(II) Более общим образом, пусть функция $f(x)$ неотрицательна, и пусть она ограничена в интервале $(\varepsilon, 1)$ при любом положительном ε. Тогда

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 f(x)\,dx$$

в том смысле, что либо обе части конечны и равны между собой, либо обе части бесконечны.

(III) Функция

$$f(x) = \frac{d}{dx}\left(x^2 \sin\frac{1}{x^2}\right) = 2x \sin\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}$$

не интегрируема по Лебегу в интервале $(0, 1)$.

[Функция непрерывна в любом интервале $(\varepsilon, 1)$, и $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_\varepsilon^1 f(x)\,dx$ существует. Но

$$\int_0^1 |f(x)|\,dx = \infty;$$

действительно, в каждом из интервалов $\left\{\left(2n+\frac{1}{3}\right)\pi\right\}^{-1/2} \leqslant x \leqslant \left\{\left(2n-\frac{1}{3}\right)\pi\right\}^{-1/2}$

$$|f(x)| \geqslant \frac{2}{x}\left|\cos\frac{1}{x^2}\right| - 2x \geqslant \frac{1}{x} - 2x,$$

из чего нетрудно вывести, что

$$\int_0^1 \{|f(x)|\}_n\,dx > A \log n.]$$

(IV) Пусть функция $f(x)$ измерима, и пусть e_n — подмножество множества E, состоящее из точек, в которых $n-1 \leqslant f(x) < n$. Необходимое и достаточное условие интегрируемости функции $f(x)$ на множестве E состоит в сходимости ряда $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} |n|\, m(e_n)$.

(V) Можно определить интеграл положительной неограниченной функции $f(x)$, полагая $\{f(x)\}^n = f(x)$, если $f(x) \leqslant n$, и $\{f(x)\}^n = 0$, если $f(x) > n$, и заменяя в определении Лебега функцию $\{f(x)\}_n$ функцией $\{f(x)\}^n$. Показать, что это определение равносильно определению Лебега.

(VI) Если функция $f(x)$ измерима, $|f(x)| \leqslant \varphi(x)$ и функция $\varphi(x)$ интегрируема на E, то функция $f(x)$ также интегрируема на E.

(VII) Если функция $f(x)$ интегрируема на E и E_n есть часть множества E, на которой $|f(x)| \geqslant n$, то $m(E_n) = o(1/n)$.

(VIII) Если $f(x) = 0$ в каждой точке канторова троичного множества и $f(x) = p$ в каждом смежном интервале длины 3^{-p}, то интеграл

$$\int_0^1 f(x)\,dx$$

существует в смысле Лебега и равен 3.

10.7.1. Элементарные свойства интеграла. *Интеграл аддитивен, т. е. если $E_1, E_2, \ldots$ — попарно непересекающиеся* *множества и* $E = E_1 + E_2 + \ldots$, *то*

$$\int_E f\,dx = \int_{E_1} f\,dx + \int_{E_2} f\,dx + \ldots$$

Без ущерба для общности можно считать, что $f \geqslant 0$. Действительно, если теорема верна для положительных функций, то она верна, точно так же, для отрицательных функций, общий же случай сводится к этим двум случаям сложением. Это замечание упростит многие наши доказательства.

Мы определяем функцию $(f)_n$, как выше. Интеграл от $(f)_n$ аддитивен, так что

$$\int_E (f)_n\,dx = \sum_k \int_{E_k} (f)_n\,dx \leqslant \sum_k \int_{E_k} f\,dx.$$

Пусть теперь $n \to \infty$. Если множеств только конечное число, то доказываемое равенство сразу получается из предыдущего равенства. Если же множеств бесконечно много, то из предыдущего неравенства следует, что

$$\int_E f\,dx \leqslant \sum \int_{E_k} f\,dx.$$

Но при любом K

$$\int_E (f)_n\,dx \geqslant \sum_{k=1}^{K} \int_{E_k} (f)_n\,dx,$$

и, переходя к пределу сначала при $n \to \infty$, а затем при $K \to \infty$, мы получаем неравенство

$$\int_E f\,dx \geqslant \sum \int_{E_k} f\,dx.$$

Этим теорема доказана. (Обращаем внимание читателя на сходство между этим доказательством и данным в § 1.6.2 доказательством того, что для двойного ряда с положительными членами сумма строк равна сумме столбцов.)

