Аналогичное рассуждение приводит к цели и в случае, когда ряд $\sum a_n$ сходится. Пусть s — произвольное отрицательное вещественное значение, при котором ряд $\sum a_n n^{-s}$ сходится. Тогда

$$r_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} b_n n^s = \sum_{n=N+1}^{\infty} (B_n - B_{n-1}) n^s =$$
$$= \sum_{n=N}^{\infty} B_n \{n^s - (n+1)^s\} - B_N N^s,$$

так что $|r_N| \leqslant B \sum\limits_{n=N}^{\infty} \{n^s - (n+1)^s\} + BN^s = 2BN^s$. Следовательно, в этом случае $\beta \leqslant \sigma_0$.

(II) Так как $s_n = O(n^{\alpha+\varepsilon})$ и так как при вещественных значениях s

$$\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s} = s \int\limits_n^{n+1} \frac{du}{u^{s+1}} = O(n^{-s-1}),$$

то

$$\sum_{n=M+1}^{N} \frac{a_n}{n^s} = \sum_{n=M+1}^{N} \frac{s_n - s_{n-1}}{n^s} =$$
$$= \sum_{n=M+1}^{N} s_n \left\{\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s}\right\} + \frac{s_N}{(N+1)^s} - \frac{s_M}{(M+1)^s}. \qquad (1)$$

Следовательно, если $s > \alpha$ и ε достаточно мало, то

$$\sum_{n=M+1}^{N} \frac{a_n}{n^s} = \sum_{M+1}^{N} O(n^{\alpha+\varepsilon-s-1}) + O(N^{\alpha+\varepsilon-s}) + O(M^{\alpha+\varepsilon-s}) =$$
$$= O(M^{\alpha+\varepsilon-s}) = O(1).$$

Таким образом, ряд $\sum a_n n^{-s}$ сходится, если $s > \alpha$, а это значит, что $\sigma_0 \leqslant \alpha$. Если ряд $\sum a_n$ сходится, то $a_n = r_{n-1} - r_n$ и мы обнаруживаем подобным же образом, что $\sigma_0 \leqslant \beta$. Этим теорема доказана.

Если $\alpha = \infty$, то ряд не сходится нигде; если $\beta = -\infty$, то он сходится всюду. Это легко выводится из предыдущего.

9.1.5. Абсцисса абсолютной сходимости. Она может быть вычислена по формуле

$$\bar{\sigma} = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\log(|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|)}{\log n}$$

или формуле

$$\bar{\sigma} = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\log(|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \ldots)}{\log n}$$

в зависимости от того, расходится или сходится ряд $\sum|a_n|$. Это — частный случай предыдущей теоремы.

Пример. Определить σ_0 и $\bar{\sigma}$ для рядов, у которых $a_n=1$, $(-1)^n$, $n^{-\frac{1}{2}}$, $(-1)^n n^{-\frac{1}{2}}$, a^n $(0<a<1)$, $\log n$, $\frac{1}{\log n}$, и для ряда, у которого $a_n=1$, если n — точный квадрат, и $a_n=0$ в противном случае.

9.2. Сходимость ряда и регулярность функции. Область сходимости степенного ряда совсем просто определяется аналитическим характером функции, которую он представляет: граница круга сходимости проходит через ближайшую к центру особую точку. В случае рядов Дирихле положение не столь просто. На прямой, ограничивающей полуплоскость сходимости, может не быть особых точек, и более того, $f(s)$ может оказаться целой функцией, несмотря на то, что абсцисса сходимости ряда конечна. Именно таково положение в приведенном выше примере $(1-2^{1-s})\zeta(s)$. Это — целая функция, так как полюс функции $\zeta(s)$ в точке $s=1$ уничтожается нулем функции $1-2^{1-s}$. Однако соответствующий ряд сходится только при $\sigma>0$.

С другой стороны, функция $\zeta(s)$ имеет особенность на границе полуплоскости сходимости ряда § 9.1 (2). Это — частный случай следующей теоремы.

Если $a_n \geqslant 0$ для всех значений n, то вещественная точка прямой, ограничивающей полуплоскость сходимости, является особой точкой функции $f(s)$.

Доказательство аналогично доказательству соответствующей теоремы о степенных рядах (§ 7.2.1).

Без ущерба для общности можно считать, что $\sigma_0=0$. Если $s=0$ — регулярная точка, то ряд Тейлора функции $f(s)$ в точке $s=1$ имеет радиус сходимости, больший чем 1. Следовательно, можно найти отрицательное значение s, при котором

$$f(s)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(s-1)^\nu}{\nu!}f^{(\nu)}(1)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(1-s)^\nu}{\nu!}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\log n)^\nu a_n}{n}.$$

Поскольку все члены этого повторного ряда положительны, порядок суммирования может быть обращен, т. е.

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(1-s)^\nu(\log n)^\nu}{\nu!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}e^{(1-s)\log n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}.$$

Таким образом, наш ряд Дирихле сходится при некотором отрицательном значении s, а это противоречит равенству $\sigma_0=0$.

9.3. Асимптотическое поведение функции при $t \to \infty$. *Функция $f(s)$ ограничена во всякой полуплоскости, лежащей внутри полуплоскости абсолютной сходимости.*

Действительно, при $\sigma \geqslant \alpha > \bar{\sigma}$ и любом значении t

$$|f(s)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^{\sigma}} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^{\alpha}}.$$

Если сходится и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^{\bar{\sigma}}},$$

то можно положить $\alpha = \bar{\sigma}$, так что функция ограничена в полуплоскости абсолютной сходимости. Это имеет место, например, для функции $f(s) = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^s \log^2 n}$. Но в общем случае полуплоскость абсолютной сходимости не будет областью, в которой функция $f(s)$ ограничена, даже если мы исключим окрестности особых точек, расположенных на прямой $\sigma = \bar{\sigma}$ (см. § 9.3.2).

Более того, в полуплоскости абсолютной сходимости поведение функции $f(\sigma + it)$ при $t \to \infty$ в общем случае довольно сложно. Рассмотрим, например, ряд с положительными вещественными коэффициентами, у которого при некотором значении σ

$$\sum_{n=3}^{\infty} a_n n^{-\sigma} < a_2 2^{-\sigma}.$$

При $t = 2m\pi/\log 2$ $(m = 1, 2, \ldots)$

$$\operatorname{Re} f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos(t \log n)}{n^{\sigma}} > a_1 + \frac{a_2}{2^{\sigma}} - \sum_{n=3}^{\infty} \frac{a_n}{n^{\sigma}},$$

в то время как при $t = (2m+1)\pi/\log 2$ $(m = 1, 2, \ldots)$

$$\operatorname{Re} f(s) < a_1 - \frac{a_2}{2^{\sigma}} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{a_n}{n^{\sigma}}.$$

Таким образом, при $t \to \infty$ функция $\operatorname{Re} f(s)$ колеблется.

9.3.1. Дирихле принадлежит теорема: *каковы бы ни были действительные числа $c_1, \ldots, c_N$ и положительные числа q и τ, существуют такие целые числа $x_1, \ldots, x_N$ и такое число t, лежащее в интервале $\tau \leqslant t \leqslant \tau q^N$, что*

$$|tc_n - x_n| \leqslant \frac{1}{q} \qquad (n = 1, \ldots, N).$$

Доказательство основывается на том, что если в m областях имеется $m+1$ точек, то по крайней мере в одной области должны лежать по крайней мере две точки.

Рассмотрим N-мерный единичный куб, одна из вершин которого находится в начале координат, с ребрами на координатных осях. Разделим каждое ребро на q равных частей. Тогда куб разобьется на q^N кубиков. Рассмотрим в кубе точки

$$(\lambda c_1-[\lambda c_1],\ \lambda c_2-[\lambda c_2],\ \ldots,\ \lambda c_N-[\lambda c_N]),$$

где λ принимает значения $0, \tau, \ldots, \tau q^N$. Число таких точек равно q^N+1, и потому по крайней мере две из них лежат в одном и том же кубике. Если эти две точки отвечают значениям $\lambda=\lambda_1$ и $\lambda=\lambda_2$ $(\lambda_1<\lambda_2)$, то существуют такие целые числа $x_1, \ldots, x_N$, что $(\lambda_2-\lambda_1)c_n-x_n\leqslant 1/q$ $(n=1, \ldots, N)$, и остается положить $t=\lambda_2-\lambda_1$.

9.3.2. Теперь мы можем доказать следующую теорему.

Пусть $f(s)=\sum a_n n^{-s}$, *причем* $a_n\geqslant 0$ *для всех значений* n, *и пусть ряд* $\sum a_n n^{-\bar\sigma}$ *расходится. Тогда функция* $f(s)$ *не ограничена при* $\sigma>\bar\sigma$, $|t|\geqslant t_0>0$.

Что на границе такой области может не быть особенностей, показывает пример функции $\zeta(s)=\sum n^{-s}$, которая регулярна при $s\neq 1$. Назначение условия $|t|\geqslant t_0$ — исключить окрестность точки $s=\bar\sigma$, где имеется особенность.

Если $\sigma>\bar\sigma$, то при любом N

$$f(s)=\sum_{n=1}^{N}\frac{a_n}{n^\sigma}e^{-it\log n}+\sum_{N+1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s},$$

так что

$$|f(s)|\geqslant \operatorname{Re}\sum_{n=1}^{N}\frac{a_n}{n^\sigma}e^{-it\log n}-\left|\sum_{N+1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}\right|\geqslant\sum_{n=1}^{N}\frac{a_n}{n^\sigma}\cos(t\log n)-\sum_{N+1}^{\infty}\frac{a_n}{n^\sigma}.$$

Согласно теореме Дирихле, для заданных N и q существуют такие целые числа $x_1, \ldots, x_N$ и такое t $(\tau\leqslant t\leqslant\tau q^N)$, что

$$\left|\frac{t\log n}{2\pi}-x_n\right|\leqslant\frac{1}{q}\qquad(n=1, \ldots, N).$$

В силу этих неравенств $\cos(t\log n)\geqslant\cos(2\pi/q)$, так что

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{a_n}{n^\sigma}\cos(t\log n)\geqslant\cos\frac{2\pi}{q}\sum_{n=1}^{N}\frac{a_n}{n^\sigma}>\cos\frac{2\pi}{q}f(\sigma)-\sum_{N+1}^{\infty}\frac{a_n}{n^\sigma}.$$

Положим $q=6$. Тогда $\cos(2\pi/q)=1/2$, и мы видим, что

$$|f(s)|>\frac{1}{2}f(\sigma)-2\sum_{N+1}^{\infty}\frac{a_n}{n^\sigma}.$$

Так как ряд $\sum a_n n^{-\bar\sigma}$ расходится, то $f(\sigma)\to\infty$ при $\sigma\to\bar\sigma$, и потому для всякого положительного H можно найти значение σ, столь близкое к $\bar\sigma$, что $f(\sigma)>4H$. После того как такое σ фиксировано, можно найти столь большое N, что $\sum\limits_{N+1}^{\infty}\frac{a_n}{n^\sigma}<\frac{1}{2}H$. Из этих неравенств следует, что $|f(s)|>H$, чем доказательство и заканчивается.

9.3.3. В полуплоскости сходимости функция может расти по неограниченно возрастающей последовательности значений t так же быстро, как некоторая степень t. Например, функция $f(s)=(1-2^{1-s})\zeta(s)$, рассмотренная в § 9.1.3, удовлетворяет при некоторых сколь угодно больших значениях t и значениях σ, заключенных между 0 и 1/2, неравенству *)

$$|f(s)|>At^{\frac{1}{2}-\sigma}.$$

С другой стороны, функция не может иметь значений, растущая быстрее любой степени t. Это показывает следующая теорема.

Для всякого значения σ, заключенного между σ_0 и σ_0+1,

$$f(s)=O(|t|^{1-(\sigma-\sigma_0)+\varepsilon})\qquad(|t|\to\infty).$$

Если $\sigma=\alpha$ — такое значение, то $f(s)=O(|t|^{1-(\alpha-\sigma_0)+\varepsilon})$ равномерно относительно σ в полуплоскости $\sigma\geqslant\alpha$.

Предположим сначала, что ряд $\sum a_n$ сходится. Тогда числа a_n и s_n ограничены. В силу формулы § 9.1.4 (1)

$$\sum_1^N\frac{a_n}{n^s}=\sum_1^M\frac{a_n}{n^s}+\sum_{M+1}^N s_n\left\{\frac{1}{n^s}-\frac{1}{(n+1)^s}\right\}-\frac{s_M}{(M+1)^s}+\frac{s_N}{(N+1)^s}.$$

Если $\sigma>0$, то при $N\to\infty$ последний член стремится к нулю, и мы получаем равенство

$$f(s)=\sum_1^M\frac{a_n}{n^s}+\sum_{M+1}^\infty s_n\left\{\frac{1}{n^s}-\frac{1}{(n+1)^s}\right\}-\frac{s_M}{(M+1)^s}.$$

Теперь оценка § 9.1.1 (2) дает при $0<\sigma<1$:

$$|f(s)|<A\sum_1^M\frac{1}{n^\sigma}+A\frac{|s|}{\sigma}\sum_{M+1}^\infty\left\{\frac{1}{n^\sigma}-\frac{1}{(n+1)^\sigma}\right\}+\frac{A}{(M+1)^\sigma}<$$
$$<AM^{1-\sigma}+A|t|M^{-\sigma}+A.$$

Полагая $M=[|t|]$, мы видим, что

$$f(s)=O(|t|^{1-\sigma})\qquad(0<\sigma<1)$$

и что $f(s)=O(|t|^{1-\alpha})$, если $0<\alpha<1$ и $\sigma\geqslant\alpha$.

*) См. Различные примеры, 18.

В общем случае ряд $\sum a_n n^{-s}$ сходится при $s=\sigma_0+\varepsilon$, и, перенося начало в эту точку, мы приходим к рассмотренному случаю. Этим теорема доказана.

9.4. Функции конечного порядка. Теперь мы встанем на несколько иную точку зрения. До сих пор мы считали функцию $f(s)$ определенной рядом $\sum a_n n^{-s}$, и наше внимание было ограничено полуплоскостью сходимости этого ряда. Может, однако, случиться, что функция продолжаема за пределы этой полуплоскости. Продолженная функция может оказаться регулярной в большей полуплоскости или в большей полуплоскости, из которой удалена некоторая конечная область. Мы рассмотрим отношения между функцией, определенной таким образом, и рядом Дирихле, который ее породил.

Теорема § 9.3.3 наводит на мысль, что особый интерес должны представлять функции, удовлетворяющие условию $f(s)=O(|t|^A)$, где A — некоторое положительное число. Функция, удовлетворяющая этому условию при некотором значении σ, называется функцией конечного порядка при этом значении σ. Если условие выполнено равномерно при $\sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_2$, то мы говорим, что функция имеет конечный порядок в этой полосе. Подобным же образом мы определяем функцию конечного порядка в полуплоскости $\sigma \geqslant \sigma_1$.

Мы видели, что всякая функция, определенная рядом Дирихле, имеет конечный порядок в некоторой полуплоскости, содержащейся в полуплоскости сходимости. Но она может иметь конечный порядок и за пределами полуплоскости сходимости. Для функции $\zeta(s)$, например, $\sigma_0=1$; между тем (§ 9.1.3),

$$\zeta(s)=(1-2^{1-s})^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^s} \qquad (\sigma>0),$$

и, следовательно (§ 9.3.3),

$$\zeta(s)=O(|t|^{1-\sigma+\varepsilon}) \qquad (0<\sigma\leqslant 1).$$

9.4.1. Функция $\mu(\sigma)$. Наименьшее из чисел μ, для которых $f(s)=O(|t|^{\xi})$, если $\xi>\mu$, называется *порядком* функции $f(s)$ при взятом значении σ и обозначается через $\mu(\sigma)$.

