8. Вообще, если $a_n \geqslant 0$ и $f(x) \sim (1-x)^{-\alpha}$ с $\alpha > 1$, то $s_n \sim \frac{n^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$. [Действительно,

$$f_{\alpha-1}(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-2} f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\alpha)} x^{\alpha+n-1} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n x^n}{n^{\alpha-1}},$$

и, с другой стороны,

$$f_{\alpha-1}(x) \sim \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-2} (1-t)^{-\alpha}\,dt = \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)(1-x)} \sim \frac{1}{\Gamma(\alpha)(1-x)}.$$

Следовательно, $\sum_{\nu=1}^{n} \frac{a_\nu}{\nu^{\alpha-1}} \sim \frac{n}{\Gamma(\alpha)}$. Остальное не представляет труда.]

9. Если функция $f(z)$ регулярна в некоторой области, содержащей начало, и $f(0)=1$, то для достаточно малых значений z возможно разложение вида *)

$$f(z) = (1+a_1 z)(1+a_2 z^2)(1+a_3 z^3)\ldots$$

[Предполагая, что разложение имеется, мы пишем $\frac{f'(z)}{f(z)} = c_1 + c_2 z + \ldots$ и последовательно определяем числа a_n, сравнивая коэффициенты двух частей уравнения

$$c_1 + c_2 z + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n a_n z^{n-1}}{1+a_n z^n}.$$

Из получающегося рекуррентного соотношения следует, что если $\mu_n = \max\limits_{\nu \leqslant n} |a_\nu|^{\frac{1}{\nu}}$, то $\mu_n^n \leqslant n \mu_{\frac{1}{2}n}^n + |c_n|$. Таким образом, числа μ_n ограничены, что позволяет обосновать процесс.]

10. Показать, что круг сходимости предыдущего произведения совпадает с кругом сходимости ряда $\sum a_n z^n$, но что степенной ряд для $f(z)$ может иметь больший круг сходимости.

11. Если радиус сходимости каждого из рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n$$

равен 1, то то же верно для рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n^2 z^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 b_n z^n.$$

---

*) Ritt [1].

12. Пусть радиус сходимости каждого из рядов

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n, \quad F(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n$$

равен 1. Если функция $f(z)$ регулярна во всех точках единичной окружности, за исключением точки $z=1$, и $b_n \geqslant 0$ для всех n, то функция $F(z)$ имеет особенность при $z=1$ *).

[Радиус сходимости ряда $\varphi(z)=\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 b_n z^n$ равен 1, так что (§ 7.2.1) функция $\varphi(z)$ имеет особенность при $z=1$. Согласно мультипликационной теореме Адамара (§ 4.6) особые точки функции $\varphi(z)$ являются произведениями особых точек функции $F(z)$ и функции

$$\bar{f}(z)=\sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n z^n.$$

Таким образом, $1=\alpha\beta$, где α, β — особые точки функций $F(z)$, $\bar{f}(z)$, и ясно, что $\beta=1$. Следовательно, $\alpha=1$.]

13. Если сумма ряда $\sum a_n z^n$ регулярна во всех точках границы его круга сходимости, за исключением точки z_0, то сумма всякого ряда, полученного из ряда $\sum a_n z^n$ вычеркиванием некоторых членов и имеющего тот же радиус сходимости, имеет особенность при $z=z_0$.

14. Показать, что теорема § 7.2.1 верна и в случае комплексных коэффициентов a_n, если $|\arg a_n| \leqslant \alpha < \frac{1}{2}\pi$ для всех n.

[Воспользоваться неравенством $|a_n| \leqslant \sec\alpha \operatorname{Re} a_n$.]

15. Функция $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2^n}}{n^2}$ непрерывна внутри и на границе единичного круга, но каждая точка единичной окружности является для нее особой.

16. Если функция $f(z)=\sum a_n z^n$ ограничена в единичном круге, то ряд $\sum |a_n|^2$ сходится. [См. § 2.5.]

Нижеследующие примеры относятся к области, пограничной между теорией степенных рядов и теорией функций действительного переменного. Представляется более удобным поместить их здесь, но в некоторых из них предполагается известной теория сходимости в среднем, излагаемая в § 12.5.

17. Если ряд $\sum |a_n|^2$ сходится, то

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})-f(r'e^{i\theta})|^2\, d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 (r^n - r'^n)^2.$$

Вывести из этого, что $f(re^{i\theta})$ при $r \to 1$ стремится в среднем к некоторой предельной функции $F(\theta)$ класса $L^2(0, 2\pi)$.

18. Показать, что если в предыдущем примере $f(z)=u+iv$, $F(\theta)=U+iV$, то при $r<1$ верны формулы Пуассона:

$$u(r, \theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2} U(\varphi)\, d\varphi,$$

$$v(r, \theta)-v(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{2r\sin(\theta-\varphi)}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2} U(\varphi)\, d\varphi,$$

*) Bohnenblust [1].

19. Показать, что при $r \to 1$ в предыдущих примерах $u(r, \theta) \to U(\theta)$ для всякой точки θ лебеговского множества функции $U(\theta)$. Вывести из этого, что $f(re^{i\theta}) \to F(\theta)$ при $r \to 1$ для почти всех значений θ.

[Доказательство аналогично имеющемуся в § 13.3.4.]

20. Показать, что ограниченная аналитическая функция стремится к определенному пределу при радиальном приближении к почти каждой точке границы круга сходимости.

21. Если $U(\theta) \geqslant 0$ для всех значений θ, то $u(r, \theta) \geqslant 0$ для всех значений r и θ.

22. Пусть функция $f(z)$ регулярна и ограничена при $|z| < 1$. Если $f(z) \to \to 0$ при $r \to 1$ для всех значений θ из некоторого интервала, то функция $f(z)$ тождественно равна нулю.

[В предположении, что упомянутый интервал содержит интервал $0 \leqslant \theta \leqslant \leqslant \frac{2\pi}{p}$, рассмотреть функцию

$$g(z) = f(z)\, f\left(ze^{\frac{2i\pi}{p}}\right) \ldots f\left(ze^{\frac{2(p-1)i\pi}{p}}\right).]$$

23. Вообще, если функция $f(z)$ ограничена и при радиальном приближении к окружности стремится к нулю для значений θ, образующих множество положительной меры, то она тождественно равна нулю *).

[Пусть E — множество значений θ, для которых $f(z) \to 0$, и пусть $m(E) = = \mu > 0$. Положим $u_1(\theta) = \lambda/\mu$ на E и $= -\frac{\lambda}{2\pi - \mu}$ на CE. Пусть $g(z)$ — соответствующая аналитическая функция, определенная формулами примера 18. Тогда $g(0) = 0$. Положим $h(z) = e^{g(z)}$, так что $h(0) = 1$. Мы можем написать:

$$f(0) = f(0)\,h(0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=1} f(z)\,h(z)\,\frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{CE} f(z)\,h(z)\,\frac{dz}{z},$$

$$|f(0)| < Ae^{-\frac{\lambda}{2\pi - \mu}}.$$

Так как λ произвольно велико, то $f(0) = 0$. Применяя то же рассуждение к функции $f(z)/z$, мы видим, что $f'(0) = 0$, и т. д.]

24. Пусть $U(\theta)$ — функция, интегрируемая по Лебегу. Тогда функция

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{1 + ze^{-i\varphi}}{1 - ze^{i\varphi}}\, U(\varphi)\, d\varphi \qquad (|z| < 1)$$

стремится при $r \to 1$ к определенному пределу для почти всех значений θ **).

[Без ограничения общности можно считать, что $U(\varphi) \geqslant 0$. Тогда $\operatorname{Re} f(z) \geqslant \geqslant 0$, так что функция $\frac{1}{1 + f(z)}$ ограничена в единичном круге. Следовательно, она стремится к пределу при $r \to 1$ для почти всех значений θ, и ясно, что этот предел почти всюду отличен от нуля.]

---

*) См. Bieberbach, *Funktionentheorie*, II, стр. 156.

**) Plessner [1].

ГЛАВА VIII

ЦЕЛЫЕ ФУНКЦИИ

8.1. Разложение целой функции на множители. Целая функция есть аналитическая функция, не имеющая особенностей в конечной части плоскости. Простейшими такими функциями являются многочлены. Многочлен $f(z)$, имеющий нули в точках $z_1, z_2, \ldots, z_n$, отличных от 0, может быть стандартным образом разложен на множители:

$$f(z)=f(0)\left(1-\frac{z}{z_1}\right)\left(1-\frac{z}{z_2}\right)\ldots\left(1-\frac{z}{z_n}\right).$$

Столь же важную роль играют нули целой функции в общем случае. Однако целая функция, не являющаяся многочленом, может иметь бесконечно много нулей $z_1, z_2, \ldots$, и произведение

$$\prod\left(1-\frac{z}{z_n}\right),$$

распространенное на эти нули, может быть расходящимся. Вследствие этого целую функцию не всегда можно разложить на множители таким простым способом, и мы должны рассмотреть менее простые множители, чем $1-\frac{z}{z_\nu}$.

Выражения

$$E(u,\ 0)=1-u,\quad E(u,\ p)=(1-u)e^{u+\frac{u^2}{2}+\ldots+\frac{u^p}{p}}\qquad (p=1,\ 2,\ \ldots)$$

называются *первичными множителями.* Всякий первичный множитель обращается в нуль при $u=1$, а его поведение при $u\to 0$ зависит от p. При $|u|<1$

$$\log E(u,\ p)=-\frac{u^{p+1}}{p+1}-\frac{u^{p+2}}{p+2}-\ldots$$

Следовательно, если $k>1$ и $|u|\leqslant\frac{1}{k}$, то

$$|\log E(u,\ p)|\leqslant|u|^{p+1}+|u|^{p+2}+\ldots\leqslant|u|^{p+1}\left\{1+\frac{1}{k}+\frac{1}{k^2}+\ldots\right\}=$$
$$=\frac{k}{k-1}|u|^{p+1}.$$

Как мы увидим, это неравенство определяет сходимость произведения первичных множителей.

8.1.1. Теорема Вейерштрасса. Пусть $f(z)$ — целая функция, не равная тождественно нулю. Что можно сказать о ее нулях?

Так как функция $f(z)$ аналитична при всех конечных значениях z, то нули не могут иметь предельных точек в конечной части плоскости. Ничего больше сказать о них в общем случае нельзя. Это вытекает из следующей теоремы Вейерштрасса.

Для всякой последовательности чисел z_1, z_2, ..., единственная предельная точка которой находится в бесконечности, существует целая функция, имеющая нули в этих и только в этих точках.

Можно считать точки z_1, z_2, ... отличными от 0 и занумерованными таким образом, что $|z_1| \leqslant |z_2| \leqslant \ldots$ Пусть $|z_n| = r_n$, и пусть p_1, p_2, ... — такая последовательность положительных чисел, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{r_n}\right)^{p_n}$ сходится при любом значении r. Такую последовательность всегда можно найти, например, можно положить $p_n = n$; действительно, $r_n \to \infty$, так как иначе последовательность z_1, z_2, ... имела бы предельную точку в конечной части плоскости, и при $r_n > 2r$

$$\left(\frac{r}{r_n}\right)^n < \frac{1}{2^n}.$$

Положим

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{z_n}, p_n - 1\right). \tag{1}$$

Эта функция обладает требуемыми свойствами. Действительно, если $|z_n| > 2|z|$, то

$$\left|\log E\left(\frac{z}{z_n}, p_n - 1\right)\right| \leqslant 2\left(\frac{r}{r_n}\right)^{p_n}. \tag{2}$$

Следовательно, при $|z| \leqslant R$ ряд

$$\sum_{|z_n| > 2R} \log E\left(\frac{z}{z_n};\ p_n - 1\right)$$

равномерно сходится и с ним равномерно сходится произведение

$$\prod_{|z_n| < 2R} E\left(\frac{z}{z_n}, p_n - 1\right)$$

(см. § 1.4.3, конец). Следовательно, функция $f(z)$ регулярна при $|z| \leqslant R$, и ее единственными нулями в этой области являются нули функции

$$\prod_{|z_n| \leqslant 2R} E\left(\frac{z}{z_n},\ p_n - 1\right),$$

т. е. точки z_1, z_2, ... Поскольку R можно взять сколь угодно бо́льшим, этим теорема доказана.

Заметим, что $f(z)$ не определяется нулями единственным образом: имеется широкий выбор чисел p_n.

8.12. Всякая целая функция может быть следующим образом разложена на множители.

Пусть $f(z)$ — целая функция с $f(0) \neq 0$. Тогда

$$f(z) = f(0)\,P(z)\,e^{g(z)},$$

где $P(z)$ — некоторое произведение первичных множителей, а $g(z)$ — некоторая целая функция.

Мы строим $P(z)$, как в предыдущем параграфе, по нулям функции $f(z)$. Положим

$$\varphi(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{P'(z)}{P(z)}.$$

$\varphi(z)$ есть целая функция, так как полюсы первого члена уничтожаются полюсами второго члена. Следовательно,

$$g(z) = \int_0^z \varphi(t)\,dt = \log f(z) - \log f(0) - \log P(z)$$

также есть целая функция, и доказательство завершается переходом к экспоненциалам.

Если при $z = 0$ функция $f(z)$ имеет нуль порядка p, то должен быть введен множитель z^p.

Это разложение на множители не единственно.

8.2. Функции конечного порядка. Доказанная общая теорема о разложении на множители недостаточно определенна для применений. В общем случае числа p_n растут вместе с n неопределенно, и мы мало что можем сказать о функции $g(z)$. Существует, однако, случай, когда теорему можно представить в совершенно определенной форме: это случай функций конечного порядка.

Целая функция $f(z)$ называется функцией *конечного порядка*, если существует такое положительное число A, что при $|z| = r \to \infty$

$$f(z) = O(e^{r^A}).$$

Нижняя грань ρ чисел A, для которых выполняется это соотношение, называется *порядком* функции. Таким образом, если

$f(z)$ — функция порядка ρ, то для всякого положительного ε

$$f(z) = O(e^{r^{\rho+\varepsilon}}),$$

но ни для какого отрицательного ε это не так. Подчеркнем, что здесь и в других подобных формулировках настоящей главы ε может принимать сколь угодно малые значения и постоянная, входящая в O, зависит, вообще говоря, от ε. Если бы она не зависела от ε, то мы могли бы заменить ε нулем.

Функции конечного порядка являются простейшими после многочленов целыми функциями. Порядок многочлена равен нулю; некоторые свойства функций малых порядков подобны свойствам многочленов.

Многие известные функции имеют, как легко понять, конечный порядок. Так, e^z есть функция порядка 1, и таковы же функции $\sin z$ и $\cos z$; $\cos\sqrt{z}$ есть целая функция порядка $\frac{1}{2}$; e^{z^k} есть целая функция порядка k, если k — положительное целое число (если k — нецелое число, то эта функция не является целой). e^{e^z} есть функция бесконечного порядка.

В дальнейшем мы будем предполагать вообще, что $f(0) \neq 0$. Это несколько упрощает исследование, деление же на z^k не оказывает влияния на порядок.

8.2.1. Функция $n(r)$. Пусть $n(r)$ обозначает число нулей z_1, $z_2, \ldots$ целой функции $f(z)$, для которых $|z_n| \leqslant r$. Ясно, что $n(r)$ есть неубывающая функция от r, постоянная в целых интервалах; она равна нулю при $r < |z_1|$.

Как мы видели в § 3.6.1, эта функция связана с функцией $f(z)$ формулой Иенсена. Именно,

$$\int_0^r \frac{n(x)}{x}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})|\,d\theta - \log|f(0)|. \qquad (1)$$

Поскольку $f(z)$ — целая функция, эта формула верна для всех значений r.

Если $f(z)$ — функция порядка ρ, то $n(r) = O(r^{\rho+\varepsilon})$. Действительно,

$$\log|f(re^{i\theta})| < Kr^{\rho+\varepsilon},$$

где K зависит только от ε. Из этого следует, в силу формулы (1), что

$$\int_0^{2r} \frac{n(x)}{x}\,dx < Kr^{\rho+\varepsilon}. \qquad (2)$$

Но так как $n(r)$ не убывает, то

$$\int_r^{2r} \frac{n(x)}{x}\,dx \geqslant n(r)\int_r^{2r} \frac{dx}{x} = n(r)\log 2,$$

и, следовательно,

$$n(r) \leqslant \frac{1}{\log 2} \int_0^{2r} \frac{n(x)}{x} dx < Kr^{\rho+\varepsilon}.$$

Таким образом, чем выше порядок функции, тем, грубо говоря, больше нулей она может иметь в данной области.