10.7.2. *Сумма конечного числа интегрируемых функций интегрируема, и интеграл суммы равен сумме интегралов слагаемых.*

Достаточно рассмотреть две функции, скажем $f(x)$ и $g(x)$. Предположим сначала, что обе они неотрицательны, и пусть $\varphi = f + g$. Тогда $(\varphi_n) \leqslant (f)_n + (g)_n \leqslant (\varphi)_{2n}$. Следовательно,

$$\int_E (\varphi)_n\,dx \leqslant \int_E (f)_n\,dx + \int_E (g)_n\,dx \leqslant \int_E (\varphi)_{2n}\,dx,$$

и, заставляя n стремиться к ∞, мы видим, что

$$\int_E \varphi\,dx \leqslant \int_E f\,dx + \int_E g\,dx \leqslant \int_E \varphi\,dx.$$

Этим для положительных функций теорема доказана. Если $f \geqslant 0$, $g < 0$, то мы рассматриваем множество, на котором $\varphi \geqslant 0$. Так как

$$f = \varphi + (-g),$$

то на нем доказываемое равенство является следствием уже доказанного. Совершенно так же на множестве, где $\varphi < 0$, мы пользуемся равенством $-g = f + (-\varphi)$.

Поскольку теорема доказана, таким образом, для сумм и разностей положительных функций, она верна и для функций произвольного знака.

10.7.3. Нижеследующие теоремы легко выводятся из соответствующих теорем об ограниченных функциях.

(I) *Если k — постоянная, то*

$$\int_E kf\,dx = k \int_E f\,dx.$$

(II)
$$\left| \int_E f\,dx \right| \leqslant \int_E |f|\,dx.$$

(III) *Две функции, равные почти всюду, имеют один и тот же интеграл.*

(IV) *Если $f(x) \geqslant 0$ и $\int_E f(x)\,dx = 0$, то $f(x) = 0$ почти всюду на E.*

(V) *Если функция $f(x)$ интегрируема на E и E_1, E_2, ... — последовательность содержащихся в E множеств, для которой $m(E_k) \to 0$, то*

$$\int_{E_k} f(x)\,dx \to 0;$$

при этом для всех таких последовательностей сходимость равномерна.

Мы можем считать, что $f(x) \geqslant 0$. Для всякого ε существует такое n, что

$$\int_E [f(x) - \{f(x)\}_n]\,dx < \varepsilon.$$

При фиксированном n

$$\int_{E_k} \{f(x)\}_n\,dx \leqslant nm(E_k) < \varepsilon \qquad (k > k_0).$$

Следовательно,

$$\int_{E_k} f(x)\,dx = \int_{E_k} \{f(x)\}_n\,dx + \int_{E_k} [f(x) - \{f(x)\}_n]\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \int_{E_k} \{f(x)\}_n\,dx + \int_E [f(x) - \{f(x)\}_n]\,dx < 2\varepsilon \qquad (k > k_0),$$

что и завершает доказательство.

Пример *). Пусть функция $f(x)$ интегрируема в интервале (a, b), а функция $\varphi(x)$ интегрируема в этом интервале по Риману. Доказать, что если интервал (a, b) подразделен точками x_ν, как в § 10.1, то при $\max(x_{\nu+1}-x_\nu)\to 0$

$$\lim \sum_{\nu=0}^{n-1} \varphi(x_\nu)\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} f(x)\,dx = \int_a^b \varphi(x) f(x)\,dx.$$

10.8. Общая теорема Лебега о сходимости. *Пусть $f_1(x), f_2(x), \ldots$ — такая последовательность функций, что существует интегрируемая на множестве E функция $F(x)$, для которой $|f_n(x)|\leqslant F(x)$ во всех точках x множества E и при всех значениях n. Если во всех точках x множества E*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),$$

то

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\,dx = \int_E f(x)\,dx.$$

Как обычно, достаточно, чтобы условия были выполнены почти всюду. Доказательство почти не отличается от доказательства теоремы об ограниченной сходимости. Мы определяем функции g_n и множества E_n так же, как там. Согласно § 10.7.1 ряд

$$\sum \int_{E_n} F(x)\,dx$$

сходится, и мы можем написать:

$$\int_E g_n\,dx \leqslant \varepsilon\{m(E_1)+\ldots+m(E_n)\} + 2\int_{E_{n+1}} F(x)\,dx + 2\int_{E_{n+2}} F(x)\,dx + \ldots$$

Из этого следует, что

$$\overline{\lim}\int_E g_n\,dx \leqslant \varepsilon m(E),$$

после чего доказательство доводится до конца так же, как в случае ограниченной сходимости.

Эта теорема позволяет доказать новую теорему о почленном интегрировании рядов. *Ограниченно сходящийся ряд можно умножить на любую интегрируемую функцию и проинтегрировать почленно.* Действительно, пусть $s_n(x)$ есть n-я частичная сумма ряда, и пусть $\varphi(x)$ — интегрируемая функция. Если $|s_n(x)|\leqslant M$, то

$$|\varphi(x)\, s_n(x)| \leqslant M\,|\varphi(x)|,$$

и так как стоящая справа функция интегрируема, то она может быть принята за функцию $F(x)$ предыдущей теоремы.

---

*) Titchmarsh [1].