Основные свойства функции $\mu(\sigma)$ выводятся из теоремы Фрагмена — Линделефа, доказанной в § 5.6.5. Допустим, что при $\sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_2$, $t \geqslant t_0$ функция $f(s)$ регулярна и имеет конечный порядок, и положим $\mu(\sigma_1)=\mu_1$, $\mu(\sigma_2)=\mu_2$. Тогда для всякого положительного ε

$$f(\sigma_1+it)=O(t^{\mu_1+\varepsilon}), \quad f(\sigma_2+it)=O(t^{\mu_2+\varepsilon}).$$

Применяя упомянутую теорему, мы видим, что

$$f(s)=O(t^{k(\sigma)}) \qquad (\sigma_1\leqslant\sigma\leqslant\sigma_2),$$

где $k(\sigma)=\frac{(\sigma_2-\sigma)(\mu_1+\varepsilon)+(\sigma-\sigma_1)(\mu_2+\varepsilon)}{\sigma_2-\sigma_1}$. Поскольку ε произвольно, из этого следует, что

$$\mu(\sigma)\leqslant\frac{(\sigma_2-\sigma)\mu_1+(\sigma-\sigma_1)\mu_2}{\sigma_2-\sigma_1}\qquad(\sigma_1\leqslant\sigma\leqslant\sigma_2). \tag{1}$$

Таким образом, *функция* $\mu(\sigma)$ *выпукла.*

В частности, *функция* $\mu(\sigma)$ *непрерывна* (§ 5.3.1).

Далее, $\mu(\sigma)=0$ при достаточно больших значениях σ. Действительно, так как функция $f(s)$ ограничена при $\sigma>\bar{\sigma}$, то $\mu(\sigma)\leqslant 0$ при $\sigma>\bar{\sigma}$. С другой стороны, если a_m — первый отличный от нуля коэффициент ее ряда Дирихле, то

$$|f(s)|\geqslant\frac{|a_m|}{m^\sigma}-\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n^\sigma},$$

правая же часть при достаточно больших значениях σ положительна. Это значит, что при достаточно больших σ модуль $|f(s)|$, рассматриваемый как функция от t, имеет положительную нижнюю грань. Следовательно, если σ достаточно велико, то $\mu(\sigma)\geqslant 0$ и, таким образом, $\mu(\sigma)=0$.

Допустим теперь, что функция $\mu(\sigma)$ отрицательна при некотором значении $\sigma=\sigma_1$ в области, где $f(s)$ есть функция конечного порядка. Взяв в качестве σ_2 значение σ, при котором $\mu_2=0$, мы заключаем из неравенства (1), что $\mu(\sigma)<0$ при $\sigma_1<\sigma<\sigma_2$. Между тем, мы знаем, что это невозможно, если σ_2 достаточно велико. *Следовательно, функция* $\mu(\sigma)$ *нигде не отрицательна.*

В частности, $\mu(\sigma)=0$ при $\sigma>\bar{\sigma}$. Действительно, мы уже показали, что $\mu(\sigma)\leqslant 0$ при $\sigma>\bar{\sigma}$.

Пусть, наконец, $\sigma_2>\bar{\sigma}$, так что $\mu_2=0$. Если $\mu_1>0$, то, в силу неравенства (1),

$$\mu(\sigma)\leqslant\frac{\sigma_2-\sigma}{\sigma_2-\sigma_1}\mu_1<\mu_1\qquad(\sigma>\sigma_1).$$

Следовательно, $\mu(\sigma)$ *есть монотонно убывающая функция от* σ.

9.4.2. Формула Перрона. В дальнейшем нам потребуется одно интегральное представление сумм s_n. Оно является частным случаем следующей теоремы.

Если x — *нецелое число и* c — *любое положительное число, то при* $\sigma>\sigma_0-c$

$$\sum_{n<x}\frac{a_n}{n^s}=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}f(s+w)\frac{x^w}{w}\,dw. \tag{1}$$

Пусть сначала $\sigma > \bar{\sigma} - c$. Тогда ряд для $f(s+w)$ абсолютно и равномерно сходится и

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iU}^{c+iT} f(s+w)\frac{x^w}{w}\,dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-iU}^{c+iT}\sum_{1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{s+w}}\frac{x^w}{w}\,dw =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\sum_{1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}\int_{c-iU}^{c+iT}\left(\frac{x}{n}\right)^w\frac{dw}{w}. \qquad (2)$$

Но, согласно § 3.1.2.6,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\left(\frac{x}{n}\right)^w\frac{dw}{w} = \begin{cases}1 & (n<x),\\ 0 & (n>x).\end{cases}$$

Поэтому достаточно доказать, что в формуле (2) можно вместо U и T написать ∞, т. е. что

$$\lim_{T\to\infty}\sum_{1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}\int_{c+iT}^{c+i\infty}\left(\frac{x}{n}\right)^w\frac{dw}{w} = 0$$

и что то же верно с $-i$ вместо i.

При фиксированном x

$$\int_{c+iT}^{c+i\infty}\left(\frac{x}{n}\right)^w\frac{dw}{w} = -\left(\frac{x}{n}\right)^{c+iT}\frac{1}{\log\frac{x}{n}(c+iT)} + \frac{1}{\log\frac{x}{n}}\int_{c+iT}^{c+i\infty}\left(\frac{x}{n}\right)^w\frac{dw}{w^2} =$$

$$= O\left(\frac{1}{n^cT}\right) + O\left(\frac{1}{n^c}\int_{T}^{\infty}\frac{dv}{c^2+v^2}\right) = O\left(\frac{1}{n^cT}\right).$$

Следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}\int_{c+iT}^{c+i\infty}\left(\frac{x}{n}\right)^w\frac{dw}{w} = O\left(\frac{1}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n^{\sigma+c}}\right),$$

чем для случая $\sigma > \bar{\sigma} - c$ теорема доказана.

Пусть теперь $\sigma_0 - c < \sigma \leqslant \bar{\sigma} - c$. Предположим, что $\alpha > \bar{\sigma} - \sigma$, и рассмотрим интеграл $\int f(s+w)\frac{x^w}{w}\,dw$, взятый по контуру прямоугольника, образованного прямыми $\operatorname{Re} w = c$, $\operatorname{Re} w = \alpha$, $\operatorname{Im} w = -U$, $\operatorname{Im} w = T$. Согласно теореме § 9.3.3, подынтегральная функция есть $O(t^{-(\sigma+c-\sigma_0)+\varepsilon})$, так что интегралы, взятые по горизонтальным сторонам, стремятся к нулю при $U\to\infty$, $T\to\infty$. Так как подынтегральная функция регулярна в прямоугольнике, то, в силу теоремы Коши,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f(s+w)\frac{x^w}{w}\,dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} f(s+w)\frac{x^w}{w}\,dw.$$

Но так как $\sigma > \bar{\sigma} - \alpha$, то, согласно уже доказанному, правая часть равна $\sum\limits_{n<x} a_n n^{-s}$. Этим доказательство доведено до конца.

В частности, при $s=0$ мы получаем равенство

$$\sum_{n<x} a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} f(w) \frac{x^w}{w}\, dw \qquad (c > \sigma_0). \tag{3}$$

Это и есть формула Перрона.

9.4.3. Имеется несколько других формул того же типа, что и формула Перрона. Одна из них, нужная для дальнейшего, имеет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} e^{-(n\delta)^\lambda} = \frac{1}{2\pi i\lambda} \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma\left(\frac{w}{\lambda}\right) f(s+w)\, \delta^{-w}\, dw,$$

где $\delta > 0$, $\lambda > 0$ и $c > 0$, $c > \bar{\sigma} - \sigma$. Чтобы доказать ее, представим правую часть как

$$\frac{1}{2\pi i\lambda} \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma\left(\frac{w}{\lambda}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{s+w}}\, \delta^{-w}\, dw$$

и обратим, пользуясь абсолютной сходимостью, порядок суммирования и интегрирования. Мы получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \frac{1}{2\pi i\lambda} \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma\left(\frac{w}{\lambda}\right) (n\delta)^{-w}\, dw,$$

и остается применить формулу примера (IV) § 4.4.2.

9.4.4. Формула § 9.4.2 позволяет получить результат, противоположный по своему характеру предыдущим: зная порядок функции, мы можем сделать заключение о сходимости ряда.

Ряд Дирихле заведомо сходится в полуплоскости, где функция $f(s)$ регулярна и $\mu(\sigma) = 0$.

Пусть s — внутренняя точка этой полуплоскости и δ — положительное число, столь малое, что точка $\sigma - \delta$ лежит в той же полуплоскости. Пусть $c > \bar{\sigma} - \sigma + 1$ (так что можно воспользоваться более простым случаем теоремы § 9.4.2). Мы деформируем контур формулы § 9.4.2 (1) в прямоугольный контур $c - i\infty$, $c - iT$, $-\delta - iT$, $-\delta + iT$, $c + iT$, $c + i\infty$ с $T > |t|$. При этом мы проходим через полюс, расположенный в точке $w = 0$, с вычетом $f(s)$. Следовательно,

$$\sum_{n<x} \frac{a_n}{n^s} - f(s) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int\limits_{c-i\infty}^{c-iT} + \int\limits_{c-iT}^{-\delta-iT} + \int\limits_{-\delta-iT}^{-\delta+iT} + \int\limits_{-\delta+iT}^{c+iT} + \int\limits_{c+iT}^{c+i\infty} \right\} f(s+w) \frac{x^w}{w}\, dw.$$

Так как мы находимся в полуплоскости, где $\mu(\sigma)=0$, то $f(s)=O(|t|^{\varepsilon})$ при любом положительном ε. Следовательно,

$$\int_{-\delta-iT}^{-\delta+iT} f(s+w)\frac{x^w}{w}\,dw=\int_{-T}^{T} O\{(|t|+|v|)^{\varepsilon}\}\frac{x^{-\delta}\,dv}{\sqrt{\delta^2+v^2}}=O(x^{-\delta}T^{\varepsilon})$$

и

$$\int_{-\delta+iT}^{c+iT} f(s+w)\frac{x^w}{w}\,dw=\int_{-\delta}^{c} O(T^{\varepsilon})\frac{x^c}{T}\,du=O(x^cT^{\varepsilon-1}).$$

Подобная же формула верна для интервала интегрирования $(c-iT,\ -\delta-iT)$. Наконец (ср. § 9.4.2),

$$\int_{c+iT}^{c+i\infty} f(s+w)\frac{x^w}{w}\,dw=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}\int_{c+iT}^{c+i\infty}\left(\frac{x}{n}\right)^w\frac{dw}{w}=O\left(\frac{x^c}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n^{\sigma+c}\left|\log\frac{x}{n}\right|}\right).$$

Без ущерба для общности можно предположить, что x есть половина нечетного целого числа. Тогда

$$\left|\log\frac{x}{n}\right|\geqslant\log\frac{n+(1/2)}{n}>\frac{A}{n}.$$

Эта оценка вместе с неравенством $\sigma+c-1>\bar{\sigma}$ показывает, что правая часть предыдущей формулы есть

$$O\left(\frac{x^c}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n^{\sigma+c-1}}\right)=O\left(\frac{x^c}{T}\right).$$

Подобная же формула верна для интервала интегрирования $(c-i\infty,\ c-iT)$, и, таким образом,

$$\sum_{n<x}a_nn^{-s}-f(s)=O(x^{-\delta}T^{\varepsilon})+O(x^cT^{\varepsilon-1}).$$

Положим $T=x^{2c}$. Тогда правая часть превратится в

$$O(x^{-\delta+2c\varepsilon})+O(x^{-c+2c\varepsilon})$$

и, следовательно, будет стремиться к нулю при $x\to\infty$, если $\varepsilon<\frac{\delta}{2c}$ и $\varepsilon<\frac{1}{2}$. Этим теорема доказана *).

9.4.5. Пусть σ_{ε} — абсцисса границы полуплоскости, в которой функция $f(s)$ регулярна и представляет собою $O(t^{\varepsilon})$. Мы доказали, что

$$\sigma_0\leqslant\sigma_{\varepsilon}\leqslant\bar{\sigma}.$$

*) Более общая теорема этого типа: Landau, *Handbuch*, § 238, Satz 57.

Нелегко дать пример, в котором все эти числа были бы различными. Есть основания думать, что для функции $(1-2^{1-s})\zeta(s)$, которая уже не раз упоминалась, $\sigma_\varepsilon = 1/2$, так что указанные числа равны соответственно 0, 1/2 и 1. Но это не доказано.

9.5. Формула для среднего значения. *Если* $\sigma > \bar{\sigma}$, *то*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(s)|^2\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{n^{2\sigma}}.$$

Действительно,

$$|f(s)|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{m^{\sigma+it}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{a}_n}{n^{\sigma-it}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{n^{2\sigma}} + \sum_{m\neq n}\sum \frac{a_m \bar{a}_n}{m^\sigma n^\sigma} \left(\frac{n}{m}\right)^{it},$$

причем ряды сходятся абсолютно и равномерно в каждом конечном интервале изменения t. Почленное интегрирование дает:

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(s)|^2\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{n^{2\sigma}} + \sum_{m\neq n}\sum \frac{a_m \bar{a}_n}{m^\sigma n^\sigma} \frac{2\sin\left(T\log\frac{n}{m}\right)}{2T\log\frac{n}{m}}.$$

Множитель, зависящий от T, ограничен для всех значений T, m, n, так что двойной ряд сходится равномерно относительно T. Так как при $T\to\infty$ каждый член этого ряда стремится к нулю, то и его сумма стремится к нулю, что и доказывает формулу.

9.5.1. Полуплоскость со средними значениями. Обозначим через σ_m наименьшее из таких чисел σ', что при $\sigma > \sigma'$ функция $f(s)$ регулярна и имеет конечный порядок и для ее среднего значения верна формула предыдущего параграфа. Мы называем полуплоскость $\sigma > \sigma_m$ полуплоскостью со средними значениями. Это название оправдывается следующей теоремой *):

Пусть при $\sigma \geqslant \alpha$ *функция* $f(s)$ *регулярна и имеет конечный порядок. Если осреднение*

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(\alpha+it)|^2\,dt \tag{1}$$

остается ограниченным при $T\to\infty$, *то при* $\sigma > \alpha$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(\sigma+it)|^2\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{n^{2\sigma}} \tag{2}$$

равномерно в каждой полосе вида $\alpha < \sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_2$.

---

*) Carlson [1]. Эта теорема аналогична теореме Парсеваля о рядах Фурье (§ 13.5.4).

