)=\rho$. Так как $\varphi(z)$ — не постоянная, то $\rho>0$.

Покажем, что функция $w=\varphi(z)$ однолистно отображает D на круг $|w|<\rho$. При доказательстве мы будем считать, что $\rho=1$. Пусть Δ — область плоскости w, на которую функция $w=\varphi(z)$ отображает D. Так как $M(\varphi)=1$, то Δ лежит в круге $|w|\leqslant 1$ и по крайней мере в одной точке достигает окружности $|w|=1$.

Если наше утверждение неверно, то Δ имеет некоторую граничную точку α внутри круга (так что $|\alpha|<1$). Тогда каждая ветвь функции $w_1=\sqrt{\dfrac{w-\alpha}{\bar{\alpha}w-1}}$ регулярна в Δ. Кроме того, $|w_1|\leqslant 1$ при $|w|\leqslant 1$ (§ 6.2.4) и $w_1(0)=\sqrt{\alpha}$. Положим

$$w_2=\frac{w_1-\sqrt{\alpha}}{\overline{\sqrt{\alpha}}\,w_1-1}.$$

Если $|w_1|\leqslant 1$, то $|w_2|\leqslant 1$, а при $w=0$

$$\frac{dw_2}{dw}=\frac{dw_2}{dw_1}\frac{dw_1^2}{dw}\frac{1}{2w_1}=\frac{|\alpha|-1}{\left(\overline{\sqrt{\alpha}}\,w_1-1\right)^2}\frac{|\alpha|^2-1}{(\bar{\alpha}w-1)^2}\frac{1}{2w_1}=$$

$$=\frac{|\alpha|-1}{(|\alpha|-1)^2}\frac{|\alpha|^2-1}{2\sqrt{\alpha}}=\frac{|\alpha|+1}{2\sqrt{\alpha}}.$$

Модуль этого числа больше единицы. Следовательно, функция

$$w_3=\frac{2\sqrt{\alpha}}{|\alpha|+1}w_2$$

принадлежит нашему семейству, и

$$M(w_3)=\frac{2|\sqrt{\alpha}|}{|\alpha|+1}<1.$$

Но это противоречит равенству $\rho=1$, что и доказывает теорему.

6.7.1. Теорема единственности. Пусть D — область плоскости z, ограниченная простым замкнутым контуром или принадлежащая одному из других типов, рассмотренных в § 6.7. *Тогда существует однозначно определенная функция $w=f(z)$, однолистно отображающая D на внутренность единичного круга плоскости w и удовлетворяющая в заданной точке z_0 области D условиям $f(z_0)=0$, $f'(z_0)>0$.*

Существование такой функции $w=f(z)$ было установлено в § 6.7. Пусть $z=F(w)$ — обратная функция. Предположим, что существует другая функция, $w=g(z)$, с теми же свойствами. Тогда функция $W=g\{F(w)\}$ однолистно отображает единичный круг на единичный круг, оставляя на месте его центр и направление вещественной оси в центре. Следовательно (§ 6.4.2), $g\{F(w)\}=w$, т. е. $g(z)=f(z)$.

6.8. Дальнейшие свойства однолистных функций. Класс функций $f(z)$, однолистных в круге $|z|<1$ и удовлетворяющих условиям $f(0)=0$, $f'(0)=1$, изучен весьма детально. Функция $w=z$ принадлежит этому классу и отображает единичный круг на единичный круг. Оказывается, что и для всех функций этого класса образ единичного круга подчинен некоторым ограничениям*). Мы установим только простейшее свойство этого образа: *для функции рассматриваемого класса ни одна граничная точка образа единичного круга не лежит к началу ближе, чем точка* $1/4$.

Мы выведем это из двух нижеследующих теорем.

Пусть функция

$$w=z+\frac{a_1}{z}+\frac{a_2}{z^2}+\ldots$$

однолистна при $|z|>1$ *и регулярна в этой области, если не считать полюса в бесконечно удаленной точке. Тогда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2\leqslant 1.$$

Так как функция однолистна, то окружность $|z|=r>1$ переходит в простую замкнутую кривую, ограничивающую в плоскости w область с положительной площадью. Если на этой кривой

*) Подробности: Bieberbach, *Funktionentheorie*, II, 82—94; Landau, *Ergebnisse* (2-е изд.), 107—114; Dienes, *The Taylor Series*, гл. VIII.

$u=u(\theta)$, $v=v(\theta)$ $(u+iv=w)$, то указанная площадь равна

$$\int_0^{2\pi} u(\theta)\,v'(\theta)\,d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{w(\theta)+\overline{w(\theta)}}{2}\,\frac{w'(\theta)-\overline{w'(\theta)}}{2i}\,d\theta=$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\left\{re^{i\theta}+re^{-i\theta}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_ne^{-in\theta}+\bar{a}_ne^{in\theta}}{r^n}\right\}\times$$

$$\times\left\{re^{i\theta}+re^{-i\theta}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{na_ne^{-in\theta}+n\bar{a}_ne^{in\theta}}{r^n}\right\}d\theta=$$

$$=\frac{1}{2}\pi\left\{\left(r+\frac{\bar{a}_1}{r}\right)\left(r-\frac{a_1}{r}\right)+\left(r+\frac{a_1}{r}\right)\left(r-\frac{\bar{a}_1}{r}\right)-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2na_n\bar{a}_n}{r^{2n}}\right\}=$$

$$=\pi r^2-\pi\sum_{n=1}^{\infty}n\,|a_n|^2\,r^{-2n}.$$

Так как это число положительно, то

$$\sum_{n=1}^{\infty}n\,|a_n|^2r^{-2n}\leqslant r^2,$$

и остается перейти к пределу при $r\to 1$.

Если функция $w=f(z)=z+a_2z^2+\ldots$ однолистна в круге $|z|<1$, то $|a_2|\leqslant 2$.

Функция $F(z)=\sqrt{f(z^2)}=z+\frac{1}{2}a_2z^3+\ldots$ также однолистна в круге $|z|<1$. Действительно, она регулярна, так как функция $f(z^2)$ имеет нуль только в точке $z=0$ и это — двойной нуль. Далее, если $F(z_1)=F(z_2)$, то $f(z_1^2)=f(z_2^2)$, а так как функция $f(z)$ однолистна, то $z_1^2=z_2^2$, т. е. $z_1=\pm z_2$. Но $F(z)$ — нечетная функция, так что при $z_1=-z_2$ должно быть $F(z_1)=-F(z_2)$. Таким образом, единственное решение уравнения $F(z_1)=F(z_2)$ есть $z_1=z_2$, а это и доказывает, что функция $F(z)$ однолистна.

Следовательно, функция

$$\left\{F\left(\frac{1}{z}\right)\right\}^{-1}=z-\frac{\frac{1}{2}a_2}{z}+\ldots$$

однолистна при $|z|>1$, и, в силу предыдущей теоремы,

$$\frac{1}{4}|a_2|^2+\ldots\leqslant 1.$$

Этим наше неравенство доказано.

Пусть теперь $w=f(z)=z+a_2z^2+\ldots$ — функция, удовлетворяющая условиям основной теоремы. Пусть c — значение, не принимаемое ею в единичном круге, т. е. точка, не принадлежащая образу единичного круга. Тогда функция

$$\frac{cf(z)}{c-f(z)}=z+\left(a_2+\frac{1}{c}\right)z^2+\ldots$$

регулярна и однолистна при $|z|<1$. Следовательно,

$$\left|a_2+\frac{1}{c}\right|\leqslant 2, \quad \left|\frac{1}{c}\right|\leqslant 2+|a_2|\leqslant 4, \quad |c|\geqslant\frac{1}{4},$$

что и доказывает теорему.

Пример. Функция $\frac{z}{(1-z)^2}$ принадлежит рассматриваемому классу. Для нее $a_2=2$ и образ единичной окружности проходит через точку $w=-1/4$. [Единственное решение уравнения

$$\frac{z}{(1-z)^2}=\frac{z'}{(1-z')^2} \qquad (|z|<1, \quad |z'|<1)$$

есть $z=z'$].

РАЗЛИЧНЫЕ ПРИМЕРЫ

1. Точка z_0 обладает по отношению к заданному линейному преобразованию тем свойством, что существует окружность $|z-z_0|=R$, переходящая в некоторую концентрическую окружность $|w-z_0|=R'$. Показать, что геометрическое место таких точек z_0 есть прямоугольная гипербола и что каждой точке z_0 этой гиперболы отвечает в точности одна окружность (действительная или мнимая), переходящая в концентрическую окружность.

2. Показать, что если $\frac{dz}{dw}=-2i\left(w-\frac{1}{w}\right)$ и постоянная интегрирования выбрана надлежащим образом, то верхней половине плоскости w отвечает целая плоскость z, взрезанная вдоль полупрямых $x=\pm\pi$, $y\leqslant 0$.

3. Показать, что если $\frac{dz}{dw}=\frac{w}{\sqrt{w^2-a^2}}$, причем значение корня, постоянная a и постоянная интегрирования выбраны надлежащим образом, то верхней половине плоскости w отвечает верхняя половина плоскости z, взрезанная вдоль мнимой оси от точки $z=0$ до одной из точек $z=ik$.

4. Пусть функция $f(z)$ регулярна в единичном круге и на его границе. Если на единичной окружности $|f(z)|\leqslant M$ и $f(a)=0$, причем $|a|<1$, то в круге

$$|f(z)|\leqslant M\left|\frac{z-a}{\bar{a}z-1}\right|.$$

5. Пусть функция $f(z)$ регулярна в единичном круге и на его границе. Если на единичной окружности $|f(z)|\leqslant M$ и $f(0)=a$, где $0<a<M$, то в круге

$$|f(z)|\leqslant M\frac{M|z|+a}{a|z|+M}.$$

$\left[\text{Рассмотреть функцию } F(z)=M\frac{f(z)-a}{af(z)-M^2}.\right]$

6. Каждая ветвь функции $\frac{z}{\sqrt{1-z}}$ однолистна при $|z|<1$.

7. Показать, что функция $\frac{z}{(1-z)^3}$ однолистна в круге $|z|<1/2$, но не однолистна ни в каком большем круге с центром в начале.

8. Показать, что если $\sum\limits_{n=2}^{\infty} n|a_n|\leqslant 1$, то функция $f(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+\ldots$ однолистна в круге $|z|<1$.