10.8.1. Нижеследующая теорема часто бывает полезна. В своей первоначальной форме она принадлежит Фату *).

Пусть $f_n(x) \geqslant 0$ для всех значений n и всех точек x множества E. Если $f_n(x) \to f(x)$ при $n \to \infty$, то

$$\int_E f(x)\,dx \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,dx.$$

В частности, этим утверждается, что если правая часть конечна, то функция $f(x)$ почти всюду конечна и интегрируема; если же функция $f(x)$ не интегрируема или бесконечна на множестве положительной меры, то

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,dx = \infty.$$

Нетрудно проверить, что

$$\lim_{n\to\infty} \{f_n(x)\}_k = \{f(x)\}_k.$$

В силу теоремы об ограниченной сходимости из этого следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_E \{f_n(x)\}_k\,dx = \int\limits_E \{f(x)\}_k\,dx$. Но

$$\int_E \{f_n(x)\}_k\,dx \leqslant \int_E f_n(x)\,dx,$$

и, таким образом,

$$\varliminf_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,dx \geqslant \int_E \{f(x)\}_k\,dx.$$

Пусть теперь $k \to \infty$. Если функция $f(x)$ почти всюду конечна, то мы удаляем из E множество, на котором она бесконечна, и сразу получаем доказываемое неравенство. Если же $f(x) = \infty$ на некотором множестве e положительной меры, то при любом k

$$\int_E \{f(x)\}_k\,dx \geqslant km(e),$$

так что обе части доказываемого равенства равны ∞.

10.8.2. Теорема о сходимости для монотонных последовательностей. *Пусть $f_1(x), f_2(x), \ldots$ — последовательность положительных интегрируемых функций, не убывающая в каждой точке x множества E. Пусть $f(x)$ — ее предел, конечный или бесконечный. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,dx = \int_E f(x)\,dx$$

в следующем смысле:

---

*) Fatou [1], стр. 375.

(I) *если левая часть конечна, то функция $f(x)$ почти всюду конечна и интегрируема и имеет место равенство;*

(II) *если правая часть конечна, то и левая часть конечна и имеет место равенство;*

(III) *если левая часть бесконечна, то функция $f(x)$ неинтегрируема или бесконечна на множестве положительной меры;*

(IV) *если функция $f(x)$ неинтегрируема или бесконечна на множестве положительной меры, то левая часть бесконечна.*

Если левая часть конечна, то такова же, в силу теоремы Фату, правая часть. Равенство в случаях (I) и (II) следует из теоремы Лебега о сходимости, так как $f_n(x) \leqslant f(x)$. После этого (III) следует из (II), а (IV) — из (I).

10.8.3. Теперь мы можем придать более удовлетворительную форму теореме § 1.7.7 об интегрировании рядов.

Если $u_n(x) \geqslant 0$ для всех значений n и x, то

$$\int_a^b \left\{\sum u_n(x)\right\} dx = \sum \int_a^b u_n(x)\, dx$$

в предположении, что одна из частей этого равенства сходится.

Действительно, частичные суммы $s_n(x) = u_1(x) + \ldots + u_n(x)$ положительны и не убывают при любом значении x.

В частности, сходимость правой части влечет за собой сходимость ряда $\sum u_n(x)$ для почти всех значений x.

Мы не рассмотрели случая, когда область интегрирования бесконечна. Поскольку бесконечные интегралы Лебега этого рода не были еще определены, мы должны отложить полное изложение результатов до конца следующего параграфа.

10.9. Интегралы по бесконечному интервалу. Пусть $f(x)$ — функция, интегрируемая в интервале (a, b) при любом конечном значении b. Положим $f_1(x) = f(x)$, если $f(x) \geqslant 0$, и $f_1(x) = 0$ в противном случае; положим $f_2(x) = -f(x)$, если $f(x) < 0$, и $f_2(x) = 0$ в противном случае. Тогда

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f_1(x)\, dx - \int_a^b f_2(x)\, dx.$$

Каждый из стоящих справа интегралов является неубывающей функцией от b и потому стремится к конечному пределу или к положительной бесконечности, когда $b \to \infty$. Если оба предела конечны, то мы пишем

$$\int_a^\infty f_1(x)\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f_1(x)\, dx, \qquad \int_a^\infty f_2(x)\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f_2(x)\, dx$$

и определяем интеграл функции $f(x)$ в интервале (a, ∞) формулой

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \int_a^\infty f_1(x)\,dx - \int_a^\infty f_2(x)\,dx.$$

Из определения видно, что сходящийся интеграл этого рода абсолютно сходится; действительно,

$$\int_a^\infty |f(x)|\,dx = \int_a^\infty f_1(x)\,dx + \int_a^\infty f_2(x)\,dx.$$

Таким образом, интеграл $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ не является, строго говоря, интегралом Лебега, поскольку он не сходится абсолютно.