Отправляясь от формулы § 9.4.3, переместим прямую интегрирования в положение $\operatorname{Re}(w)=\alpha-\sigma$ с $\sigma>\alpha$. Мы пройдем через полюс, находящийся в точке $w=0$, с вычетом $\lambda f(s)$, и притом только через этот полюс, если $\lambda>\sigma-\alpha$. Следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}e^{-(n\delta)^\lambda}-f(s)=\frac{1}{2\pi i\lambda}\int\limits_{\alpha-\sigma-i\infty}^{\alpha-\sigma+i\infty}\Gamma\left(\frac{w}{\lambda}\right)f(s+w)\,\delta^{-w}\,dw=$$
$$=O\left\{\delta^{\sigma-\alpha}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-A|v|}\,|f\{\alpha+i(t+v)\}|\,dv\right\}$$

(мы воспользовались асимптотической формулой для гамма-функции — см. § 4.4.2, пример (I)). Но при $|t|<T$

$$\int\limits_{2T}^{\infty}e^{-Av}\,|f\{\alpha+i(t+v)\}|\,dv=O\left(\int\limits_{2T}^{\infty}e^{-Av}v^A\,dv\right)=O(e^{-AT}),$$

и подобное же равенство верно для интеграла, взятого по интервалу $(-\infty,\ -2T)$. Далее, в силу неравенства Шварца (см. ниже § 12.4.1),

$$\left\{\int\limits_{-2T}^{2T}e^{-A|v|}\,|f\{\alpha+i(t+v)\}|\,dv\right\}^2\leqslant$$
$$\leqslant\int\limits_{-2T}^{2T}e^{-A|v|}\,|f\{\alpha+i(t+v)\}|^2\,dv\int\limits_{-2T}^{2T}e^{-A|v|}\,dv<$$
$$<A\int\limits_{-2T}^{2T}e^{-A|v|}\,|f\{\alpha+i(t+v)\}|^2\,dv.$$

Следовательно,

$$\left|\sum\frac{a_n}{n^s}e^{-(n\delta)^\lambda}-f(s)\right|^2<$$
$$<A\delta^{2\sigma-2\alpha}\int\limits_{-2T}^{2T}e^{-A|v|}\,|f\{\alpha+i(t+v)\}|^2\,dv+A\delta^{2\sigma-2\alpha}e^{-AT},$$

и, интегрируя по t в интервале $(-T,\ T)$, мы получаем оценку

$$\int\limits_{-T}^{T}\left|\sum\frac{a_n}{n^s}e^{-(n\delta)^\lambda}-f(s)\right|^2dt<$$
$$<A\delta^{2\sigma-2\alpha}\int\limits_{-2T}^{2T}e^{-A|v|}\,dv\int\limits_{-T}^{T}|f\{\alpha+i(t+v)\}|^2\,dt+O(\delta^{2\sigma-2\alpha}).$$

Но

$$\int\limits_{-T}^{T}|f\{\alpha+i(t+v)\}|^2\,dt=\int\limits_{-T+v}^{T+v}|f(\alpha+it)|^2\,dt=O(T)$$

равномерно при $|v| < 2T$. Следовательно,

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left|\sum \frac{a_n}{n^s} e^{-(n\delta)^\lambda} - f(s)\right|^2 dt = O(\delta^{2\sigma-2\alpha})$$

равномерно относительно T. Следовательно *),

$$\left\{\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left|\sum \frac{a_n}{n^s} e^{-(n\delta)^\lambda}\right|^2 dt\right\}^{1/2} - \left\{\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(s)|^2 dt\right\}^{1/2} = O(\delta^{\sigma-\alpha}) \quad (3)$$

равномерно относительно T.

Если $\delta > 0$, то ряд $\sum a_n n^{-s} e^{-(n\delta)^\lambda}$ абсолютно сходится, так что, согласно § 9.5,

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left|\sum \frac{a_n}{n^s} e^{-(n\delta)^\lambda}\right|^2 dt = \sum \frac{|a_n|^2}{n^{2\sigma}} e^{-2(n\delta)^\lambda}, \quad (4)$$

Полагая $\delta = 1$, мы заключаем из формул (3) и (4), что

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(s)|^2 dt < A,$$

обращаясь же снова к формуле (3), видим, что при любом положительном δ

$$\sum \frac{|a_n|^2}{n^{2\sigma}} e^{-2(n\delta)^\lambda} < A.$$

Поскольку δ произвольно мало, из этого следует, что ряд $\sum |a_n|^2/n^{2\sigma}$ сходится и

$$\lim_{\delta\to 0}\sum \frac{|a_n|^2}{n^{2\sigma}} e^{-2(n\delta)^\lambda} = \sum \frac{|a_n|^2}{n^{2\sigma}}.$$

Каково бы ни было ε, существует такое δ, что абсолютное значение левой части равенства (3) меньше ε для всех значений T и что

$$\left|\left\{\sum \frac{|a_n|^2}{n^{2\sigma}} e^{-2(n\delta)^\lambda}\right\}^{1/2} - \left\{\sum \frac{|a_n|^2}{n^{2\sigma}}\right\}^{1/2}\right| < \varepsilon.$$

Если такое δ фиксировано, то мы можем, согласно формуле (4), найти столь большое T_0, что при $T > T_0$

$$\left|\left\{\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left|\sum \frac{a_n}{n^s} e^{-(n\delta)^\lambda}\right|^2 dt\right\}^{1/2} - \left\{\sum \frac{|a_n|^2}{n^{2\sigma}} e^{-2(n\delta)^\lambda}\right\}^{1/2}\right| < \varepsilon.$$

*) В силу неравенства Минковского (§ 12.4.3), которое применяется здесь, однако, лишь при $p = 2$ и лишь к непрерывным функциям.

Если T_0 выбрано таким образом, то при $T > T_0$

$$\left| \left\{ \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(s)|^2 \, dt \right\}^{1/2} - \left\{ \sum \frac{|a_n|^2}{n^{2\sigma}} \right\}^{1/2} \right| < 3\varepsilon,$$

что и завершает доказательство.

9.5.2. *Если при $\sigma = \alpha$ функция $|f(s)|^2$ имеет среднее значение, то при $\sigma > \alpha + (1/2)$ ряд Дирихле абсолютно сходится. В наших обозначениях:*

$$\bar{\sigma} \leqslant \sigma_m + \frac{1}{2}.$$

Из предыдущей теоремы следует, что ряд $\sum \frac{|a_n|^2}{n^{2\alpha+2\varepsilon}}$ сходится при любом положительном ε. Но

$$\left\{ \sum_{n=1}^{N} \left| \frac{a_n}{n^s} \right| \right\}^2 \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{|a_n|^2}{n^{2\alpha+2\varepsilon}} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{2\sigma-2\alpha-2\varepsilon}},$$

и ясно, что правая часть ограничена, если $\sigma - \alpha > 1/2$ и значение ε достаточно мало *).

9.5.3. *Если при $\sigma > \alpha$ функция $f(s)$ ограничена, то ряд $\sum |a_n|^2 n^{-2\alpha}$ сходится; если $|f(s)| \leqslant M$, то*

$$\sum \frac{|a_n|^2}{n^{2\alpha}} \leqslant M^2.$$

Это также следует из теоремы § 9.5.1. Действительно, при $\sigma > \alpha$

$$\sum \frac{|a_n|^2}{n^{2\sigma}} = \lim \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(s)|^2 \, dt \leqslant M^2,$$

и нужно лишь перейти к пределу при $\sigma \to \alpha$.

В случае ограниченной функции $f(s)$ рассмотрения § 9.5.1 могут быть, конечно, значительно упрощены.

9.5.4. Другое следствие изложенных теорем состоит в том, что ширина полосы, в которой функция $f(s)$ ограничена, но ряд Дирихле не является абсолютно сходящимся, не может быть больше, чем 1/2.

9.5.5. *Ряд Дирихле заведомо сходится в полуплоскости, где функция $f(s)$ регулярна и имеет конечный порядок и где существует предел*

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(s)|^2 \, dt.$$

В наших обозначениях: $\sigma_0 \leqslant \sigma_m$.

---

*) Этот результат был другим путем получен Hardy [10].

Сначала мы должны вывести из предыдущего оценку порядка функции $f(s)$.

$f(s)=O(|t|^{1/2})$ *равномерно во всякой полосе* $\alpha\leqslant\sigma\leqslant\beta$, *для которой* $\alpha>\sigma_m$.

Пусть s — точка полосы (α, β) и R — постоянная, которая меньше, чем 1 и чем $\alpha-\sigma_m$. При $0<\rho<R$

$$f(s)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z-s|=\rho}\frac{f(z)}{z-s}\,dz=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(s+\rho e^{i\varphi})\,d\varphi.$$

Следовательно (неравенство Шварца),

$$|f(s)|^2\leqslant\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{2\pi}|f(s+\rho e^{i\varphi})|^2\,d\varphi=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|f(s+\rho e^{i\varphi})|^2\,d\varphi.$$

Умножая это неравенство на ρ и интегрируя по ρ от 0 до R, мы получаем неравенства

$$\frac{1}{2}R^2|f(s)|^2\leqslant\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^R\int\limits_0^{2\pi}|f(s+\rho e^{i\varphi})|^2\rho\,d\rho\,d\varphi<$$

$$<\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\sigma-R}^{\sigma+R}\int\limits_{t-R}^{t+R}|f(x+iy)|^2\,dx\,dy<\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\sigma-R}^{\sigma+R}dx\int\limits_{-|t|-1}^{|t|+1}|f(x+iy)|^2\,dy.$$

Но $\int\limits_{-|t|-1}^{|t|+1}|f(x+iy)|^2\,dy=O(|t|)$ равномерно относительно x. Следовательно,

$$\frac{1}{2}R^2|f(s)|^2=O(|t|),$$

что и утверждалось.

Чтобы доказать теорему, мы воспользуемся тем же контурным интегралом, что и в § 9.4.4, только теперь точки s и $\sigma-\delta$ будут находиться в полуплоскости $\sigma>\sigma_m$. Мы можем написать:

$$\left|\int\limits_{-\delta-iT}^{-\delta+iT}f(s+w)\frac{x^w}{w}\,dw\right|\leqslant x^{-\delta}\left\{\int\limits_{-T}^{T}\frac{|f(s+w)|^2}{\sqrt{\delta^2+v^2}}\,dv\int\limits_{-T}^{T}\frac{dv}{\sqrt{\delta^2+v^2}}\right\}^{1/2}.$$

Положим

$$\varphi(v)=\int\limits_0^v|f(\sigma+u+iy)|^2\,dy.$$

Очевидно, $\varphi(v) = O(v)$, так что

$$\int_0^T \frac{|f|^2}{\sqrt{\delta^2+v^2}}\,dv = \frac{\varphi(T)}{\sqrt{\delta^2+T^2}} + \int_0^T \frac{v\varphi(v)}{(\delta^2+v^2)^{\frac{3}{2}}}\,dv =$$

$$= O(1) + \int_{-T}^{T} \frac{O(v^2)}{(\delta^2+v^2)^{\frac{3}{2}}}\,dv = O(\log T).$$

Подобным же образом интеграл, взятый по интервалу $(-T,\ 0)$, есть $O(\log T)$. Следовательно,

$$\int_{-\delta-iT}^{-\delta+iT} f(s+w)\frac{x^w}{w}\,dw = O(x^{-\delta}\log T).$$

Далее, согласно предыдущей оценке,

$$\int_{-\delta+iT}^{c+iT} f(s+w)\frac{x^w}{w}\,dw = \int_{-\delta}^{c} O(\sqrt{T})\frac{x^c}{T}\,du = O(x^cT^{-1/2}),$$

и подобное же равенство имеет место для интеграла, взятого по интервалу $(c-iT,\ -\delta-iT)$. Остающиеся интегралы представляют собой $O(x^cT^{-1})$ (ср. § 9.4.4). Следовательно,

$$\sum_{n<x}\frac{a_n}{n^s} - f(s) = O(x^{-\delta}\log T) + O(x^cT^{-1/2}),$$

и если положить $T = x^{2c+1}$, то правая часть будет стремиться к нулю при $x\to\infty$. Этим теорема доказана.

9.6. Теорема единственности. Нули. Функция $f(s)$ может быть представлена рядом Дирихле только одним способом. Точнее: *если в некоторой области значений* s

$$\sum_1^\infty \frac{a_n}{n^s} = \sum_1^\infty \frac{b_n}{n^s},$$

то $a_n = b_n$ *для всех значений* n.

Действительно, ряд $\sum (a_n - b_n)\,n^{-s}$ равномерно сходится в некоторой области, содержащей часть указанной области и неограниченно простирающейся вправо. Его сумма аналитична во всей этой области и потому всюду равна в ней нулю. Но если m — первое из значений n, для которых $a_n \neq b_n$, то

$$\left|\sum (a_n - b_n)\,n^{-s}\right| \geqslant |a_m - b_m|\,m^{-\sigma} - \sum_{m+1}^{\infty} |a_n - b_n|\,n^{-\sigma},$$

а эта разность положительна, если σ достаточно велико (ср. § 9.4.1). Это противоречие доказывает теорему.

9.6.1. Нули функции $f(s)$. Предыдущее рассуждение показывает, что *всегда существует полуплоскость, в которой функция $f(s)$ не имеет нулей.*

Проблема распределения нулей заданной функции $f(s)$ обычно бывает очень трудной, и для разных функций результаты могут быть весьма различны. Например, имеется гипотеза, что все невещественные нули функции

$$\frac{1}{1^s}-\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}-\ldots=(1-2^{1-s})\,\zeta(s)$$

лежат на прямой $\sigma=1$ (нули функции $1-2^{1-s}$) и прямой $\sigma=1/_{-}$ (нули функции $\zeta(s)$). Нули на прямой $\sigma=1$ определить легко, но то, что относится к нулям функции $\zeta(s)$, не доказано.

С другой стороны, известно, что функция $\zeta'(s)/\zeta(s)$, которая представляется при $\sigma>1$ абсолютно сходящимся рядом Дирихле, не имеет нулей в некоторой полуплоскости $\sigma>E$ с $E>1$ и имеет нули на прямых $\sigma=\sigma'$, расположенных всюду плотно в полосе $1<\sigma<E$.

Интересно сравнить эту общую проблему с ее частным случаем, в котором $a_n=0$, если n — не степень двойки. В этом частном случае функция имеет вид

$$f(s)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{2^{ns}}=\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n,$$

где $z=2^{-s}$, так что ряд может рассматриваться не только как ряд Дирихле, но и как степенной ряд. Каждому нулю z_ν степенного ряда отвечает последовательность нулей

$$s_{\mu,\nu}=-\frac{\log z_\nu+2\mu\pi i}{\log 2}\qquad(\mu=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots)$$

функции $f(s)$. Если z_0 — нуль с наименьшим положительным модулем, то функция $f(s)$ не имеет нулей справа от прямой

$$\sigma=\frac{\log(1/|z_0|)}{\log 2},$$

в то время как на этой прямой имеется бесконечно много нулей.

9.6.2. Функция $N(\sigma,T)$. Пусть t_0 — такое положительное число, что функция $f(s)$ регулярна при $t\geqslant t_0$ и достаточно больших значениях σ. Обозначим через $N(\sigma,T)$ число нулей $\sigma'+it'$ функции $f(s)$, для которых $\sigma'>\sigma$, $t_0<t'<T$. Мы докажем следующие теоремы.