8.2.2. *Если r_1, r_2, ... — модули нулей функции $f(z)$, то ряд $\sum r_n^{-\alpha}$ сходится при $\alpha > \rho$.*

Пусть β — какое-нибудь число, заключенное между α и ρ. Тогда $n(r) < Ar^\beta$, и, полагая $r = r_n$, мы видим, что $n < Ar_n^\beta$. Следовательно, $r_n^{-\alpha} < An^{-\alpha/\beta}$, что и завершает доказательство.

Нижняя грань положительных чисел α, для которых ряд $\sum r_n^{-\alpha}$ сходится, называется *показателем сходимости нулей* и обозначается через ρ_1. Мы только что доказали, что $\rho_1 \leqslant \rho$. Может случиться, что $\rho_1 < \rho$. Например, если $f(z) = e^z$, то $\rho = 1$, а $\rho_1 = 0$, так как нулей нет вовсе.

Заметим, что $\rho_1 = 0$ для всякой функции с конечным числом нулей. Таким образом, из неравенства $\rho_1 > 0$ следует, что имеется бесконечное множество нулей.

8.2.3. Канонические произведения. Важным следствием предыдущей теоремы является тот факт, что если функция $f(z)$ имеет конечный порядок, то существует такое не зависящее от n целое число p, что произведение

$$\prod_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{z_n}, p\right) \tag{1}$$

сходится для всех значений z. Доказательство: согласно § 8.1.1 это произведение сходится, если сходится ряд

$$\sum \left(\frac{r}{r_n}\right)^{p+1} \tag{2}$$

(здесь $p_n = p + 1$; ср. также § 1.4.3, пример (VII)), а этот ряд сходится для всех значений r, если $p + 1 > \rho_1$, и во всяком случае, если $p + 1 > \rho$.

Произведение (1) с наименьшим из целых p, для которых сходится ряд (2), называется *каноническим произведением*, построенным по нулям функции $f(z)$, а это наименьшее p называется его *родом*.

Если ρ_1 — нецелое число, то $p = [\rho_1]$; если ρ_1 — целое число, то $p = \rho_1$, когда ряд $\sum r_n^{-\rho}$ расходится, и $p = \rho_1 - 1$, когда ряд $\sum r_n^{-\rho_1}$ сходится. Во всех случаях $p \leqslant \rho_1 \leqslant \rho$.

8.2.4. Теорема Адамара о разложении на множители. *Если $f(z)$ — целая функция порядка ρ с нулями $z_1, z_2, \ldots,$ причем $f(0) \neq 0$, то*

$$f(z) = e^{Q(z)} P(z),$$

где $P(z)$ — каноническое произведение, построенное по нулям функции $f(z)$, а $Q(z)$ — многочлен, степень которого не выше ρ.

Ясно, что в качестве функции $P(z)$ § 8.1.2 можно взять каноническое произведение, и из теоремы § 8.1.2 о разложении следует, что $f(z)$ допускает представление указанного вида с некоторой целой функцией $Q(z)$. Таким образом, остается доказать, что в рассматриваемом случае $Q(z)$ есть многочлен степени не выше ρ.

Положим $\nu = [\rho]$; тогда $p \leqslant \nu$. Логарифмируя написанное выше соотношение и затем дифференцируя $\nu + 1$ раз, мы видим, что

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^{\nu} \left\{\frac{f'(z)}{f(z)}\right\} = Q^{\nu+1}(z) - \nu! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z_n - z)^{\nu+1}}.$$

Чтобы доказать, что $Q(z)$ есть многочлен степени не выше ν, мы должны доказать, что $Q^{(\nu+1)}(z) = 0$.

Положим $g_R(z) = \frac{f(z)}{f(0)} \prod_{|z_n| \leqslant R} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right)^{-1}$. Так как $\left|1 - \frac{z}{z_n}\right| \geqslant 1$, если $|z| = 2R$ и $|z_n| \leqslant R$, то при $|z| = 2R$

$$|g_R(z)| \leqslant \left|\frac{f(z)}{f(0)}\right| = O\left(e^{(2R)^{\rho+\varepsilon}}\right), \tag{1}$$

а так как $g_R(z)$ — целая функция, то это соотношение верно и при $|z| < 2R$.

Положим $h_R(z) = \log g_R(z)$, определив логарифм условием $h_R(0) = 0$. Функция $h_R(z)$ регулярна при $|z| \leqslant R$, и, в силу формулы (1),

$$\operatorname{Re}\{h_R(z)\} < KR^{\rho+\varepsilon}. \tag{2}$$

Следовательно (§ 5.5.1), при $|z| = r < R$

$$|h_R^{(\nu+1)}(z)| \leqslant \frac{2^{\nu+2}(\nu+1)!\,R}{(R-r)^{\nu+2}} KR^{\rho+\varepsilon}.$$

При $|z| = \frac{1}{2} R$ это показывает, что

$$h_R^{(\nu+1)}(z) = O\left(R^{\rho+\varepsilon-\nu-1}\right). \tag{3}$$

Следовательно,

$$Q^{(\nu+1)}(z) = h_R^{(\nu+1)}(z) + \nu! \sum_{|z_n| > R} \frac{1}{(z_n - z)^{\nu+1}} =$$

$$= O\left(R^{\rho+\varepsilon-\nu-1}\right) + O\left(\sum_{|z_n| > R} |z_n|^{-\nu-1}\right)$$

при $|z|=\frac{1}{2}R$, а потому и при $|z|<\frac{1}{2}R$. Так как $\nu+1>\rho$, то при $R\to\infty$ первый член справа стремится к нулю, если ε достаточно мало, а так как ряд $\sum|z_n|^{-\nu-1}$ сходится, то и второй член стремится к нулю. Но левая часть не зависит от R; следовательно, она должна быть равна нулю, и теорема доказана *).

8.2.5. *Порядок канонического произведения равен показателю сходимости его нулей.*

Мы знаем, что для всякой функции $\rho_1\leqslant\rho$. Таким образом, мы должны доказать, что для канонического произведения $P(z)$ всегда $\rho\leqslant\rho_1$. Пусть $r_1, r_2, \ldots$ — модули нулей, и k — постоянная, бо́льшая единицы. Напишем:

$$\log|P(z)| = \sum_{r_n\leqslant kr}\log\left|E\left(\frac{z}{z_n}, p\right)\right| + \\ + \sum_{r_n>kr}\log\left|E\left(\frac{z}{z_n}, p\right)\right| = \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2.$$

Из неравенства § 8.1.1 (2) следует, что

$$\sum\nolimits_2 = O\left\{\sum_{r_n>kr}\left(\frac{r}{r_n}\right)^{p+1}\right\} = O\left\{r^{p+1}\sum_{r_n>kr}\frac{1}{r_n^{p+1}}\right\}.$$

Если $p=\rho_1-1$, то это $O(r^{p+1})=O(r^{\rho_1})$. В противном случае $\rho_1+\varepsilon<p+1$, если ε достаточно мало, и тогда

$$r^{p+1}\sum_{r_n>kr} r_n^{-p-1} = r^{p+1}\sum_{r_n>kr} r_n^{\rho_1+\varepsilon-p-1} r_n^{-\rho_1-\varepsilon} < \\ < r^{p+1}(kr)^{\rho_1+\varepsilon-p-1}\sum r_n^{-\rho_1-\varepsilon} = O(r^{\rho_1+\varepsilon}).$$

В сумму же $\sum_1$ входят члены с множителями $E(u, p)$, у которых $|u|\geqslant 1/k$ и, следовательно,

$$\log|E(u, p)|\leqslant\log(1+|u|)+|u|+\ldots+\frac{|u|^p}{p}<K|u|^p,$$

где K зависит только от k. Поэтому

$$\sum\nolimits_1 = O\left(r^p\sum_{r_n\leqslant kr} r_n^{-p}\right) = O\left(r^p\sum_{r_n\leqslant kr} r_n^{\rho_1+\varepsilon-p}\, r_n^{-\rho_1-\varepsilon}\right) = \\ = O\left\{r^p(kr)^{\rho_1+\varepsilon-p}\sum r_n^{-\rho_1-\varepsilon}\right\} = O(r^{\rho_1+\varepsilon}).$$

Таким образом, $\log|P(z)|=O(r^{\rho_1+\varepsilon})$, и теорема доказана.

8.2.6. *Если ρ — нецелое число, то $\rho_1=\rho$.*

---

*) Hadamard [2]. Это доказательство принадлежит Ландау (см. Landau [5]). Другое доказательство см. в § 8,7,2.

Во всяком случае, $\rho_1 \leqslant \rho$. Предположим, что $\rho_1 < \rho$. Тогда $P(z)$ есть функция порядка ρ_1, т. е. порядка, меньшего ρ. Далее, если $Q(z)$ — многочлен степени q, то $e^{Q(z)}$ имеет порядок q, и $q \leqslant \rho$; но в нашем случае $q < \rho$, так как q — целое число, а ρ — нецелое. Таким образом, $f(z)$ есть произведение двух функций, каждая из которых имеет порядок, меньший ρ. Следовательно, $f(z)$ имеет порядок, меньший ρ. Мы пришли к противоречию, которое показывает, что $\rho_1 = \rho$.

В частности, функция нецелого порядка должна иметь бесконечно много нулей.

Если порядок — нецелое число, то доминирующим в разложении функции является каноническое произведение $P(z)$; если же порядок — целое число, то произведение $P(z)$ может сводиться к многочлену или даже к постоянной, и тогда порядок целиком зависит от множителя $e^{Q(z)}$.

Во всех случаях, так как $P(z)$ есть функция порядка ρ_1, а $e^{Q(z)}$ — функция порядка q, то $\rho = \max(q, \rho_1)$.

8.2.7. Род. Род целой функции $f(z)$ есть большее из двух целых чисел p, q и потому целое число.

Так как $p \leqslant \rho$ и $q \leqslant \rho$, то род не превосходит порядка. Фактически определить род заданной функции не всегда легко.

Пример. Доказать, что род не меньше $\rho - 1$.

8.3. Коэффициенты разложения функции конечного порядка. *Функция*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{1}$$

в том и только в том случае является целой функцией конечного порядка ρ, если

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{\log(1/|a_n|)}{n\log n} = \frac{1}{\rho}.$$

Доказательство опирается на тот факт, что сумма $\sum |a_n z^n|$ мало отличается от своего наибольшего члена и что $|f(z)|$ лежит между ними. Ниже это иллюстрируется примером.

(I) Пусть $\varliminf_{n\to\infty} \frac{\log(1/|a_n|)}{n\log n} = \mu$, так что μ — нуль, положительное число или бесконечность. Если $\mu \neq \infty$, то для всякого положительного ε

$$\log\frac{1}{|a_n|} > (\mu - \varepsilon)\, n\log n \qquad (n > n_0),$$

т. е. $|a_n| < n^{-n(\mu-\varepsilon)}$. Если $\mu > 0$, то из этого следует, что ряд (1) сходится для всех значений z, так что $f(z)$ есть целая функция. Далее,

$$|f(z)| < Ar^{n_0} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} r^n n^{-n(\mu-\varepsilon)} \qquad (r > 1).$$

Пусть $\sum_1$ — часть последнего ряда, в которой $n \leqslant (2r)^{1/(\mu-\varepsilon)}$, и $\sum_2$ — остаток. В $\sum_1$

$$r^n \leqslant \exp\{(2r)^{1/(\mu-\varepsilon)} \log r\},$$

так что

$$\sum\nolimits_1 < \exp\{(2r)^{1/(\mu-\varepsilon)} \log r\} \sum n^{-n(\mu-\varepsilon)} < K \exp\{(2r)^{1/(\mu-\varepsilon)} \log r\}.$$

В $\sum_2$ же $rn^{-(\mu-\varepsilon)} < \frac{1}{2}$, так что

$$\sum\nolimits_2 < \sum \left(\frac{1}{2}\right)^n < 1.$$

Следовательно,

$$|f(z)| < K \exp\{(2r)^{1/(\mu-\varepsilon)} \log r\},$$

т. е. $\rho \leqslant 1/(\mu-\varepsilon)$, и так как ε произвольно мало, то $\rho \leqslant 1/\mu$. При $\mu = \infty$ мы заменяем в этом рассуждении μ произвольно большим числом, и оно показывает, что $\rho = 0$.

С другой стороны, для всякого ε существует последовательность значений n, для которой

$$\log \frac{1}{|a_n|} < (\mu+\varepsilon) n \log n,$$

т. е. $|a_n| > n^{-n(\mu+\varepsilon)}$, т. е.

$$|a_n| r^n > \{rn^{-(\mu+\varepsilon)}\}^n.$$

При $r = (2n)^{\mu+\varepsilon}$ это означает, что

$$|a_n| r^n > 2^{(\mu+\varepsilon)n} = \exp\left\{\frac{1}{2}(\mu+\varepsilon) \log 2 \cdot r^{1/(\mu+\varepsilon)}\right\}.$$

Так как, в силу неравенства Коши, $M(r) \geqslant |a_n| r^n$, то из этого следует, что для некоторой стремящейся к бесконечности последовательности значений r

$$M(r) > \exp\{Ar^{1/(\mu+\varepsilon)}\}.$$

Следовательно, $\rho \geqslant 1/(\mu+\varepsilon)$, и так как ε произвольно мало, то $\rho \geqslant 1/\mu$. При $\mu = 0$ это рассуждение показывает, что $f(z)$ есть функция бесконечного порядка.

(II) Пусть $f(z)$ — функция конечного порядка ρ. Тогда $a_n \to 0$, так что число μ, определенное выше, не отрицательно. Из доказанного следует, что в этом случае $\mu = 1/\rho$.

8.4. Примеры. (I) Доказать, что порядок функции

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(n!)^{\alpha}}$$

равен $1/\alpha$.

[Можно воспользоваться предыдущей теоремой или избрать следующий более прямой путь. Предположим, что z вещественно и положительно. Члены ряда возрастают, пока n не сделается равным приблизительно $z^{\frac{1}{\alpha}}$, а затем убывают. Следовательно, если $z=n^{\alpha}$, то максимальный член равен

$$\frac{n^{n\alpha}}{(n!)^{\alpha}}\sim\frac{n^{n\alpha}}{\left(n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}2^{1/2}\pi^{1/2}\right)^{\alpha}}=\frac{e^{n\alpha}}{n^{\alpha/2}\left(2^{1/2}\pi^{1/2}\right)^{\alpha}}=\frac{e^{\alpha z^{1/\alpha}}}{z^{1/2}\left(2^{1/2}\pi^{1/2}\right)^{\alpha}}.$$

Так как $|f(z)|$ больше этого члена, то порядок функции есть самое меньшее $1/\alpha$.

С другой стороны, $|f(z)|\leqslant f(|z|)$, и если z вещественно и $1<z<N^{\alpha}$, то

$$f(z)=\sum_{n=0}^{N}\frac{z^n}{(n!)^{\alpha}}+\sum_{N+1}^{\infty}\frac{z^n}{(n!)^{\alpha}}<$$

$$<\sum_{n=0}^{N}\frac{z^N}{(n!)^{\alpha}}+\sum_{N+1}^{\infty}\frac{z^n}{\{(N+1)!\,N^{n-N-1}\}^{\alpha}}<Az^N+\frac{z^{N+1}}{\{(N+1)!\}^{\alpha}\left(1-\frac{z}{N^{\alpha}}\right)}.$$

Полагая $N=\left[(2z)^{1/\alpha}\right]$, мы видим, что

$$f(z)=O\left(z^N\right)=O\left\{z^{(2z)^{1/\alpha}}\right\}=O\left(e^{z^{\frac{1}{\alpha}+\varepsilon}}\right),$$

так что порядок не превосходит $1/\alpha$. Следовательно, $\rho=1/\alpha$ *).]

(II) Исследовать подобным же образом функцию $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^{\alpha n}}$.