Многие свойства интегралов с конечными пределами естественно переносятся на интегралы с бесконечными пределами. Обычно бывает вполне ясно, возможно ли такое перенесение, и мы оставляем детали читателю.

Теорема § 10.8.3 допускает прямое обобщение: *если* $u_n(x) \geqslant 0$, *то*

$$\int_a^\infty \left\{\sum u_n(x)\right\} dx = \sum \int_a^\infty u_n(x)\,dx,$$

в предположении, что одна из частей этого равенства сходится.

Сходимость одной из частей этого равенства влечет за собой сходимость такого же выражения с конечным верхним пределом b. Следовательно (§ 10.8.3), равенство будет обеспечено, если мы заменим в обеих частях бесконечный верхний предел конечным пределом b. После этого доказываемое равенство получается как в § 1.7.7.

Заметим в заключение, что примеры §§ 1.7.5, 1.7.8, в которых

$$\sum \int \neq \int \sum,$$

столь же убедительны в случае интеграла Лебега, как в случае интеграла Римана. Ограничения, обеспечивающие равенство, сохраняют свой характер, хотя в целом теорема упрощается.

ГЛАВА XI

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ

11.1. Введение. «Основная теорема интегрального исчисления» состоит в том, что дифференцирование и интегрирование — взаимно обратные операции. Этот общий принцип можно трактовать двумя различными способами. Если функция $f(x)$ интегрируема, то функция

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt \tag{1}$$

называется ее неопределенным интегралом и принцип состоит в том, что

$$F'(x)=f(x). \tag{2}$$

С другой стороны, если $F(x)$ — заданная функция и функция $f(x)$ определена формулой (2), то принцип состоит в том, что

$$\int_a^x f(t)\,dt=F(x)-F(a). \tag{3}$$

Главная задача настоящей главы — выяснить, в каком смысле верны эти формулировки.

Как и в элементарной теории, соотношение (2) является следствием соотношения (1) в каждой точке x, в которой функция $f(x)$ непрерывна. Действительно, для всякого ε существует столь малое h_0, что $|f(t)-f(x)|<\varepsilon$ при $|t-x|<h_0$. В силу теоремы о среднем значении

$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-f(x)\right|=\left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h}\{f(t)-f(x)\}\,dt\right|<\varepsilon \qquad (|h|<h_0),$$

откуда и получается соотношение (2).

Однако в теории Лебега мы имеем дело с функциями, которые, вообще говоря, разрывны. К ним предыдущее рассуждение неприменимо. К тому же действительный интерес представляет не то, выполняется ли соотношение (2) в отдельных точках, а то, выполняется ли оно вообще. Мы можем дать на этот вопрос удовлетворительный ответ.

Какова бы ни была интегрируемая функция $f(x)$, ее неопределенный интеграл $F(x)$ имеет почти всюду производную, равную $f(x)$.

Гораздо более трудной проблемой является вывод соотношения (3) из соотношения (2). Необходимо, прежде всего, чтобы производная $F'(x)$ существовала, по меньшей мере, почти всюду, а это, как мы увидим в § 11.22, может не иметь места. Далее, если производная $F'(x)$ существует, необходимо, чтобы она была интегрируемой. Именно здесь мы встретили бы основную трудность в рамках теории Римана: как показывает пример *), построенный Вольтерра, производная $F'(x)$ может существовать всюду и быть ограниченной, не будучи интегрируемой по Риману. В теории Лебега производная всегда интегрируема, если она ограничена, так как она всегда измерима. Но если она не ограничена, то она может не быть интегрируемой по Лебегу. Проблема получила удовлетворительное решение, но для него потребовался более общий процесс, называемый тотализацией или интегрированием по Данжуа, для рассмотрения которого мы не имеем здесь места. Результат состоит в том, что если функция $F'(x)$ всюду конечна, то соотношение (3), в котором интеграл понимается в смысле Данжуа, является следствием соотношения (2).

11.2. Дифференцируемость. Недифференцируемые функции. Обычные функции анализа в общем дифференцируемы, т. е. дифференцируемы для большинства значений переменного. Могут существовать точки, в которых они не дифференцируемы, но эти исключительные точки обычно бывают изолированными. По-видимому, этим обстоятельством было одно время создано впечатление, что непрерывная функция обязательно дифференцируема. Однако Вейерштрасс показал, что это впечатление совершенно ошибочно. *Существуют непрерывные функции, нигде не имеющие производной.*

Тем не менее, мысль, что «обычная функция» имеет производную, оказывается в общем правильной, если это не вполне ясное выражение применяется к другому классу функций. Как мы увидим, она правильна в том смысле, что *монотонная функция имеет почти всюду конечную производную.*

Сначала мы рассмотрим недифференцируемые функции, а затем перейдем к положительной части теории.