9.6.2.1. *Если при $\sigma\geqslant\alpha$ функция $f(s)$ имеет конечный порядок, то*

$$N(\sigma,T)=O(T\log T)\qquad(\sigma>\alpha).$$

Существует столь большое β, что функция $|f(s)|$ заключена на прямой $\sigma=\beta$ между двумя положительными пределами. Пусть $0<\delta<\frac{1}{2}(\beta-\alpha)$. Применим теорему Иенсена к кругу с центром $\beta+in\delta$ и радиусом $\beta-\alpha$. Если $n(r)$ — число нулей функции $f(s)$ в круге $|s-(\beta+in\delta)|\leqslant r$, то согласно этой теореме

$$\int_0^{\beta-\alpha}\frac{n(r)}{r}\,dr=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f\{\beta+in\delta+(\beta-\alpha)e^{i\theta}\}|\,d\theta-\log|f(\beta+in\delta)|.$$

Но $f(s)=O(t^A)$ при $\sigma\geqslant\alpha$, так что

$$\log|f\{\beta+in\delta+(\beta-\alpha)e^{i\theta}\}|=\log|O\{(n\delta+\beta-\alpha)^A\}|<K\log n,$$

где K зависит только от α, β, δ... А так как

$$\log|f(\beta+in\delta)|=O(1),$$

то

$$\int_0^{\beta-\alpha}\frac{n(r)}{r}\,dr<K\log n.$$

С другой стороны,

$$\int_0^{\beta-\alpha}\frac{n(r)}{r}\,dr\geqslant n(\beta-\alpha-\delta)\int_{\beta-\alpha-\delta}^{\beta-\alpha}\frac{dr}{r}>Kn(\beta-\alpha-\delta),$$

а $n(\beta-\alpha-\delta)$ при достаточно малом δ больше числа нулей в полуполосе $\sigma\geqslant\beta-\alpha-2\delta$, $\left(n-\frac{1}{2}\right)\delta\leqslant t<\left(n+\frac{1}{2}\right)\delta$. Обозначив это число через ν_n, мы можем поэтому написать $\nu_n<K\log n$. Следовательно,

$$N(\beta-\alpha-2\delta,\ T)\leqslant\sum_{\frac{t_0}{\delta}<n<\frac{T}{\delta}}\nu_n<KT\log T,$$

что и завершает доказательство.

9.6.2.2. *Если функция $f(s)$ ограничена при $\sigma\geqslant\alpha$, то*

$$N(\sigma,\ T)=O(T)\qquad(\sigma>\alpha).$$

Доказательство аналогично предыдущему, но здесь множитель $\log T$, очевидно, не появляется. Пример, приведенный в конце § 9.6.1, показывает, что случай $N(\sigma,\ T)>AT$ возможен.

9.6.2.3. *Если при $\sigma=\alpha$ функция $f(s)$ имеет среднее значение, а при $\sigma\geqslant\alpha$ — конечный порядок, то*

$$N(\sigma,\ T)=O(T)\qquad(\sigma>\alpha).$$

Мы воспользуемся следующей леммой.

Если функция $\varphi(t)$ *положительна и непрерывна в интервале* (a, b), *то*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \log\varphi(t)\,dt \leqslant \log\left\{\frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(t)\,dt\right\}.$$

Разобьем интервал (a, b) на n равных частей точками $a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b$. Так как

$$\{\varphi(x_1)\varphi(x_2)\ldots\varphi(x_n)\}^{1/n} \leqslant \frac{1}{n}\{\varphi(x_1)+\varphi(x_2)+\ldots+\varphi(x_n)\},$$

то $\frac{1}{n}\sum\log\varphi(x_\nu) \leqslant \log\left\{\frac{1}{n}\sum\varphi(x_\nu)\right\}$, т. е.

$$\frac{1}{b-a}\sum(x_\nu - x_{\nu-1})\log\varphi(x_\nu) \leqslant \log\left\{\frac{1}{b-a}\sum(x_\nu - x_{\nu-1})\varphi(x_\nu)\right\}.$$

Переходя к пределу при $n\to\infty$, мы и получаем доказываемое неравенство.

Обратимся к теореме. Она может быть выведена из теоремы Иенсена посредством уточнения рассуждений § 9.6.2.1, но удобнее воспользоваться теоремой § 3.8. Применяя последнюю к функции $f(s)$ и прямоугольнику $(\alpha, \beta; t_0, T)$, мы видим после отделения вещественных частей, что

$$2\pi\int_\alpha^\beta N(\sigma, T)\,d\sigma = \int_{t_0}^T \log|f(\alpha+it)|\,dt - \int_{t_0}^T \log|f(\beta+it)|\,dt +$$
$$+\int_\alpha^\beta \arg f(\sigma+iT)\,d\sigma - \int_\alpha^\beta \arg f(\sigma+it_0)\,d\sigma. \qquad (1)$$

Применим к первому члену правой части равенства (1) нашу лемму. Мы можем написать:

$$\frac{1}{T-t_0}\int_{t_0}^T \log|f(\alpha+it)|\,dt = \frac{1}{2}\frac{1}{T-t_0}\int_{t_0}^T \log|f(\alpha+it)|^2\,dt \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\log\left\{\frac{1}{T-t_0}\int_{t_0}^T |f(\alpha+it)|^2\,dt\right\} < A.$$

Таким образом, первый член справа меньше AT.

Далее, функция $\log|f(\beta+it)|$ ограничена, если β достаточно велико (ср. § 9.6.2.1). Следовательно, при надлежащем выборе β второй член правой части равенства (1) также есть $O(T)$.

Переходя к третьему члену, предположим сначала, что при вещественных значениях s функция $f(s)$ вещественна. Возьмем значение β столь большим, чтобы при $\sigma=\beta$ функция $\operatorname{Re} f(s)$ не обращалась в нуль. Тогда (ср. § 3.5.6) функция $\arg f(s)$ будет ограничена на прямой $\sigma=\beta$; что касается прямой $t=T$, то на ней $\arg f(s)=O(q)$, где q — число нулей функции $\operatorname{Re} f(s)$ при $t=T$, $\alpha\leqslant\sigma<\beta$. Но при $t=T$

$$\operatorname{Re} f(s)=\frac{1}{2}\{f(\sigma+iT)+f(\sigma-iT)\}=g(\sigma),$$

так что q есть число нулей функции $g(z)$, лежащих в интервале $\alpha\leqslant z\leqslant\beta$ вещественной оси плоскости z. Поскольку $g(z)=O(T^A)$, из теоремы Иенсена следует, что $q=O(\log T)$ (ср. § 9.6.2.1). Следовательно, третий член правой части равенства (1) есть $O(\log T)$.

Если функция $f(s)$ не вещественна на вещественной оси, то вместо нее мы можем рассмотреть функцию

$$f_1(s)=\sum\frac{a_n}{n^s}\sum\frac{\bar{a}_n}{n^s}=f(s)\bar{f}(s),$$

к которой предыдущее доказательство применимо.

Наконец, последний член правой части равенства (1) есть постоянная. Таким образом,

$$\int_\alpha^\beta N(\sigma,\ T)\,d\sigma=O(T).$$

Но

$$\int_a^\beta N(\sigma,\ T)\,d\sigma\geqslant\int_\alpha^{\alpha+\delta} N(\sigma,\ T)\,d\sigma\geqslant\delta N(\alpha+\delta,\ T),$$

что и завершает доказательство.

9.7. Представление функций рядами Дирихле. Какого рода функции представимы рядами Дирихле?

Попытка ответить на этот вопрос сколько-нибудь полно завела бы нас слишком далеко, но некоторые указания могут быть даны. Легко понять, что рядами Дирихле представимы только функции очень специального вида.

Если функция $f(s)$ представима рядом Дирихле, то она должна быть, прежде всего, регулярна и ограничена в некоторой полуплоскости (именно, при $\sigma\geqslant\bar{\sigma}+\varepsilon$). Она должна иметь среднее значение

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(\sigma+it)|^2\,dt$$

для всех достаточно больших значений σ, и это среднее значение должно монотонно убывать при возрастании σ.

Далее, если $f(s)=\sum a_n n^{-s}$ и x — вещественное число, то при $\sigma>\bar\sigma$

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(s)\,x^s\,dt=\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}\right)x^s\,dt=\frac{x^\sigma}{2T}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^\sigma}\int_{-T}^{T}\left(\frac{x}{n}\right)^{it}dt=$$

$$=a_x+x^\sigma\sum_{n\neq x}\frac{a_n}{n^\sigma}\,\frac{2\sin\left(T\log\frac{x}{n}\right)}{2T\log\frac{x}{n}},$$

где $a_x=0$, если x не является положительным целым числом. Сумма последнего ряда, так как он сходится равномерно относительно T, стремится к нулю при $T\to\infty$. Следовательно,

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(s)\,x^s\,dt=a_x.$$

Это — необходимое условие представимости функции $f(s)$ рядом $\sum a_n n^{-s}$ (формула принадлежит Адамару). Оно не является достаточным. Тем не менее, оно показывает, насколько специальными являются свойства функции, представимой рядом Дирихле.

Если ряд Дирихле содержит только один член, скажем, $f(s)=ak^{-s}$, то функция $f(s)$ периодична и имеет период $2\pi i/\log k$. Ряд Дирихле самого общего вида с периодом $2\pi i/\log k$ есть $\sum_{n=0}^{\infty} b_n k^{-ns}$. Если появляются другие члены, то периодичность пропадает; однако функция $f(s)$ всегда сохраняет некоторое более общее свойство, близкое к периодичности и называемое «почти периодичностью». В теории почти периодических функций и следует искать ответ на наш вопрос. Из-за недостатка места мы не можем входить в его дальнейшее рассмотрение. Мы можем лишь грубо сказать, что если почти периодическая функция принимает некоторое значение, то она повторяет это значение не *точно*, но *приближенно*, бесконечное число раз и что точки, в которых это происходит, распределены примерно так же, как периоды a, $2a$, $3a$, ... периодической функции.

Теория почти периодических функций была построена Г. Бором *).

---

*) H. Bohr [1], [2], [3].

РАЗЛИЧНЫЕ ПРИМЕРЫ

1. Пусть $\varphi(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nx}$. Доказать, что

$$f(s)=\frac{1}{\Gamma(s)}\int\limits_0^{\infty} x^{s-1}\varphi(x)\,dx$$

(I) при $\sigma>0$, $\sigma>\bar{\sigma}$, (II) при $\sigma>0$, $\sigma>\sigma_0$.

2. Если $0<\theta<2\pi$, то функция $f(s)$, определяемая при $\sigma>0$ формулой $f(s)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in\theta}}{n^s}$, является целой.

[Пользуемся примером 1 и действуем как в случае функции $\zeta(s)$.]

3. Функции, определяемые при $\sigma>0$ рядами

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{ain^b}}{n^s}\ (a>0,\ 0<b<1),\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{ai(\log n)^2}}{n^s}\quad (a>0),$$

являются целыми *).

4. Если функция, представимая рядом Дирихле, не является постоянной, то в полуплоскости абсолютной сходимости она не может стремиться к пределу при $t\to\infty$.

[Если $f(s)=\sum\limits_1^{\infty} a_n n^{-s}$, то при $\sigma>\bar{\sigma}$

$$\lim\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T} f(s)\,dt=a_1,\qquad \lim\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}|f(s)|^2\,dt=\sum|a_n|^2.$$

Следовательно, если $f(s)\to a$, то $a_1=a$ и $\sum|a_n|^2=|a|^2$, так что $|a_2|^2+|a_3|^2+\ldots=0$, т. е. $a_2=0$, $a_3=0$, ... Таким образом, $f(s)=a_1$.]

5. Показать, что $\frac{1}{\zeta(s)}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s}$ $(\sigma>1)$, где: $\mu(1)=1$, $\mu(n)=(-1)^r$, если n есть произведение r различных простых чисел, $\mu(n)=0$ в остальных случаях. Показать также, что $\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|\mu(n)|}{n^s}$.

[Разложение функции $\zeta(s)$ в бесконечное произведение имеется в § 1.4.4, пример 1.]

6. Проверить формулы **)

$$\{\zeta(s)\}^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d(n)}{n^s},\qquad \frac{\{\zeta(s)\}^3}{\zeta(2s)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d(n^2)}{n^s},\qquad \frac{\{\zeta(s)\}^4}{\zeta(2s)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\{d(n)\}^2}{n^s},$$

в которых $d(n)$ обозначает число делителей числа n и $\sigma>1$.

---

*) Hardy [7], [10].

**) Несколько других формул этого рода можно найти у Полиа и Сеге, *Задачи и теоремы анализа*, отдел 8, №№ 49—64.

[Если $n = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \ldots p_r^{m_r}$ — разложение числа n на простые множители, то

$$d(n) = (m_1+1)(m_2+1)\ldots(m_r+1).$$

Следовательно,

$$\sum \frac{d(n^2)}{n^s} = \prod_p \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2m+1}{p^{ms}}$$

и

$$\sum \frac{\{d(n)\}^2}{n^s} = \prod_p \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m+1)^2}{p^{ms}}.]$$

7. Проверить формулу

$$\zeta(s)\zeta(s-a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_a(n)}{n^s} \qquad (\sigma > 1,\ \sigma > a+1)$$

и формулу *)

$$\frac{\zeta(s)\zeta(s-a)\zeta(s-b)\zeta(s-a-b)}{\zeta(2s-a-b)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_a(n)\,\sigma_b(n)}{n^s}$$

$$(\sigma > 1,\ \sigma > a+1,\ \sigma > b+1,\ \sigma > a+b+1),$$

где $\sigma_a(n)$ обозначает сумму a-х степеней делителей числа n.

[Вторая формула получается из тождества

$$\frac{1-p^{a+b-2s}}{(1-p^{-s})(1-p^{a-s})(1-p^{b-s})(1-p^{a+b-s})} =$$

$$= \frac{1}{(1-p^a)(1-p^b)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(1-p^{(m+1)a})(1-p^{(m+1)b})}{p^{ms}}.]$$

8. Пусть $d_k(n)$, где $k = 2, 3, \ldots$, обозначает число способов, которыми n можно разложить в произведение k множителей (порядок множителей принимается во внимание). Тогда **)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_k(n)}{n^s} = \{\zeta(s)\}^k \qquad (\sigma > 1)$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\{d_k(n)\}^2}{n^s} = \{\zeta(s)\}^k \prod_p \left\{P_{k-1}\left(\frac{1+p^{-s}}{1-p^{-s}}\right)\right\} \qquad (\sigma > 1),$$

где p пробегает все простые числа, а $P_n(z)$ есть многочлен Лежандра степени n.

*) Ramanujan [1], B. M. Wilson [1].
**) Titchmarsh [8].

9. В случае, когда функция $f(s)$ имеет период $2\pi i/\log k$, формулы Адамара для коэффициентов a_n (§ 9.7) легко преобразуются в формулы Лорана для коэффициентов степенного ряда.

10. Для того чтобы функция $f(s)$ допускала разложение вида $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{k^{ns}}$, необходимо и достаточно, чтобы она была регулярной и ограниченной при достаточно больших значениях σ и имела период $2\pi i/\log k$.

11. Если $a_n=0$ для всех значений n, не являющихся степенями некоторого k, то $\sigma_0=\bar{\sigma}=\sigma_g=\sigma_m$.

12. Для функции $f(s)=\sum\limits_{m=0}^{\infty} 2^{-m!s}$ прямая $\sigma=0$ является естественной границей. [См. § 4.7.]

13. Для функции $f(s)=\sum p^{-s}$, где p пробегает все простые числа, прямая $\sigma=0$ является естественной границей *).

14. Функция $f(s)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\{d_k(n)\}^r}{n^s}$ мероморфна, если $r=1$, а также если $r=2$, $k=2$; при других значениях r и k прямая $\sigma=0$ является ее естественной границей **).

15. Показать, что для $\zeta(s)$

$$\mu(\sigma)=\begin{cases} 0 & (\sigma \geqslant 1), \\ 1-2\sigma & (\sigma \leqslant 0) \end{cases}$$

и $\mu(\sigma) \leqslant 1-\sigma$, если $0<\sigma<1$.

[При $\sigma<0$ равенство следует из функционального уравнения для $\zeta(s)$. Значения $\mu(\sigma)$ в интервале $0<\sigma<1$ неизвестны.]

16. Вычислить среднее значение

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(s)|^2\,dt \qquad (\sigma>1)$$

для функций $f(s)=\zeta(s)$, $\frac{1}{\zeta(s)}$, $\{\zeta(s)\}^2$.

17. Показать, что если функция $f(s)$ не ограничена на прямой $\sigma=\alpha$, лежащей в полуплоскости, где она имеет конечный порядок, то она не ограничена и на всякой прямой $\sigma=\beta$ с $\beta<\alpha$, лежащей в той же полуплоскости.