ГЛАВА VII

СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ С КОНЕЧНЫМ РАДИУСОМ СХОДИМОСТИ

7.1. Круг сходимости. Мы знаем, что каждый степенной ряд имеет свой круг сходимости, внутри которого он сходится и вне которого он расходится. Радиус этого круга может быть и бесконечным, т. е. круг может быть целой плоскостью. В этой главе мы рассмотрим степенные ряды, обладающие конечным радиусом сходимости.

Следующая теорема показывает, что радиус сходимости степенного ряда определяется модулями коэффициентов ряда.

Радиус сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{1}$$

определяется формулой

$$R = \varliminf_{n \to \infty} |a_n|^{-1/n}. \tag{2}$$

Определим R формулой (2). Если в точке z ряд сходится, то $a_n z^n \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно, при достаточно большом n

$$|a_n z^n| < 1, \quad \text{т. е.} \quad |z| < |a_n|^{-1/n}.$$

Заставляя n стремиться к бесконечности, мы видим, что $|z| \leqslant R$. Следовательно, радиус сходимости не превышает R. С другой стороны, для достаточно больших значений n

$$|a_n|^{-1/n} > R - \varepsilon, \quad \text{т. е.} \quad |a_n| < (R - \varepsilon)^{-n}.$$

Следовательно, ряд (1) заведомо сходится, если сходится ряд

$$\sum (R - \varepsilon)^{-n} |z|^n,$$

т. е. если $|z| < R - \varepsilon$. Поскольку ε произвольно мало, это значит, что ряд (1) сходится при $|z| < R$. Таким образом, радиус сходимости не меньше R. Сопоставляя это заключение с предыдущим, мы видим, что радиус сходимости равен R.

Примеры. (1) Найти радиусы сходимости рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n!}{(n!)^2} z^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} n!\, z^{n^2}.$$

(II) Если $R=1$ и единственными особенностями, расположенными на единичной окружности, являются простые полюсы, то коэффициенты a_n ограничены.

[Действительно,

$$f(z)=\frac{a}{1-ze^{-i\alpha}}+\frac{b}{1-ze^{-i\beta}}+\ldots+\frac{k}{1-ze^{-i\varkappa}}+g(z),$$

где $g(z)$ — функция, регулярная при $|z|<1+\delta$ $(\delta>0)$, так что $g(z)=\sum b_n z^n$ с $b_n=o(1)$.]

(III) Если $R=1$ и единственными особенностями, расположенными на единичной окружности, являются полюсы порядка p, то $a_n=O(n^{p-1})$.

7.1.1. Из теоремы Коши — Тейлора мы знаем, что граница круга сходимости ряда проходит через ближайшую к началу особую точку или ближайшие к началу особые точки функции. Следовательно, *модуль ближайшей к началу особой точки может быть определен по модулям коэффициентов ряда.*

7.2. Расположение особых точек. В то время как модуль ближайших к началу особых точек определяется совсем просто, найти их точное расположение обычно бывает не так легко. Существуют, однако, специальные случаи, в которых можно утверждать, что некоторая точка является особой.

В нижеследующих теоремах мы будем считать радиус сходимости равным единице; конечно, от этого случая можно простым преобразованием перейти к общему случаю.

7.2.1. *Если $a_n \geqslant 0$ для всех значений n, то $z=1$ есть особая точка.*

Предположим, что точка $z=1$ регулярна. Тогда, взяв на вещественной оси между точками $z=0$ и $z=1$ надлежащую точку ρ, мы сможем найти круг с центром ρ, содержащий точку $z=1$ внутри, в котором наша функция $f(z)$ регулярна. Соответствующий ряд Тейлора

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{f^{(\nu)}(\rho)}{\nu!}(z-\rho)^{\nu} \tag{1}$$

сходится в некоторой точке $z=1+\delta$ $(\delta>0)$. Поскольку

$$f^{(\nu)}(\rho)=\sum_{n=\nu}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-\nu+1)\,a_n\rho^{n-\nu}, \tag{2}$$

ряд (1) принимает вид:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(z-\rho)^{\nu}}{\nu!}\sum_{n=\nu}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-\nu+1)\,a_n\rho^{n-\nu}.$$

Это — двойной ряд с положительными членами, сходящийся при $z=1+\delta$. Следовательно, можно обратить порядок суммирования, и мы получаем равенство

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{\nu=0}^{n} \frac{n(n-1)\ldots(n-\nu+1)}{\nu!}(z-\rho)^{\nu}\rho^{n-\nu} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \{(z-\rho)+\rho\}^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Таким образом, первоначальный ряд сходится при $z=1+\delta$, в противоречие с предположением, что радиус сходимости есть 1. Этим теорема доказана.

Другое окончание доказательства (принадлежащее Прингсгейму) состоит в следующем. На единичной окружности имеется по крайней мере одна особая точка, скажем, $e^{i\alpha}$. Разложение Тейлора вокруг точки $\rho e^{i\alpha}$ есть

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(\rho e^{i\alpha})}{\nu!}(z-\rho e^{i\alpha})^{\nu},$$

и так как $e^{i\alpha}$ — особая точка, то радиус сходимости этого ряда равен $1-\rho$. Но формула (2) показывает, что если $a_n \geqslant 0$ для всех значений n, то

$$|f^{(\nu)}(\rho e^{i\alpha})| \leqslant f^{(\nu)}(\rho).$$

Следовательно, радиус сходимости ряда (1) не превышает $1-\rho$. Следовательно, $z=1$ есть особая точка.

7.2.2. *Если все коэффициенты a_n вещественны и ряд $\sum a_n$ расходится к бесконечности, т. е.*

$$s_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n \to \infty \quad \textit{или} \quad -\infty,$$

то $z=1$ есть особая точка.

Если $|z|<1$, то

$$\frac{f(z)}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} s_n z^n, \tag{1}$$

(согласно § 1.6.5, ряд абсолютно сходится). Следовательно,

$$f(z) = (1-z)\sum_{n=0}^{\infty} s_n z^n = (1-z)\sum_{n=0}^{N} s_n z^n + (1-z)\sum_{n=N+1}^{\infty} s_n z^n.$$

Обозначим слагаемые справа через $f_1(z)$ и $f_2(z)$ и предположим, что $s_n \to \infty$. Тогда для заданного сколь угодно большого положительного числа G можно найти такое N, что $s_n > G$ при $n > N$, а если N выбрано под этим условием и $0<z<1$, то

$$f_2(z) > (1-z)\sum_{n=N+1}^{\infty} G z^n = G z^{N+1}.$$

Далее, так как $z^{N+1} \to 1$ и $f_1(z) \to 0$ при $z \to 1$, то при фиксированном N существует столь близкое к 1 значение z_0, что

$$z^{N+1} > \frac{1}{2}, \quad |f_1(z)| < \frac{1}{4} G \qquad (z > z_0).$$

Таким образом,

$$f(z) > \frac{1}{4} G \qquad (z > z_0),$$

т. е. $f(z) \to \infty$ при $z \to 1$. Этим теорема доказана.

Если известно только, что $|s_n| \to \infty$, то утверждать, что $z = 1$ есть особая точка, нельзя. Например,

$$\frac{1}{(1+z)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2} (n+1)(n+2) z^n,$$

так что $|s_n| \sim \frac{1}{4} n^2$, хотя при $z = 1$ функция регулярна.

7.2.3. Общий признак особой точки. Можно указать признак, позволяющий судить, является ли особой точка, произвольно взятая на границе круга сходимости. Однако вычисления, которых требует его применение, не являются простыми.

Можно считать, что радиус сходимости равен 1. Рассматриваемую точку мы можем надлежащим преобразованием перевести в точку $z = 1$.

Принцип, которым мы воспользуемся, заключается в следующем. Мы разлагаем функцию $f(z)$ в степенной ряд в окрестности некоторой точки вещественной оси, лежащей между точками $z = 0$ и $z = 1$; точка $z = 1$ попадает внутрь круга сходимости этого ряда, если функция $f(z)$ регулярна в этой точке, и не попадает внутрь этого круга в противном случае. По ходу дела мы произведем некоторое преобразование, приводящее к более простой формуле, чем непосредственное применение этого принципа.

Положим $F(w) = \frac{1}{1-w} f\left(\frac{w}{1-w}\right)$. Эта функция регулярна при $\operatorname{Re}(w) < 1/2$, так как $|w| < |1-w|$, если $\operatorname{Re}(w) < 1/2$. Мы можем написать

$$F(w) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m w^m}{(1-w)^{m+1}} = \sum_{m=0}^{\infty} a_m w^m \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(m+r)!}{m!\, r!} w^r =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} w^n \sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{m!\,(n-m)!} a_m.$$

Положим $b_n = \sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{m!\,(n-m)!} a_m$. Точка $z = 1$ в том и только в том случае является особой для $f(z)$, если точка $w = 1/2$ является особой для $F(w)$, а последнее имеет место в том и только в том случае, если

$$\varlimsup_{n\to\infty} |b_n|^{-1/n} = \frac{1}{2}.$$

Действительно, именно при этом условии на окружности $|w| = 1/2$ имеется особая точка функции $F(w)$, а все точки этой окружности, отличные от точки $w = 1/2$, заведомо регулярны.

Пользуясь другими преобразованиями, можно получить много других условий, эквивалентных этому.

Пример. Доказать, что для функции $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$ каждая точка единичной окружности является особой.

[Имея в виду точку $z = e^{i\theta}$, мы должны рассмотреть числа

$$b_n = \sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{m!\,(n-m)!} a_m,$$

где $a_m = e^{i2^r\theta}$, если $m = 2^r$, и $a_m = 0$ для остальных значений m. Очевидно,

$$|b_n| \leqslant \sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{m!\,(n-m)!} = 2^n.$$

Кроме того,

$$b_{2^n} = \sum_{m=0}^{n} \frac{2^n!}{2^m!\,(2^n-2^m)!} e^{i2^m\theta}.$$

В силу теоремы Стирлинга, модуль члена этой суммы с $m = n-1$ асимптотически равен $A \cdot 2^{2^n - \frac{1}{2}n}$. Остальные члены не играют роли: если u_m — член с номером m, то при $0 < m \leqslant n-2$

$$\left|\frac{u_m}{u_{m+1}}\right| = \frac{(2^m+1)\dots 2^{m+1}}{(2^n-2^{m+1}+1)\dots(2^n-2^m)} < \left(\frac{2^{m+1}}{2^n-2^m}\right)^{2^m} < \left(\frac{2}{3}\right)^{2^m} < \frac{4}{9}.$$

Следовательно, $\varlimsup |b_{2^n}|^{\frac{1}{2^n}} = 2.$]

7.3. Сходимость ряда и регулярность функции. Заметим, что сходимость или расходимость первоначального ряда не служила нам признаком регулярности или нерегулярности функции. В общем случае она и не может служить таким признаком, поскольку все мыслимые возможности встречаются здесь фактически. Если

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{n} = \log\frac{1}{1+z},$$

то при $z=1$ ряд сходится и функция регулярна, а при $z=-1$ ряд расходится и функция не регулярна. С другой стороны, если

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n=\frac{1}{1+z},$$

то при $z=1$ ряд расходится, но функция регулярна, а если

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}=\int_0^z \frac{1}{w}\log\frac{1}{1-w}\,dw,$$

то при $z=1$ ряд сходится, но функция не регулярна.