11.2.1. Непрерывные недифференцируемые функции. Существует много простых примеров непрерывных функций, недифференцируемых в отдельных точках. Так, если $f(x)=|x|$, то отношение $\frac{f(h)-f(0)}{h}$ стремится при $h\to 0$ к двум различным пределам: к 1, если $h>0$, то и к -1, если $h<0$. Для функции

*) Hobson, т. I, стр. 461.

же $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$ $(x\neq 0)$, $f(0)=0$ это отношение не стремится ни к какому определенному пределу ни при $h>0$, ни при $h<0$.

Далее, методом, который называется сгущением особенностей, можно строить функции, не дифференцируемые на всюду плотном множестве, например на множестве рациональных точек. Пусть $r_1, r_2, \ldots$ — последовательность, состоящая из всех рациональных чисел, заключенных между 0 и 1. Положим

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n f(x-r_n),$$

где $f(x)$ — функция, имеющая указанную особенность при $x=0$, а коэффициенты a_n достаточно быстро стремятся к нулю. Функция $F(x)$ имеет эту особенность в каждой рациональной точке. Например, функция $F(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|x-r_n|}{3^n}$ непрерывна, так как ряд равномерно сходится. Но она не дифференцируема ни в какой рациональной точке. Действительно,

$$\frac{F(r_k+h)-F(r_k)}{h}=\sum_{n=1}^{k-1}\frac{|r_k+h-r_n|-|r_k-r_n|}{h\cdot 3^n}+\frac{|h|}{h\cdot 3^k}+\\+\sum_{k+1}^{\infty}\frac{|r_k+h-r_n|-|r_k-r_n|}{h\cdot 3^n},$$

и при $h\to 0$ первый член стремится к некоторому пределу, второй член стремится к 3^{-k}, если $h>0$, и к -3^{-k}, если $h<0$, а третий член по абсолютной величине не превосходит

$$\sum_{k+1}^{\infty}\frac{1}{3^n}=\frac{1}{2\cdot 3^k}.$$

Следовательно, производной $F'(r_k)$ не существует.

Чтобы получить *нигде* не дифференцируемую функцию, нужно применить совсем другие методы. Первый пример такой функции был указан Вейерштрассом.

11.2.2. Недифференцируемая функция Вейерштрасса. Эта функция определяется рядом

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b^n\cos(a^n\pi x),$$

где $0<b<1$, а a — нечетное натуральное число. Ряд равномерно сходится в любом интервале, так что функция $f(x)$ всюду непрерывна. С другой стороны, если $ab>1$, то ряд, который получается при почленном дифференцировании этого ряда, расходится. Само по себе это не доказывает, что функция не дифференцируема, однако это указывает на такую возможность. Мы покажем, что *если* $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$, *то функция* $f(x)$ *не имеет конечной производной ни при каком значении* x.

Мы можем написать:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \frac{\cos\{a^n\pi(x+h)\} - \cos(a^n\pi x)}{h} =$$

$$= \sum_{n=0}^{m-1} + \sum_{m}^{\infty} = S_m + R_n.$$

Так как

$$|\cos\{a^n\pi(x+h)\} - \cos(a^n\pi x)| = |a^n\pi h \sin\{a^n\pi(x+\theta h)\}| \leqslant a^n\pi|h|,$$

то

$$|S_m| \leqslant \sum_{n=0}^{m-1} \pi a^n b^n = \pi\frac{a^m b^m - 1}{ab-1} < \pi\frac{a^m b^m}{ab-1}.$$

Теперь мы оценим снизу $|R_m|$, придав h специальное значение. Именно, $a^m x = \alpha_m + \xi_m$, где α_m — целое число и $-1/2 \leqslant \xi_m < 1/2$, и мы полагаем

$$h = \frac{1-\xi_m}{a^m}.$$

Ясно, что $0 < h \leqslant 3/(2a^m)$ и

$$a^n\pi(x+h) = a^{n-m}\cdot a^m\pi(x+h) = a^{n-m}\pi(\alpha_m+1).$$

Так как a — нечетное число, из этого следует, что

$$\cos\{a^n\pi(x+h)\} = (-1)^{a^{n-m}(\alpha_m+1)} = (-1)^{\alpha_m+1}.$$

Далее,

$$\cos(a^n\pi x) = \cos\{a^{n-m}\pi(\alpha_m+\xi_m)\} =$$

$$= \cos(a^{n-m}\pi\alpha_m)\cos(a^{n-m}\pi\xi_m) = (-1)^{\alpha_m}\cos(a^{n-m}\pi\xi_m).$$

Следовательно,

$$R_m = \frac{(-1)^{\alpha_m+1}}{h}\sum_{n=m}^{\infty} b^n\{1+\cos(a^{n-m}\pi\xi_m)\}.$$

Все члены этого ряда положительны, так что, отбрасывая все члены, кроме первого, мы получаем оценку

$$|R_m| > \frac{b^m}{|h|} > \frac{2}{3}a^m b^m.$$

Таким образом,

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| \geqslant |R_m| - |S_m| > \left(\frac{2}{3} - \frac{\pi}{ab-1}\right) a^m b^m.$$

Если $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$, то число, стоящее в скобках, положительно, и если $m \to \infty$, то $h \to 0$ и правая часть стремится к бесконечности. Следовательно, отношение $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ принимает значения, сколь угодно большие по абсолютной величине, и конечной производной $f'(x)$ не существует.