18. Показать, что: функция $f(s)=(1-2^{1-s})\,\zeta(s)$ не ограничена на каждой прямой $\sigma=\alpha$ с $\alpha\leqslant 1$; функция $t^{\sigma-\frac{1}{2}} f(s)$ не ограничена на каждой прямой $\sigma=\alpha$ с $0<\alpha<1/2$.

[Теорема § 9.3.2 показывает, что функция $\zeta(s)$, а с ней и функция $(1-2^{1-s})\,\zeta(s)$, не ограничена при $\sigma>1$, $|t|>1$. После этого первый факт получается из теоремы § 9.4.1, а второй — из функционального уравнения § 4.4.4 для $\zeta(s)$ и асимптотической формулы § 4.4.2 для гамма-функции.]

---

*) Этот пример сложнее предыдущего; см. Landau und Walfisz [1].
**) Estermann [1].

19. Если числа $s_n = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu$ ограничены, то функция $f(s) = \sum a_n n^{-s}$ регулярна при $\sigma > 0$; если при этом $f(s)$ имеет на прямой $\sigma = 0$ полюс, то он является простым.

[Если $\varphi(u) = \sum_{\nu \leqslant u} a_\nu$, то

$$f(s) = s \int_1^\infty \frac{\varphi(u)}{u^{s+1}}\, du = O\left(s \int_1^\infty \frac{du}{u^{\sigma+1}}\right) = O\left(\frac{s}{\sigma}\right).]$$

20. Если $s_n \sim n$, то $f(s) \sim 1/(s-1)$, когда $s \to 1$ по вещественным значениям, бо́льшим чем 1.

Если $s_n \sim n \log^k n$, где k — положительное целое число, то $f(s) \sim \frac{k!}{(s-1)^{k+1}}$.

ГЛАВА X

ТЕОРИЯ МЕРЫ И ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА

10.1. Интегрирование по Риману. В теории аналитических функций мы пользовались хорошо известным определением интеграла, принадлежащим Риману. В теории функций действительного переменного римановское определение почти полностью вытеснено более общим определением, принадлежащим Лебегу.

Лебеговское определение позволяет интегрировать функции, к которым римановский метод неприменим; но это только одно из его преимуществ. Новая теория дает нам мощные универсальные средства, которых прежде этой области недоставало. Она справляется, так сказать, автоматически со многими предельными процессами, представлявшими трудности для римановской теории. На начальной ступени изучения трудно сказать об этом что-либо более точное.

Мы начнем с того, что напомним определение интеграла Римана от ограниченной функции. Пусть функция $f(x)$ ограничена в интервале (a, b). Разобьем этот интервал на частичные интервалы с помощью точек $x_0, x_1, \ldots, x_n$, удовлетворяющих условию $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. Пусть m_ν и M_ν — нижняя и верхняя грани функции $f(x)$ в интервале $x_\nu < x \leqslant x_{\nu+1}$. Положим

$$s = \sum_{\nu=0}^{n-1} m_\nu (x_{\nu+1} - x_\nu), \quad S = \sum_{\nu=0}^{n-1} M_\nu (x_{\nu+1} - x_\nu).$$

Когда число точек деления неограниченно возрастает, притом так, что наибольшая из разностей $x_{\nu+1} - x_\nu$ стремится к нулю, каждая из сумм s, S стремится к некоторому пределу. Если эти пределы совпадают, то их общее значение есть интеграл Римана

$$\int_a^b f(x)\, dx.$$

В известных случаях, например, если функция $f(x)$ непрерывна, этот интеграл заведомо существует.

Предположим теперь, что функция $f(x)$ принимает только значения 0 и 1: пусть $f(x) = 1$ на некотором множестве E и $f(x) = 0$

в остальных точках. Тогда, как это очевидно, s есть сумма длин тех интервалов, на которых всюду $f(x)=1$, т. е. интервалов, целиком состоящих из точек множества E, а S — сумма длин интервалов, содержащих хотя бы по одной точке множества E. Если множество E состоит из конечного числа неперекрывающихся интервалов, то, как нетрудно доказать, суммы s и S стремятся к одному и тому же пределу, именно, к сумме длин этих интервалов.

Интеграл Римана от такой функции ($f(x)=1$ на E и 0 в остальных точках) может быть назван *протяженностью* множества E. *Протяженность* есть, таким образом, обобщение *длины* интервала. Протяженность множества E, если она существует, обозначается через $e(E)$, так что

$$e(E)=\int_a^b f(x)\,dx.$$

Пределы s и S существуют всегда, независимо от того, существует ли протяженность. Эти пределы называются внутренней и внешней протяженностями множества E и обозначаются через $e_i(E)$ и $e_e(E)$.

Функция $f(x)$ называется *характеристической функцией* множества E.

Легко указать множество, не имеющее протяженности. Пусть E — множество всех рациональных значений x в интервале (a, b). Так как всякий интервал содержит как рациональные, так и иррациональные числа, то $m_\nu=0$, $M_\nu=1$ при любом подразделении интервала (a, b) и для всех значений ν. Следовательно, $s=0$, $S=b-a$ и

$$e_i(E)=0, \quad e_e(E)=b-a.$$

Таким образом, протяженность этого множества не определена и его характеристическая функция не имеет интеграла Римана.

В общем случае мы можем сказать, что определение протяженности множества E основывается на рассмотрении некоторых наборов связанных с E интервалов, причем число интервалов в наборе всегда конечно.

Лебеговское обобщение есть в первую очередь обобщение протяженности; и заключается оно главным образом в том, что отбрасывается ограничение конечности рассматриваемых наборов интервалов. Прежде чем дать соответствующее формальное определение, мы должны сделать несколько дальнейших замечаний о множествах точек.

10.2. Множества точек. Мера. По поводу основных понятий, относящихся к точечным множествам, мы отсылаем читателя к *Чистой математике* Харди (глава I).

Обычно мы обозначаем множества точек через E, $E_1, \ldots$ и предполагаем, что все они лежат в некотором конечном интервале (a, b). Мы обозначаем через CE дополнение множества E, т. е. множество всех точек интервала (a, b), не принадлежащих к E.

Если E_1 и E_2 — два множества, то через E_1+E_2 мы обозначаем множество всех точек, принадлежащих к E_1 или к E_2, и через E_1E_2 — множество всех точек, принадлежащих к E_1 и к E_2. Эти обозначения подсказаны тем обстоятельством, что если $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — характеристические функции множеств E_1 и E_2, то $f_1(x)f_2(x)$ есть характеристическая функция множества E_1E_2, а если при этом множества E_1 и E_2 не имеют общих точек, то $f_1(x)+f_2(x)$ есть характеристическая функция множества E_1+E_2.

Заметим, что

$$C(E_1+E_2)=CE_1 \cdot CE_2.$$

Эти обозначения распространяются очевидным образом на любое конечное число множеств; если имеется бесконечная последовательность множеств E_1, E_2, ..., то через $E_1+E_2+\ldots$ обозначается множество точек, принадлежащих (каждая) по крайней мере одному из этих множеств, и через $E_1E_2\ldots$ — множество точек, принадлежащих каждому из этих множеств.

Формула $E_1 \subset E_2$ обозначает, что каждая точка множества E_1 есть точка множества E_2. Два множества, имеющие общие точки, называются «пересекающимися».

Бесконечное множество точек называется *счетным*, если точки этого множества можно поставить во взаимно однозначное соответствие с целыми числами 1, 2, 3, ...; это значит, что мы должны быть в состоянии расположить эти точки в последовательность x_1, x_2, ..., в которой каждая точка найдет определенное место. Например, множество чисел 1, 1/2, 1/3, 1/4, ... счетно, и таково же множество чисел 1/2, 1/4, 1/8, ...

Множество всех правильных рациональных дробей счетно. Действительно, их можно перенумеровать, принимая во внимание сначала величину знаменателя, а затем величину числителя, следующим образом:

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{3}{4},\ \ldots$$

«Сумма» двух счетных множеств счетна. Действительно, если множество E_1 состоит из точек x_1, x_2, ..., а множество E_2 — из точек ξ_1, ξ_2, ..., то все точки множества E_1+E_2 содержатся в последовательности x_1, ξ_1, x_2, ξ_2, ...

Подобное же доказательство применимо к сумме любого конечного числа счетных множеств. Но и *сумма счетного бесконечного множества счетных множеств счетна*. Действительно, пусть E_1, E_2, ... — такие множества, и пусть E_n состоит из точек $x_{1,n}$, $x_{2,n}$, ...

Есть много способов занумеровать двойную последовательность точек $x_{m,n}$ в простую последовательность. Например, можно собрать вместе точки, для которых $m+n=k$ $(k=2, 3, \ldots)$, и внутри каждой такой группы расположить точки в порядке возрастания индекса m; мы получим последовательность

$$x_{1,1},\ x_{1,2},\ x_{2,1},\ x_{1,3},\ x_{2,2},\ x_{3,1},\ x_{1,4},\ \ldots,$$

что и доказывает теорему.

Наконец, *подмножество счетного множества счетно*. Действительно, всякое подмножество множества x_1, x_2, x_3, ... имеет, очевидно, первый член, второй член, третий член и т. д., что и дает требуемую нумерацию.

10.2.0.1. Читатель может подумать, что все множества счетны. Но это не так. *Множество всех действительных чисел, заключенных между* 0 *и* 1, *несчетно*.

Чтобы доказать это, предположим, напротив, что все эти числа можно расположить в последовательность x_1, x_2, ... Пусть каждое из них представлено в виде бесконечной десятичной дроби. «Конечные» десятичные дроби мы дополняем до бесконечных нулями; этим исключаются дроби, оканчивающиеся последовательностью девяток. Построим новую десятичную дробь ξ по следующему правилу: ее n-й десятичный знак $(n=1, 2, \ldots)$ на единицу больше n-го десятичного знака дроби x_n, если последний равен 0, 1, ..., 7; если же последний равен 8 или 9, то n-й десятичный знак дроби ξ есть 0. Этим правилом дробь ξ определена полностью, и она не оканчивается последовательностью девяток. Но ξ есть число, заключенное между 0 и 1 и отличное от всех чисел x_n, а это противоречит предположению, что последовательность x_1, x_2, ... содержит все действительные числа, заключенные между 0 и 1.

Подобное же доказательство применимо к любому интервалу. Совокупность всех точек интервала мы называем *континуумом*. Наша теорема утверждает, что *континуум несчетен*.

10.2.0.2. Точка ξ называется «предельной точкой» множества E, если для всякого положительного числа δ в интервале $(\xi-\delta, \xi+\delta)$ имеются точки множества E, отличные от ξ (см. *Ч. М.*, § 18, где предельные точки называются «точками накопления»).

Множество, содержащее все свои предельные точки, называется «замкнутым». Так, интервал, взятый вместе со своими концами, есть замкнутое множество. Такой интервал называется замкнутым интервалом.

Открытый интервал есть интервал, не содержащий своих концов. *Открытое* множество есть дополнение замкнутого множества относительно некоторого открытого интервала.

Всякое открытое множество состоит из конечного или счетного множества попарно непересекающихся открытых интервалов. Действительно, пусть E — открытое множество и x — точка множества E.

При достаточно малом δ интервал $(x, x+\delta)$ целиком состоит из точек множества E, так как если бы это было неверно, то точка x была бы предельной для множества CE и последнее не было бы замкнутым. Пусть δ_1 — верхняя грань значений δ, обладающих этим свойством. Если $x \leqslant \xi < x+\delta_1$, то точка ξ принадлежит к E, но точка $x+\delta_1$ уже не принадлежит к E, так как в противном случае, согласно предыдущему, некоторый интервал, состоящий из точек множества E, простирался бы вправо дальше этой точки.

Подобным же образом существует такое число δ_2, что при $x-\delta_2 < \xi \leqslant x$ точка ξ принадлежит к E, но точка $x-\delta_2$ уже не принадлежит к E.

Итак, точка x лежит в открытом интервале $(x-\delta_2, x+\delta_1)$, состоящем из точек множества E, концы которого не принадлежат к E.

Таким образом, все точки множества E распределяются по попарно непересекающимся открытым интервалам. Чтобы занумеровать эти интервалы в последовательность, возьмем сначала интервал, длина которого превосходит $\frac{1}{2}(b-a)$, если такой интервал существует; затем возьмем интервалы, длина которых $\leqslant \frac{1}{2}(b-a)$, но $> \frac{1}{3}(b-a)$, если такие существуют, и занумеруем их в том порядке, в каком они расположены на прямой; и т. д. Каждый интервал из E получит в этой последовательности определенное место.

«Сумма» двух открытых множеств есть открытое множество. Действительно, если E_1 и E_2 — открытые множества и $E = E_1 + E_2$, то каждая точка множества E является внутренней для некоторого интервала, состоящего из точек множества E.

То же рассуждение показывает, что *сумма любого конечного числа или счетного бесконечного множества открытых множеств есть открытое множество.* В частности (обращение доказанной выше теоремы), *сумма конечного или счетного множества открытых интервалов есть открытое множество.*

Если E_1 и E_2 — *открытые множества, то и множество* E_1E_2 *открыто.* Действительно, точка множества E_1E_2 является внутренней как для некоторого интервала из E_1, так и для некоторого интервала из E_2. Следовательно, она не является предельной для множества $C(E_1E_2)$, которое состоит из точек множества CE_1 и точек множества CE_2.

Это доказательство не может быть распространено на бесконечную последовательность множеств; например, если E_n — открытый интервал $-\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}$, то пересечение $E_1E_2\ldots$ состоит из единственной точки $x=0$.

10.2.1. Мера множества точек. Теперь мы в состоянии дать понятию «длина» новое обобщение. Вместо того чтобы начинать с конечного числа интервалов, мы начнем с открытого множества, которое может содержать бесконечно много интервалов.

Мера открытого множества определяется как сумма длин его интервалов. Эта сумма есть, в общем случае, сумма бесконечного ряда. Он всегда сходится, так как сумма любого конечного числа его членов есть сумма длин конечного числа попарно непересекающихся интервалов, лежащих в интервале (a, b), и потому не превосходит $b-a$. В силу этого же обстоятельства мера любого открытого множества, лежащего в интервале (a, b), не превосходит $b-a$.

Внешняя мера множества E есть нижняя грань мер всех открытых множеств, содержащих E. Она обозначается через $m_e(E)$. Ясно, что

$$0 \leqslant m_e(E) \leqslant b-a$$

и что если $E_1 \subset E_2$, то $m_e(E_1) \leqslant m_e(E_2)$.

Внутренняя мера $m_i(E)$ множества E определяется формулой

$$m_i(E) = b - a - m_e(CE).$$

Если $m_i(E) = m_e(E)$, то множество E называется измеримым и общее значение внешней меры $m_e(E)$ и внутренней меры $m_i(E)$ называется его мерой и обозначается через $m(E)$.

Ясно, что

$$m_i(CE) = b - a - m_e(E).$$

Из этого следует, что если множество E измеримо, то и множество CE измеримо и

$$m(E) + m(CE) = b - a.$$

Заметим, что мы дали два определения меры открытого множества: прямое и косвенное. Вскоре окажется, что они эквивалентны. Пока же в доказательствах, использующих открытые множества, мы будем пользоваться прямым определением.