(III) Если $\lambda\neq 0$ и $p(z)$ — многочлен, не равный тождественно нулю, то функция $e^{\lambda z}-p(z)$ имеет бесконечно много нулей.

[Если это не так, то $e^{\lambda z}-p(z)=e^{az+b}P(z)$, где $P(z)$ — многочлен. Сравнивая возрастание в различных направлениях, мы обнаруживаем, что $a=\lambda$, т. е. что функция $e^{\lambda z}$ рациональна.]

(IV) Если $f(z)$ — функция порядка ρ и $g(z)$ — функция порядка $\rho'\leqslant\rho$, причем все нули функции $g(z)$ являются нулями функции $f(z)$, то порядок функции $f(z)/g(z)$ не превосходит ρ.

[Действительно, $f(z)=P_1(z)e^{Q_1(z)}$, $g(z)=P_2(z)e^{Q_2(z)}$, и P_1/P_2 есть каноническое произведение, построенное по нулям функции f/g, или это произведение, умноженное на экспоненциальный множитель порядка, не превосходящего ρ. Следовательно, порядок функции P_1/P_2 не превосходит ρ.]

(V) $\cos z$ и $\sin z$ имеют порядок 1; формулы, полученные для них в § 3.2.3, являются частными случаями теоремы Адамара.

(VI) Функция $1/\Gamma(z)$ имеет порядок 1; вывести разложение на множители, полученное для нее в § 4.4.1, из теоремы Адамара.

---

*) См. Hardy, *Orders of Infinity*, изд. 1, стр. 55.

[В обозначениях § 4.4.1 $f(1-z)=-\frac{2i\pi}{\Gamma(z)}$ и

$$f(z)=O\left\{e^{\pi|z|}\left(1+\int_1^\infty t^{|z|}e^{-t}dt\right)\right\}=O\left\{e^{\pi|z|}(|z|+1)^{|z|+1}\right\}.]$$

(VII) $\xi(s)\doteq\frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-\frac{1}{2}s}\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)\zeta(s)$ есть целая функция с $\rho=1$, $\rho_1=1$.

[Чтобы доказать, что $\rho\leqslant 1$, мы пользуемся формулой § 4.4.3 (3) и примером (IV); $\rho\geqslant 1$, так как $\log\zeta(s)\sim 2^{-s}$, $\log\xi(s)\sim\frac{1}{2}s\log s$, когда $s\to\infty$ вдоль вещественной оси. Далее, функциональное уравнение показывает, что $\xi(s)=\xi(1-s)$. Следовательно, функция $\Xi(z)=\xi\left(\frac{1}{2}+iz\right)$ четна. Следовательно, $\Xi(\sqrt{z})$ есть целая функция порядка 1/2 и, таким образом, имеет показатель сходимости 1/2.]

(VIII) $z^{-\nu}J_\nu(z)$ есть целая функция с $\rho=1$, $\rho_1=1$. Проверить для нее теорему § 8.3. [См. стр. 70, пример 5.]

(IX) Функция $F_\alpha(z)=\int_0^\infty e^{-t^\alpha}\cos zt\,dt$ $(\alpha>1)$ имеет порядок $\frac{\alpha}{\alpha-1}$.

[Вывести это прямо из интегральной формулы или из разложения в степенной ряд.]

(X) $\vartheta_1(z)=-i\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}e^{(2n+1)iz}$, где $q=e^{\pi i\tau}$ с $\operatorname{Im}(\tau)>0$, так что $|q|<1$, есть целая функция с $\rho=2$, $\rho_1=2$.

[Если $\lambda=\frac{2|z|+\log 2}{\log|1/q|}-\frac{1}{2}$, то

$$\vartheta_1(z)\leqslant 2\sum_{n\leqslant\lambda}|q|^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}e^{(2n+1)|z|}+2\sum_{n>\lambda}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+\frac{1}{2}}=$$

$$=O\left(e^{(2\lambda+1)|z|}\right)=O\left(e^{K|z|^2}\right).$$

Функция $\vartheta_1(z)$ имеет простые нули в точках $z=m\pi+n\pi\tau$, где m и n — произвольные целые числа *). Следовательно, $\rho_1=2$.]

(XI) $\vartheta_1(z)$ есть целая функция от $\sin z$ порядка 0.

[Если $2\sin z=w$, $\vartheta_1(z)=g(w)$, то

$$g(w)=\sum_{n=0}^{\infty}q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\left\{w^{2n+1}-(2n+1)w^{2n-1}+\ldots\right\}=$$

$$=O\left\{\sum_{n=0}^{\infty}|q|^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}(|w|+1)^{2n+1}\right\}=O\left\{e^{K\log^2(|w|+1)}\right\}.$$

Полиа было доказано **), что если g и h — целые функции и $g\{h(z)\}$ —

*) См., например Уиттекер и Ватсон, *Курс современного анализа*, § 21.12.

**) Pólya [2].

функция конечного порядка, то либо h — многочлен, а g — функция конечного порядка, либо h — не многочлен, но имеет конечный порядок, а g — функция порядка нуль.]

(XII) Если $f(z)=\prod_1^\infty\left(1+\frac{z}{r_n}\right)$ $(r_n>0)$ — функция порядка ρ, причем $0<\rho<1$, то при $\rho<\sigma<1$

$$\int_0^\infty \frac{\log f(x)}{x^{\sigma+1}}\,dx=\frac{\pi}{\sigma\sin\pi\sigma}\sum_1^\infty\frac{1}{r_n^\sigma},$$

$$\int_0^\infty \frac{\log|f(-x)|}{x^{\sigma+1}}\,dx=\frac{\pi}{\sigma\operatorname{tg}\pi\sigma}\sum_1^\infty\frac{1}{r_n^\sigma}.$$

[Воспользоваться формулами

$$\int_0^\infty \frac{\log(1+x)}{x^{\sigma+1}}\,dx=\frac{\pi}{\sigma\sin\pi\sigma},\qquad \int_0^\infty \frac{\log|1-x|}{x^{\sigma+1}}\,dx=\frac{\pi}{\sigma\operatorname{tg}\pi\sigma}.\Big]$$

8.5. Производная. Многие свойства производной целой функции таковы же, как свойства исходной функции. Примеры дают следующие теоремы.

8.5.1. *Производная $f'(z)$ имеет тот же порядок, что и $f(z)$.* Пусть $M'(r)=\max\limits_{|z|=r}|f'(z)|$. Тогда

$$\frac{M(r)-|f(0)|}{r}\leqslant M'(r)\leqslant\frac{M(R)}{R-r}. \tag{1}$$

Действительно, $f(z)=\int_0^z f'(t)\,dt+f(0)$, где интеграл взят вдоль прямой. Следовательно, $|M(r)|\leqslant rM'(r)+|f(0)|$. С другой стороны,

$$f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(w)}{(w-z)^2}\,dw,$$

где C — окружность $|w-z|=R-r$ $(|z|=r<R)$, и, выбирая z под условием $|f'(z)|=M'(r)$, мы видим, что

$$M'(r)\leqslant M(R)/(R-r).$$

Чтобы закончить доказательство, достаточно положить в формуле (1), скажем, $R=2r$.

8.5.2. Известная теорема, утверждающая, что если $f(z)$ есть многочлен, все корни которого вещественны, то тем же свойством обладает $f'(z)$, может быть перенесена на более широкий класс целых функций. Результат содержится в следующей теореме Лагерра.

Пусть $f(z)$ — целая функция порядка, меньшего чем 2, вещественная при вещественных значениях z и с вещественными нулями. Тогда нули производной $f'(z)$ также все вещественны и отделены друг от друга нулями функции $f(z)$.

Мы можем написать $f(z) = cz^k e^{az} \prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) e^{z/z_n}$, где k — нуль или положительное целое число, а c, a и z_1, z_2, ... — вещественные числа. Логарифмируя и дифференцируя, мы получаем формулу

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k}{z} + a + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z - z_n} + \frac{1}{z_n}\right).$$

Следовательно, если $z = x + iy$, то

$$\operatorname{Im}\left\{\frac{f'(z)}{f(z)}\right\} = -y\left\{\frac{k}{x^2+y^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x-z_n)^2+y^2}\right\}.$$

Так как правая часть обращается в нуль только при $y = 0$, то $f'(z)$ может иметь нули только на вещественной оси. Далее,

$$\frac{d}{dz}\left\{\frac{f'(z)}{f(z)}\right\} = -\frac{k}{z^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z-z_n)^2}.$$

При вещественных значениях z, отличных от z_n, правая часть вещественна и отрицательна. Следовательно, функция $f'(z)/f(z)$ монотонно убывает, когда z возрастает вдоль вещественной оси от z_n до z_{n+1}, и, таким образом, между z_n и z_{n+1} она не может обратиться в нуль более одного раза. Так как она, очевидно, меняет знак в этом интервале, то она обращается в нем в нуль ровно один раз, что и доказывает теорему.

Из этой теоремы следует, что ряды

$$\sum \frac{1}{|z_n|^{\alpha}}, \quad \sum \frac{1}{|z'_n|^{\alpha}},$$

где z'_1, z'_2, ... — нули производной $f'(z)$, сходятся или расходятся одновременно. Следовательно, нули производной $f'(z)$ имеют тот же показатель сходимости, что и нули функции $f(z)$. Можно показать, что $f(z)$ и $f'(z)$ имеют один и тот же род, но это уже не столь просто (см. пример 16 в конце главы).

Так как $f'(z)$ есть функция того же порядка, что и $f(z)$, и имеет только вещественные нули, то теорему можно теперь применить к ней, и мы видим, что $f''(z)$ имеет только вещественные нули. То же относится к $f'''(z)$, и т. д.

Доказательство применимо также к функции $f(z)$ порядка 2, если ее род равен 1. В этом случае, однако, мы не можем распространить результат на $f''(z)$ без предварительного рассмотрения проблемы рода производной $f'(z)$.

Нетрудно доказать примерами, что для функций рода 2 теорема неверна. Первый пример:

$$f(z)=ze^{z^2},\quad f'(z)=(2z^2+1)e^{z^2};$$

нули производной $f'(z)$ мнимы. Второй пример:

$$f(z)=(z^2-4)e^{\frac{1}{3}z^2},\quad f'(z)=\frac{2}{3}z(z^2-1)e^{\frac{1}{3}z^2};$$

нули производной $f'(z)$ вещественны, но не разделяются нулями функции $f(z)$.

Пример. Уравнение $y\frac{d^2y}{dt^2}=-\sin^2 t$ не имеет вещественного решения, отличного от решений $y=\pm\sin t$ и являющегося целой функцией конечного порядка.

[Пусть y — функция конечного порядка ρ. Тогда

$$y=e^{Q(t)}P(t),$$

где $P(t)$ — некоторое каноническое произведение, а $Q(t)$ — многочлен степени не выше ρ. Так как нули функции $P(t)$ являются нулями функции $\sin^2 t$, то порядок функции $P(t)$ не превосходит 1.

Далее,

$$\frac{dy}{dt}=e^{Q(t)}\{P'(t)+P(t)Q'(t)\},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=e^{Q(t)}\{P''(t)+2P'(t)Q'(t)+P(t)Q'^2(t)+P(t)Q''(t)\}=e^{Q(t)}f(t).$$

Здесь $f(t)$ — функция порядка $\leqslant 1$, так что

$$f(t)=e^{at+b}P_1(t),$$

где $P_1(t)$ — некоторое каноническое произведение. Таким образом,

$$e^{2Q(t)+at+b}P(t)P_1(t)=-\sin^2 t$$

и

$$e^{2Q(t)+at+b}P(t)=-\frac{\sin^2 t}{P_1(t)}.$$

Это — функция порядка $\leqslant 1$ (§ 8.4, пример (IV)). Следовательно, $P(t)$ имеет порядок 1, а $Q(t)$ есть линейная функция. Следовательно, y есть функция порядка 1.

Теперь мы можем воспользоваться теоремой Лагерра. y есть функция порядка 1 с вещественными нулями. Нули производной $\frac{dy}{dt}$ разделяются нулями функции y, так что, поскольку y не имеет тройных нулей, все нули производной $\frac{dy}{dt}$ являются простыми. Таким образом, все нули второй производной $\frac{d^2y}{dt^2}$ также являются простыми. Следовательно, *все* нули функции $\sin t$ являются нулями функции y. Предположим, что при $t=k\pi$ функция y имеет двойной нуль. Тогда $\frac{dy}{dt}$ имеет нуль между $(k-1)\pi$ и $k\pi$, нуль при $t=k\pi$ и нуль между $k\pi$ и $(k+1)\pi$, а $\frac{d^2y}{dt^2}$ имеет два нуля между $(k-1)\pi$ и $(k+1)\pi$, что невозможно. Следовательно, y имеет только простые нули, такие же, как $\sin t$. Следовательно,

$$y=e^{\alpha t+\beta}\sin t.$$

Внося это выражение в наше дифференциальное уравнение, мы видим, что

$$(\alpha^2-1)\sin t+2\alpha\cos t=-e^{-2\alpha t-2\beta}\sin t.$$

Так как при вещественных значениях t левая часть ограничена, то и правая часть ограничена. Следовательно, $\alpha=0$, а $\beta=0$ или πi.]

8.6. Функции, все нули которых вещественны. Многие важные функции не имеют невещественных нулей; например, все нули функции $1/\Gamma(z)$ вещественны. С другой стороны, иногда бывает очень трудно узнать, вещественны ли нули; например, Риман в 1859 г. высказал предположение, что все нули функции $\Xi(z)$ (§ 8.4, пример (VII)) вещественны, но это до сих пор не доказано.

8.6.1. Теоремы Лагерра. В некоторых случаях вопрос решается следующими теоремами Лагерра.

Пусть все нули многочлена

$$f(z)=a_0+a_1z+\ldots+a_pz^p$$

вещественны, и пусть $\varphi(w)$ — *целая функция рода* 0 *или* 1, *вещественная при вещественных значениях* w, *все нули которой вещественны и отрицательны. Тогда все нули многочлена*

$$g(z)=a_0\varphi(0)+a_1\varphi(1)z+\ldots+a_p\varphi(p)z^p$$

вещественны и среди них столько же положительных, равных нулю и отрицательных, сколько среди нулей многочлена $f(z)$.

Мы можем написать

$$\varphi(w)=ae^{kw}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{w}{\alpha_n}\right)e^{-w/\alpha_n},$$

где $\alpha_n>0$ для всех значений n. Рассмотрим функцию

$$g_1(z)=f(z)+\frac{z}{\alpha_1}f'(z)=\frac{z^{1-\alpha_1}}{\alpha_1}\frac{d}{dz}\{z^{\alpha_1}f(z)\}=$$
$$=a_0+a_1\left(1+\frac{1}{\alpha_1}\right)z+\ldots+a_p\left(1+\frac{p}{\alpha_1}\right)z^p \qquad (z>0).$$

Очевидно, она имеет при $z=0$ столько же нулей, сколько их имеет $f(z)$, и второе написанное для нее выражение показывает (в силу теоремы Ролля), что она имеет столько же положительных нулей, сколько $f(z)$. Точно так же она имеет столько же отрицательных нулей, сколько их имеет $f(z)$.

Повторяя это рассуждение, мы устанавливаем то же для функции

$$g_n(z) = a_0 + a_1\varphi_n(1)z + \ldots + a_p\varphi_n(p)z^p,$$

где $\varphi_n(w) = \left(1+\frac{w}{\alpha_1}\right)\ldots\left(1+\frac{w}{\alpha_n}\right)$.

Далее, преобразование $z = e^{k_n}z'$, где $k_n = k - \sum\limits_{1}^{n}\alpha_\nu^{-1}$, показывает, что то же верно для функции

$$G_n(z) = a_0\Phi_n(0) + a_1\Phi_n(1)z + \ldots + a_p\Phi_n(p)z^p,$$

где $\Phi_n(w) = ae^{kw}\prod\limits_{\nu=1}^{n}\left(1+\frac{w}{\alpha_\nu}\right)e^{-w/\alpha_\nu} = ae^{k_n w}\varphi_n(w)$.