7.3.1. Существует, однако, случай, в котором расходимость ряда указывает на наличие особенности: это случай, когда $a_n\to 0$. Верна следующая теорема.

Если $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ и $a_n\to 0$, то ряд сходится в каждой точке единичной окружности, в которой функция регулярна.

Были предложены два доказательства этой теоремы. Одно, принадлежащее М. Риссу, существенно пользуется методами теории функций комплексного переменного *). Нижеследующее другое доказательство, принадлежащее В. Янгу **), проводится методами теории рядов Фурье. В некоторых отношениях оно не столь просто, как доказательство Рисса, зато его нетрудно приспособить для получения более общих результатов.

Без ущерба для общности можно считать, что рассматриваемая точка есть точка $z=1$ и что $f(1)=0$. Мы должны доказать, что $s_n=a_0+\ldots+a_n\to 0$.

Из формулы § 7.2.2 (1) следует, что

$$s_n=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(z)}{1-z}\frac{dz}{z^{n+1}},$$

причем в качестве контура интегрирования может быть взята окружность $|z|=r<1$. Таким образом,

$$s_n=\frac{1}{2\pi r^n}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(re^{i\theta})}{1-re^{i\theta}}e^{-in\theta}\,d\theta.$$

Пусть $0<\delta<\pi$, и пусть $\varphi(\theta)=\varphi(\theta,\delta,r)$ — функция, удовлетворяющая следующим условиям:

(I) $\varphi(\theta)=\dfrac{1}{1-re^{i\theta}}$ при $-\pi<\theta<-\delta$ и при $\delta<\theta<\pi$;

(II) $\varphi(\theta)$ и $\varphi'(\theta)$ непрерывны при $-\pi<\theta<\pi$;

*) Landau, *Ergebnisse*, § 18.

**) W. H. Young [7].

(III) $|\varphi(\theta)|<K$, $|\varphi'(\theta)|<K$, $|\varphi''(\theta)|<K$ при $-\pi<\theta<\pi$, где K зависит от δ, но не зависит от r.

Например, полагая $\varphi(\theta)=a\theta^3+b\theta^2+c\theta+d$ $(-\delta\leqslant\theta\leqslant\delta)$, можно определить коэффициенты так, чтобы были выполнены равенства

$$\varphi(\pm\delta)=\frac{1}{1-re^{\pm i\theta}},\quad \varphi'(\pm\delta)=\frac{ire^{\pm i\delta}}{(1-re^{\pm i\delta})^2}.$$

Тогда условие (II) будет удовлетворено. Кроме того, a, b, c, d будут линейными комбинациями чисел $\varphi(\pm\delta)$ и $\varphi'(\pm\delta)$, модули которых не превосходят $\frac{1}{2}\operatorname{coses}\frac{1}{2}\delta$ и $\frac{1}{4}\operatorname{cosec}^2\frac{1}{2}\delta$, так что будет удовлетворено и условие (III).

Мы можем написать:

$$2\pi r^n s_n=\int_{-\delta}^{\delta}\frac{f(re^{i\theta})}{1-re^{i\theta}}e^{-in\theta}\,d\theta+\int_{-\pi}^{\pi}f(re^{i\theta})\,\varphi(\theta)\,e^{-in\theta}\,d\theta-$$
$$-\int_{-\delta}^{\delta}f(re^{i\theta})\,\varphi(\theta)\,e^{-in\theta}\,d\theta.$$

Обозначим эти интегралы через I_1, I_2, I_3.

Так как функция $f(z)$ регулярна при $z=1$ и $f(1)=0$, то в некотором интервале $|\theta|\leqslant\theta_0$

$$f(re^{i\theta})=O(|1-re^{i\theta}|)$$

равномерно при $r_0\leqslant r\leqslant 1$. Следовательно,

$$I_1=\int_{-\delta}^{\delta}O(1)\,d\theta=O(\delta).$$

Предположим теперь, что δ фиксировано. В силу равномерной сходимости

$$I_2=\sum_{m=1}^{\infty}a_m r^m\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(m-n)\theta}\,\varphi(\theta)\,d\theta,$$

и, дважды применяя интегрирование по частям ко всем членам, кроме члена с номером n, мы получаем равенство

$$I_2=a_n r^n\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\theta)\,d\theta-\sum_{m\neq n}\frac{a_m r^m}{(m-n)^2}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(m-n)\theta}\varphi''(\theta)\,d\theta$$

(все внеинтегральные члены сокращаются). Положим $\varepsilon_\nu=\max\limits_{m\geqslant\nu}(|a_m|)$, так что $\varepsilon_\nu \to 0$. Очевидно,

$$|I_2| \leqslant 2\pi K \left\{\varepsilon_n + \varepsilon_0 \sum_{m \leqslant \frac{1}{2}n} \frac{1}{(m-n)^2} + \varepsilon_{\frac{1}{2}n} \sum_{m > \frac{1}{2}n} \frac{1}{(m-n)^2}\right\} =$$

$$= O(\varepsilon_n) + O\left(\frac{1}{n}\right) + O\left(\varepsilon_{\frac{1}{2}n}\right).$$

Наконец,

$$I_3 = \left[\frac{f\varphi e^{-in\theta}}{-in}\right]_\delta^{-\delta} + \frac{1}{in}\int_{-\delta}^{\delta}(f'\varphi + f\varphi')\, e^{-in\theta}\, d\theta = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

По заданному ε можно найти такое δ, что $|I_1| < \frac{1}{3}\varepsilon$ для всех значений n; фиксировав это значение δ, можно найти такое $n_0 = n_0(\varepsilon)$, что $|I_2| < \frac{1}{3}\varepsilon$ и $|I_3| < \frac{1}{3}\varepsilon$ при $n > n_0$. Таким образом, $2\pi r^n |s_n| < \varepsilon$ $(n > n_0)$. Так как r сколь угодно близко к 1, из этого следует, что $2\pi |s_n| \leqslant \varepsilon$ $(n > n_0)$, т. е. что $s_n \to 0$.

Читатель заметит, что регулярность функции $f(z)$ при $z = 1$ не была использована нами во всей полноте и что доказательство с небольшим изменением сохраняет силу, если например, $f(z) = O(|1-z|^\alpha)$ с $\alpha > 0$. По поводу более общей формулировки теоремы мы должны отослать читателя к работе Янга.

7.4. Сверхсходимость *). Мы знаем, что степенной ряд расходится в каждой точке, внешней к его кругу сходимости. Однако если, вместо того чтобы рассматривать всю последовательность частичных сумм ряда, мы будем рассматривать ее подпоследовательности, то в некоторых случаях мы встретимся со сходящимися последовательностями. Это можно показать на следующем примере.

Пусть

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\{z(1-z)\}^{4^n}}{p_n},$$

где p_n — наибольший из коэффициентов многочлена $\{z(1-z)\}^{4^n}$. Модули коэффициентов многочлена $\{z(1-z)\}^{4^n}/p_n$ не превосходят 1, и один из них равен 1. Старший член этого многочлена имеет степень $2 \cdot 4^n$, а младший член следующего многочлена — степень 4^{n+1}. Следовательно, каждый член разложения функции $f(z)$ в ряд по степеням z является членом в точности одного из этих многочленов, и других членов ряд не содержит. Радиус сходи-

*) Ostrowski [1], Zygmund [1], Estermann [2].

мости этого степенного ряда равен 1, так как $|a_n| \leqslant 1$ для всех значений n и $a_n = 1$ для бесконечного множества значений n.

В частности, предыдущий ряд многочленов сходится при $|z| < 1$. А так как он формально не меняется при подстановке $z = 1 - w$, то он сходится и при $|w| < 1$, т. е. при $|1 - z| < 1$. Таким образом, специальная последовательность частичных сумм ряда, которая получается, если каждый многочлен рассматривается как целое, сходится в области, лежащей частично за пределами единичного круга.

Степенной ряд, который обладает последовательностью частичных сумм, сходящейся вне круга сходимости, называется «сверхсходящимся». Конечно, степенной ряд может быть сверхсходящимися в окрестности некоторой точки границы круга сходимости только в случае, когда функция регулярна в этой точке. Мы укажем сейчас класс степенных рядов, обладающий свойством сверхсходимости в окрестности каждой точки границы круга сходимости, в которой функция регулярна.

7.4.1. *Пусть радиус сходимости степенного ряда*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

равен 1, *и пусть последовательность его коэффициентов имеет бесконечное число пропусков, т. е. пусть существуют такие последовательности значений индекса* $\{p_k\}$, $\{q_k\}$, *что* $a_n = 0$ *при* $p_k < n < q_k$; *пусть при этом* $q_k \geqslant (1 + \vartheta) p_k$, *где* ϑ — *фиксированное положительное число.*

Тогда последовательность частичных сумм

$$s_{p_k}(z) = \sum_{n=0}^{p_k} a_n z^n$$

сходится в некоторой области, содержащей все точки границы круга сходимости, в которых функция $f(z)$ *регулярна.*

При доказательстве достаточно рассмотреть точку $z = 1$. Предположим, что функция $f(z)$ регулярна в этой точке. Тогда при достаточно малом δ она регулярна в круге с центром 1/2 и радиусом $\frac{1}{2} + \delta$, а также на его границе.