10.2.2. *Для всякого множества E*

$$m_i E \leqslant m_e(E).$$

Действительно, согласно определению внешней меры существуют такие открытые множества O и O', содержащие соответственно E и CE, что

$$m(O) < m_e(E) + \varepsilon, \quad m(O') < m_e(CE) + \varepsilon.$$

Каждая точка интервала $(a+\varepsilon, b-\varepsilon)$ является внутренней для некоторого интервала из O или O', так что, согласно теореме Гейне — Бореля (*Ч. М.*, § 105), можно найти конечное число таких интервалов, вместе покрывающих интервал $(a+\varepsilon, b-\varepsilon)$. Если Q — сумма этих интервалов, то, очевидно, $m(Q) \geqslant b-a-2\varepsilon$ и $m(Q) \leqslant \leqslant m(O)+m(O')$. Вместе эти неравенства показывают, что

$$b-a \leqslant m_e(E)+m_e(CE)+4\varepsilon.$$

Так как ε произвольно мало, то это значит, что

$$b-a \leqslant m_e(E)+m_e(CE),$$

т. е. что $m_i(E) \leqslant m_e(E)$.

Из доказанного следует, что если $m_e(E)=0$, то $m_i(E)=0$. Таким образом, *если $m_e(E)=0$, то множество E измеримо и его мера равна нулю.*

В частности, *всякое счетное множество измеримо, и мера такого множества равна нулю.* Действительно, пусть множество состоит из точек x_1, x_2, ... Заключим точку x_1 в интервал длины ε, точку x_2 — в интервал длины $\frac{\varepsilon}{2}$ и, вообще, точку x_n — в интервал длины $\frac{\varepsilon}{2^{n-1}}$. Тогда множество окажется заключенным в открытое множество, мера которого не превосходит 2ε. Поскольку ε может быть взято произвольно малым, это значит, что внешняя мера нашего множества равна нулю.

10.2.3. Мы пришли к двум основным теоремам теории меры.

Первая основная теорема. *Если множества E_1, E_2, ... измеримы, то множество $E=E_1+E_2+E_3+\ldots$ также измеримо и*

$$m(E) \leqslant m(E_1)+m(E_2)+\ldots$$

Если при этом множества E_1, E_2, ... попарно не пересекаются, то имеет место равенство.

Вторая основная теорема. *Если множества E_1, E_2, ... измеримы, то множество $E_1E_2E_3\ldots$ также измеримо.*

Таким образом, множество точек, принадлежащих по крайней мере одному из множеств E_1, E_2, ..., измеримо, и таково же множество точек, принадлежащих всем этим множествам.

Мы начнем с доказательства двух лемм об открытых множествах, первая из которых — не что иное, как первая основная теорема, сформулированная для открытых множеств. Затем мы докажем одну общую теорему о внешней мере и выведем из нее первую основную теорему для случая непересекающихся множеств. После этого мы получим вторую основную теорему для случая двух множеств и воспользуемся ею для того, чтобы завершить доказательство первой теоремы. Наконец, пользуясь первой теоремой, мы доведем до конца доказательство второй теоремы.

10.2.4. *Если O_1, O_2 ... — открытые множества (пересекающиеся или не пересекающиеся) и $O=O_1+O_2+O_3+\ldots$, то*

$$m(O) \leqslant m(O_1)+m(O_2)+m(O_3)+\ldots \qquad (1)$$

Мы предполагаем, что ряд справа сходится; в противном случае утверждение бессодержательно.

Пусть $(a_{m,n}, b_{m,n})$ $(m=1, 2, \ldots)$ — интервалы множества O_n и (A_k, B_k) $(k=1, 2, \ldots)$ — интервалы множества O. Пусть, далее, ε — положительное число, меньшее $\frac{1}{2}(B_k - A_k)$. Каждая точка интервала $(A_k+\varepsilon, B_k-\varepsilon)$ является внутренней для одного из интервалов $(a_{m,n}, b_{m,n})$, покрывающих интервал (A_k, B_k). Если $\sum_k$ обозначает суммирование по этим интервалам, то, как это следует из теоремы Гейне — Бореля (ср. доказательство в § 10.2.2),

$$B_k - A_k - 2\varepsilon \leqslant \sum\nolimits_k (b_{m,n} - a_{m,n}).$$

Ввиду произвольности ε это значит, что

$$B_k - A_k \leqslant \sum\nolimits_k (b_{m,n} - a_{m,n}), \tag{2}$$

и, суммируя по k, мы получаем неравенство

$$m(O) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \sum\nolimits_k (b_{m,n} - a_{m,n}). \tag{3}$$

Так как сходящийся двойной ряд с положительными членами можно суммировать любым способом, то правая часть неравенства (3) может быть представлена в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (b_{m,n} - a_{m,n}) = \sum_{n=1}^{\infty} m(O_n).$$

Этим теорема доказана.

Если множества O_n попарно не пересекаются, то каждый из интервалов (A_k, B_k) совпадает с одним из интервалов $(a_{m,n}, b_{m,n})$ и неравенства (2), (3), а с ними и неравенство (1), превращаются в равенства.

10.2.4.1. *Если O и O' — открытые множества, покрывающие вместе интервал (a, b), то*

$$m(OO') \leqslant m(O) + m(O') - (b-a).$$

Согласно теореме Гейне — Бореля можно найти такое конечное множество интервалов из O и O', что сумма Q тех из этих интервалов, которые принадлежат к O, и сумма Q' тех из них, которые принадлежат к O', вместе покрывают интервал $(a+\varepsilon, b-\varepsilon)$. Присоединив, если это необходимо, к Q и Q' дальнейшие интервалы, мы можем считать, что

$$O = Q + R, \quad O' = Q' + R',$$

где $m(R) < \varepsilon$, $m(R') < \varepsilon$. Так как

$$OO' \subset QQ' + R + R',$$

то, в силу предыдущей леммы,

$$m(OO') \leqslant m(QQ') + m(R) + m(R') < m(QQ') + 2\varepsilon.$$

Но из элементарных соображений следует, что

$$m(Q) + m(Q') - m(QQ') \geqslant b - a - 2\varepsilon.$$

Кроме того, $m(O) \geqslant m(Q)$ и $m(O') \geqslant m(Q')$. Из этих четырех неравенств и получается доказываемое неравенство, если принять во внимание произвольность ε *).

10.2.5. *Пусть E_1, E_2, ... — произвольные множества. Если*

$$E = E_1 + E_2 + \dots,$$

то

$$m_e(E) \leqslant m_e(E_1) + m_e(E_2) + \dots$$

Мы можем заключить E_n в такое открытое множество O_n, что

$$m(O_n) < m_e(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Суммируя эти неравенства по n и пользуясь теоремой § 10.2.4, мы видим, что

$$m(O) \leqslant m(O_1) + m(O_2) + \dots < m_e(E_1) + m_e(E_2) + \dots + \varepsilon.$$

Но O есть открытое множество, содержащее E. Следовательно, $m_e(E) \leqslant m(O)$, и потому

$$m_e(E) < m_e(E_1) + m_e(E_2) + \dots + \varepsilon.$$

Доказываемое неравенство получается отсюда при $\varepsilon \to 0$.

10.2.6. *Пусть E_1, E_2, ... — попарно непересекающиеся измеримые множества. Тогда множество*

$$E = E_1 + E_2 + \dots$$

измеримо и

$$m(E) = m(E_1) + m(E_2) + \dots$$

Можно считать, что все рассматриваемые множества лежат в интервале (a, b).

(I) Рассмотрим сначала случай двух множеств: $E = E_1 + E_2$. Мы уже знаем, что $m_e(E) \leqslant m_e(E_1) + m_e(E_2) = m(E_1) + (E_2)$. Таким образом, достаточно доказать, что

$$m_i(E) \geqslant m(E_1) + m(E_2),$$

т. е. что

$$m_e(CE) \leqslant m(CE_1) + m(CE_2) - (b - a).$$

---

*) В действительности левая часть этого неравенства равна правой. Это следует из первой основной теоремы.

Мы можем заключить CE_1 и CE_2 в такие открытые множества O_1 и O_2, что

$$m(O_1) < m(CE_1) + \varepsilon, \quad m(O_2) < m(CE_2) + \varepsilon.$$

Так как E_1 и E_2 не имеют общих точек, то CE_1 и CE_2 вместе покрывают весь интервал, и тем же свойством обладают, следовательно, O_1 и O_2. Таким образом,

$$m(O_1O_2) \leqslant m(O_1) + m(O_2) - (b-a).$$

Но множество O_1O_2 содержит CE. Следовательно,

$$m_e(CE) \leqslant m(O_1O_2) \leqslant m(O_1) + m(O_2) - (b-a) <$$
$$< m(CE_1) + m(CE_2) + 2\varepsilon - (b-a).$$

Доказываемое неравенство получается отсюда при $\varepsilon \to 0$.

(II) На случай любого конечного числа множеств теорема распространяется повторным применением доказанного.

(III) В случае бесконечного числа множеств при любом значении n

$$m(E_1) + m(E_2) + \ldots + m(E_n) = m(E_1 + \ldots + E_n) \leqslant b - a.$$

Следовательно, ряд $\sum m(E_n)$ сходится.

Положим $S_n = E_1 + \ldots + E_n$. Так как $CE \subset CS_n$, то

$$m_e(CE) \leqslant m_e(CS_n) = m(CS_n) = b - a - m(E_1) - \ldots - m(E_n).$$

При $n \to \infty$ из этого следует, что $m_e(CE) \leqslant b - a - \sum m(E_n)$, т. е.

$$m_i(E) \geqslant \sum m(E_n).$$

Сопоставление последнего неравенства с неравенством § 10.2.5 завершает доказательство.

В частности, беря в качестве E_1, E_2, ... открытые интервалы, мы видим, что всякое открытое множество измеримо в общем смысле и что для открытых множеств наше прямое определение меры совпадает с общим. Замкнутые множества, как дополнения открытых множеств, также измеримы.

Если множества E_1 и E_2 измеримы и E_1 содержится в E_2, то множество $E_2 - E_1$ (состоящее из точек множества E_2, не принадлежащих E_1) измеримо.

Действительно,

$$C(E_2 - E_1) = E_1 + CE_2.$$

10.2.7. *Если множества E и F измеримы, то множество EF также измеримо.*

Пусть оба множества содержатся в интервале (a, b). Предположим сначала, что F — некоторый интервал (α, β). Пусть E_1 — часть множества E, лежащая в интервале (α, β), и E_2 — остаток. Пусть $O = O_1 + O_2$ — подобное же разложение открытого множества O, содержащего E. Если пренебречь точками α и β, что мы, очевидно, вправе сделать, то можно считать, что O_1 и O_2 — открытые множества, содержащие E_1 и E_2, и ясно, что

$$m(O)=m(O_1)+m(O_2).$$

Переходя к нижним граням, мы видим, что

$$m_e(E)=m_e(E_1)+m_e(E_2). \qquad (1)$$

Если, подобным же образом, $CE=e_1+e_2$, то

$$m_e(CE)=m_e(e_1)+m_e(e_2). \qquad (2)$$

Так как множество E измеримо, то

$$m_e(E)+m_e(CE)=b-a. \qquad (3)$$

Наконец, по § 10.2.5,

$$m_e(E_2)+m_e(e_2)\geqslant m_e(E_2+e_2)=b-a-(\beta-\alpha). \qquad (4)$$

Из (1), (2), (3) и (4) следует, что $m_e(E_1)+m_e(e_1)\leqslant\beta-\alpha$. Таким образом, множество E_1 измеримо.

Этим теорема доказана для случая, когда F — интервал. В силу предыдущей теоремы она верна поэтому и в случае, когда F — открытое множество. В общем случае мы можем заключить F в такое открытое множество O, а CF — в такое открытое множество O', что $m(O)+m(O')<b-a+\varepsilon$. Так как

$$EF\subset EO, \quad C(EF)=CF+F\cdot CE\subset O'+O\cdot CE,$$

то

$$m_e(EF)+m_e\{C(EF)\}\leqslant m(EO)+m(O')+m(O\cdot CE)=$$
$$=m(O)+m(O')<b-a+\varepsilon.$$

Ввиду произвольности ε из этого следует, что $m_e(EF)+$ $+m_e\{C(EF)\}\leqslant b-a$, чем доказательство и завершается.

Если множества E_1 и E_2 измеримы, то множество E, составленное из точек, принадлежащих E_2, но не E_1, измеримо.

Действительно, $E=E_2\cdot CE_1$.

10.2.8. Теперь мы можем закончить доказательство основных теорем. Пусть E_1, E_2, ... — любые измеримые множества, пересекающиеся или непересекающиеся, и пусть E — их сумма. Положим

$$E_2'=E_2\cdot CE_1, \quad E_3'=E_3\cdot C(E_1+E_2'), \quad E_4'=E_4\cdot C(E_1+E_2'+E_3'),$$

и т. д. Множества E_1, E_2', E_3', ... измеримы и попарно не пересекаются, и $E=E_1+E_2'+E_3'+\ldots$ Следовательно, множество E измеримо (§ 10.2.6), и имеет место неравенство $m(E)\leqslant m(E_1)+$ $+m(E_2)+\ldots$ (§ 10.2.5). Этим доказательство первой основной теоремы доведено до конца.

Если $F = E_1E_2E_3 \ldots$, то $CE = CF_1 + CE_2 + \ldots$ Согласно только что доказанному множество CF измеримо, а с ним измеримо и множество F. Этим доказана и вторая основная теорема.

10.2.9. Предельные множества. *Пусть $E_1, E_2, \ldots$ — измеримые множества, каждое из которых содержится в следующем, и пусть E — их сумма. Тогда*

$$\lim_{n \to \infty} m(E_n) = m(E).$$

Действительно, множества $E_2 - E_1, E_3 - E_2, \ldots$ измеримы и не пересекаются, и $E = E_1 + (E_2 - E_1) + (E_3 - E_2) + \ldots$ Следовательно,

$$m(E) = m(E_1) + m(E_2 - E_1) + \ldots =$$
$$= \lim_{n \to \infty} \{m(E_1) + m(E_2 - E_1) + \ldots + m(E_n - E_{n-1})\} = \lim_{n \to \infty} m(E_n).$$

Множество E называется *внешним предельным множеством последовательности* $E_1, E_2, \ldots$

Если каждое из множеств $E_1, E_2, \ldots$ содержит следующее и $E = E_1E_2 \ldots$, то

$$\lim_{n \to \infty} m(E_n) = m(E).$$

Эта теорема получается из предыдущей после перехода к дополнительным множествам. Множество E называется *внутренним предельным множеством последовательности* $E_1, E_2, \ldots$

В отличие от большинства теорем о мере множеств, первая из этих теорем останется в силе, если мы заменим в ней меру внешней мерой, отбросив предположение, что рассматриваемые множества измеримы. Это замечание окажется полезным в следующей главе, где проверка измеримости некоторых множеств будет представлять неудобства.

Если E — внешнее предельное множество последовательности $E_1, E_2, \ldots$, то

$$\lim_{n \to \infty} m_e(E_n) = m_e(E).$$

Заключим E_n в открытое множество O_n, для которого

$$m(O_n) < m_e(E_n) + \varepsilon.$$

Пусть $S_n = O_nO_{n+1}O_{n+2} \ldots$ и $S = S_1 + S_2 + \ldots$ Тогда $E_n \subset S_n \subset O_n$, $E \subset S$ и $S_n \subset S_{n+1}$, так что S есть внешнее предельное множество для множеств S_n (включения $O_n \subset O_{n+1}$ могут не иметь места, что и побудило нас ввести множества S_n). Следовательно,

$$m_e(E) \leqslant m(S) = \lim m(S_n) < \lim m_e(E_n) + \varepsilon,$$

и, ввиду произвольности ε, $m_e(E) \leqslant \lim m_e(E_n)$. С другой стороны, так как всякое множество, содержащее E, содержит и все множества E_n, то $m_e(E) \geqslant m_e(E_n)$ при любом n. Этим теорема доказана.