Наконец, $\Phi_n(w) \to \varphi(w)$ равномерно в каждой конечной области. Следовательно, $G_n(z) \to g(z)$ равномерно в каждой конечной области. В силу теоремы Гурвица (§ 3.4.5), нули функции $g(z)$ — в точности пределы нулей функции $G_n(z)$, и ясно, что $g(z)$ имеет столько же нулей при $z = 0$, сколько их имеет $f(z)$. Этим теорема доказана.

8.6.2. *Предположим, что $\varphi(w)$ удовлетворяет условиям предыдущей теоремы, и пусть $f(z)$ — целая функция вида*

$$f(z) = e^{az+b}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{z_n}\right),$$

где a и все z_n положительны. Если

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

то

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\varphi(n)z^n$$

есть целая функция, все нули которой вещественны и отрицательны.

Прежде всего, $g(z)$ есть целая функция. Действительно, так как $(1+x)e^{-x} \leqslant 1$ при $x \geqslant 0$, то

$$|\varphi(n)| \leqslant ae^{kn},$$

вследствие чего ряд для $g(z)$ сходится всюду.

Положим

$$f_p(z) = e^b\left(1+\frac{az}{p}\right)^p\prod_{n=1}^{p}\left(1+\frac{z}{z_n}\right) = \sum_{n=0}^{2p} a_{n,p}z^n.$$

Все нули этой функции вещественны и отрицательны, и таковы же, в силу предыдущей теоремы, нули функции

$$g_p(z)=\sum_{n=0}^{2p} a_{n,\,p}\varphi(n)\,z^n.$$

Наконец, $g_p(z)\to g(z)$ равномерно в каждой конечной области. Действительно, формула

$$\left(1+\frac{az}{p}\right)^p=1+az+\left(1-\frac{1}{p}\right)\frac{a^2z^2}{2!}+\ldots+\frac{a^pz^p}{p^p}$$

показывает, что $a_{n,\,p}\to a_n$ при $p\to\infty$ (и фиксированном n) и что $|a_{n,\,p}|\leqslant a_n$ при всех значениях n и p. Следовательно, при $N<2p$

$$|g(z)-g_p(z)|\leqslant$$
$$\leqslant\left|\sum_{n=1}^{N}(a_n-a_{n,\,p})\,z^n\right|+\left|\sum_{N+1}^{\infty}a_nz^n\right|+\left|\sum_{N+1}^{2p}a_{n,\,p}z^n\right|\leqslant$$
$$\leqslant\left|\sum_{n=1}^{N}(a_n-a_{n,\,p})\,z^n\right|+2\sum_{N+1}^{\infty}|a_nz^n|.$$

Мы можем выбрать N столь большим, чтобы второй член справа был равномерно меньше заданного ε, при фиксированном же N первый член справа равномерно стремится к нулю.

Как и в предыдущем параграфе, доказательство завершается применением теоремы Гурвица.

8.6.3. Простейшим является случай функции $f(z)=e^z$. В этом случае предыдущая теорема утверждает, что *если функция* $\varphi(w)$ *удовлетворяет условиям теоремы* § 8.6.1, *то*

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi(n)}{n!}z^n$$

есть целая функция, все нули которой вещественны и отрицательны.

Примеры. (I) Положим

$$\varphi(w)=\frac{1}{\Gamma(w+\nu+1)}\qquad(\nu>-1).$$

Это — целая функция рода 1 с нулями в точках $w=-\nu-1,\ -\nu-2,\ \ldots$ Все они вещественны и отрицательны, так что и все нули функции

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!\,\Gamma(n+\nu+1)}=\frac{J_\nu(2i\sqrt{z})}{(i\sqrt{z})^\nu}$$

вещественны и отрицательны. Следовательно, все нули функции $J_\nu(z)$ вещественны,

(II) Функция *)

$$F_\alpha(z)=\int_0^\infty e^{-t^\alpha}\cos zt\,dt$$

не имеет нулей, если $\alpha=2$, и имеет бесконечно много вещественных нулей, но не имеет невещественных нулей, если $\alpha=4,\ 6,\ 8,\ \ldots$

[Разлагая косинус в степенной ряд и интегрируя, мы видим, что

$$F_\alpha(z)=\frac{1}{\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\Gamma((2n+1)/\alpha)}{\Gamma(2n+1)}z^{2n}.$$

Если $\alpha=2$, то, как в примере 10 главы I,

$$F_\alpha(z)=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,e^{-\frac{1}{4}z^2};$$

эта функция не имеет нулей.

При $\alpha=2k$, где k — положительное целое число, мы полагаем

$$\varphi(w)=\frac{\Gamma\left(\frac{2w+1}{2k}\right)\Gamma(w+1)}{\Gamma(2w+1)}.$$

$\varphi(w)$ есть целая функция, удовлетворяющая условиям теорем Лагерра из § 8.6. Следовательно, все нули функции

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi(n)}{n!}z^n=2kF_{2k}(i\sqrt{z})$$

вещественны и отрицательны, так что все нули функции $F_{2k}(z)$ вещественны. Далее, $\rho=\frac{2k}{2k-1}$ (§ 8.4, пример (IX)), так что $1<\rho<2$ и нулей бесконечно много.

Если α не является четным целым числом, то, как можно показать, комплексных нулей бесконечно много, а вещественных нулей конечное число.]

8.6.4. Функции с отрицательными вещественными нулями. Если все нули функции вещественны и отрицательны, то модуль функции связан с распределением ее нулей особенно просто.

Пусть $f(z)$ — такая функция, и пусть ее порядок ρ меньше 1. Тогда

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{z_n}\right).$$

---

*) Pólya [1].

Следовательно, при вещественном z

$$\log f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\log\left(1+\frac{z}{z_n}\right)=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}n\left\{\log\left(1+\frac{z}{z_n}\right)-\log\left(1+\frac{z}{z_{n+1}}\right)\right\}^{*)}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}n\int_{z_n}^{z_n+1}\frac{z\,dt}{t(z+t)}=z\int_0^{\infty}\frac{n(t)\,dt}{t(z+t)},$$

где $n(t)$ имеет свое обычное значение.

Предположим теперь, что $n(t)\sim\lambda t^{\rho}$ при $t\to\infty$. Тогда

$$\log f(x)\sim\pi\lambda\operatorname{cosec}\pi\rho x^{\rho}.$$

Действительно, $(\lambda-\varepsilon)t^{\rho}<n(t)<(\lambda+\varepsilon)t^{\rho}$, если $t>t_0(\varepsilon)$, так что

$$\log f(x)<x\int_0^{t_0}\frac{n(t)\,dt}{t(x+t)}+x\int_{t_0}^{\infty}\frac{(\lambda+\varepsilon)t^{\rho}}{t(x+t)}dt=$$

$$=x\int_0^{t_0}\frac{n(t)-(\lambda+\varepsilon)t^{\rho}}{t(x+t)}dt+x\int_0^{\infty}\frac{(\lambda+\varepsilon)t^{\rho}}{t(x+t)}dt.$$

Первый член справа есть, очевидно, $O(1)$, второй же член, как показывает подстановка $t=xu$, равен

$$x^{\rho}(\lambda+\varepsilon)\int_0^{\infty}\frac{u^{\rho-1}\,du}{1+u}=x^{\rho}(\lambda+\varepsilon)\pi\operatorname{cosec}\pi\rho$$

(см. § 3.1.2.3). Подобная же оценка снизу (с $\lambda-\varepsilon$ вместо $\lambda+\varepsilon$) завершает доказательство.

Более общим образом **),

$$\log f(re^{i\theta})\sim e^{i\rho\theta}\pi\lambda\operatorname{cosec}\pi\rho r^{\rho}$$

для любого фиксированного значения θ в интервале $(-\pi,\pi)$; $\log f(z)$ обозначает ту ветвь логарифма, которая вещественна на положительной части вещественной оси.

Действительно, предыдущее выражение функции $\log f(z)$ через интеграл, полученное для вещественных значений z, распространяется с помощью аналитического продолжения на область

*) Читатель оправдает этот переход, представляющий собою простой пример суммирования по частям.

**) Полиа и Сеге, *Задачи и теоремы из анализа*, ч. II, отдел IV, № 61.

$-\pi < \arg z < \pi$. Благодаря этому, как и выше,

$$\log f(re^{i\theta}) \sim re^{i\theta} \int_0^\infty \frac{\lambda t^\rho \, dt}{t(re^{i\theta}+t)},$$

поворачивая же прямую интегрирования до положения $t = ue^{i\theta}$, мы видим, что правая часть равна

$$\lambda re^{\rho i\theta} \int_0^\infty \frac{u^\rho \, du}{u(r+u)} = \lambda r^\rho e^{\rho i\theta} \pi \operatorname{cosec} \pi\rho.$$

Имеются также теоремы обратного типа: можно делать заключения об асимптотическом поведении функции $n(r)$, зная асимптотическое поведение функции $\log f(z)$. Наиболее интересным является тот факт, что *если* $\log f(x) \sim \pi\lambda \operatorname{cosec} \pi\rho x^\rho$, *когда* $x \to \infty$ *вдоль вещественной оси, то* $n(r) \sim \lambda r^\rho$. Эта теорема*) тесно связана с тауберовскими результатами §§ 7.4.1 — 7.4.4, но ее доказательство не может быть изложено здесь из-за своей сложности.

8.7. Минимум модуля. Пусть $m(r)$ обозначает минимум функции $|f(r)|$ на окружности $|z| = r$.

Нельзя ожидать, что функция $m(r)$ будет вести себя столь же просто, как $M(r)$, поскольку она обращается в нуль, если r есть модуль нуля функции $f(z)$. Но мы увидим, что если оставить в стороне непосредственные окрестности этих исключительных точек, то для $m(r)$ можно установить некоторый нижний предел, и что, вообще говоря, $m(r)$ стремится к нулю в некотором смысле так же, как $\frac{1}{M(r)}$.

8.7.1. Рассмотрим сначала каноническое произведение $P(z)$ порядка ρ с нулями $z_1, z_2, \ldots$

Если вокруг каждого нуля z_n ($|z_n| > 1$) *описан круг радиуса* $|z_n|^{-h}$, *где* $h > \rho$, *то в области, внешней по отношению ко всем этим кругам,*

$$|P(z)| > e^{-r^{\rho+\varepsilon}} \qquad (r > r_0(\varepsilon)).$$

Пользуясь методом § 8.2.5, мы видим, что

$$\log|P(z)| \geqslant \sum_{r_n \leqslant kr} \log\left|1 - \frac{z}{z_n}\right| - \sum_{r_n \leqslant kr} O\left\{\left(\frac{r}{r_n}\right)^p\right\} - \sum_{r_n > kr} O\left\{\left(\frac{r}{r_n}\right)^{p+1}\right\} = \sum_{r_n \leqslant kr} \log\left|1 - \frac{z}{z_n}\right| - O(r^{\rho+\varepsilon}).$$

---

*) См. Valiron [1] и Titchmarsh [5], [6].

Так как ряд $\sum r_n^{-h}$ сходится, т. е. сумма ряда радиусов кругов конечна, то существуют окружности сколь угодно большого радиуса с центром в начале, лежащие целиком во внешней области. Пусть z лежит вне всех окружностей $|z-z_n|=r_n^{-h}$. Если $r_n \leqslant kr$, то

$$\left|1-\frac{z}{z_n}\right| > r_n^{-1-h} > (kr)^{-1-h}.$$

Следовательно,

$$\sum_{1<r_n\leqslant kr} \log\left|1-\frac{z}{z_n}\right| > -(1+h)\log kr\cdot n(kr) >$$
$$> -K\log kr\cdot r^{\rho+\varepsilon} > -r^{\rho+2\varepsilon}.$$

Наконец,

$$\sum_{r_n\leqslant 1} \log\left|1-\frac{z}{z_n}\right| > 0 \qquad (r>2),$$

что и завершает доказательство.

8.7.1.1. *Если $f(z)$ — функция порядка ρ, то существуют окружности сколь угодно большого радиуса, на которых*

$$m(r) > e^{-r^{\rho+\varepsilon}}.$$

Действительно,

$$f(z)=P(z)\,e^{Q(z)},$$

где $Q(z)$ — многочлен степени $q\leqslant\rho$. При достаточно больших значениях r

$$|e^{Q(z)}| > e^{-Ar^q} > e^{-Ar^\rho},$$

и, согласно предыдущей теореме, на окружностях сколь угодно большого радиуса

$$|P(z)| > e^{-r^{\rho_1+\varepsilon}} > e^{-r^{\rho+\varepsilon}}.$$

Этим теорема доказана.

8.7.2. Другое доказательство теоремы Адамара о разложении на множители. Теорема § 8.7.1 приводит к другому доказательству теоремы Адамара о разложении на множители. Пусть

$$f(z)=P(z)\,e^{Q(z)},$$

где $P(z)$ — каноническое произведение, построенное по нулям функции $f(z)$. Тогда $Q(z)$ есть целая функция. Пусть ρ — порядок функции $f(z)$ и ρ_1 — показатель сходимости. Так как $P(z)$ имеет порядок ρ_1, то $\rho_1\leqslant\rho$. Следовательно, на окружностях сколь угодно большого радиуса

$$|P(z)| > e^{-r^{\rho_1+\varepsilon}} > e^{-r^{\rho+\varepsilon}}.$$

Кроме того, $f(z) = O\left(e^{r^{\rho+\varepsilon}}\right)$. Таким образом, на окружностях сколь угодно большого радиуса

$$\operatorname{Re} Q(z) = \log\left|\frac{f(z)}{P(z)}\right| = \log\left\{O\left(e^{r^{\rho+\varepsilon}}\right)\right\} < Kr^{\rho+\varepsilon},$$

и, в силу теоремы § 2.5.4, $Q(z)$ есть многочлен степени $\leqslant \rho$.

8.7.3. В специальных случаях можно получить результаты, более точные, чем теорема § 8.7.1.1.

Если $f(z)$ — не постоянная и $\rho < 1/2$, то существует стремящаяся к бесконечности последовательность значений r, по которой $m(r) \to \infty$.

Прежде всего, не существует полупрямой $\arg z = \mathrm{const}$, на которой функция $f(z)$ была бы ограничена. Действительно, плоскость, надрезанная вдоль такой полупрямой, представляет собой угол величиной в 2π, а $2\pi < \pi/\rho$, если $\rho < 1/2$; следовательно § 5.6.1), если функция $f(z)$ ограничена на такой полупрямой, то она ограничена всюду и, таким образом, сводится к постоянной.

Пусть теперь

$$f(z) = cz^k \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{z_n}\right).$$

Положим $\varphi(z) = cz^k \prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{z}{r_n}\right)$, где $r_n = |z_n|$. Так как при любом n

$$\left|1 - \frac{z}{z_n}\right| \geqslant \left|1 - \frac{r}{r_n}\right|,$$

то

$$\min_{|z|=r} |f(z)| \geqslant |\varphi(-r)|.$$

Но функция $\varphi(-r)$ не ограничена, так как $\varphi(z)$ есть целая функция того же порядка, что и $f(z)$. Этим теорема доказана.

8.7.4. Следующая теорема является еще более точной.

Если $0 < \rho < 1$, то существуют сколь угодно большие значения r, для которых

$$m(r) > \{M(r)\}^{\cos \pi\rho - \varepsilon}.$$

Нижеследующее доказательство принадлежит Полиа *). Пусть $f(z)$ и $\varphi(z)$ определяются теми же формулами, что и выше; очевидно, можно считать, что $c = 1$, $k = 0$. Достаточно провести доказательство для $\varphi(z)$. Если $0 < \rho < 1/2$, так что $\cos \pi\rho > 0$, то это сразу следует из неравенств $m(r) \geqslant |\varphi(-r)|$, $M(r) \leqslant \varphi(r)$.

*) Pólya [3].

В любом случае, если z' — точка с $|f(z')| = m(r)$, то

$$|\varphi(r)\varphi(-r)| = \left|\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{r^2}{r_n^2}\right)\right| \leqslant |f(z')f(-z')| \leqslant m(r)M(r).$$

Следовательно, если для $\varphi(z)$ теорема верна, то

$$m(r)M(r) \geqslant |\varphi(r)|^{1+\cos\pi\rho-\varepsilon} \geqslant \{M(r)\}^{1+\cos\pi\rho-\varepsilon}$$

при сколь угодно больших значениях r, так что теорема верна и для $f(z)$.