Применим теорему Адамара о трех окружностях к функции

$$\varphi(z) = f(z) - s_{p_k}(z)$$

и окружностям с центром $z = \frac{1}{2}$ и радиусами $\frac{1}{2} - \delta$, $\frac{1}{2} + \varepsilon$, $\frac{1}{2} + \delta$, где $0 < \varepsilon < \delta$. Если M_1, M_2, M_3 — максимумы модуля функции $\varphi(z)$ на этих окружностях, то

$$M_2^{\log\frac{1+2\delta}{1-2\delta}} \leqslant M_1^{\log\frac{1+2\delta}{1+2\varepsilon}} M_3^{\log\frac{1+2\varepsilon}{1-2\delta}}. \tag{1}$$

Чтобы доказать, что $s_{p_k}(z) \to f(z)$ в некоторой области, содержащей точку $z=1$, достаточно доказать, что если ε достаточно мало, то $M_2 \to 0$ при $p_k \to \infty$. Идея доказательства состоит в том, что в то время как M_3 имеет, по существу, порядок $(1+\delta)^{p_k}$, M_1 ведет себя как $(1-\delta)^{q_k}$; таким образом, поскольку p_k меньше, чем q_k, правая часть неравенства (1) при больших значениях p_k мала.

Каждому положительному числу η, которое мы предположим меньшим, чем $\frac{1}{2}\delta$, отвечает такое число K, что

$$|a_n| < K(1-\eta)^{-n}.$$

Следовательно, при $k \to \infty$

$$M_1 \leqslant |a_{q_k} z^{q_k}| + |a_{q_k+1} z^{q_k+1}| + \ldots <$$
$$< K\frac{((1-\delta)/(1-\eta))^{q_k}}{1-((1-\delta)/(1-\eta))} = O\left\{\left(\frac{1-\delta}{1-\eta}\right)^{q_k}\right\} = O\left\{\left(\frac{1-\delta}{1-\eta}\right)^{(1+\vartheta)p_k}\right\}.$$

Далее, если M есть максимум модуля функции $f(z)$ на внешней окружности, то

$$M_3 \leqslant M + |a_0| + \ldots + |a_{p_k} z^{p_k}| <$$
$$< M + K\left\{1 + \frac{1+\delta}{1-\eta} + \ldots + \left(\frac{1+\delta}{1-\eta}\right)^{p_k}\right\} = O\left\{\left(\frac{1+\delta}{1-\eta}\right)^{p_k}\right\}.$$

Следовательно, правая часть неравенства (1) есть

$$O\left[\left\{\left(\frac{1-\delta}{1-\eta}\right)^{(1+\vartheta)\log\frac{1+2\delta}{1+2\varepsilon}} \left(\frac{1+\delta}{1-\eta}\right)^{\log\frac{1+2\varepsilon}{1-2\delta}}\right\}^{p_k}\right].$$

При $\varepsilon \to 0$, $\eta \to 0$ то, что стоит в фигурных скобках, стремится к $(1-\delta)^{(1+\vartheta)\log(1+2\delta)}(1+\delta)^{-\log(1-2\delta)}$, а это число меньше, чем 1, если δ достаточно мало; действительно, при $\delta \to 0$ его логарифм $\sim -2\vartheta\delta^2$, так что при малых значениях δ этот логарифм отрицателен. Следовательно, ε и η можно взять столь малыми, что содержимое фигурных скобок будет меньше, чем 1. Этим теорема доказана.

7.4.2. Пропуски не только дают удобное средство для построения сверхсходящихся рядов. Они органически связаны со сверхсходимостью. Это обнаруживается следующей теоремой, которая является своего рода обращением предыдущей.

Если последовательность частичных сумм $s_{p_k}(z)$ *ряда* $f(z) = \sum a_n z^n$ *с радиусом сходимости, равным единице, равномерно сходится в окрестности некоторой точки единичной окружности, то*

$$f(z) = g(z) + r(z),$$

где $g(z)$ — *сумма степенного ряда с бесконечным числом пропусков* (p_k, q_k), *таких, что* $q_k > (1+\vartheta)p_k$, *а* $r(z)$ — *сумма степенного ряда с радиусом сходимости, бо́льшим единицы.*

Мы не даем доказательства, которое труднее доказательства прямой теоремы.

7.4.3. Теорема Адамара о пропусках. *Если номера отличных от нуля коэффициентов степенного ряда*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

образуют последовательность $n_1, n_2, \ldots$, *в которой* $n_{k+1} > (1+\vartheta) n_k$ *с* $\vartheta > 0$, *то граница круга сходимости ряда является естественной границей функции.*

Это — почти непосредственное следствие теоремы о сверхсходимости. Если бы функция $f(z)$ была регулярной в некоторой точке границы, то последовательность

$$s_{n_k}(z) = \sum_{n=1}^{n_k} a_n z^n$$

сходилась бы в некоторой точке, лежащей вне круга сходимости. Но для ряда рассматриваемого вида сходимость этой последовательности частичных сумм есть то же самое, что сходимость всей последовательности частичных сумм. Таким образом, сверхсходимость невозможна и каждая точка границы круга сходимости является особой точкой функции $f(z)$.

7.4.4. Доказательство Морделла*). Это очень простое прямое доказательство. Пусть радиус сходимости равен 1. Положим $z = aw^p + bw^{p+1}$, где $0 < a < 1$, $a + b = 1$ и p — положительное целое число. Ясно, что $|z| \leqslant 1$, если $|w| \leqslant 1$, и нетрудно проверить, что $|z| < 1$ при $|w| \leqslant 1$, если не считать значения $z = 1$ при $w = 1$. Положим

$$\varphi(w) = f(z) = \sum a_n (aw^p + bw^{p+1})^n =$$
$$= \sum a_n (a^n w^{pn} + \ldots + b^n w^{(p+1)n}) = \sum b_n w^n.$$

Функция $\varphi(w)$ регулярна при $|w| \leqslant 1$ за исключением, возможно, точки $w = 1$. Мы покажем, что радиус сходимости степенного

*) Mordell [1].

ряда, полученного нами для $\varphi(w)$, равен 1 и что, следовательно, точка $w=1$ является для $\varphi(w)$ особой.

Заметим для этого, что при $p>1/\vartheta$ ряд $\sum b_n w^n$ получается из стоящего перед ним ряда простым раскрытием скобок. Действительно, никакая степень w не встречается в этом ряде со скобками дважды, если при любом k

$$(p+1)\,n_k < pn_{k+1},$$

т. е. если $p\left(\frac{n_{k+1}}{n_k}-1\right)>1$, а это условие выполнено, если $p>1/\vartheta$.

Если бы ряд $\sum b_n w^n$ имел радиус сходимости, больший единицы, то он сходился бы при некотором вещественном значении $w>1$, а тогда ряд для $f(z)$ сходился бы при некотором вещественном значении $z>1$, что невозможно. Этим теорема доказана.

Имеется еще одно доказательство *), опирающееся на критерий § 7.2.3.

Методом, подобным только что изложенному, может быть доказана и теорема § 7.4.1 **). Пусть ряд для $f(z)$ удовлетворяет условиям § 7.4.1. Тогда функция $\varphi(w)$ не имеет особых точек в круге $|w|\leqslant 1$ за возможным исключением точки $w=1$. Если функция $f(z)$ регулярна при $z=1$, то функция $\varphi(w)$ регулярна при $w=1$ и, следовательно, регулярна в некотором круге $|w|<1+\delta$ с $\delta>0$. Тогда ряд $\sum b_n w^n$ сходится при $|w|<1+\delta$ и, в частности, последовательность сумм $\sum\limits_{n=0}^{(p+1)p_k} b_n w^n$ сходится при $|w|<1+\delta$. А тогда последовательность сумм $\sum\limits_{n=1}^{p_k} a_n z^n$ сходится в некоторой области, для которой точка $z=1$ является внутренней.

7.5. Асимптотическое поведение функции вблизи границы круга сходимости. Если при $n\to\infty$ коэффициенты степенного ряда ведут себя достаточно просто, то для $f(z)$ можно дать асимптотическое выражение, пригодное при приближении точки z к границе круга сходимости вдоль радиуса-вектора. Следующая теорема относится к простейшему случаю такого рода.

Пусть

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad g(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n,$$

где $a_n\geqslant 0$, $b_n\geqslant 0$, и пусть ряды сходятся при $0<x<1$ и расходятся при $x=1$. Если при $n\to\infty$

$$a_n \sim Cb_n, \tag{1}$$

*) См. Landau, *Ergebnisse*, § 19.

**) Сообщено М. М. Крумом.

то при $x \to 1$

$$f(x) \sim Cg(x) \tag{2}$$

Для заданного ε найдем такое N, что

$$|a_n - Cb_n| < \varepsilon b_n \qquad (n > N).$$

Мы можем написать:

$$|f(x) - Cg(x)| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} (a_n - Cb_n) x^n\right| \leqslant \left|\sum_{n=0}^{N} (a_n - Cb_n) x^n\right| + \\ + \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} (a_n - Cb_n) x^n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{N} |a_n - Cb_n| + \varepsilon \sum_{n=N+1}^{\infty} b_n x^n \leqslant \\ \leqslant \sum_{n=0}^{N} |a_n - Cb_n| + \varepsilon g(x).$$

Так как $g(x) \to \infty$, то при фиксированном N можно найти такое δ, что

$$\sum_{n=0}^{N} |a_n - Cb_n| < \varepsilon g(x) \qquad (x > 1 - \delta).$$

При таком выборе δ

$$|f(x) - Cg(x)| < 2\varepsilon g(x) \qquad (x > 1 - \delta),$$

что и завершает доказательство.

Эта теорема верна и при более общих условиях. *Пусть: ряды сходятся при* $0 < x < 1$; *суммы*

$$s_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n, \quad t_n = b_0 + b_1 + \ldots + b_n$$

положительны; ряды $\sum s_n$ *и* $\sum t_n$ *расходятся;* $s_n \sim Ct_n$. *Тогда соотношение* (2) *остается выполненным.*

Действительно, как в § 7.2.2, при $0 < x < 1$

$$f(x) = (1 - x) \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n, \quad g(x) = (1 - x) \sum_{n=0}^{\infty} t_n x^n.$$

Согласно предыдущей теореме

$$\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n \sim C \sum_{n=0}^{\infty} t_n x^n,$$

что и доказывает соотношение (2).