График этой функции можно описать как состоящий из бесконечного числа бесконечно малых извилин, но почти невозможно дать о нем наглядное представление, не исказив его существенных черт *).

11.2.3. Нижеследующий пример непрерывной недифференцируемой функции принадлежит Ван-дер-Вардену**). Функция подобна функции Вейерштрасса, но результат получается совсем другим путем.

Пусть $f_n(x)$ — расстояние между точкой x и ближайшей к ней точкой вида $\frac{m}{10^n}$, где m — целое число. Функция

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

непрерывна, но не дифференцируема.

Каждая из функций $f_n(x)$ непрерывна, и $|f_n(x)| < 10^{-n}$, так что ряд равномерно сходится. Следовательно, функция $f(x)$ непрерывна.

Пусть x — произвольное число из интервала (0, 1). Представим x десятичной дробью и положим $x' = x - 10^{-q}$, если q-й десятичный знак этой дроби есть 4 или 9, и $x' = x + 10^{-q}$ в остальных случаях. Если $n < q$, то x и x' имеют одно и то же ближайшее число вида $\frac{m}{10^n}$ и лежат по одну сторону от него; если же $n \geqslant q$, то числа $\frac{m}{10^n}$ и $\frac{m'}{10^n}$, соответствующие числам x и x', отличаются друг от друга на $x - x'$. Эти правила можно проверить на простых примерах, таких, как $q = 2$, $x = 0{,}326$, $0{,}346$ или $0{,}396$.

---

*) О дальнейших свойствах этой функции см. Hardy [7], где тот же результат получен при $ab > 1$. Общий метод построения непрерывных недифференцируемых функций был указан Кноппом; см. Knopp [2].

**) Van der Waerden [1].

Из изложенного следует, что

$$f_n(x')-f_n(x)=\begin{cases}\pm(x'-x) & (n<q),\\ 0 & (n\geqslant q).\end{cases}$$

Таким образом,

$$f(x')-f(x)=\sum_{n=1}^{q-1}\pm(x'-x)=p(x'-x),$$

где p — целое число, четное или нечетное вместе с $q-1$. Следовательно, отношение $(f(x')-f(x))/(x'-x)$ не может стремиться к конечному пределу, когда $x'\to x$,

11.3. Производные числа функции. В то время как производная

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

может существовать или не существовать, каждое из четырех выражений

$$\overline{\lim_{h\to+0}}\frac{f(x+h)-f(x)}{h},\quad \underline{\lim_{h\to+0}}\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

$$\overline{\lim_{h\to-0}}\frac{f(x+h)-f(x)}{h},\quad \underline{\lim_{h\to-0}}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

всегда имеет определенный смысл: это конечное число, $+\infty$ или $-\infty$. Эти выражения называются производными числами функции: верхним справа, нижним справа, верхним слева и нижним слёва. Мы обозначаем их через

$$D^+f(x),\ D_+f(x),\ D^-f(x),\ D_-f(x);$$

знак $+$ или $-$ есть знак числа h в допредельном отношении, и он стоит сверху или снизу в зависимости от того, какой берется предел. Если $D^+f=D_+f$, то говорят, что функция имеет правую производную, если $D^-f=D_-f$ — левую производную. Необходимое и достаточное условие существования обыкновенной производной заключается в равенстве всех производных чисел.

Мы обозначаем левую и правую производные, если они существуют, через $f'_-(x)$ и $f'_+(x)$.

Примеры. (I) Функция $\sqrt{x^2}$, где всегда берется положительное значение корня, имеет при $x=0$ различные производные $f'_-(x)$ и $f'_+(x)$.

(II) Пусть $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$ $(x\neq 0)$, 0 $(x=0)$. Тогда при $x=0$

$$D_+f=-1,\quad D^+f=1,\quad D_-f=-1,\quad D^-f=1,$$

(III) Пусть

$$f(x)=\begin{cases} ax\sin^2\frac{1}{x}+bx\cos^2\frac{1}{x} & (x>0),\\ 0 & (x=0),\\ a'x\sin^2\frac{1}{x}+b'x\cos^2\frac{1}{x} & (x<0),\end{cases}$$

где $a<b$, $a'<b'$. Тогда при $x=0$

$$D_+f=a,\quad D^+f=b,\quad D_-f=a',\quad D^-f=b'.$$

(IV) Если функция $f(x)$ непрерывна в интервале (a, b) и одно из ее производных чисел не отрицательно в этом интервале, то $f(a)\leqslant f(b)$.