10.2.9.1. Канторово множество. Следующее множество, построенное Кантором, обладает многими интересными свойствами.

Разделим интервал (0, 1) на три равные части и удалим внутренность средней части; затем разделим каждую из двух оставшихся частей на три равные части и удалим внутренности обеих средних частей, и продолжим этот процесс неограниченно. На p-м шаге мы удаляем, таким образом, 2^{p-1} интервалов. Эти интервалы мы обозначаем, слева направо, через $\delta_{p,k}$ (k изменяется от 1 до 2^{p-1}). При любом k длина интервала $\delta_{p,k}$ есть 3^{-p}.

Пусть E — множество тех точек, которые останутся. E есть множество точек, представимых бесконечными троичными дробями

$$0,\ a_1a_2 \ldots (3)$$

(на их троичность указывает тройка, стоящая в скобках), у которых $a_1, a_2, \ldots$ принимают значения 0 и 2, но не значение 1; например, множество E содержит $2/3 = 0{,}200\ldots$, а также $1/3 = 0{,}0222\ldots$ Действительно: первый шаг, описанный выше, удаляет из интервала все точки, у которых первый знак есть 1 (кроме точки $0{,}100\ldots = 0{,}022\ldots$); второй шаг удаляет из оставшихся точек все те, у которых второй знак есть 1 (кроме точек $0{,}010\ldots = 0{,}0022\ldots$ и $0{,}210\ldots = 0{,}2022\ldots$); и т. д. Заметим еще, что концами интервалов $\delta_{p,k}$ служат те троичные дроби $0, a_1a_2\ldots(3)$, у которых все знаки, начиная с некоторого, — только нули или только единицы. Для интервала $\delta_{1,1}$ это очевидно; чтобы получить концы интервалов $\delta_{2,1}$, $\delta_{2,2}$, нужно взять в качестве первого троичного знака 0 или 2, а в качестве остатков — дроби, представляющие концы интервала $\delta_{1,1}$, и т. д. Таким образом, общий вид концевых точек интервала $\delta_{p,k}$ есть

$$0,\ a_1 \ldots a_m0222 \ldots (3), \quad 0,\ a_1 \ldots a_m2000 \ldots (3).$$

Множество E несчетно; это можно доказать таким же способом, каким была доказана несчетность континуума. Однако мера множества E равна нулю; действительно,

$$m(E) = 1 - \sum m(\delta_{p,k}) = 1 - \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2^{p-1}}{3^p} = 0.$$

Мы вернемся к этому множеству в § 11.7.2.

Пример. Доказать, что мера множества тех точек интервала (0, 1), для которых представляющие их десятичные дроби не содержат некоторого десятичного знака (скажем, 7,) равна нулю.

10.3. Измеримые функции. Пусть $f(x)$ — действительная функция от x, определенная и ограниченная в интервале (a, b). Обозначим через $E(f>c)$ множество тех точек интервала (a, b), в которых $f(x)>c$, и условимся подобным же образом пользоваться для обозначения множеств другими неравенствами.

Функция $f(x)$ называется измеримой, если каждое из множеств

$$E(f\geqslant c),\quad E(f<c),\quad E(f>c),\quad E(f\leqslant c)$$

измеримо при любом значении c.

Измеримость одного из этих множеств при всех значениях c влечет за собою измеримость трех других.

Предположим, например, что измеримо первое множество. Тогда второе множество измеримо как дополнение первого. Следовательно, измеримы все множества

$$E_n = E\left(f<c+\frac{1}{n}\right) \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots),$$

а с ними измеримо и множество

$$(E_1-E_2)+(E_2-E_3)+\ldots = E(c<f<c+1).$$

Поэтому измеримо также множество

$$E(f=c) = E(f\geqslant c) - E(f\geqslant c+1) - E(c<f<c+1),$$

что позволяет завершить доказательство.

10.3.1. Общие свойства измеримых функций.

(I) *Пусть f — измеримая функция и k — постоянная. Тогда функции $k+f$, kf и, в частности, $-f$ измеримы.*

Это очевидно.

(II) *Если функции f и φ измеримы, то множество $E(f>\varphi)$ измеримо.*

Если $f(x)>\varphi(x)$, то существует такое рациональное число r, что $f(x)>r>\varphi(x)$. Следовательно,

$$E(f>\varphi) = \sum_r E(f>r)\,E(\varphi<r),$$

где r пробегает множество всех рациональных чисел, что и доказывает измеримость множества $E(f>\varphi)$.

(III) *Если функции f и φ измеримы, то и функции $f+\varphi$ и $f-\varphi$ измеримы.*

Действительно,

$$E(f+\varphi>c) = E(f>c-\varphi),$$

и остается сослаться на (II). Аналогичное доказательство применимо к функции $f-\varphi$.

(IV) *Если функции f и φ измеримы, то функция $f\varphi$ также измерима.*

Функция $\{f(x)\}^2$ измерима, так как при $c>0$

$$E(f^2>c) = E\left(f>\sqrt{c}\right) + E\left(f<-\sqrt{c}\right).$$

Остается заметить, что в общем случае

$$f\varphi=\frac{1}{4}(f+\varphi)^2-\frac{1}{4}(f-\varphi)^2.$$

(V) *Если $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... — измеримые функции, то функции*

$$\varliminf_{n\to\infty} f_n(x), \quad \varlimsup_{n\to\infty} f_n(x),$$

которые мы предполагаем конечными, измеримы. В частности, если последовательность $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... сходится к некоторому пределу, то этот предел измерим.

Положим $f(x)=\varlimsup f_n(x)$. Пусть c — произвольное вещественное число, пусть

$$E_{m,n}=E\left(f_n>c+\frac{1}{m}\right)+E\left(f_{n+1}>c+\frac{1}{m}\right)+\ldots,$$

и пусть $E_m=E_{m,1}E_{m,2}E_{m,3}\ldots$ В силу основных теорем теории меры, множества $E_{m,n}$ и E_m измеримы. E_m есть множество точек, общих всем множествам $E_{m,n}$ с данным m, т. е. множество точек, в которых $f_\nu>c+\frac{1}{m}$ для сколь угодно больших значений ν. Следовательно, на E_m

$$f=\varlimsup f_\nu\geqslant c+\frac{1}{m}>c.$$

Положим $E=E_1+E_2+E_3+\ldots$ Множество E измеримо, и $f>c$ во всех его точках. Обратно, если $f(x)>c$, то существует такое натуральное число m, что $f_\nu(x)>c+\frac{1}{m}$ для сколь угодно больших значений ν, так что x принадлежит одному из множеств E_m. Следовательно, $E=E(f>c)$, что и доказывает теорему.

(VI) *Непрерывная функция измерима.*

Действительно, нетрудно проверить, что если функция $f(x)$ непрерывна, то множество $E(f\leqslant c)$ замкнуто. Следовательно, множество $E(f>c)$ открыто и, значит, измеримо.

Все обычные функции анализа могут быть получены предельными процессами из непрерывных функций и потому измеримы. То же справедливо и для некоторых более искусственных функций. Например,

$$\lim_{n\to\infty}\{\cos m!\pi x\}^{2n}$$

есть предел последовательности непрерывных функций, который равен 1, если $m!x$ — целое число, и 0 в противном случае. Если x — рациональное число, то $m!x$ есть при достаточно большом m целое число. Следовательно, функция

$$f(x)=\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\{\cos m!\pi x\}^{2n}$$

равна 1, если x — рациональное число, и 0 в противном случае. Тот факт, что она измерима, может быть, конечно, установлен и более прямым путем (§ 10.2.2).

10.4. Интеграл Лебега от ограниченной функции. Теперь мы в состоянии определить интеграл Лебега произвольной ограниченной измеримой функции.

Если $f(x)$ — характеристическая функция множества E, т. е. $f(x)=1$ на E и $f(x)=0$ вне E, то естественное определение интеграла содержится в формуле

$$\int_a^b f(x)\,dx = m(E).$$

Если $f(x)=k$ на E и $f(x)=0$ вне E, то мы полагаем:

$$\int_a^b f(x)\,dx = km(E).$$

Переходя к общему случаю, обозначим через α и β нижнюю и верхнюю грани функции $f(x)$. Как и в случае интегрирования по Риману, интеграл определяется как предел сумм; но на этот раз суммы получаются путем подразделения интервала изменения функции $f(x)$. Возьмем какие-нибудь числа $y_0, y_1, \ldots, y_n$, удовлетворяющие условию

$$\alpha = y_0 < y_1 < \ldots < y_{n-1} < y_n = \beta,$$

и обозначим через e_ν $(\nu = 0, \ldots, n-1)$ множество тех точек x, в которых $y_\nu \leqslant f(x) < y_{\nu+1}$, и через e_n — множество тех точек x, в которых $f(x)=\beta$. Так как функция $f(x)$ измерима, то все множества e_ν измеримы. Положим

$$s = \sum_{\nu=0}^{n} y_\nu m(e_\nu), \quad S = \sum_{\nu=0}^{n} y_{\nu+1} m(e_\nu),$$

где $y_{n+1}=\beta$. *Интеграл Лебега функции $f(x)$ в интервале (a, b) есть общий предел, к которому стремятся суммы s и S, когда число точек деления y_ν неограниченно возрастает, причем наибольшая из разностей $y_{\nu+1}-y_\nu$ стремится к нулю.*

Чтобы оправдать это определение, мы должны доказать, что оба предела существуют и что они равны между собой.

Предположим, что интервал (α, β) подразделен двумя различными способами, причем каждая из разностей $y_{\nu+1}-y_\nu$ в каждом из этих подразделений меньше ε. Пусть s, S и s', S' — суммы, соответствующие этим подразделениям. Тогда

$$S - s = \sum_{\nu=0}^{n} (y_{\nu+1} - y_\nu)\, m(e_\nu) \leqslant \varepsilon \sum_{\nu=0}^{n} m(e_\nu) = \varepsilon (b-a),$$

и подобным же образом $S' - s' \leqslant \varepsilon (b-a)$.

Рассмотрим теперь новое подразделение интервала (α, β), определяемое всеми точками деления обоих подразделений. Мы получим две новые суммы, s'' и S''. Введение новых точек деления не уменьшает нижних сумм и не увеличивает верхних сумм; если, например, между точками y_ν и $y_{\nu+1}$ вставляется новая точка η, то

$$y_\nu m(e_\nu) \leqslant y_\nu m\{E(y_\nu \leqslant f < \eta)\} + \eta m\{E(\eta \leqslant f < y_{\nu+1})\},$$

так что нижняя сумма не уменьшается. Применяя это заключение повторно, мы видим, что $s \leqslant s''$, $s' \leqslant s''$ и, подобным же образом, $S'' \leqslant S$, $S'' \leqslant S'$.

Из сказанного следует, что интервалы (s, S) и (s', S') имеют общие точки: это все точки интервала (s'', S''). Поэтому все числа s, s', S, S' лежат в интервале длины $2\varepsilon(b-a)$, и существование и равенство пределов сумм s и S следуют из общего принципа сходимости.

10.4.1. Сравнение с определением Римана. Для начинающего наиболее очевидным различием является, пожалуй, то, что в определении Лебега подразделяется не интервал интегрирования, а интервал изменения функции. Однако в действительности это не так уж важно. Существенно то, что мы пользуемся общей теорией меры вместо более ограниченной теории протяженности. Можно было бы построить интеграл из интегралов характеристических функций, пользуясь не мерой, а протяженностью, и по существу это было бы эквивалентно определению Римана. С другой стороны, можно определить интеграл, эквивалентный интегралу Лебега, путем надлежащего подразделения интервала интегрирования.

Как в определении Римана, так и в определении Лебега имеются верхние и нижние суммы, которые стремятся к пределам. В римановском случае эти пределы могут не совпадать, и функция интегрируема только тогда, когда они совпадают. В лебеговском случае пределы всегда совпадают; их равенство есть следствие измеримости функции.

Определение Лебега является более общим, чем определение Римана. Действительно, характеристическая функция множества рациональных точек имеет интеграл Лебега, но не имеет интеграла Римана, и позже мы увидим, что если функция имеет интеграл Римана, то она имеет и интеграл Лебега и эти интегралы равны между собой.

Мы пользуемся для интеграла Лебега тем же обозначением

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

что и для интеграла Римана. Если возникнет необходимость подчеркнуть, что речь идет об интеграле Римана, а не об интеграле

Лебега, мы будем обозначать первый через

$$(R)\int_a^b f(x)\,dx.$$

10.4.2. Интеграл по произвольному измеримому множеству. Пусть E — произвольное измеримое множество точек, лежащее в интервале (a, b). Интеграл функции $f(x)$ по множеству E может быть определен так же, как интеграл по интервалу. Множество e_ν (§ 10.4) состоит теперь из тех точек множества E, в которых $y_\nu \leqslant f(x) < y_{\nu+1}$. Доказательство существования интеграла фактически остается без изменений. Интеграл обозначается через

$$\int_E f(x)\,dx.$$

Интеграл по множеству меры нуль всегда равен нулю. Действительно, все множества e_ν имеют меру нуль, и потому суммы s и S всегда равны нулю.

Интеграл можно определить также, полагая $f(x)=0$ на CE и пользуясь определением интеграла по интервалу. Нетрудно проверить, что это определение эквивалентно предыдущему.

10.4.3. В дальнейшем мы всегда будем предполагать, не оговаривая это каждый раз, что все рассматриваемые множества и функции измеримы.

10.4.4. Элементарные свойства интеграла ограниченной функции.

(I) Теорема о среднем значении. *Если* $\alpha \leqslant f(x) \leqslant \beta$, *то*

$$\alpha m(E) \leqslant \int_E f(x)\,dx \leqslant \beta m(E).$$

Действительно, нетрудно проверить, что $\alpha m(E) \leqslant s \leqslant \beta m(E)$. Наше неравенство получается отсюда предельным переходом.

(II) *Интеграл аддитивен по отношению к любому конечному или счетному бесконечному набору попарно непересекающихся множеств, содержащихся в конечном интервале. Это значит, что если* $E = E_1 + E_2 + \ldots$, *то*

$$\int_E f(x)\,dx = \int_{E_1} f(x)\,dx + \int_{E_2} f(x)\,dx + \ldots$$

Предположим сначала, что имеются два множества, E_1 и E_2. Точки деления y_ν определяют разложение множеств E, E_1, E_2 на подмножества e_ν, e_ν^1, e_ν^2, причем

$$m(e_\nu) = m(e_\nu^1) + m(e_\nu^2).$$

Следовательно,

$$\int_{E_1} + \int_{E_2} = \lim \sum y_\nu m(e_\nu^1) + \lim \sum y_\nu m(e_\nu^2) = \lim \sum y_\nu m(e_\nu) = \int_E.$$

Подобным же образом обстоит дело в случае любого конечного числа множеств.

Если множеств бесконечно много, то пусть S_n — сумма первых n из них и R_n — остаток. Согласно уже доказанному,

$$\int_E = \int_{S_n} + \int_{R_n}.$$

Если $|f(x)| \leqslant M$, то, в силу теоремы о среднем значении,

$$\left| \int_{R_n} f(x)\,dx \right| \leqslant Mm(R_n),$$

правая же часть стремится к нулю при $n \to \infty$, так как ряд $\sum m(E_m)$ сходится. Следовательно,

$$\int_E = \lim \int_{S_n} = \int_{E_1} + \int_{E_2} + \ldots$$

(III) *Если $f(x) \leqslant \varphi(x)$ на множестве E, то*

$$\int_E f(x)\,dx \leqslant \int_E \varphi(x)\,dx.$$

Построим для функции $f(x)$ по точкам деления y_ν множества e_ν. На e_ν всюду $\varphi(x) \geqslant f(x) \geqslant y_\nu$. Следовательно,

$$\int_E \varphi(x)\,dx = \sum \int_{e_\nu} \varphi(x)\,dx \geqslant \sum y_\nu m(e_\nu).$$

Правая часть стремится к интегралу $\int_E f(x)\,dx$, и мы получаем доказываемое неравенство.