В частности, *если* $s_n \sim Cn$, *то*

$$f(x) \sim \frac{C}{1-x}.$$

Примеры. (I) Если $p < 1$, то при $x \to 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^p} \sim \frac{\Gamma(1-p)}{(1-x)^{1-p}}.$$

[Мы пишем $(1-x)^{p-1} = \frac{1}{\Gamma(1-p)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n-p+1)}{\Gamma(n+1)} x^n$ и пользуемся леммой § 1.8.7.]

(II) Положим

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} x^2 + \ldots$$

Показать, что при $x \to 1$

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) \sim \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{1}{(1-x)^{\alpha+\beta-\gamma}},$$

если $\alpha + \beta > \gamma$, и

$$F(\alpha, \beta, \alpha+\beta, x) \sim \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \log \frac{1}{1-x}.$$

7.5.1. Обратная проблема. Легко понять, что обращение предыдущих теорем в общем случае невозможно: из асимптотического поведения функции $f(x)$ нельзя вывести асимптотическое поведение чисел a_n или даже s_n. Рассмотрим, например, функцию

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2(1-x)} = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(x^{2n} - x^{2n+1}).$$

Здесь $s_{2m+1} = 0$, в то время как $s_{2m} = m+1$; таким образом, s_n неограниченно колеблется, хотя $f(x) \sim 1/4(1-x)$.

В предыдущем примере не все коэффициенты положительны, и это, в некотором смысле, является причиной ложности обратной теоремы. Предположив, что все коэффициенты положительны, можно получить точное обращение последней теоремы предыдущего параграфа.

Пусть $a_n \geqslant 0$ для всех значений n. Если при $x \to 1$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \sim \frac{1}{1-x},$$

то при $n \to \infty$

$$s_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \sim n.$$

Эта теорема принадлежит Харди и Литтлвуду *). Мы изложим в высшей степени изящное доказательство, которое было недавно предложено Карамата **).

7.5.2. Чтобы оценить доказательство, полезно сначала посмотреть, что можно доказать совсем простыми рассуждениями. Прежде всего,

$$f(x) \geqslant \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu \geqslant x^n s_n$$

для всех значений x и n. Так как, кроме того, $f(x) < A/(1-x)$, то при $x = e^{-\frac{1}{n}}$

$$e^{-1} s_n \leqslant \frac{A}{1-x} = \frac{A}{1-e^{-1/n}} < An,$$

т. е.

$$s_n < A_1 n. \tag{1}$$

С другой стороны,

$$f(x) = (1-x)\sum_{m=0}^{\infty} s_m x^m < (1-x)\, s_n \sum_{m=0}^{n-1} x^m + A_1(1-x)\sum_{m=n}^{\infty} m x^m <$$
$$< s_n + A_1 n x^n + \frac{A_1 x^{n+1}}{1-x}.$$

Полагая $x = e^{-\lambda/n}$ и пользуясь тем, что $f(x) > A/(1-x) > An/\lambda$ при $n > 2\lambda$, мы видим, что

$$\frac{An}{\lambda} < s_n + Ane^{-\lambda} + \frac{Ane^{-\lambda}}{\lambda}.$$

Следовательно, если λ достаточно велико, то

$$s_n > A_2 n. \tag{2}$$

Мы должны показать, что в действительности в качестве A_1 и A_2 можно взять $1+\varepsilon$ и $1-\varepsilon$. Предыдущие соображения слишком скудны для этого; метод, который действительно приводит к цели, далек от тривиальности.

7.5.3. Доказательство Карамата. Это доказательство опирается на известную теорему Вейерштрасса, согласно которой всякую непрерывную функцию можно равномерно аппроксимировать многочленами ***). Точнее, нам нужен следующий факт: пусть функция $g(x)$ непрерывна при $0 \leqslant x \leqslant 1$, и пусть ε — поло-

*) Hardy and Littlewood [2].

**) Karamata [1].

***) Доказательство имеется в § 13.3.3. Другое доказательство см. у Гурса, курс анализа, т. I, § 197.

жительное число; тогда существуют такие многочлены $p(x)$, $P(x)$, что

$$p(x) \leqslant g(x) \leqslant P(x) \tag{1}$$

и

$$\int_0^1 \{g(x)-p(x)\}\,dx \leqslant \varepsilon, \quad \int_0^1 \{P(x)-g(x)\}\,dx \leqslant \varepsilon. \tag{2}$$

Чтобы вывести это из теоремы Вейерштрасса, достаточно заметить, что соотношения (1), (2) выполнены, если многочлены $p(x)$, $P(x)$ отличаются не более чем на $\frac{1}{2}\varepsilon$ от функций $g(x)-\frac{1}{2}\varepsilon$, $g(x)+\frac{1}{2}\varepsilon$.

Построить многочлены, удовлетворяющие условиям (1) и (2), можно и в случае, когда функция $g(x)$ имеет в некоторой точке интервала, скажем при $x=c$, разрыв первого рода. Пусть, например, $g(c-0)<g(c+0)$. Положим $\varphi(x)=g(x)+\frac{1}{2}\varepsilon$ при $x<c-\delta$ и при $x>c$; если же $c-\delta \leqslant x \leqslant c$, то положим $\varphi(x)=\max\left\{l(x),\, g(x)+\frac{1}{4}\varepsilon\right\}$, где $l(x)$ — линейная функция от x, такая что $l(c-\delta)=g(c-\delta)+\frac{1}{2}\varepsilon$, $l(c)=g(c+0)+\frac{1}{2}\varepsilon$. Функция $\varphi(x)$ непрерывна, и $\varphi(x)>g(x)$. Легко понять, что при достаточно малом δ многочлен $P(x)$, достаточно хорошо аппроксимирующий функцию $\varphi(x)$, обладает требуемыми свойствами. Подобным же образом строится многочлен $p(x)$.

Чтобы доказать теорему Харди и Литтлвуда, мы докажем сначала, что для всякого многочлена $P(x)$

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n P(x^n)=\int_0^1 P(t)\,dt. \tag{3}$$

Очевидно, достаточно рассмотреть случай, когда $P(x)=x^k$ с некоторым k. Но в этом случае

$$(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n P(x^n)=(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+kn}=$$
$$=\frac{1-x}{1-x^{k+1}}\left\{(1-x^{k+1})\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x^{k+1})^n\right\}\to\frac{1}{k+1}=\int_0^1 x^k\,dx,$$

что и утверждалось.

Далее,

$$\lim(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n g(x^n)=\int_0^1 g(t)\,dt, \tag{4}$$

где $g(t)$ — любая непрерывная функция или даже функция, имеющая разрыв первого рода. Действительно, пусть $p(x)$ и $P(x)$ — многочлены, удовлетворяющие условиям (1) и (2). Так как $g(x) \leqslant P(x)$ и коэффициенты положительны, то

$$\overline{\lim}\,(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n g(x^n) \leqslant \overline{\lim}\,(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n P(x^n) = \int_0^1 P(t)\,dt < \int_0^1 g(t)\,dt + \varepsilon,$$

поскольку же ε произвольно,

$$\overline{\lim}\,(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n g(x^n) \leqslant \int_0^1 g(t)\,dt.$$

Подобным же образом, пользуясь многочленом $p(x)$, мы получаем неравенство

$$\underline{\lim}\,(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n g(x^n) \geqslant \int_0^1 g(t)\,dt.$$

Этим равенство (4) доказано.

Положим теперь $g(t)=0$, если $0 \leqslant t < e^{-1}$, и $g(t)=\frac{1}{t}$, если $e^{-1} \leqslant t \leqslant 1$. Очевидно,

$$\int_0^1 g(t)\,dt = \int_{e^{-1}}^1 \frac{dt}{t} = 1. \tag{5}$$

Если $x=e^{-1/N}$, то

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n g(x^n) = \sum_{n \leqslant \frac{1}{\log \frac{1}{x}}} a_n = \sum_{n=0}^{N} a_n = s_N,$$

так что, в силу равенств (4) и (5), $s_N \sim \frac{1}{1-x} \sim N$. Этим теорема доказана *).

7.6. Теорема Абеля и ее обращение. В этом параграфе мы возвращаемся к вопросу, уже обсуждавшемуся в гл. I. В § 1.2.2 мы доказали для вещественных рядов теорему Абеля: *если ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

*) См. также Wielandt [1]. (*Примечание переводчика.*)

сходится к сумме s, *то*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \to s,$$

когда $x \to 1$ *вдоль вещественной оси*. В § 1.2.3 мы доказали теорему Таубера, утверждающую, что *обратное заключение верно, если* $a_n = o(1/n)$. Теперь мы рассмотрим некоторые усиления этих теорем *).

7.6.1. *Если*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s, \tag{1}$$

то

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \to s, \tag{2}$$

когда $z \to 1$ *вдоль любого пути, лежащего между двумя хордами единичной окружности, выходящими из точки* $z = 1$.

Как и в § 1.2.2, достаточно доказать, что степенной ряд равномерно сходится; но теперь мы должны доказать равномерную сходимость в области, ограниченной указанными хордами и дугой окружности достаточно малого радиуса с центром в точке $z = 1$.

Применим к нашим условиям соображения, использованные при доказательстве леммы Абеля (§ 1.1.3.1). Пусть

$$s_{n,p} = a_n + a_{n+1} + \ldots + a_p,$$

так что $|s_{n,p}| < \varepsilon$ $(n_0 \leqslant n < p)$. Тогда

$$\sum_{\nu=n}^{m} a_\nu z^\nu =$$
$$= s_{n,n} z^n + (s_{n,n+1} - s_{n,n}) z^{n+1} + \ldots + (s_{n,m} - s_{n,m-1}) z^m =$$
$$= s_{n,n}(z^n - z^{n+1}) + \ldots + s_{n,m-1}(z^{m-1} - z^m) + s_{n,m} z^m.$$

Следовательно, при $n \geqslant n_0$

$$\left|\sum_{\nu=n}^{m} a_\nu z^\nu\right| \leqslant \varepsilon \left\{\sum_{\nu=n}^{m-1} |z^\nu - z^{\nu+1}| + |z|^m\right\} <$$
$$< \varepsilon \left\{|1 - z| \sum_{\nu=0}^{\infty} |z|^\nu + 1\right\} = \varepsilon \left\{\frac{|1-z|}{1-|z|} + 1\right\}.$$

Теперь доказательство заканчивается так же, как § 1.2.2, если отношение $|1-z|/(1-|z|)$ остается ограниченным, когда $z \to 1$ вдоль рассматриваемого пути. Это отношение принимает

*) Landau, *Ergebnisse*, гл. III; Hardy and Littlewood [1], [2], [3], [4].