Если теорема не верна для $\varphi(z)$, то существуют такие положительные постоянные ε и a, что

$$\log|\varphi(-x)| < (\cos\pi\rho - \varepsilon)\log\varphi(x) \qquad (x > a).$$

Согласно § 8.4 (пример (XII)), при $\rho < s < 1$, а потому и при $\rho < \operatorname{Re}(s) < 1$

$$\int_0^{\infty}\{\cos\pi s\log\varphi(x) - \log|\varphi(-x)|\}\, x^{-s-1}\, dx = 0.$$

Так как интеграл, взятый по интервалу $(0, a)$, является регулярной функцией от s при $0 < \operatorname{Re}(s) < 1$, то таков же интеграл, взятый по интервалу (a, ∞). Следовательно, функция

$$F(s) = \int_{\alpha}^{\infty}\{\varphi_1(e^{\xi}) + \psi(s)\varphi_2(e^{\xi})\}\, e^{-s\xi}\, d\xi,$$

где

$$\varphi_1(x) = (\cos\pi\rho - \varepsilon)\log\varphi(x) - \log|\varphi(-x)|, \quad \varphi_2(x) = \log\varphi(x),$$

$$\psi(s) = \cos\pi s - \cos\pi\rho + \varepsilon, \qquad \alpha = \log a,$$

регулярна при $0 < \operatorname{Re}(s) < 1$ и, в частности, при $s = \rho$. Заметим, что функции φ_1 и φ_2 положительны при $x > 0$, а функция ψ положительна при вещественных значениях s, достаточно близких к ρ.

Пусть $h > 0$. Положим $D = \frac{d}{ds}$. При достаточно малых h и $s - \rho$

$$\left|\left(1 - \frac{hD}{m}\right)^m F(s)\right| = \left|\sum_{\mu=0}^{m}\frac{(-h)^{\mu}}{\mu!}\,\frac{m(m-1)\ldots(m-\mu+1)}{m^{\mu}}\,F^{\mu}(s)\right| \leqslant$$

$$\leqslant |F(s)| + \frac{h}{1!}|F'(s)| + \frac{h^2}{2!}|F''(s)| + \ldots = M.$$

Далее,

$$\left(1-\frac{hD}{m}\right)^m \psi(s)\, e^{-s\xi} = e^{-s\xi}\left(1+\frac{h\xi-hD}{m}\right)^m \psi(s) =$$

$$= e^{-s\xi}\left(1+\frac{h\xi}{m}\right)^m \psi(s) + e^{-s\xi}\sum_{\mu=1}^{m}\binom{m}{\mu}\left(1+\frac{h\xi}{m}\right)^{m-\mu}\left(\frac{-h}{m}\right)^{\mu}\psi^{(\mu)}(s) \geqslant$$

$$\geqslant e^{-s\xi}\left(1+\frac{h\xi}{m}\right)^m \psi(s) - e^{-s\xi}\left(1+\frac{h\xi}{m}\right)^m \sum_{\mu=1}^{m}\frac{h^{\mu}}{\mu!}\left|\psi^{(\mu)}(s)\right|.$$

Так как $|\psi^{(\mu)}(s)| \leqslant \pi^{\mu}$ при вещественных s, то при достаточно малых h правая часть, очевидно, больше, чем

$$\frac{1}{2}e^{-s\xi}\left(1+\frac{h\xi}{m}\right)^m \psi(s).$$

Следовательно,

$$\left(1-\frac{hD}{m}\right)^m F(s) \geqslant \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\infty}\{\varphi_1(e^{\xi}) + \psi(s)\,\varphi_2(e^{\xi})\}\left(1+\frac{h\xi}{m}\right)^m e^{-s\xi}\, d\xi.$$

В частности, при $\omega > \alpha$

$$\int_{\alpha}^{\omega}\varphi_2(e^{\xi})\left(1+\frac{h\xi}{m}\right)^m e^{-s\xi}\, d\xi \leqslant \frac{2M}{\psi(s)}.$$

Заставляя стремиться к ∞ сначала m, а затем ω, мы видим, что интеграл

$$\int_{\alpha}^{\infty}\varphi_2(e^{\xi})\, e^{(h-s)\xi}\, d\xi = \int_{a}^{\infty}\frac{\log\varphi(x)}{x^{s-h+1}}\, dx$$

сходится при некотором значении $s-h$, меньшем ρ. Но тогда сходится и ряд $\sum r_n^{-s+h}$, что противоречит § 8.2.6. Этим теорема доказана.

8.7.5. Аналогичная теорема верна для функций порядка 1, принадлежащих экспоненциальному типу, т. е. удовлетворяющих условию $f(z) = O(e^{k|z|})$.

Если $f(z) = O(e^{k|z|})$, то существуют сколь угодно большие значения r, для которых $m(r) > e^{-(k+\varepsilon)r}$.

Пусть $r_1, r_2, \ldots$ — модули нулей функции $f(z)$. Как в § 8.2.1, мы видим, что $n(r) = O(r)$, $1/r_n < K/n$. Следовательно,

$$\varphi(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{r_n^2}\right) = O\left\{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{K^2 r}{n^2}\right)\right\} = O\left\{\frac{\operatorname{sh}(\pi K\sqrt{r})}{\pi K\sqrt{r}}\right\}.$$

Определим $h(\theta)$ (§ 5.7) для $\varphi(z)$, полагая $V(r) = \sqrt{r}$. Ясно, что $h(\theta) \leqslant \pi K$ для всех значений θ. Так как $|\varphi(z)| \geqslant 1$ при

$\operatorname{Re}(z) \geqslant 0$, то функция $h(\theta)$ конечна при $-\frac{1}{2}\pi \leqslant \theta \leqslant \frac{1}{2}\pi$, а потому и всюду (§ 5.7.1.2). Далее, $h(-\theta) = h(\theta)$ и, по § 5.7.1.3, $h(\pi) \geqslant 0$ (нужно положить $\theta_1 = -\pi$, $\theta_2 = 0$, $\theta_3 = \pi$, $\rho = 1/2$). Следовательно, существуют сколь угодно большие значения r, для которых

$$|f(z) f(-z)| \geqslant |f(0)|^2 |\varphi(-r^2)| > e^{-\varepsilon r},$$

что и доказывает теорему.

8.8. *а*-точки целой функции. До сих пор наше изучение целых функций концентрировалось вокруг распределения нулей функции. Более общим является вопрос о распределении точек, в которых функция принимает произвольно заданное значение a. Мы будем называть их «a-точками».

Для одного случая мы уже получили в этом направлении весьма точные результаты: это — случай функции конечного нецелого порядка. Если функция $f(z)$ имеет порядок ρ, причем ρ — нецелое число, то она имеет бесконечно много нулей и показатель сходимости этих нулей равен ρ. Но ясно, что функция $f(z) - a$, где a — постоянная, также имеет порядок ρ. Следовательно, функция $f(z)$ имеет бесконечно много a-точек и показатель их сходимости равен ρ. Таким образом, грубо говоря, они имеют одну и ту же плотность при всех значениях a.

Подобное же доказательство применимо к функциям рода нуль. Такая функция имеет бесконечно много нулей, если только она не является многочленом, разность же $f(z) - a$ либо является многочленом при любом значении a, либо не является многочленом ни при каком значении a.

Если $f(z)$ — функция положительного целого порядка, нигде не равная a, то $f(z) - a = e^{Q(z)}$, где $Q(z)$ — многочлен. Если $b \neq a$, то $Q(z) = \log(b - a)$ при некотором z, так что $f(z) = b$. Следовательно, $f(z)$ принимает все значения, за исключением, возможно, одного.

8.8.1. Теорема Пикара. Основная теорема теории принадлежит Пикару; она не связана с понятием порядка.

Целая функция, не являющаяся многочленом, принимает бесконечное число раз каждое значение, за исключением, возможно, одного.

Пикаровское доказательство этой теоремы использует свойства эллиптической модулярной функции. Эта функция, которую мы обозначим через $\omega(z)$, обладает следующими двумя свойствами: *она регулярна во всех точках, кроме точек $z = 0, 1, \infty$; ее мнимая часть нигде не отрицательна.*

Пользуясь этой функцией, легко доказать, что *целая функция, не являющаяся постоянной, по крайней мере один раз принимает каждое значение, за исключением, возможно, одного.*

Пусть $f(z)$ — целая функция, не принимающая значений a, b ($a \neq b$). Тогда $g(z) = \frac{f(z)-a}{b-a}$ есть целая функция, не принимающая значений 0, 1. Рассмотрим функцию $\omega\{g(z)\}$. Она регулярна во всех точках, кроме бесконечно удаленной, так как функция $g(z)$ не принимает конечных значений, при которых функция ω не регулярна. Кроме того, ее мнимая часть неотрицательна. Следовательно, она является постоянной. Но ω — не постоянная, так что постоянной должна быть функция $g(z)$. Этим теорема доказана.

Поскольку мы не рассмотрели конструкции модулярной функции, мы не будем доводить до конца это доказательство теоремы Пикара, а дадим более прямое доказательство, основанное на одной теореме Шоттки *).

8.8.2. Характерная особенность теоремы Пикара состоит в том, что она допускает существование исключительного значения. Это исключительное значение действительно может существовать; например, функция e^z нигде не принимает значения 0. Значение, обладающее этим свойством, называется «исключительным P».

Существует и другой смысл, в котором значение может быть исключительным. Функция может принимать значение a, но только в точках, показатель сходимости которых меньше ρ; например, функция $e^z \cos\sqrt{z}$, порядок которой равен 1, имеет нули, но их показатель сходимости равен 1/2. Значение, обладающее этим свойством, называется исключительным в смысле Бореля или «исключительным B». Ясно, что значение, исключительное P, является a fortiori исключительным B.

8.8.3. Для функций положительного целого порядка теорема Пикара является следствием нижеследующей теоремы Бореля, которая показывает, что не только значение, исключительное P, но и значение, исключительное B, не может не быть единственным.

Теорема Бореля. *Если порядок функции $f(z)$ есть положительное целое число, то показатель сходимости а-точек функции $f(z)$ равен ее порядку для всех значений a, за исключением, возможно, одного.*

Предположим, что существуют два исключительных значения, a и b. Тогда

$$f(z) - a = z^{k_1} e^{Q_1(z)} P_1(z), \tag{1}$$

$$f(z) - b = z^{k_2} e^{Q_2(z)} P_2(z), \tag{2}$$

где $Q_1(z)$ и $Q_2(z)$ — многочлены степени ρ, а $P_1(z)$ и $P_2(z)$ — канонические произведения порядка, меньшего ρ.

*) Другое прямое доказательство основано на одной теореме Блоха. См. Landau, *Ergebnisse*, 2-е изд., 1929, гл. VII, и Dienes, *The Taylor Series*, гл. VIII.

Вычитая (2) из (1), мы видим, что

$$b-a=z^{k_1}e^{Q_1(z)}P_1(z)-z^{k_2}e^{Q_2(z)}P_2(z), \tag{3}$$

т. е. что $z^{k_1}P_1(z)e^{Q_1(z)-Q_2(z)}=z^{k_2}P_2(z)+(b-a)e^{-Q_2(z)}$. Так как степень многочлена $Q_2(z)$ равна ρ, то правая часть имеет порядок ρ. Таков же, следовательно, порядок левой части, поскольку же порядок произведения $P_1(z)$ меньше ρ, многочлен $Q_1(z)-Q_2(z)$ имеет степень ρ.

Дифференцируя равенство (3), мы получаем равенство

$$(z^{k_1}P_1Q_1'+k_1z^{k_1-1}P_1+z^{k_1}P_1')e^{Q_1}=$$
$$=(z^{k_2}P_2Q_2'+k_2z^{k_2-1}P_2+z^{k_2}P_2')e^{Q_2}. \tag{4}$$

Но порядок производной P_1' равен порядку произведения P_1 и, таким образом, меньше ρ. Следовательно, функция, стоящая в скобках перед e^{Q_1}, имеет порядок, меньший ρ, и тем же свойством обладает функция, стоящая в скобках перед e^{Q_2}. Следовательно, равенство (4) можно представить в виде

$$z^{k_3}P_3e^{Q_1+Q_3}=z^{k_4}P_4e^{Q_2+Q_4},$$

где Q_3 и Q_4 — многочлены, степени которых не выше $\rho-1$, а P_3 и P_4 — канонические произведения. Обе части равенства должны иметь одинаковые нули, так что $k_3=k_4$, $P_3=P_4$ и, следовательно, $Q_1+Q_3=Q_2+Q_4$. Таким образом, $Q_1-Q_2=$ $=Q_4-Q_3$, т. е. мы пришли к заключению, что многочлен степени ρ равен многочлену, степень которого не выше $\rho-1$. Это противоречие и доказывает теорему.

8.8.4. Для доказательства теоремы Шоттки нам нужна следующая лемма.

Пусть $\varphi(z)$ — вещественная функция, определенная в интервале $0\leqslant r\leqslant R_1$, и пусть

$$0\leqslant\varphi(r)\leqslant M \qquad (0<r\leqslant R_1) \tag{1}$$

и

$$\varphi(r)<\frac{C\sqrt{\varphi(R)}}{(R-r)^2} \qquad (0<r<R\leqslant R_1). \tag{2}$$

Тогда

$$\varphi(r)<\frac{AC^2}{(R_1-r)^4} \qquad (0<r<R_1). \tag{3}$$

Форма неравенства (3) сама по себе не особенно существенна. Важно, что правая часть зависит только от r, R_1 и C (но не от M).

Из неравенств (1) и (2) следует неравенство

$$\varphi(r)<\frac{C\sqrt{M}}{(R-r)^2} \qquad (0<r<R\leqslant R_1), \tag{4}$$

так что верхняя граница M, указываемая неравенством (1), сразу заменяется кратным радикала $\sqrt{M}$. Если повторить эту операцию, воспользовавшись сначала неравенством (4) с r_1, r_2 вместо r, R и затем неравенством (2) с r_1 вместо R, то получится неравенство

$$\varphi(r) < \frac{C}{(r_1-r)^2}\left\{\frac{C}{(r_2-r_1)^2}\right\}^{1/2} M^{1/4} \qquad (0 < r < r_1 < r_2 \leqslant R_1).$$

Вообще

$$\varphi(r) < \frac{C}{(r_1-r)^2}\left\{\frac{C}{(r_2-r_1)^2}\right\}^{1/2} \cdots \left\{\frac{C}{(r_n-r_{n-1})^2}\right\}^{1/2^{n-1}} M^{1/2^n}.$$

При $r_1 = \frac{1}{2}(R_1+r)$, $r_2 = \frac{1}{2}(R_1+r_1)$, ... это означает, что

$$\varphi(r) < 4^{1+1+\frac{3}{4}+\ldots+\frac{n}{2^{n-1}}}\left\{\frac{C}{(R_1-r)^2}\right\}^{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}} M^{\frac{1}{2^n}}.$$

Неравенство (3) получается отсюда после предельного перехода при $n \to \infty$.

8.8.5. Теорема Шоттки. *Если при $|z| \leqslant R_1$ функция $f(z)$ регулярна и не принимает ни значения 0, ни значения 1, то при $|z| \leqslant R < R_1$*

$$|f(z)| < \exp\left\{\frac{KR_1^4}{(R_1-R)^4}\right\},$$

где K зависит только от $f(0)$. Для всех функций, удовлетворяющих указанным условиям и условиям $\delta < f(0) < 1/\delta$, $|1-f(0)| > \delta$, можно взять одно и то же значение K, которое зависит, таким образом, только от δ.

Предыдущая формула для верхней границы функции $|f(z)|$ (которая, в случае необходимости, может быть еще значительно улучшена) не будет нам нужна. Важно, что верхняя грань зависит только от $f(0)$, притом указанным выше образом, и от R/R_1.