[Пусть, например, $D^+f\geqslant 0$. Предположим, что $f(b)-f(a)<-\varepsilon(b-a)$, и положим $\varphi(x)=f(x)-f(a)+\varepsilon(x-a)$. Тогда $\varphi(b)<0$ и, кроме того, $\varphi(x)>0$ для некоторых значений x (так как $D^+f(a)\geqslant 0$). Следовательно, $\varphi(x)=0$ при некоторых значениях x, заключенных между a и b. Если ξ — наибольшее из таких значений, то $D^+\varphi(\xi)\leqslant 0$ и $D^+f(\xi)+\varepsilon\leqslant 0$, что противоречит условиям. Следовательно, $f(b)-f(a)\geqslant-\varepsilon(b-a)$ при любом положительном ε, и, таким образом, $f(b)\geqslant f(a)$.]

(V) Допредельное отношение и производные числа непрерывной функции имеют в любом интервале одни и те же границы; это значит, что если одно из производных чисел удовлетворяет условию $\alpha\leqslant Df\leqslant\beta$, то $\alpha\leqslant\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leqslant\beta$, и наоборот.

[Рассмотреть функцию $\varphi(x)=f(x)-\alpha x$ и воспользоваться предыдущим примером.]

(VI) Если одно из производных чисел функции $f(x)$ непрерывно в некоторой точке, то функция $f(x)$ имеет в этой точке производную.

11.4. Функции ограниченной вариации. Говорят, что функция $f(x)$ имеет в интервале (a, b) ограниченную вариацию, если она может быть представлена в этом интервале в виде $\varphi(x)-\psi(x)$, где φ и ψ — неубывающие ограниченные функции.

Нетрудно проверить, что сумма, разность и произведение двух функций ограниченной вариации — также функции ограниченной вариации.

Другое определение функции ограниченной вариации состоит в том, что сумма $\sum\limits_{\nu=0}^{n-1}|f(x_{\nu+1})-f(x_\nu)|$, отвечающая подразделению интервала (a, b) произвольными точками $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$, предполагается ограниченной некоторой постоянной, не зависящей от выбора подразделения. Верхняя грань всех таких сумм называется полной вариацией функции.

Нетрудно проверить, что если выполнено первое условие, то выполнено и второе. Действительно,

$$|f(x_{\nu+1})-f(x_\nu)|\leqslant\varphi(x_{\nu+1})-\varphi(x_\nu)+\psi(x_{\nu+1})-\psi(x_\nu),$$

так что

$$\sum_{\nu=0}^{n-1}|f(x_{\nu+1})-f(x_\nu)|\leqslant\varphi(b)-\varphi(a)+\psi(b)-\psi(a).$$

Докажем обратное. Пусть p — сумма положительных и $-n$ — сумма отрицательных разностей $f(x_{\nu+1})-f(x_\nu)$. Если

$$v=\sum |f(x_{\nu+1})-f(x_\nu)|,$$

то $v=p+n$, $f(b)-f(a)=p-n$, так что

$$v=2p+f(a)-f(b), \quad v=2n+f(b)-f(a).$$

Следовательно, если суммы v ограничены, то таковы же суммы p и n. Если V, P и N — верхние грани сумм v, p и n, то

$$V=2P+f(a)-f(b), \quad V=2N+f(b)-f(a).$$

Пусть $V(x)$, $P(x)$ и $N(x)$ — соответствующие числа для интервала (a, x). Очевидно, это — неубывающие ограниченные функции от x, причем

$$V(x)=2P(x)+f(a)-f(x), \quad V(x)=2N(x)+f(x)-f(a).$$

Таким образом,

$$f(x)=f(a)+P(x)-N(x).$$

Это — требуемое представление функции $f(x)$.

Функции $V(x)$, $P(x)$ и $N(x)$ называются *полной вариацией*, *положительной вариацией* и *отрицательной вариацией* функции $f(x)$ в интервале (a, x).

Если функция $f(x)$ непрерывна и имеет ограниченную вариацию, то ее вариация $V(x)$ непрерывна.

Действительно, существует подразделение интервала (a, x), для которого

$$v>V(x)-\varepsilon,$$

причем одну из точек деления, x', можно считать столь близкой к x, что $|f(x)-f(x')|<\varepsilon$. Положим

$$v'=v-|f(x)-f(x')|.$$

v' есть одна из сумм, соответствующих интервалу (a, x'), вследствие чего

$$V(x')\geqslant v'>V(x)-2\varepsilon.$$

Так как V — неубывающая функция, то из этого следует, что $V(x')\to V(x)$, когда $x'\to x$ слева. Подобным же образом $V(x')\to\to V(x)$, когда $x'\to x$ справа. Следовательно, $V(x)$ есть непрерывная функция.