сколь угодно большие значения в точках, сколь угодно близких к 1, но еще более близких к окружности. В этом и заключается причина ограничения, наложенного на путь.

Итак, предположим, что

$$|1-z| \leqslant k(1-|z|) \qquad (k>1). \tag{3}$$

Это неравенство удовлетворяется в области, ограниченной кривой

$$|1-z| = k(1-|z|).$$

После подстановки $1-z=\rho e^{i\varphi}$ мы получаем: $\rho = k - k\,|1-\rho e^{i\varphi}|$, т. е. $(\rho-k)^2 = k^2(1-2\rho\cos\varphi+\rho^2)$, т. е.

$$\rho = 2\,\frac{k^2\cos\varphi - k}{k^2-1}.$$

Таким образом, кривая имеет две ветви, выходящие из точки $z=1$, каждая из которых образует с вещественной осью угол $\arccos(1/k)$. При достаточно большом k эта кривая охватывает любую область интересующего нас типа. Поскольку в области, ограниченной кривой, неравенство (3) удовлетворяется, этим теорема доказана.

7.6.2. Подобное же усиление можно получить для теоремы Таубера.

Если $a_n = o(1/n)$ и $f(z)\to s$, когда $z\to 1$ вдоль некоторого пути, удовлетворяющего предыдущим условиям, то ряд $\sum a_n$ сходится к сумме s.

Доказательство, данное в § 1.2.3, нуждается лишь в небольшом изменении. Мы должны доказать, что

$$S_1 - S_2 = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n z^n - \sum_{n=0}^{N} a_n(1-z^n) \to 0,$$

где $N=[1/(1-|z|)]$. Как в § 1.2.3, если $|na_n|<\varepsilon$ при $n>N$, то

$$|S_1| = \left|\sum_{N+1}^{\infty} na_n \frac{z^n}{n}\right| < \frac{\varepsilon}{N+1}\sum_{N+1}^{\infty}|z|^n < \frac{\varepsilon}{(N+1)(1-|z|)} < \varepsilon.$$

Но $|1-z^n| = |(1-z)(1+z+\ldots+z^{n-1})| \leqslant |1-z|\,n$. Следовательно, если выполнено неравенство § 7.6.1 (3), то

$$|S_2| \leqslant \sum_{n=1}^{N} |na_n(1-z)| \leqslant k(1-|z|)\sum_{n=1}^{N} n|a_n| \leqslant \frac{k}{N}\sum_{n=1}^{N} n|a_n|,$$

правая же часть, согласно лемме § 1.2.3, стремится к нулю. Этим теорема доказана.

7.6.3. Теорема Таубера для регулярных путей. Теорему Абеля, по крайней мере в предыдущей формулировке, нельзя распространить на пути, касательные к единичной окружности. Например, известно *), что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-b} e^{in^a} \qquad (0<a<1)$$

сходится при $b>1-a$, но если $b>1-\frac{1}{2}a$, то функция

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} n^{-b} e^{in^a} z^n$$

не стремится ни к какому пределу вдоль дуги некоторой окружности, касающейся единичной окружности при $z=1$.

Напротив, теорема Таубера может быть распространена на пути, касательные к окружности, которые достаточно регулярны.

Мы будем называть путь «регулярным», если он определяется уравнениями $x=x(t)$, $y=y(t)$, у которых производные $x'(t)$ и $y'(t)$ непрерывны и нигде не обращаются в нуль одновременно, так что в каждой точке имеется определенная касательная.

Если $a_n=o\left(\frac{1}{n}\right)$ и $f(z)\to s$, когда $z\to 1$ вдоль некоторого регулярного пути, проходящего внутри круга, то ряд $\sum a_n$ сходится к сумме s.

Без ущерба для общности можно считать, что $s=0$. Пусть C — рассматриваемый путь. Тогда интеграл

$$\int_z^1 f(w)\,dw,$$

взятый вдоль C, существует, и мы покажем, что при $z\to 1$ он представляет собой $o(|1-z|)$. Каково бы ни было ε, для точек w кривой C, достаточно близких к 1, выполнено неравенство $|f(w)|<\varepsilon$. Из него следует, что

$$\left|\int_z^1 f(w)\,dw\right| \leqslant \varepsilon l(z),$$

где $l(z)$ — длина кривой C от z до 1. Но $l(z)\sim|1-z|$ при $z\to 1$; действительно, если точка $z=1$ отвечает значению $t=0$, то

$$\frac{l(z)}{t}=\frac{1}{t}\int_0^t [\{x'(u)\}^2+\{y'(u)\}^2]^{1/2}\,du \to [\{x'(0)\}^2+\{y'(0)\}^2]^{1/2}$$

*) См. Hardy and Littlewood [3], стр. 207.

(функции $x'(u)$ и $y'(u)$ непрерывны) и $\frac{x-1}{t} \to x'(0)$, $\frac{y}{t} \to y'(0)$. Следовательно,

$$\int_z^1 f(w)\,dw = o(|1-z|). \tag{1}$$

Если теперь z и z' — точки, лежащие на C, то

$$\int_z^{z'} f(w)\,dw = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}\left(z'^{n+1} - z^{n+1}\right).$$

Так как $a_n = o(1/n)$, то этот ряд сходится равномерно относительно z' при $|z'| \leqslant 1$. Следовательно, переход к пределу при $z' \to 1$ дает равенство

$$\int_z^1 f(w)\,dw = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(1 - z^{n+1}). \tag{2}$$

Положим $N = [1/|1-z|]$. Мы можем написать

$$\int_z^1 f(w)\,dw = \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2,$$

где

$$\sum\nolimits_1 = \sum_{n=0}^{N} \frac{a_n}{n+1}(1 - z^{n+1}), \quad \sum\nolimits_2 = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(1 - z^{n+1}).$$

Очевидно,

$$\sum\nolimits_2 = \sum_{N+1}^{\infty} o\left(\frac{1}{n^2}\right) = o\left(\frac{1}{N}\right) = o(|1-z|). \tag{3}$$

Далее,

$$\begin{aligned} 1 - z^{n+1} &= (1-z)(1 + z + \ldots + z^n) = \\ &= (1-z)(n+1) - (1-z)^2\{n + (n-1)z + \ldots + z^{n-1}\} = \\ &= (1-z)(n+1) + O(|1-z|^2 n^2), \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \sum\nolimits_1 &= (1-z)\sum_{n=0}^{N} a_n + O\left(|1-z|^2 \sum_{n=1}^{N} n|a_n|\right) = \\ &= (1-z)s_N + o(|1-z|^2 N) = (1-z)s_N + o(|1-z|). \end{aligned} \tag{4}$$

Из формул (1), (3) и (4) следует, что $s_N = o(1)$. **Этим теорема** доказана.

7.6.4. Усиление теоремы Таубера, принадлежащее Литтлвуду. Теперь мы перейдем к усилению совсем другого рода. Во всех формах теоремы Таубера, рассмотренных до сих пор, условие $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ играет роль, которая кажется существенной. Однако Литтлвудом было открыто, что это условие может быть заменено более слабым условием $a_n = O(1/n)$. Ради простоты мы ограничимся здесь приближением вдоль вещественной оси, хотя теорему можно доказать и для комплексных путей.

7.6.5. Мы воспользуемся следующей леммой.

Пусть $f(x)$ — вещественная функция, обладающая при $0 \leqslant x < 1$ производными двух первых порядков. Если при $x \to 1$

$$f(x) = o(1), \quad f''(x) = O\left\{\frac{1}{(1-x)^2}\right\},$$

то $f'(x) = o\left(\frac{1}{1-x}\right)$.

Положим $x' = x + \delta(1-x)$, где $0 < \delta < 1/2$. Мы можем написать

$$f(x') = f(x) + \delta(1-x) f'(x) + \frac{1}{2}\delta^2 (1-x)^2 f''(\xi),$$

где $x < \xi < x'$. Следовательно,

$$(1-x) f'(x) = \frac{f(x') - f(x)}{\delta} + \frac{1}{2}\delta(1-x^2) f''(\xi) = \frac{f(x') - f(x)}{\delta} + O(\delta) \qquad (1)$$

[мы воспользовались тем, что

$$f''(\xi) = O\left\{\frac{1}{(1-\xi)^2}\right\} = O\left\{\frac{1}{(1-x')^2}\right\} = O\left\{\frac{1}{(1-x)^2}\right\}\Bigg].$$

Выбирая сначала значение δ достаточно малым, а затем значение x достаточно близким к 1, мы можем сделать правую часть равенства (1) сколь угодно малой. Этим лемма доказана.

7.6.6. Теорема Литтлвуда. *Если $f(x) = \sum a_n x^n \to s$ при $x \to 1$ и $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$, то ряд $\sum a_n$ сходится к сумме s.*

Доказательство *) опирается на теорему § 7.5.1, и при доказательстве последней мы уже преодолели наиболее серьезные трудности. Очевидно, мы можем считать без ущерба для общности, что предел s равен нулю. Тогда при $x \to 1$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = o(1).$$

---

*) Это доказательство отличается от первоначального доказательства Литтлвуда; см. Littlewood [3].

Далее, так как $a_n = O(1/n)$, то

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\,a_n x^{n-2} = O\left\{\sum_{n=2}^{\infty} (n-1)\,x^{n-2}\right\} = O\left\{\frac{1}{(1-x)^2}\right\},$$

и, в силу предыдущей леммы,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = o\left(\frac{1}{1-x}\right).$$

Пусть $|na_n| \leqslant c$. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{na_n}{c}\right)x^{n-1} = \frac{1}{1-x} - \frac{f'(x)}{c} \sim \frac{1}{1-x}.$$

Но коэффициенты этого ряда все положительны, и, таким образом, согласно теореме § 7.5.1, $\sum_{\nu=1}^{n}\left(1 - \frac{\nu a_\nu}{c}\right) \sim n$. Следовательно,

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu a_\nu = o(n). \tag{1}$$

Эта асимптотическая формула для конечной суммы представляет собой значительный шаг в нужном направлении. Но для завершения доказательства нужны дополнительные соображения.