(IV) *Интеграл суммы конечного числа ограниченных измеримых функций равен сумме интегралов слагаемых.*

Прежде всего, если k — постоянная, то

$$\int_E (f+k)\,dx = \int_E f\,dx + \int_E k\,dx = \int_E f\,dx + km(E).$$

Действительно, вычислим сумму s для $f(x)$ по шкале $y_0, y_1, \ldots$ и сумму s' для $f(x)+k$ по шкале $y_0+k, y_1+k, \ldots$ Очевидно,

$$s' = \sum (y_\nu + k)\,m(e_\nu) = s + km(E).$$

Доказываемая формула получается отсюда предельным переходом.

Рассмотрим теперь случай двух произвольных ограниченных измеримых функций $f(x)$ и $\varphi(x)$. Пользуясь уже доказанным, мы можем написать:

$$\int_E \{f(x)+\varphi(x)\}\,dx=\sum\int_{e_\nu}(f+\varphi)\,dx\geqslant\sum\int_{e_\nu}(y_\nu+\varphi)\,dx=s+\int_E\varphi\,dx.$$

Подобным же образом, но взяв $y_{\nu+1}$ вместо y_ν, мы получим неравенство

$$\int_E (f+\varphi)\,dx\leqslant S+\int_E\varphi\,dx.$$

Доказываемая формула выводится из этих двух неравенств предельным переходом.

Для произвольного конечного числа функций теорема доказывается повторным применением этого своего частного случая.

(V) *Если k — постоянная, то*

$$\int_E kf(x)\,dx=k\int_E f(x)\,dx.$$

Это очевидно, если $k=0$. Если $k>0$, то мы вычисляем второй интеграл по шкале $y_0, y_1, \ldots$, а первый интеграл — по шкале $ky_0, ky_1, \ldots$ В обоих случаях мы приходим к одним и тем же множествам e_ν, из чего и следует доказываемая формула.

(VI) *Во всех случаях*

$$\left|\int_E f(x)\,dx\right|\leqslant\int_E|f(x)|\,dx.$$

Пусть E_1 — множество точек, в которых $f(x)\geqslant 0$, и E_2 — множество точек, в которых $f(x)<0$. Неравенство (VI) становится очевидным, если сопоставить формулу

$$\int_E f\,dx=\int_{E_1}f\,dx-\int_{E_2}|f|\,dx$$

с формулой

$$\int_E|f|\,dx=\int_{E_1}f\,dx+\int_{E_2}|f|\,dx.$$

(VII) Говорят, что некоторое соотношение выполняется *почти всюду*, если оно выполняется всюду вне некоторого множества меры нуль.

Две функции, равные почти всюду, имеют один и тот же интеграл.

Пусть $f(x)=\varphi(x)$ во всех точках множества E, лежащих вне множества e меры нуль. Тогда

$$\int_E(f-\varphi)\,dx=\int_e(f-\varphi)\,dx+\int_{E\cdot Ce}(f-\varphi)\,dx.$$

Первый член справа равен нулю потому, что $m(e)=0$, а второй — потому, что подынтегральная функция всюду равна нулю. Следовательно,

$$\int_E f\,dx = \int_E \varphi\,dx.$$

(VIII) *Если* $f(x)\geqslant 0$ *и* $\int_E f(x)\,dx=0$, *то* $f(x)=0$ *почти всюду на* E.

Положим $E_0=E(f=0)$ и

$$E_n=E\left(\frac{M}{n+1}<f\leqslant\frac{M}{n}\right),$$

где M — верхняя грань функции f. Очевидно, $E=E_0+E_1+E_2+\ldots$ и

$$m(E_m)\leqslant\frac{n+1}{M}\int_{E_n} f\,dx\leqslant\frac{n+1}{M}\int_E f\,dx=0.$$

Таким образом, $m(E_n)=0$ при $n=1, 2, \ldots$, что и доказывает теорему.

10.5. Теорема Лебега о сходимости (теорема об ограниченной сходимости). *Пусть* $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... — *такая последовательность измеримых функций, что* $|f_n(x)|\leqslant M$ *для всех значений* n *и всех точек* x *множества* E, *и пусть*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$$

во всех точках x *множества* E. *Тогда*

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\,dx=\int_E f(x)\,dx.$$

Поскольку при вычислении интегралов множествами меры нуль можно пренебрегать, достататочно, чтобы указанные условия были выполнены *почти всюду*.

Так как $|f_n(x)|\leqslant M$ при любом n, то $|f(x)|\leqslant M$. Следовательно, функция $f(x)$ интегрируема, и доказательству подлежит равенство

$$\lim\int_E \{f(x)-f_n(x)\}\,dx=0.$$

Положим $g_n=|f-f_n|$, и пусть ε — произвольное положительное число. Введем обозначения:

$$E_1=E(\varepsilon>g_1, g_2, \ldots),\quad E_2=E(g_1\geqslant\varepsilon>g_2, g_3, \ldots),$$
$$E_3=E(g_2\geqslant\varepsilon>g_3, g_4, \ldots), \ldots$$

Множества E_k измеримы, и они попарно не пересекаются; действительно, $g_k \geqslant \varepsilon$ на E_{k+1}, но не на $E_1, \ldots, E_k$, так что E_{k+1} не имеет общих точек с $E_1, \ldots, E_k$. Каждая точка множества E принадлежит одному из множеств E_k; действительно, $g_n(x) \to 0$ в каждой точке x, вследствие чего каждой точке x отвечает наименьший номер k, для которого $g_k(x) < \varepsilon$, $g_{k+1}(x) < \varepsilon, \ldots$, так что x принадлежит E_k.

Из сказанного следует, что

$$\int\limits_E g_n\,dx = \int\limits_{E_1} g_n\,dx + \int\limits_{E_2} g_n\,dx + \ldots$$

Но $g_n < \varepsilon$ на $E_1, \ldots, E_n$ и $g_n \leqslant 2M$ всюду. Следовательно,

$$\int\limits_E g_n\,dx \leqslant \varepsilon\,\{m(E_1) + \ldots + m(E_n)\} + 2M\,\{m(E_{n+1}) + \ldots\}.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, мы видим, что

$$\overline{\lim} \int\limits_E g_n\,dx \leqslant \varepsilon m(E).$$

Ввиду произвольности ε это значит, что

$$\lim \int\limits_E g_n\,dx = 0,$$

откуда и следует доказываемое соотношение.

Теорема не верна для интегралов Римана, так как $f(x)$ может не быть интегрируемой по Риману и в случае, когда все функции $f_n(x)$ интегрируемы по Риману. Пусть, например, $r_1, r_2, \ldots$ — все рациональные точки интервала $(0, 1)$, и пусть $f_n(x) = 1$ при $x = r_1, \ldots, r_n$ и $f(x) = 0$ при остальных значениях x. При любом n

$$(R)\int\limits_0^1 f_n(x)\,dx = 0,$$

а между тем $f(x) = 1$ при рациональных x и $f(x) = 0$ при иррациональных x, так что функция $f(x)$ не интегрируема по Риману.

10.5.1. Теорема об ограниченной сходимости может быть сформулирована как теорема о почленном интегрировании рядов.

Если ряд

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots$$

сходится на некотором множестве E к сумме $s(x)$ и его частичные суммы

$$s_n(x) = u_1(x) + \ldots + u_n(x)$$

ограничены для всех значений n и всех точек x множества E, то

$$\int\limits_E s(x)\,dx = \int\limits_E u_1(x)\,dx + \int\limits_E u_2(x)\,dx + \ldots$$

Это — окончательная форма теоремы об ограниченной сходимости, доказанной для интегралов Римана в § 1.7.6.

10.5.2. Теорема Егорова*). *Если последовательность функций почти всюду на множестве E сходится к конечному пределу, то для всякого δ можно найти множество меры, большей $m(E)-\delta$, на котором она сходится равномерно.*

Пусть $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... — рассматриваемая последовательность, E' — множество, на котором она сходится, $f(x)$ — ее предел на этом множестве и $g_n=|f-f_n|$.

Пусть ε_1, ε_2, ... — последовательность положительных чисел, сходящаяся к нулю. Обозначим через $S_{n,r}$ подмножество множества E', состоящее из точек, в которых $g_\nu<\varepsilon_r$ при $\nu\geqslant n$. Каждое из множеств $S_{1,r}$, $S_{2,r}$, ... содержится в следующем, и их внешнее предельное множество (§ 10.2.9) есть E', так как $g_\nu\to 0$ всюду на E'. Следовательно, существуют такие числа $n(r)$, что

$$m(E'-S_{n(r),r})<\frac{\delta}{2^r}.$$

Положим

$$S=S_{n(1),1}S_{n(2),2}\ldots$$

При $n\geqslant n(r)$ и любом r на S выполняется неравенство $g_n<\varepsilon_r$. Это значит, что на S последовательность g_1, g_2, ... равномерно сходится к нулю. Наконец,

$$m(E-S)=m(E'-S)\leqslant\sum_{r=1}^{\infty}m(E'-S_{n(r),r})<\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\delta}{2^r}=\delta,$$

что и завершает доказательство.

Пример. Воспользоваться теоремой Егорова для доказательства теоремы Лебега о сходимости.

10.6. Сравнение интеграла Лебега с интегралом Римана. *Если функция $f(x)$ имеет в интервале (a, b) интеграл Римана, то она имеет в нем и интеграл Лебега и эти интегралы равны между собой.*

Если предположить, что функция $f(x)$ измерима, то это доказать легко. Подразделим интервал (a, b) точками x_0, x_1, ..., x_n. Обозначив через m_ν и M_ν нижнюю и верхнюю грани функции $f(x)$ при $x_\nu<x\leqslant x_{\nu+1}$, мы можем написать, пользуясь теоремой § 10.4.4(I):

$$\sum_{\nu=0}^{n-1}m_\nu(x_{\nu+1}-x_\nu)\leqslant\sum_{\nu=0}^{n-1}\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}f(x)\,dx\leqslant\sum_{\nu=0}^{n-1}M_\nu(x_{\nu+1}-x_\nu).$$

*) Egoroff [1].

Средний член есть интеграл Лебега, а крайние стремятся к интегралу Римана. Следовательно, эти интегралы равны между собой.

Чтобы доказать, что из интегрируемости функции $f(x)$ по Риману следует ее измеримость, положим:

$$\varphi(x) = m_\nu \quad (x_\nu < x \leqslant x_{\nu+1}), \qquad \Phi(x) = M_\nu \quad (x_\nu < x \leqslant x_{\nu+1}).$$

Очевидно,

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} m_\nu (x_{\nu+1} - x_\nu) = \int_a^b \varphi(x)\,dx, \qquad \sum_{\nu=0}^{n-1} M_\nu (x_{\nu+1} - x_\nu) = \int_a^b \Phi(x)\,dx.$$

Рассмотрим какую-нибудь бесконечную последовательность подразделений интервала (a, b), для которой $\max(x_{\nu+1} - x_\nu) \to 0$ и все точки деления каждого подразделения являются точками деления следующего подразделения. Пусть E — множество всех точек деления. E есть счетное множество, и потому оно имеет меру нуль и может не приниматься во внимание при интегрировании. Когда мы переходим от подразделения к следующему подразделению, функция $\varphi(x)$ не убывает, а функция $\Phi(x)$ не возрастает в каждой точке, не принадлежащей E. Следовательно, $\varphi(x) \to m(x)$, $\Phi(x) \to M(x)$, где $m(x)$ и $M(x)$ — нижний и верхний пределы функции $f(x)$ в точке x, т. е. пределы нижней и верхней граней в бесконечно малом интервале, содержащем x. Так как функции $\varphi(x)$ и $\Phi(x)$ измеримы, то таковы же функции $m(x)$ и $M(x)$, и, в силу теоремы Лебега о сходимости,

$$\lim \int_a^b \varphi(x)\,dx = \int_a^b m(x)\,dx, \qquad \lim \int_a^b \Phi(x)\,dx = \int_a^b M(x)\,dx.$$

Но если функция $f(x)$ интегрируема по Риману, то каждый из этих пределов равен ее интегралу. Следовательно,

$$\int_a^b \{M(x) - m(x)\}\,dx = 0.$$

Так как $M(x) \geqslant m(x)$, то, согласно § 10.4.4 (VIII), $M(x) = m(x)$ почти всюду, а так как $M(x) \geqslant f(x) \geqslant m(x)$, то $f(x) = m(x)$ почти всюду. Этим измеримость функции $f(x)$ доказана.

10.7. Интеграл Лебега от неограниченной функции. Пусть $f(x)$ — неограниченная измеримая функция. Предположим сначала, что $f(x) \geqslant 0$. Пусть $\{f(x)\}_n$, или просто $(f)_n$, обозначает $f(x)$ в точках, где $f(x) \leqslant n$, и n в точках, где $f(x) > n$. Функция $\{f(x)\}_n$ ограничена и измерима и, таким образом, интегрируема. Мы определяем интеграл функции $f(x)$ по множеству E как предел интеграла функции $\{f(x)\}_n$, т. е. равенством

$$\int_E f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_E \{f(x)\}_n\,dx,$$

если этот предел существует.

Очевидно, для интегрируемости положительной функции $f(x)$ по множеству E необходимо и достаточно, чтобы интегралы $\int_E \{f(x)\}_n\,dx$ были ограничены.

Подобным же образом определяется интеграл отрицательной функции. В общем случае мы вводим множество E_1, на котором $f(x) \geqslant 0$, и множество E_2, на котором $f(x) < 0$, и определяем интеграл функции $f(x)$ формулой

$$\int_E f(x)\,dx = \int_{E_1} f(x)\,dx + \int_{E_2} f(x)\,dx.$$

Функция, интегрируемая в этом смысле, является «абсолютно интегрируемой»; это значит, что функция $|f(x)|$ также интегрируема. Очевидно,

$$\int_E |f(x)|\,dx = \int_{E_1} f(x)\,dx - \int_{E_2} f(x)\,dx.$$

Можно было бы, конечно, определить интегралы, не сходящиеся абсолютно. Но, как мы увидим, предыдущие интегралы сохраняют все характеристические свойства интегралов ограниченных функций, тогда как для неабсолютно сходящихся интегралов это было бы не так.

В дальнейшем мы будем называть *интегрируемой* всякую функцию, ограниченную или неограниченную, которая имеет интеграл в предыдущем смысле.

Здесь очень удобно пользоваться выражением «бесконечность», введенным в § 5.7.0.1. Если, например, интеграл

$$\int_F \{f(x)\}_n\,dx$$

стремится к бесконечности вместе с n, то мы пишем

$$\int_E f(x)\,dx = \infty.$$

Примеры. (I) Показать, что интеграл $\int_0^1 x^{-a}\,dx$, рассматриваемый как интеграл Лебега, существует и равен $1/(1-a)$, если $0 < a < 1$, но бесконечен, если $a \geqslant 1$.

[По Лебегу этот интеграл определен как

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\int_0^{n^{-1/a}} n\,dx + \int_{n^{-1/a}}^{1} x^{-a}\,dx\right\},$$

и мы приходим к такому же результату, как в элементарной теории.]