Положим

$$g_1(z) = \log f(z), \quad g_2(z) = \log\{1-f(z)\},$$

где взяты значения логарифмов, главные при $z=0$. Функции $g_1(z)$ и $g_2(z)$ регулярны при $|z| \leqslant R_1$. Пусть $M_1(r)$ и $M_2(r)$ — максимумы функций $|g_1(z)|$ и $|g_2(z)|$ на окружности $|z| = r$, и пусть

$$M(r) = \max\{M_1(r),\ M_2(r)\}.$$

Положим $B_1(r) = -\min\limits_{|z|=r} \operatorname{Re} g_1(z) = \max\limits_{|z|=r} \log\frac{1}{|f(z)|}$. Применяя к функции $g_1(z)$ теорему Каратеодори (§ 5.5), мы видим, что

$$M_1(\rho) \leqslant \frac{2r}{r-\rho}\{B_1(r) + |g_1(0)|\} \qquad (0 < \rho < r). \qquad (1)$$

Теперь возможны два случая. Либо значение $B_1(r)$ невелико, скажем $B_1(r) \leqslant 1$, и тогда неравенство (1) дает оценку нужного типа; либо же значение $B_1(r)$ велико, и тогда на окружности $|z|=r$ имеется точка z', в которой значение $|f(z')|$ мало. Но при малом значении $|f(z')|$ значение $g_2(z')$, если не считать члена $2n\pi i$, приблизительно равно $-f(z')$, а тогда теорема Каратеодори, примененная к функции $\log g_2$, дает слева M_1 (не $\log M_1$, как можно было бы ожидать), а справа $\log M_2 = O(\sqrt{M_2})$. Мы получаем, таким образом, неравенство типа, рассмотренного в доказанной выше элементарной лемме. Это — общий план доказательства, и теперь мы обращаемся к деталям.

Предположим, что $B_1(r) > 1$, и пусть z' — точка с

$$B_1(r) = \log \frac{1}{|f(z')|}.$$

Тогда

$$|f(z')| = e^{-B_1(r)} < e^{-1} < \frac{1}{2}. \tag{2}$$

Поэтому существует такое целое n, что

$$g_2(z') - 2n\pi i = -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\{f(z')\}^m}{m}.$$

Из этой формулы следует, что

$$|g_2(z') - 2n\pi i| < \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m} = 1,$$

так что

$$2|n|\pi < 1 + |g_2(z')| \leqslant 1 + M_2(r). \tag{3}$$

Положим $h(z) = \log\{g_2(z) - 2n\pi i\}$, где взято значение логарифма, главное при $z=0$. Функция $h(z)$ регулярна при $|z| \leqslant R_1$; действительно, $f(z) \neq 0$, вследствие чего $g_2(z) \neq 2n\pi i$. Теорема Каратеодори дает:

$$\max_{|z|=r} |h(z)| \leqslant \frac{2R}{R-r}\left(\max_{|z|=R} \log|g_2(z) - 2n\pi i| + |h(0)|\right). \tag{4}$$

Левая часть не меньше, чем

$$\log\left|\frac{1}{g_2(z') - 2n\pi i}\right| \geqslant \log \frac{1}{|f(z')| + |f(z')|^2 + |f(z')|^3 + \ldots} \geqslant$$

$$\geqslant \log \frac{1}{2|f(z')|} = B_1(r) - \log 2$$

(см. неравенство (2)). Чтобы оценить сверху правую часть неравенства (4), заметим, что

$$\max_{|z|=R} \log|g_2(z) - 2n\pi i| \leqslant \log\{M_2(R) + 2|n|\pi\} < \log\{2M_2(R) + 1\}$$

(см. неравенство (3)) и (поскольку $|\operatorname{Im} h(0)| \leqslant \pi$)

$$|h(0)| \leqslant \log |g_2(0) - 2n\pi i| + \pi \leqslant \log \{|g_2(0)| + 1 + M_2(r)\} + \pi.$$

Следовательно,

$$B_1(r) < \frac{2R}{R-r} [\log \{2M_2(R) + 1\} + \log \{M_2(R) + |g_2(0)| + 1\} + \pi] + \\ + \log 2 < \frac{4R}{R-r} [\log \{2M_2(R) + |g_2(0)| + 1\} + \pi]. \quad (5)$$

Это неравенство, доказанное при $B_1(r) > 1$, верно, очевидно, и при $B_1(r) \leqslant 1$. Во всех случаях из неравенств (1) и (5) следует, что

$$M_1(\rho) < \frac{8Rr}{(R-r)(r-\rho)} [\log \{2M_2(R) + |g_2(0)| + 1\} + |g_1(0)| + \pi]. \quad (6)$$

Так как во всем рассуждении функции $g_1(z)$ и $g_2(z)$ можно поменять местами, то это неравенство останется в силе, если мы поменяем в нем местами индексы 1 и 2. Комбинируя получающееся неравенство с (6), мы видим, что

$$M(\rho) < \frac{8Rr}{(R-r)(r-\rho)} [\log \{2M(R) + |g_1(0)| + \\ + |g_2(0)| + 1\} + |g_1(0)| + |g_2(0)| + \pi]. \quad (7)$$

При $r = \frac{1}{2}(R + \rho)$ неравенство (7) дает:

$$M(\rho) < \frac{32R_1^2}{(R-\rho)^2} \{\log M(R) + K\} < \frac{KR_1^2 \sqrt{M(R)}}{(R-\rho)^2};$$

действительно, $\log M(R) = O\{\sqrt{M(R)}\}$. Наконец, в силу леммы,

$$M(\rho) < \frac{KR_1^4}{(R-\rho)^4},$$

и, следовательно,

$$|f(z)| \leqslant e^{M(r)} < \exp \left\{\frac{KR_1^4}{(R-r)^4}\right\}.$$

Поскольку K зависит только от $|g_1(0)|$ и $|g_2(0)|$, этим доказана и заключительная часть теоремы.

8.8.6. Первая теорема Пикара. *Целая функция, не являющаяся постоянной, принимает, по крайней мере один раз, каждое значение, за исключением, возможно, одного.*

Предположим, что функция $f(z)$ не принимает ни одного из двух значений a, b $(a \neq b)$. Тогда функция $g(z) = \frac{f(z) - f(a)}{b - a}$ не принимает ни значения 0, ни значения 1, так что, в силу теоремы Шоттки,

$$|g(z)| < \exp \left\{\frac{KR_1^4}{(R_1 - R)^4}\right\} \qquad (|z| \leqslant R < R_1).$$

Полагая $R_1 = 2R$, мы видим, что $|g(z)| < K$. Следовательно, $g(z)$ есть постоянная.

8.8.7. Мы докажем также следующую теорему, обобщающую теорему Пикара.

Теорема Ландау *). *Пусть α — произвольное число и β — число, отличное от нуля. Существует такое число $R = R(\alpha, \beta)$, что всякая функция*

$$f(z) = \alpha + \beta z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots,$$

регулярная при $|z| \leqslant R$, принимает в этом круге либо значение 0, либо значение 1.

Можно предположить, что $\alpha \neq 0$ и $\alpha \neq 1$, поскольку в противном случае теорема очевидна. Если функция $f(z)$ не принимает значений 0, 1, то, согласно теореме Шоттки, $|f(z)| < K(\alpha)$ при $|z| \leqslant \frac{1}{2}R$. Следовательно,

$$|\beta| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z| = \frac{1}{2}R} \frac{f(z)}{z^2}\, dz \right| \leqslant \frac{K(\alpha)}{R/2},$$

так что $R \leqslant 2K(\alpha)/|\beta|$. Этим теорема доказана.

8.8.8. Мы сформулировали и доказали теорему Пикара для целых функций, т. е., если оставить в стороне многочлены, для функций, единственная особенность которых есть существенная особенность в бесконечности. Но подобная же теорема верна для любой функции с изолированной существенной особенностью.

Вторая теорема Пикара. *В окрестности изолированной существенно особой точки однозначная функция бесконечное число раз принимает каждое значение, за исключением, возможно, одного.*

Другими словами, *если функция $f(z)$ регулярна при $0 < |z - z_0| < \rho$ и не принимает при $|z - z_0| < \rho$ двух различных значений a, b, то точка z_0 не является для нее существенно особой.*

Можно считать, что $z_0 = 0$, $\rho = 1$, $a = 0$, $b = 1$. Мы покажем, что существует последовательность окружностей $|z| = r_n$ с $r_n \to 0$, на которых функция $f(z)$ равномерно ограничена. Это будет противоречить существованию особенности при $z = 0$; см. § 2.7.1.

Мы начнем с теоремы Вейерштрасса, согласно которой функция в окрестности своей существенно особой точки бесконечно много раз сколь угодно близко подходит к любому заданному значению. Существует, таким образом, последовательность точек $z_1, z_2, \ldots$, для которой $|z_1| > |z_2| > \ldots$, $|z_n| \to 0$ и

$$|f(z_n) - 2| < \frac{1}{2}. \tag{1}$$

*) Landau [1] и *Ergebnisse*, § 25.

Ясно, что теорема Шоттки позволяет нам построить последовательность окружностей с центрами в точках $z_1, z_2, \ldots$, на которых функция $f(z)$ равномерно ограничена. Конечно, эти окружности не будут охватывать начало, и, поскольку мы доказали теорему Шоттки только для окружностей, мы встречаемся здесь с трудностью. Эту трудность можно устранить с помощью конформного преобразования, переводящего окружность в вытянутую кривую, которая, правда, тоже не содержит начала в своей внутренней области, но окружает его, пересекая себя в стороне от него.

Положим $z = e^w$, $w = u + iv$ и рассмотрим в плоскости w полуполосу $u < 0, -\pi \leqslant v \leqslant \pi$. Ей отвечает круг $|z| < 1$. Положим, далее, $f(z) = g(w)$, и пусть $w_n = \log z_n$ $(-\pi < \operatorname{Im} w_n \leqslant \pi)$, так что $\operatorname{Re} w_n \to -\infty$.

Мы применяем теорему Шоттки к функции

$$h(w') = g(w_n + w').$$

Эта функция регулярна при $|w'| \leqslant 4\pi$, если n достаточно велико, и не принимает значений 0, 1. Следовательно,

$$|h(w')| < K = K\{h(0)\} \qquad (|w'| \leqslant 2\pi),$$

поскольку же числа $h(0) = g(w_n) = f(z_n)$ удовлетворяют условию (1), мы можем заменить правую часть абсолютной постоянной. Таким образом, $|g(w)| < A$ при $|w - w_n| \leqslant 2\pi$ и, в частности, при $u = \operatorname{Re}(w_n)$, $-\pi \leqslant v \leqslant \pi$. Поэтому $|f(z)| < A$ $(|z| = |z_n|)$, что и доказывает теорему.

8.8.9. Асимптотические значения. Число a называется асимптотическим значением функции $f(z)$, если существует непрерывная кривая, ведущая из некоторой точки в бесконечность, вдоль которой $f(z) \to a$ при $z \to \infty$. Например, 0 есть асимптотическое значение функции e^z, так как $e^z \to 0$, когда $z \to \infty$ вдоль отрицательной части вещественной оси. Функция $\int_0^z e^{-t^q}\,dt$, где q — положительное целое число, имеет q асимптотических значений

$$e^{2\pi ik/q} \int_0^\infty e^{-t^q}\,dt \qquad (k = 0, \ldots, q-1),$$

которые появляются, когда $z \to \infty$ вдоль полупрямых $\arg z = e^{2\pi ik/q}$.

Подобным же образом определяется «асимптотическое значение ∞».

Мы докажем следующие теоремы.

Всякая функция с изолированной существенной особенностью в бесконечности имеет асимптотическое значение ∞.

В силу теоремы Лорана такая функция представляется в виде $f(z)+g(z)$, где $f(z)$ — целая функция, а $g(z)$ стремится к нулю при $|z|\to\infty$. Следовательно, достаточно рассмотреть целые функции. Для целой функции, не являющейся постоянной, максимум $M(r)$ модуля $|f(z)|$ монотонно стремится к бесконечности. Рассмотрим неограниченно возрастающую последовательность чисел $X_1=M(r_1)$, $X_2=M(r_2),\ldots$ Из теоремы Лиувилля следует, что вне окружности $|z|=|r_1|$ имеется точка, в которой $|f(z)|>X_1$. Точки, в которых $|f(z)|>X_1$, составляют внутренности областей, ограниченных кривыми, на которых $|f(z)|=X_1$, и эти области должны быть внешними по отношению к окружности $|z|=r_1$. Пусть D_1 — одна из них. Ясно, что область D_1 простирается в бесконечность: в противном случае это была бы конечная область, на границе которой $|f(z)|=X_1$ и внутри которой $|f(z)|>X_1$, что, согласно теореме о максимуме модуля, невозможно. Далее, функция $f(z)$ не ограничена в D_1: в противном случае из принципа Фрагмена и Линделефа следовало бы, что $|f(z)|\leqslant X_1$ во всех точках области D_1 (здесь применимо доказательство § 5.6 с P в бесконечности и с $\omega(z)=r_1/z$). Следовательно, в D_1 имеется точка, где $|f(z)|>X_2$, и с ней некоторая область D_2, внутренняя к D_1, во всех точках которой $|f(z)|>X_2$. Повторяя это рассуждение, мы получим последовательность областей D_1, $D_2,\ldots$, каждая из которых лежит внутри предыдущей и которые обладают тем свойством, что $|f(z)|>X_m$ в D_m и $|f(z)|=X_m$ на границе области D_m. Возьмем на границе области D_1 какую-нибудь точку и соединим ее непрерывной кривой, лежащей в D_1, с какой-нибудь точкой границы области D_2, затем соединим эту вторую точку непрерывной кривой, лежащей в D_2, с какой-нибудь точкой границы области D_3, и т. д. Мы получим, очевидно, непрерывную кривую, вдоль которой $f(z)\to\infty$.

Если целая функция, не являющаяся постоянной, не принимает значения a, то a есть асимптотическое значение.

Действительно, функция $1/(f(z)-a)$ является целой и не постоянной и потому имеет асимптотическое значение ∞.

Рассмотрения § 5.6.4 показывают, что если целая функция имеет асимптотические значения на двух кривых, между которыми она ограничена, то эти асимптотические значения должны совпадать. Асимптотические значения, не связанные между собой таким образом, мы будем рассматривать как различные — независимо от того, равны они или нет.

Данжуа было высказано предположение, что *целая функция конечного порядка ρ не может иметь более 2ρ асимптотических значений.* Карлеман доказал, что такая функция не может иметь более 5ρ асимптотических значений, и в конце концов Альфорс доказал гипотезу Данжуа полностью. Общее доказательство не является легким. Однако легко показать, что существует не более

2ρ полупрямых, выходящих из точки $z=0$, вдоль которых функция порядка ρ имеет различные асимптотические значения. Действительно, согласно § 5.6.1 угол между двумя такими полупрямыми не может быть меньше π/ρ.

8.9. Мероморфные функции. Мы дадим теперь краткое введение в теорию мероморфных функций, т. е. функций, единственными особенностями которых, лежащими в конечной части плоскости, являются полюсы.