Пусть w_n обозначает левую часть соотношения (1). Тогда

$$f(x) - a_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_n - w_{n-1}}{n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} w_n\left(\frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1}\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} w_n\left\{\frac{x^n - x^{n+1}}{n+1} + \frac{x^n}{n(n+1)}\right\} =$$

$$= (1-x)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_n}{n+1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_n}{n(n+1)} x^n.$$

Так как $w_n = o(n)$, то при $x \to 1$ первый член справа есть $o(1)$, а так как, сверх того, $f(x) \to 0$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_n}{n(n+1)} x^n \to -a_0.$$

Но $\frac{w_n}{n(n+1)} = o\left(\frac{1}{n}\right)$, так что, в силу теоремы Таубера,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_n}{n(n+1)} = -a_0.$$

Левая часть этого равенства есть

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{w_n}{n(n+1)}=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}w_n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=$$

$$=\lim_{N\to\infty}\left\{\sum_{n=1}^{N}\frac{w_n-w_{n-1}}{n}-\frac{w_N}{N+1}\right\}=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}a_n,$$

что вместе с предыдущим равенством заканчивает доказательство.

7.7. Частичные суммы степенного ряда *). Изучение частичных сумм степенного ряда облегчается применением формул теории рядов Фурье. Мы воспользуемся некоторыми из этих формул, взяв их из гл. XIII, но во всех случаях, в которых они будут здесь применяться, они прямо выводятся из равномерной сходимости.

Пусть

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n \qquad (|z|<1).$$

Положим $s_n(z)=a_0+a_1z+\ldots+a_nz^n$. Пусть, далее,

$$k(r,\ \theta)=\frac{1-r^2}{2(1-2r\cos\theta+r^2)}=\frac{1}{2}+r\cos\theta+r^2\cos 2\theta+\ldots$$

и

$$k_n(r,\ \theta)=\frac{1-r^2-2r^{n+1}\{\cos(n+1)\theta-r\cos n\theta\}}{2(1-2r\cos\theta+r^2)}=$$

$$=\frac{1}{2}+r\cos\theta+\ldots+r^n\cos n\theta.$$

Тогда

$$s_n(re^{i\theta})=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\rho e^{i(\theta-\varphi)})\,k_n\left(\frac{r}{\rho},\ \varphi\right)d\varphi \qquad (0<r<\rho<1). \tag{1}$$

Эту формулу можно доказать прямо почленным интегрированием. Она представляет собою специальный случай формулы Парсеваля (§ 13.5.4).

В силу интегральной формулы Дирихле (§ 13.2),

$$k_n(r,\ \theta)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(\theta-\varphi)}{2\sin\frac{1}{2}(\theta-\varphi)}\,k(r,\ \varphi)\,d\varphi. \tag{2}$$

---

*) Landau [2], [3], [4] и *Ergebnisse*, гл. I.

Таким образом, s_n можно представить повторным интегралом, содержащим f и k:

$$s_n(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi} f(\rho e^{i(\theta-\varphi)})\,d\varphi \int_0^{2\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(\varphi-\psi)}{\sin\frac{1}{2}(\varphi-\psi)}\,k\left(\frac{r}{\rho},\ \psi\right)d\psi. \quad (3)$$

Мы рассматриваем также арифметические средние частичных сумм $\sigma_n(z) = \frac{1}{n}\{s_0(z)+s_1(z)+\ldots+s_{n-1}(z)\}$. В силу формулы (1),

$$\sigma_n(re^{i\theta}) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\rho e^{i(\theta-\varphi)})\,K_n\left(\frac{r}{\rho},\ \varphi\right)d\varphi, \quad (4)$$

где $K_n(r,\ \theta) = \frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{n-1} k_\nu(r,\ \theta)$; в силу же интегральной формулы Фейера (§ 13.3.1),

$$K_n(r,\ \theta) = \frac{1}{2n\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\frac{1}{2}n(\theta-\varphi)}{\sin^2\frac{1}{2}(\theta-\varphi)}\,k(r,\ \varphi)\,d\varphi. \quad (5)$$

7.7.1. Ограниченные степенные ряды. Предположим теперь, что функция $f(z)$ ограничена в единичном круге.

Если $|f(z)| \leqslant M$ при $|z| < 1$, то $|\sigma_n(z)| \leqslant M$ при $|z| < 1$ для всех значений n. Обратно, если $|\sigma_n(z)| \leqslant M$ при $|z| < 1$ для всех значений n, то $|f(z)| \leqslant M$ при $|z| < 1$.

Из предыдущих формул мы заключаем, что при $r < 1$ функции $k(r,\ \theta)$ и $K_n(r,\ \theta)$ положительны. После этого из формулы (4) следует, что если $|f(z)| \leqslant M$, то

$$|\sigma_n(re^{i\theta})| \leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} MK_n\left(\frac{r}{\rho},\ \varphi\right)d\varphi.$$

Но справа стоит то, во что превращается σ_n, если $f(z) = M$, т. е. M. Этим доказана первая часть теоремы.

Далее, при $n \to \infty$ сумма $s_n(z)$, а с нею и сумма $\sigma_n(z)$, стремится к $f(z)$. Из этого сразу следует вторая часть теоремы.

7.7.2. Соответствующие теоремы о суммах $s_n(z)$ не столь просты. Причина в том, что функции k_n, в отличие от функций K_n, не всегда положительны. Из неравенства $|f(z)| \leqslant M$ не следует, что $|s_n(z)| \leqslant M$ для всех значений n и z. Более того, известно *), что верхняя грань чисел $|s_n(z)|$, взятая по всем функциям $f(z)$, для которых $|f(z)| \leqslant M$, стремится вместе с n к бесконечности. Верна, однако, следующая теорема.

---

*) Landau, *Ergebnisse*, § 2.

Существует такая абсолютная постоянная A, что

$$|s_n(z)| < AM \log n$$

для всех функций $f(z)$, удовлетворяющих условию $|f(z)| \leqslant M$.

Если $|f(z)| \leqslant M$, то из формулы § 7.7 (3) следует, что

$$|s_n(re^{i\theta})| \leqslant \frac{M}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} k\left(\frac{r}{\rho}, \psi\right) d\psi \int_0^{2\pi} \left| \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(\varphi-\psi)}{\sin\frac{1}{2}(\varphi-\psi)} \right| d\varphi.$$

Внутренний интеграл равен

$$2\int_0^{\pi} \left| \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{\sin\frac{1}{2}\alpha} \right| d\alpha < 2 \int_0^{1/\left(n+\frac{1}{2}\right)} \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{\sin\frac{1}{2}\alpha} d\alpha + 2 \int_{1/\left(n+\frac{1}{2}\right)}^{\pi} \frac{d\alpha}{\sin\frac{1}{2}\alpha} = O(1) + O(\log n),$$

и, в силу формулы § 7.7 (2) с $n=0$,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k\left(\frac{r}{\rho}, \psi\right) d\psi = \frac{1}{2}.$$

Этим теорема доказана.

7.7.3. Нетрудно проверить, что в круге радиуса r', меньшего, чем 1, суммы $s_n(z)$ равномерно ограничены; действительно, в таком круге равномерно ограничены функции $k_n(r, \theta)$. Верхняя грань модулей сумм $s_n(z)$ зависит от M и от r'. Менее очевидно, что r' можно выбрать раз навсегда так, чтобы эта верхняя грань была в точности равна M.

Если $|f(z)| \leqslant M$, то $|s_n(z)| \leqslant M$ при $|z| \leqslant \frac{1}{2}$ *).

Ясно, что

$$k_n(r, \varphi) \geqslant \frac{1-r^2-2r^{n+1}(1+r)}{2(1-r)^2}.$$

Если $r \leqslant \frac{1}{2}$ и $n \geqslant 1$, то числитель не меньше, чем $1-\frac{1}{4}-2\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}\right)=0$. Следовательно, $k_n(r, \varphi) \geqslant 0$ при $r \leqslant 1/2$, и мы можем поступить так же, как в § 7.7.1. Мы пишем

$$|s_n(re^{i\theta})| \leqslant \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} Mk_n\left(\frac{r}{\rho}, \varphi\right) d\varphi \qquad \left(r \leqslant \frac{1}{2}\rho\right)$$

*) Fejer [5].

и замечаем, что правая часть есть то, во что превращается $s_n(z)$, если $f(z) = M$, т. е. M. Этим теорема доказана.

Число $1/2$ есть наибольшее из чисел, обладающих указанным свойством. Действительно, рассмотрим функцию $f(z) = \frac{z-a}{az-1}$ $(0 < a < 1)$. Здесь $|f(e^{i\theta})| = 1$, так что $|f(z)| \leqslant 1$ при $|z| \leqslant 1$. Однако $s_1(z) = a + (a^2 - 1)z$, $s_1\left(-\frac{1}{2a}\right) = \frac{a^2+1}{2a} > 1$, причем точка $-1/(2a)$, в которой $s_1(z) > 1$, сколь угодно близка к окружности $|z| = 1/2$, поскольку a может быть взято сколь угодно близким к 1.

7.8. Нули частичных сумм *). Пусть

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots \qquad (a_0 \neq 0)$$

— степенной ряд, радиус сходимости которого равен 1. Положим

$$s_n(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n.$$

Если $a_n \neq 0$, то $s_n(z)$, будучи многочленом степени n, имеет n нулей.

Если функция $f(z)$ имеет нули внутри круга сходимости, то, согласно теореме Гурвица (§ 3.45), каждый такой нуль является предельной точкой для нулей многочленов $s_n(z)$.

Рассмотрим сначала простейшую функцию интересующего нас типа, именно, функцию

$$f(z) = \frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \ldots$$

Здесь $s_n(z) = 1 + z + \ldots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1-z}$. Нули многочлена $s_n(z)$ равномерно распределены по единичной окружности, и очевидно, что каждая точка окружности является предельной для таких нулей.

Замечательно, что общий случай очень похож на этот простейший случай. Это было открыто Иенчем, который доказал, что *для всякого степенного ряда каждая точка границы круга сходимости является предельной для нулей частичных сумм ряда.*

Мы выведем эту теорему из совсем простых соображений, основанных на теории алгебраических уравнений.

Пусть δ — положительное число, и n — такое число, что

$$|a_n| > \frac{|a_0|}{(1+\delta)^n}. \tag{1}$$

Это неравенство выполняется для бесконечно многих значений n, так как в противном случае радиус сходимости ряда был бы больше единицы.

*) Jentzsch [1].

Пусть $z_1, z_2, \ldots, z_n$ — нули многочлена $s_n(z)$. Тогда

$$z_1 z_2 \ldots z_n = \frac{(-1)^n a_0}{a_n},$$

так что

$$|z_1 z_2 \ldots z_n| < (1+\delta)^n.$$

Пусть $z_1, \ldots, z_k$ — нули многочлена $s_n(z)$, лежащие в круге $|z| \leqslant 1-\delta$. В силу теоремы Гурвица (§ 3.4.5), для достаточно больших значений n число k постоянно и

$$|z_1 z_2 \ldots z_k| > K,$$

где K зависит только от δ.

Пусть $z_{n-p+1}, \ldots, z_n$ — нули в области $|z| > 1+\varepsilon$. Тогда

$$(1+\varepsilon)^p < |z_{n-p+1} \ldots z_n| = \left| \frac{z_1 z_2 \ldots z_n}{z_1 \ldots z_k z_{k+1} \ldots z_{n-p}} \right| < \frac{(1+\delta)^n}{K(1-\delta)^{n-p}}.$$

Следовательно,

$$p < \frac{n\{\log(1+\delta) - \log(1-\delta)\} - \log K}{\log(1+\varepsilon) - \log(1-\delta)} < \frac{An\delta - \log K}{A\varepsilon}.$$

Выбирая сначала ε, затем δ и затем n, можно сделать отношение p/n произвольно малым.

Таким образом, для заданных δ, ε и η число нулей многочлена $s_n(z)$, лежащих в круге $|z| \leqslant 1+\varepsilon$, больше $n(1-\eta)$, если n достаточно велико и удовлетворяет неравенству (1).

7.8.1. Из доказанного следует, что *нули частичных сумм имеют по крайней мере одну предельную точку на границе круга сходимости.*

Несколько более полные сведения можно получить, рассматривая сумму

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{z_\nu} = -\frac{a_1}{a_0}.$$

Полагая $z_\nu = r_\nu e^{i\theta_\nu}$, мы видим, что

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\cos\theta_\nu}{r_\nu} = -\operatorname{Re}\left(\frac{a_1}{a_0}\right). \tag{1}$$

Если $|\theta_\nu| > \frac{1}{2}\pi + \alpha$ с $\alpha > 0$ для всех ν, то, согласно предыдущей теореме, левая часть равенства (1) меньше, чем

$$\frac{-n(1-\eta)\sin\alpha}{1+\varepsilon}.$$

Но при достаточно большом n это несовместимо с равенством (1). Следовательно, в каждом угле, содержащем угол $\left(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right)$, имеются нули. Подобным же образом нули имеются в каждом угле, большем π.

Чтобы доказать теорему Иенча, мы должны заменить такой угол произвольно малым углом. Это достигается применением надлежащего конформного преобразования.

7.8.2. Положим

$$w=\frac{\cos\lambda-z}{z\cos\lambda-1},\quad z=\frac{w+\cos\lambda}{1+w\cos\lambda},\tag{1}$$

где $0<\lambda<\frac{1}{2}\pi$ и $f(\cos\lambda)\neq 0$. Это преобразование переводит единичный круг плоскости z в единичный круг плоскости w. Точка $z=1$ переходит в точку $w=1$. Точка $z=e^{i\lambda}$ переходит в точку

$$w=\frac{\frac{1}{2}\left(e^{-i\lambda}-e^{i\lambda}\right)}{\frac{1}{2}\left(e^{2i\lambda}-1\right)}=-e^{-i\lambda}=e^{i(\pi-\lambda)},$$

а точка $z=e^{-i\lambda}$ — в точку $w=e^{-i(\pi-\lambda)}$. Таким образом, если $z=re^{i\theta}$, $w=\rho e^{i\varphi}$, то дуга $-\lambda\leqslant\theta\leqslant\lambda$ единичной окружности преобразуется в дугу $-\pi+\lambda\leqslant\varphi\leqslant\pi-\lambda$.

Нули z_ν многочлена $s_n(z)$ преобразуются в нули $w_\nu=\rho e^{i\varphi_\nu}$ функции

$$(1+w\cos\lambda)^n s_n\left(\frac{w+\cos\lambda}{1+w\cos\lambda}\right)=s_n(\cos\lambda)+$$
$$+w\left\{n\cos\lambda\, s_n(\cos\lambda)+\sin^2\lambda\, s_n'(\cos\lambda)\right\}+\ldots=b_0+b_1w+\ldots,$$

и, согласно формуле (1) из § 7.8.1,

$$\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\cos\varphi_\nu}{\rho_\nu}=-\operatorname{Re}\left(\frac{b_1}{b_0}\right)=-n\cos\lambda-\sin^2\lambda\operatorname{Re}\left\{\frac{s_n'(\cos\lambda)}{s_n(\cos\lambda)}\right\}.\tag{2}$$

Так как $s_n(\cos\lambda)\to f(\cos\lambda)$ и $s_n'(\cos\lambda)\to f'(\cos\lambda)$ и так как, согласно нашему предположению, $f(\cos\lambda)\neq 0$, то при $n\to\infty$ последний член соотношения (2) стремится к некоторому пределу. Следовательно, при $n\to\infty$

$$\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\cos\varphi_\nu}{\rho_\nu}\sim -n\cos\lambda.\tag{3}$$

Допустим теперь, что область плоскости w

$$1-\varepsilon<\rho<1+\varepsilon,\quad -(\pi-\lambda+\alpha)<\varphi<\pi-\lambda+\alpha,\tag{4}$$

где $0<\varepsilon<1$, $0<\alpha<\lambda$, свободна от нулей. Мы можем написать:

$$\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\cos\varphi_\nu}{\rho_\nu}=\sum_{\rho_\nu\leqslant 1-\varepsilon}+\sum_{1-\varepsilon<\rho_\nu<1+\varepsilon}+\sum_{\rho_\nu\geqslant 1+\varepsilon}=\sum\nolimits_1+\sum\nolimits_2+\sum\nolimits_3.\tag{5}$$

Так как окружности $\rho=1$ отвечает окружность $r=1$, то из соображений непрерывности следует, что окружностям $\rho=1-\varepsilon$, $\rho=1+\varepsilon$ отвечают кривые (в действительности тоже окружности), лежащие соответственно внутри и вне окружности $r=1$, которые можно сделать сколь угодно близкими к последней, взяв ε достаточно малым.

Число членов суммы $\sum_1$ меньше $K=K(\delta, \varepsilon, \lambda)$, и числа ρ_ν имеют положительную нижнюю грань, так как рассматриваемые нули функции $s_n(\cos\lambda)$ стремятся к нулям функции $f(\cos\lambda)$. Следовательно,

$$\sum\nolimits_1 < K. \tag{6}$$

Число членов суммы $\sum_3$, согласно § 7.8, меньше ηn, где η зависит от n, δ, ε, λ и стремится к нулю, когда $n\to\infty$ по некоторой последовательности значений. Следовательно,

$$\sum\nolimits_3 < \frac{\eta n}{1+\varepsilon}. \tag{7}$$

Число членов суммы $\sum_2$ превышает $n(1-\eta)-K$, и, в силу нашего предположения, для каждого члена этой суммы $\cos\varphi_\nu < -\cos(\lambda-\alpha)$. Следовательно,

$$\sum\nolimits_2 < \frac{n(1-\eta)-K}{1+\varepsilon}\cos(\lambda-\alpha). \tag{8}$$

Из (5), (6), (7), (8) следует, что

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\cos\varphi_\nu}{\rho_\nu} \leqslant -\frac{\sin(\lambda-\alpha)}{1+\varepsilon}.$$

Но это противоречит соотношению (3), если ε достаточно мало. Поэтому в области (4) имеются нули, а так как ε и α могут быть взяты сколь угодно малыми, то это значит, что нули имеются во всякой области, содержащей дугу $\rho=1$, $-\pi+\lambda<\varphi<\pi-\lambda$. Следовательно, в плоскости z нули имеются во всякой области, содержащей дугу $r=1$, $-\lambda<\theta<\lambda$. Наконец, так как и λ произвольно мало, то точка $z=1$ является предельной для нулей. Подобным же образом предельна для нулей каждая точка единичной окружности.

РАЗЛИЧНЫЕ ПРИМЕРЫ

1. Если $\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| \to R$, то радиус сходимости ряда $\sum a_n z^n$ равен R.

2. Если $\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \left\{1+\dfrac{c}{n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right\} R$, где $c>1$, то ряд $\sum a_n z^n$ абсолютно сходится во всех точках границы своего круга сходимости.

3. Если $\frac{a_n}{a_{n+1}} \to 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{s_n(z)}{a_n z^n} = \frac{z}{z-1}$ равномерно при $|z| \geqslant 1+\delta > 1$. Вывести из этого, что все точки, предельные для нулей частичных сумм, лежат внутри или на границе единичного круга *).

4. Показать, что при $x \to 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2} \sim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{1-x}}$$

и что при $z \to e^{\frac{2i\pi p}{q}}$ вдоль радиуса-вектора

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^{n^2} \sim \frac{1}{2q}\sqrt{\frac{\pi}{1-|z|}} \sum_{r=0}^{q-1} e^{\frac{2i\pi p r^2}{q}}.$$

5. Если $a_n \sim \log n$, то при $x \to 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \sim \frac{1}{1-x} \log \frac{1}{1-x}.$$

[Правая часть есть $\sum \left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right) x^n$.]

6. Если $a_n \sim \frac{1}{\log n}$, то при $x \to 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \sim \frac{1}{(1-x)\log\frac{1}{1-x}}.$$

[Если Σ_p обозначает сумму, распространенную на значения n в интервале $\frac{\varepsilon p}{\log(1/x)} < n \leqslant \frac{\varepsilon(p+1)}{\log(1/x)}$, то

$$\sum\nolimits_p \frac{x^n}{\log n} < \frac{\varepsilon e^{-\varepsilon p}}{\log\frac{1}{x}\log\frac{1}{\log\frac{1}{x}}},$$

и т. д.]

7. Показать, что если $a_n \geqslant 0$ и

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \sim \frac{1}{(1-x)^2},$$

то $s_n \sim \frac{1}{2} n^2$.

[Так как

$$f_1(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1} \sim \frac{1}{1-x},$$

то $\sum\limits_{\nu=0}^{n} \frac{a_\nu}{\nu+1} \sim n$, и остается воспользоваться суммированием по частям.]

*) S. Isumi [1].