Эта теория в значительной степени основывается на общей формуле Иенсена § 3.6.1 (4). Пусть $f(z)$ — мероморфная функция с отличными от 0 нулями $a_1, a_2, \ldots$ и отличными от 0 полюсами $b_1, b_2, \ldots$; те и другие мы будем считать расположенными по неубывающим значениям модулей. Пусть в окрестности начала $f(z)$ имеет вид $cz^k+\ldots$; k может быть любым целым числом. Согласно формуле Иенсена для функции $z^{-k}f(z)$

$$\log\left|\frac{b_1\ldots b_n}{a_1\ldots a_m}\right| r^{m-n}+\log|c|=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log|f(re^{i\theta})|\,d\theta-k\log r.$$

Как в § 3.6.1,

$$\log\frac{r^m}{|a_1\ldots a_m|}=\sum_{\nu=1}^{m-1}\nu\int\limits_{|a_\nu|}^{|a_{\nu+1}|}\frac{dx}{x}+m\int\limits_{|a_m|}^{r}\frac{dx}{x}.$$

Пусть $n(r, 0)$ — число нулей функции $f(z)$ при $|z|\leqslant r$. Если $k>0$, то $\nu=n(x, 0)-k$ при $|a_\nu|\leqslant x<|a_{\nu+1}|$, так что

$$\log\frac{r^m}{|a_1\ldots a_m|}=\int\limits_0^r\frac{n(x, 0)-k}{x}\,dx.$$

Если $n(r, \infty)$ — число полюсов функции $f(z)$ при $|z|\leqslant r$, то подобным же образом

$$\log\frac{r^n}{|b_1\ldots b_n|}=\int\limits_0^r\frac{n(x, \infty)}{x}\,dx.$$

Если $k<0$, то k появляется не в первом интеграле, а во втором. Полагая

$$N(r, a)=\int\limits_0^r\frac{n(x, a)-n(0, a)}{x}\,dx+n(0, a)\log r,$$

мы видим, что во всех случаях

$$N(r, 0)-N(r, \infty)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log|f(re^{i\theta})|\,d\theta-\log|c|. \qquad (1)$$

Введем для положительного α обозначение

$$\log^+ \alpha = \max(\log \alpha,\ 0),$$

вследствие которого

$$\log \alpha = \log^+ \alpha - \log^+ \frac{1}{\alpha},$$

и положим:

$$m(r,\ a) = m\left(r,\ \frac{1}{f-a}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \left|\frac{1}{f(re^{i\theta}) - a}\right| d\theta,$$

$$m(r,\ \infty) = m(r,\ f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})|\, d\theta.$$

Теперь формулу (1) можно представить в виде

$$m(r,\ 0) + N(r,\ 0) = m(r,\ \infty) + N(r,\ \infty) - \log|c|. \tag{2}$$

Применим эту формулу к функции $f(z) - a$, где a — произвольное число. Если в окрестности начала $f(z) - a = c_a z^k + \ldots$, то

$$m(r,\ a) + N(r,\ a) = m(r,\ f-a) + N(r,\ \infty) - \log|c_a|;$$

член $N(r,\ \infty)$ остается неизменным, так как функция $f(z) - a$ имеет при всех значениях a одни и те же полюсы.

Очевидно, $|f| + |a| \leqslant 2|fa|$, $2|f|$, $2|a|$ или 2, смотря по тому, имеют ли место неравенства $|f| \geqslant 1$ и $|a| \geqslant 1$, $|f| \geqslant 1$ и $|a| < 1$, $|f| < 1$ и $|a| \geqslant 1$ или $|f| < 1$ и $|a| < 1$. Следовательно,

$$\log(|f| + |a|) \leqslant \log^+|f| + \log^+|a| + \log 2,$$

и потому

$$\log^+|f - a| \leqslant \log^+|f| + \log^+|a| + \log 2.$$

Совершенно так же

$$\log^+|f| \leqslant \log^+|f - a| + \log^+|a| + \log 2.$$

Следовательно,

$$|m(r,\ f-a) - m(r,\ f)| \leqslant \log^+|a| + \log 2.$$

Мы видим, таким образом, что

$$m(r,\ a) + N(r,\ a) = m(r,\ \infty) + N(r,\ \infty) + \varphi(r,\ a),$$

где $|\varphi(r,\ a| \leqslant |\log|c_a|| + \log^+|a| + \log 2$. Следовательно, если $f(z)$ — мероморфная функция, не являющаяся постоянной, то значения суммы $m(r,\ a) + N(r,\ a)$, соответствующие двум заданным значениям постоянной a, отличаются друг от друга на ограниченную функцию от r.

Поскольку в этом смысле все такие суммы эквивалентны, мы можем представить их одной из них, скажем суммой с $a=\infty$. *Полагая, таким образом,*

$$T(r)=m(r,\ \infty)+N(r,\ \infty), \tag{3}$$

мы видим, что для всех значений a

$$m(r,\ a)+N(r,\ a)=T(r)+\varphi(r,\ a),$$

где $\varphi(r,\ a)$ — *функция, ограниченная при* $r\to\infty$ *для каждого значения* a.

$T(r)$ называется *характеристической функцией* функции $f(z)$.

Мы покажем, что $T(r)$ *есть возрастающая выпуклая функция от* $\log r$.

Формула Иенсена для функции $f(z)-e^{i\lambda}$, где λ — вещественное число, дает, если $f(0)\neq e^{i\lambda}$:

$$N(r,\ e^{i\lambda})-N(r,\ \infty)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\theta})-e^{i\lambda}|\,d\theta-\log|f(0)-e^{i\lambda}|. \tag{4}$$

Кроме того, при любом a

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|e^{i\theta}-a|\,d\theta=\log^+|a|;$$

это следует, например, из теоремы Иенсена, если положить $f(z)=z-a$, $r=1$. Умножая соотношение (4) на $1/(2\pi)$ и интегрируя его по λ в интервале $(0,\ 2\pi)$, мы видим, что

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}N(r,\ e^{i\lambda})\,d\lambda-N(r,\ \infty)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(re^{i\theta})|\,d\theta-\log^+|f(0)|,$$

т. е. что

$$T(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}N(r,\ e^{i\lambda})\,d\lambda+\log^+|f(0)|.$$

Но $N(r,\ a)$ есть при любом a возрастающая выпуклая функция от $\log r$; действительно, $\dfrac{dN(r,\ a)}{d\log r}=n(r,\ a)$, а $n(r,\ a)$ есть неотрицательная и неубывающая функция от r. Следовательно, теми же свойствами обладает и $T(r)$.

В предыдущих формулах $N(r,\ a)$ измеряет, сколько раз функция $f(z)$ принимает значение a. Поскольку наибольший вклад в $m(r,\ a)$ поступает от дуг, на которых функция $f(z)$ близка к a, $m(r,\ a)$ измеряет, в известном смысле, близость функции $f(z)$ к a. Сумму $m(r,\ a)+N(r,\ a)$ можно рассматривать как тотальную меру близости функции $f(z)$ к значению a.

Некоторые значения могут быть для данной функции исключительными в том смысле, что функция не принимает этих значений. Предыдущая теорема показывает, что в смысле тотальной близости исключительных значений не существует, т. е. что тотальная близость функции к данному значению, с точностью до ограниченных функций от r, одна и та же для всех значений.

Примеры. (I) Пусть $f(z)$ — рациональная функция, скажем, $f(z)=P(z)/Q(z)$, где $P(z)$ — многочлен степени μ, $Q(z)$ — многочлен степени ν и $P(z)$ и $Q(z)$ не имеют общих делителей. Если $\mu>\nu$, то для всякого конечного значения a

$$m(r,\ a)=O(1),\quad N(r,\ a)=\mu\log r+O(1),$$

в то время как

$$m(r,\ \infty)=(\mu-\nu)\log r+O(1),\quad N(r,\ \infty)=\nu\log r+O(1).$$

Если $\mu<\nu$, то при $a\neq 0$

$$m(r,\ a)=O(1),\quad N(r,\ a)=\nu\log r+O(1),$$

в то время как

$$m(r,\ 0)=(\nu-\mu)\log r+O(1),\quad N(r,\ 0)=\mu\log r+O(1).$$

Если $\mu=\nu$ и a_0, b_0 — коэффициенты при z^μ у $P(z)$, $Q(z)$, то при $a\neq a_0/b_0$

$$m(r,\ a)=O(1),\quad N(r,\ a)=\mu\log r+O(1),$$

в то время как

$$m\left(r,\ \frac{a_0}{b_0}\right)=(\mu-\alpha)\log r+O(1),\quad N\left(r,\ \frac{a_0}{b_0}\right)=\alpha\log r+O(1),$$

где α — степень многочлена $a_0Q(z)-b_0P(z)$. Во всех случаях $T(r)=O(\log r)$.

(II) Функция e^z не принимает значений 0, ∞; с другой стороны, они являются предельными значениями функции при $z\to\infty$. Здесь

$$N(r,\ 0)=N(r,\ \infty)=0,\quad m(r,\ 0)=m(r,\ \infty)=\frac{r}{\pi},$$

в то время как при $a\neq 0,\ \infty$

$$m(r,\ a)=O(1),\quad N(r,\ a)=\frac{r}{\pi}+O(1).$$

В частности, $T(r)=r/\pi$.

(III) Изучить подобным же образом функцию $\operatorname{tg} z$ (исключительными являются значения $\pm i$).

8.9.1. Порядок мероморфной функции. Говорят, что мероморфная функция $f(z)$ имеет порядок ρ, если

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\log T(r)}{\log r}=\rho,$$

так что для всякого положительного ε

$$T(r)=O(r^{\rho+\varepsilon}),$$

в то время как ни для какого отрицательного ε это соотношение не выполняется.

Чтобы установить, что для целых функций это определение согласуется с определением порядка, данным выше, мы докажем следующую теорему.

Если $f(z)$ — целая функция, то при $0<r<R$

$$T(r) \leqslant \log^+ M(r) \leqslant \frac{R+r}{R-r} T(r).$$

Для целой функции $N(r, \infty)=0$ и $T(r)=m(r, \infty)$. Поэтому левое неравенство означает, что

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})|\, d\theta \leqslant \log^+ \max |f(re^{i\theta})|,$$

и, таким образом, очевидно. Далее, согласно формуле Пуассона — Иенсена,

$$\log|f(re^{i\theta})| = \\ = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2} \log|f(Re^{i\varphi})|\, d\varphi - \sum_{\mu=1}^{m} \log\left|\frac{R^2-\bar{a}_\mu re^{i\theta}}{R(re^{i\theta}-a_\mu)}\right|.$$

Все члены этой суммы положительны, и кроме того,

$$R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2 \geqslant (R-r)^2.$$

Выбирая θ так, чтобы левая часть равенства получила наибольшее значение, мы видим, что

$$\log M(r) \leqslant \frac{R+r}{R-r}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\varphi})|\, d\varphi \leqslant \frac{R+r}{R-r} T(r).$$

Этим доказано и второе неравенство.

Полагая в этих неравенствах $R=2r$, мы убеждаемся в равносильности предыдущих определений порядка целой функции.

Пусть теперь $r_1(a)$, $r_2(a)$, … — модули нулей функции $f(z)-a$ и $r_1(\infty)$, $r_2(\infty)$ — модули полюсов функции $f(z)$.

Если $f(z)$ — функция порядка ρ, то для всякого значения a

$$m(r, a)=O(r^{\rho+\varepsilon}), \quad N(r, a)=O(r^{\rho+\varepsilon}), \quad n(r, a)=O(r^{\rho+\varepsilon})$$

и ряд $\sum\left(\frac{1}{r_n(a)}\right)^{\rho+\varepsilon}$ *сходится.*

Первые два соотношения следуют из того, что

$$m(r, a) \leqslant T(r)+O(1), \quad N(r, a) \leqslant T(r)+O(1).$$

После этого остальное доказывается так же, как в случае целых функций *).

8.9.2. Разложение мероморфной функции на множители. Пусть $f(z)$ — мероморфная функция порядка ρ с ну-

*) Более точные теоремы этого рода имеются у Неванлинны: Nevanlinna, *Fonctions Méromorphes*, гл. II.

лями a_n и полюсами b_n, и пусть $f(0) \neq 0$. Из предыдущего следует, что существуют целые числа p_1 и p_2, не превосходящие ρ, для которых произведения

$$P_1(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{a_n}, p_1\right), \quad P_2(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{b_n}, p_2\right)$$

сходятся при всех значениях z. Эти произведения являются целыми функциями, порядки которых не превосходят ρ. Сверх того, функция $f_1(z) = f(z) P_2(z)$ является целой и

$$T(r, f_1) = m(r, \infty, f_1) \leqslant m(r, \infty, f) + m(r, \infty, P_2) \leqslant$$
$$\leqslant T(r, f) + T(r, P_2) = O(r^{\rho+\varepsilon}) + O(r^{\rho+\varepsilon}).$$

Следовательно, порядок функции $f_1(z)$ не превосходит ρ. Следовательно, $f_1(z) = e^{Q(z)} P_1(z)$, где $Q(z)$ — многочлен степени $\leqslant \rho$.

Мы доказали, таким образом, что $f(z) = e^{Q(z)} \dfrac{P_1(z)}{P_2(z)}$. Это — обобщение на мероморфные функции теоремы Адамара о разложении на множители.

Несколько более глубокая теорема, в которой числитель и знаменатель могут не сходиться раздельно, была доказана Неванлинной *).

Дальнейшее развитие теории мероморфных функций в значительной степени связано с обобщениями теорем Пикара и Бореля. Тут мы должны отослать читателя к книгам Неванлинны.

РАЗЛИЧНЫЕ ПРИМЕРЫ

1. Доказать, что если a не кратно π, то

$$\sin(a - z) = \sin a e^{-z \operatorname{ctg} a} \prod_{n=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a + n\pi}\right) e^{z/(a+n\pi)}.$$

2. Доказать, что каждое из уравнений $\sin z = z^2$, $\log z = z^3$, $\operatorname{tg} z = az + b$, где a и b — произвольные комплексные числа, имеет бесконечно много корней.

3. Найти все нули функции $e^{e^z} - 1$ и показать, что они не имеют конечного показателя сходимости.

4. Показать, что если $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ — функция нецелого порядка, то коэффициенты многочлена $Q(z) = b_1 z + \ldots + b_q z^q$ теоремы Адамара могут быть выражены через $a_1, a_2, \ldots, a_q$.

[Если ρ — нецелое число, то $q < p + 1$ и $P(z) = 1 + O(z^{p+1})$ при $z \to 0$. Следовательно, $P(z)$ не участвует в уравнениях, которые получаются при сравнении коэффициентов.]

5. Каков порядок функции $F(z) = \sum |a_n|^p z^n$, если порядок функции $f(z) = \sum a_n z^n$ есть ρ?

*) Nevanlinna, *Fonctions Méromorphes*, гл. III.

6. Обобщенная гипергеометрическая функция определяется формулой

$$ {}_pF_q(\alpha_1, \ldots, \alpha_p; \beta_1, \ldots, \beta_q; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n \ldots (\alpha_p)_n}{(\beta_1)_n \ldots (\beta_q)_n} \frac{z^n}{n!}, $$

где $(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1) \ldots (\alpha+n)$, $(\alpha)_0 = 1$. Показать, что она является целой, если $q \geqslant p$, и найти ее порядок.

7. Показать, что при $|q| < 1$, $k > 1$ функция

$$ f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^k} e^{inz} $$

является целой, и найти ее порядок.

8. Если $\sigma > 1$, то $P_\sigma(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{z}{n^\sigma}\right)$ есть целая функция порядка $1/\sigma$ *).

9. Функция $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{z}{e^n}\right)$ является целой, и ее порядок равен нулю.

10. Показать, что при $\alpha > 0$ функция

$$ f_\alpha(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{e^z}{e^{n^\alpha}}\right) $$

является целой и имеет порядок $1 + \frac{1}{\alpha}$. Найти для нее стандартное разложение на множители при $\alpha = 1$ и $\alpha = 2$.

11. Если $a > 0$, то $E_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(1+an)}$ есть целая функция порядка $1/a$ **).

12. Если a — вещественное число, то все корни уравнения $\Gamma'(z) = a\Gamma(z)$ вещественны.

13. Показать, что $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{ch}\sqrt{n}}{n!} z^n$ есть целая функция порядка 1, что она имеет бесконечно много нулей и что все ее нули вещественны и отрицательны.

14. Пусть функция $f(z)$ порядка $1/2$ имеет только вещественные отрицательные нули, и пусть $n(r) \sim k\sqrt{r}\log r$. Определить асимптотическое поведение функции $M(r)$.

[Воспользоваться методом § 8.6.4.]

15. Показать, что если $f(z)$ есть каноническое произведение с такими нулями z_n, что ряд $\sum (1/|z_n|)$ сходится, то: $f(z) = O(e^{\varepsilon|z|})$; на окружностях со сколь угодно большими радиусами $|f(z)| > e^{-\varepsilon|z|}$.

---

*) О дальнейших свойствах этой функции см. Hardy [4].

**) Несколько мемуаров, посвященных этой функции, можно найти в Acta Math., 29.

[Мы можем написать

$$|f(z)| \leqslant \sum_{n=1}^{N}\left(1+\left|\frac{z}{z_n}\right|\right)\exp\left(\sum_{N+1}^{\infty}\left|\frac{z}{z_n}\right|\right),$$

из чего легко следует первое. Второе следует после этого из теоремы § 8.7.5.]

16. Показать, что в теореме Лагерра (§ 8.5.2) $f'(z)$ имеет тот же род, что и $f(z)$.

[Доказательства требует только случай $\rho=1$, когда род может быть равен 0 или 1. Следует воспользоваться тем, что ряды $\sum(1/|z_n|)$ и $\sum(1/|z'_n|)$ сходятся или расходятся одновременно, сравнить, как в § 8.5.1, $M'(r)$ с $M(r)$ и применить предыдущий пример.]

17. Показать, что род функции экспоненциального типа (§ 8.7.5) равен 1.

18. Показать, что если $f(z)=\sum a_n z^n$ — функция экспоненциального типа, то $f^{(n)}(0)=O(e^{An})$ и, следовательно, $\varphi(z)=\sum n!\,a_n z^n$ имеет конечный радиус сходимости.

19. Для того чтобы функция $f(z)$ принадлежала экспоненциальному типу, необходимо и достаточно, чтобы она была представима в форме

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C e^{zw}\chi(w)\,dw,$$

где $\chi(w)$ — функция, регулярная при достаточно больших значениях w (включая бесконечно удаленную точку), а C — окружность достаточно большого радиуса с центром в начале.

$\left[\chi(w)=\frac{1}{w}\varphi\left(\frac{1}{w}\right)\right.$, где φ — функция, определенная в предыдущем примере.$\Big]$

20. Пусть $f(z)$ — функция экспоненциального типа, и пусть $h(\theta)$ — функция Фрагмена — Линделефа, ассоциированная с $f(z)$, причем $V(r)=r$. Предположим, что $h(\theta)\geqslant 0$, и рассмотрим радиусы-векторы длины $h(\theta)$, образующие углы $-\theta$ с вещественной осью, и перпендикуляры к этим радиусам-векторам, проведенные через их концы (ср. § 5.7.2). Показать, что функция $\chi(w)$ регулярна в каждой точке w, лежащей с точкой $w=0$ по разные стороны от одного из этих перпендикуляров.

[Если значение $|z|$ достаточно мало, то почленное интегрирование дает:

$$\varphi(z)=\int_0^\infty e^{-t}f(zt)\,dt.$$

Поворачивая контур на угол λ, мы видим, что

$$\varphi(z)=\int_0^\infty e^{-te^{i\lambda}}f(zte^{i\lambda})\,e^{i\lambda}\,dt.$$

Здесь подынтегральная функция есть

$$O\left(e^{-t\cos\lambda+rt\{h(\theta+\lambda)+\varepsilon\}}\right),$$

и интеграл сходится, если

$$rh(\theta+\lambda)<\cos\lambda. \tag{1}$$

Следовательно, функция $\varphi(z)$ регулярна при $z=re^{i\theta}$, если неравенство (1) выполнено при некотором значении λ. Если $w=r'e^{i\theta'}$, то функция $\chi(w)$ регулярна в точке w при условии, что $r' > h(\lambda - \theta') \sec\lambda$ для некоторого значения λ, а это равносильно высказанному утверждению *).]

21. Функция

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+a)^s \, n!}$$

принадлежит экспоненциальному типу **).

22. Показать, что функция

$$f(z) = \int_a^b e^{izt} g(t)\, dt,$$

где $g(t)$ — непрерывная функция, принадлежит экспоненциальному типу и что соответствующая функция $\chi(w)$ регулярна всюду вне интервала (ia, ib) мнимой оси.

23. Показать, что функция $f(z)$ предыдущего примера стремится к нулю, когда $z \to \pm\infty$ вдоль вещественной оси, и вывести из этого, что $f(z)$ имеет бесконечно много нулей.

24. Говорят, что $f(z)$ есть функция нулевого типа, если $f(z) = O(e^{\varepsilon r})$.

Для того чтобы функция $f(z)$ принадлежала нулевому типу, необходимо и достаточно, чтобы существовало представление вида

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{zw} \chi(w)\, dw,$$

где $\chi(w)$ — целая функция от $1/w$.

[Положение подобно тому, с которым мы встретились в примерах 18, 19, но здесь $f^{(n)}(0) = O(e^{\varepsilon n})$.]

25. Для того чтобы функция $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ была целой функцией от $1/(1-z)$, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая целая функция $g(z)$ нулевого типа, что $a_n = g(n)$ при $n = 1, 2, \ldots$ ***).

[Пусть такая целая функция $g(z)$ существует, и пусть

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{zw} \chi(w)\, dw.$$

Тогда

$$f(z) - a_0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{ze^w}{1 - ze^w} \chi(w)\, dw,$$

где C — охватывающий начало контур, на котором $\operatorname{Re} w < \log|1/z|$. Это — интеграл того типа, который был использован в § 4.6, и путем деформации контура можно показать, что любая ветвь функции $f(z)$ регулярна во всей

*) Подробности: Pólya [4].

**) О дальнейших свойствах этой функции см. Hardy [2].

***) Carlson [1], Wigert [1], Hardy [14].

точках, кроме точки $z=1$ (контур зажат между 0 и $\log 1/z$). Далее,

$$f(z)-a_0=\chi\left(\log\frac{1}{z}\right)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C'}\frac{ze^w}{1-ze^w}\chi(w)\,dw,$$

где C' — контур, охватывающий точку $w=\log(1/z)$. Это показывает, что функция $f(z)$ однозначна в окрестности точки $z=1$ и, таким образом, является целой функцией от $1/(1-z)$.

Обратно, если функция $f(z)$ принадлежит указанному типу, то

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz,$$

и мы можем положить $z=e^{-w}$ и продеформировать преобразованный контур в простой замкнутый контур, охватывающий начало и лежащий целиком внутри окружности $|w|=2\pi$. Наконец, функция $f(e^{-w})$ регулярна во всех точках, кроме точек $w=0$ и $w=\pm 2k\pi i$ $(k=1, 2, \ldots)$, так что $f(e^{-w})=g(w)+\psi(w)$, где $g(w)$ — целая функция от $1/w$, а $\psi(w)$ — функция, регулярная при $|w|<2\pi$. Остальное очевидно.]

ГЛАВА IX

РЯДЫ ДИРИХЛЕ

9.1. Введение. Под рядом Дирихле мы понимаем в этой главе ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \tag{1}$$

где коэффициенты a_n — заданные числа, а s — комплексное переменное. Ряды более общего типа

$$\sum a_n e^{-\lambda_n s}$$

также известны как ряды Дирихле. Наш специальный тип получается, если положить $\lambda_n = \log n$ *).

На протяжении всей главы мы будем писать $s = \sigma + it$, где σ и t — вещественные числа. Если ряд Дирихле сходится, то его сумму мы будем обозначать через $f(s)$. Один важный ряд Дирихле мы уже рассматривали: это — дзета-функция Римана

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}. \tag{2}$$

Ряды Дирихле не столь важны для общего анализа, как степенные ряды, поскольку они представляют лишь очень специальный класс аналитических функций. Однако они чрезвычайно важны для приложений анализа к теории чисел. В некоторых отношениях их теория гораздо сложнее теории степенных рядов. Например, в теории степенных рядов круг сходимости и круг абсолютной сходимости совпадают с кругом регулярности суммы ряда. В теории рядов Дирихле, где эти круги должны быть заменены полуплоскостями, все три соответствующие полуплоскости могут быть различными.

9.1.1. Указанные полуплоскости связывают с рядом Дирихле на основании следующей теоремы.

---

*) О рядах Дирихле общего типа см. Hardy and Riesz, *General Theory of Dirichlet's Series*.

Если ряд Дирихле сходится при $s=s_0$, то он равномерно сходится в угловой области плоскости s, определяемой неравенством

$$|\arg(s-s_0)|\leqslant\frac{1}{2}\pi-\delta,$$

где δ — любое положительное число, меньшее $\frac{1}{2}\pi$.

Достаточно рассмотреть случай $s_0=0$. Действительно,

$$\sum\frac{a_n}{n^s}=\sum\frac{a'_n}{n^{s'}},$$

где $a'_n=a_n n^{-s_0}$, $s'=s-s_0$, последний же ряд сходится при $s'=0$.

Мы предполагаем, таким образом, что ряд $\sum a_n$ сходится. Положим $r_n=a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots$, так что $r_n\to 0$. Мы можем написать:

$$\sum_{n=M}^{N}\frac{a_n}{n^s}=\sum_{M}^{N}\frac{r_{n-1}-r_n}{n^s}=\sum_{M}^{N}r_n\left\{\frac{1}{(n+1)^s}-\frac{1}{n^s}\right\}+\frac{r_{M-1}}{M^s}-\frac{r_N}{(N+1)^s}. \quad (1)$$

Но

$$\left|\frac{1}{(n+1)^s}-\frac{1}{n^s}\right|=\left|s\int\limits_n^{n+1}\frac{du}{u^{s+1}}\right|\leqslant|s|\int\limits_n^{n+1}\frac{du}{u^{\sigma+1}}=\frac{|s|}{\sigma}\left\{\frac{1}{n^\sigma}-\frac{1}{(n+1)^\sigma}\right\}, \quad (2)$$

а $|r_n|<\varepsilon$ при $n\geqslant n_0=n_0(\varepsilon)$, причем n_0 не зависит от s. Следовательно, при $M>n_0$

$$\left|\sum_{n=M}^{N}\frac{a_n}{n^s}\right|<\frac{\varepsilon|s|}{\sigma}\sum_{n=M}^{N}\left\{\frac{1}{n^\sigma}-\frac{1}{(n+1)^\sigma}\right\}+\frac{\varepsilon}{M^\sigma}+\frac{\varepsilon}{(N+1)^\sigma}=$$
$$=\frac{\varepsilon|s|}{\sigma}\left\{\frac{1}{M^\sigma}-\frac{1}{(N+1)^\sigma}\right\}+\frac{\varepsilon}{M^\sigma}+\frac{\varepsilon}{(N+1)^\sigma}<\frac{2\varepsilon|s|}{\sigma}+2\varepsilon.$$

Если $|\arg s|\leqslant\frac{1}{2}\pi-\delta$, т. е. $\frac{t}{\sigma}\leqslant\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\pi-\delta\right)=\operatorname{ctg}\delta$, то

$$\frac{|s|}{\sigma}=\sqrt{1+\frac{t^2}{\sigma^2}}\leqslant\operatorname{cosec}\delta.$$

Таким образом, в предыдущих условиях

$$\sum_{n=M}^{N}\frac{a_n}{n^s}<2\varepsilon(\operatorname{cosec}\delta+1).$$

Правая часть не зависит от s и стремится к нулю вместе с ε. Этим равномерная сходимость ряда доказана.

В частности, *если ряд сходится в точке $s_0=\sigma_0+it_0$, то он сходится во всех точках $s=\sigma+it$ с $\sigma>\sigma_0$.* Действительно, всегда существует столь малое δ, что $|\arg(s-s_0)|<\frac{1}{2}\pi-\delta$.

9.1.2. *Область сходимости ряда есть полуплоскость* *). Действительно, разобьем все значения σ' на два класса: на значения, для которых при $\sigma > \sigma'$ ряд сходится, и остальные значения. Согласно предыдущей теореме каждое число первого класса лежит правее любого числа второго класса. Пусть σ_0 — число, определяемое этим сечением. Ясно, что ряд сходится при $\sigma > \sigma_0$ и расходится при $\sigma < \sigma_0$.

Число σ_0 называется *абсциссой сходимости* ряда.

Ряд может сходиться при всех значениях s (пример: $a_n = 1/n!$) и может не сходиться ни при каком значении s (пример: $a_n = n!$).

Сумма ряда, $f(s)$, есть аналитическая функция от s, регулярная при $\sigma > \sigma_0$. Действительно, каждый член ряда является аналитической функцией, и каждая точка s, для которой $\sigma > \sigma_0$, содержится в некоторой области равномерной сходимости.

Вопросы, касающиеся сходимости ряда и регулярности функции на прямой $\sigma = \sigma_0$, остаются открытыми; как и в случае степенных рядов, возможны различные случаи.

Однако верна теорема, аналогичная теореме Абеля о степенных рядах: *если ряд сходится при $s = s_0$ к сумме $f(s_0)$, то $f(s) \to f(s_0)$, когда $s \to s_0$ вдоль любого пути, лежащего целиком в некоторой области вида* $|\arg (s - s_0)| \leqslant \frac{1}{2}\pi - \delta$.

Это сразу следует из теоремы о равномерной сходимости.

9.1.3. **Абсолютная сходимость.** *Область абсолютной сходимости ряда Дирихле есть полуплоскость.*

Действительно, абсолютная сходимость ряда § 9.1 (1) есть сходимость ряда $\sum_{1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^\sigma}$. Если последний сходится при некотором значении σ, то он сходится, очевидно, и при всяком большем значении σ. Следовательно, существует такое число $\bar\sigma$, что он сходится при $\sigma > \bar\sigma$ и расходится при $\sigma < \bar\sigma$.

Следовательно, исходный ряд является абсолютно сходящимся при $\sigma > \bar\sigma$ и не является абсолютно сходящимся при $\sigma < \bar\sigma$.

Число $\bar\sigma$ называется *абсциссой абсолютной сходимости.*

Числа σ_0 и $\bar\sigma$ могут быть различными, т. е. может существовать полоса, в которой ряд сходится, но не абсолютно.

Это показывает следующий пример. Если $\sigma > 1$, то

$$\left(1 - \frac{1}{2^{s-1}}\right)\zeta(s) = \left(\frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \ldots\right) - 2\left(\frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \ldots\right) = \frac{1}{1^s} - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \ldots$$

*) Автор причисляет к полуплоскостям всю плоскость и пустое множество. (*Примечание переводчика.*)

Последний ряд сходится при $\sigma > 0$ (и равномерно сходится во всякой конечной области, в которой всюду $\sigma \geqslant a > 0$). Действительно, в силу хорошо известной теоремы *) он сходится, если значение s вещественно и положительно. (Согласно принципу аналитического продолжения формула верна, следовательно, при $\sigma > 0$.) Здесь $\sigma_0 = 0$, $\bar{\sigma} = 1$.

Во всех случаях $\bar{\sigma} - \sigma_0 \leqslant 1$.

Действительно, если ряд $\sum a_n n^{-s}$ сходится, то числа $|a_n| n^{-\sigma}$ ограничены и, следовательно, ряд $\sum \frac{a_n}{n^{s+1+\delta}}$ абсолютно сходится при $\delta > 0$; но это и значит, что $\bar{\sigma} - \sigma_0 \leqslant 1$.

В предыдущем примере $\bar{\sigma} - \sigma_0 = 1$, так что полоса неабсолютной сходимости может фактически иметь ширину 1.

9.1.4. Абсцисса сходимости. Формула для σ_0, аналогичная формуле § 7.1 для радиуса сходимости степенного ряда, имеет две различные формы, одна из которых применима, когда ряд $\sum a_n$ расходится, а другая — когда он сходится. Положим

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n,$$

и, если ряд $\sum a_n$ сходится, $r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots$ Положим, далее,

$$\alpha = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log |s_n|}{\log n}, \quad \beta = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log |r_n|}{\log n};$$

β определено только в случае, когда ряд $\sum a_n$ сходится.

Если ряд $\sum a_n$ *расходится, то* $\sigma_0 = \alpha$; *в противном случае* $\sigma_0 = \beta$.

В первом случае $\sigma_0 \geqslant 0$, во втором случае $\sigma_0 \leqslant 0$; действительно, сходимость ряда $\sum a_n$ означает, что ряд § 9.1 (1) сходится при $s = 0$.

(I) Пусть ряд $\sum a_n$ расходится, и пусть s — произвольное положительное вещественное значение, при котором ряд $\sum a_n n^{-s}$ сходится. Положим

$$b_n = a_n n^{-s}, \qquad B_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n, \qquad B_0 = 0.$$

Числа B_n ограничены; пусть $|B_n| \leqslant B$. Тогда

$$s_N = \sum_{n=1}^{N} b_n n^s = \sum_{n=1}^{N} (B_n - B_{n-1}) n^s = \sum_{n=1}^{N-1} B_n \{n^s - (n+1)^s\} + B_N N^s.$$

Следовательно,

$$|s_N| \leqslant B \sum_{n=1}^{N-1} \{(n+1)^s - n^s\} + BN^s < 2BN^s,$$

$$\log |s_N| < s \log N + \log 2B,$$

и, значит, $\alpha \leqslant s$. Таким образом, $\alpha \leqslant \sigma_0$.

*) Ч.М., § 188.