Непрерывная функция ограниченной вариации ес пь разность двух непрерывных неубывающих функций.

Действительно, если функция $f(x)$ непрерывна, то таковы же $P(x)$ и $N(x)$.

11.4.1. Производная функции ограниченной вариации. Целью ближайших трех параграфов является доказательство того, что *функция ограниченной вариации почти всюду имеет конечную производную.*

Наше доказательство основывается на нижеследующих леммах, принадлежащих Серпинскому*). Это — предложения типа теоремы Гейне — Бореля, но применимые к множествам, которые не предполагаются даже измеримыми.

Лемма 1. *Пусть E — множество, лежащее в интервале (a, b), и H — семейство интервалов. Предположим, что каждая точка x из E служит левым концом по крайней мере одного интервала $(x, x+h)$ из H. Тогда существует конечное число неперекрывающихся интервалов из H, сумма S которых покрывает подмножество E' множества E с внешней мерой $m_e(E') > m_e(E) - \varepsilon$.*

Пусть E_n — множество тех точек $x \in E$, для которых существуют интервалы $(x, x+h)$ из H с $h > 1/n$. Очевидно, E есть внешнее предельное множество для множеств E_n; следовательно, $\lim m_e(E_n) = m_e(E)$ (§ 10.2.9), и существует столь большое n, что $m_e(E_n) > m_e(E) - \frac{1}{2}\varepsilon$.

Пусть a_1 и b_1 — нижняя и верхняя грани множества E_n, и пусть $l = b_1 - a_1$. Положим $\eta = \frac{\varepsilon}{2(nl+1)}$ и найдем в E_n точку x_1 слева от точки $a_1 + \eta_1$. Пусть $(x_1, x_1 + h_1)$ — ассоциированный с ней интервал длины $h_1 > 1/n$.

Если в E_n имеются точки, лежащие справа от $x_1 + h_1$, то пусть a_2 — их нижняя грань. Пусть x_2 — точка множества E_n, лежащая в интервале $(a_2, a_2 + \eta)$, и $(x_2, x_2 + h_2)$ — ассоциированный с ней интервал длины $h_2 > 1/n$.

Продолжая этот процесс, мы через конечное число шагов достигнем точки b_1. Действительно, каждый шаг приближает нас к ней по крайней мере на $1/n$. Если указанное число шагов равно N, то $(N-1)/n < l$, т. е. $N < nl + 1$.

Пусть S — сумма построенных таким образом интервалов $(x_\nu, x_\nu + h_\nu)$ и T — сумма интервалов $(x_\nu - \eta, x_\nu)$. Тогда $E_n \subset S + T$ и $m(T) < N\eta < \frac{1}{2}\varepsilon$. Следовательно,

$$m_e(E) - \frac{1}{2}\varepsilon < m_e(E_n) \leqslant m_e(E_n S) + m_e(E_n T) < m_e(E_n S) + \frac{1}{2}\varepsilon,$$

так что множество $E' = E_n S$ обладает требуемым свойством.

Лемма 2. *Предположим, сверх того, что для каждой точки x из E существуют сколь угодно малые интервалы $(x, x+h)$ из H. Тогда интервалы, составляющие S, можно выбрать так, чтобы было выполнено еще и неравенство*

$$m(S) < m_e(E) + \varepsilon.$$

*) Sierpinski [1]. Близкая лемма: W. H. Young and G. C. Young [1].

Дополнительное условие необходимо. Возьмем, например, в качестве E единственную точку x, а в качестве H единственный интервал $(x, x+1)$. Тогда заключение леммы 1 будет верно, но заключение леммы 2 неверно.

Пусть O — такое открытое множество, содержащее E, что

$$m(O) < m_e(E) + \varepsilon.$$

Пусть H_1 — подсемейство семейства H, состоящее из тех интервалов, которые лежат в O. В силу нашего дополнительного предположения, каждая точка множества E является левым концом по крайней мере одного из интервалов семейства H_1. Поэтому мы можем применить лемму 1 к семейству H_1, и мы получим новый конечный набор интервалов с тем же свойством. Но теперь эти интервалы лежат в O, так что

$$m(S) \leqslant m(O) < m_e(E) + \varepsilon.$$

Этим лемма доказана.

В этих леммах интервалы, из которых состоит множество S, можно считать открытыми или замкнутыми в зависимости от того, что более удобно в каждом случае. Действительно, если множество S получено как сумма замкнутых интервалов, то мы можем заменить эти интервалы открытыми, удалив их концевые точки, т. е. множество меры нуль, что, очевидно, не окажет влияния на результат.

Лемма 3. *В предыдущих условиях интервалы, составляющие* S, *можно выбрать в произвольно заданном открытом множестве* G, *содержащем* E.

Действительно, при построении множества S можно вместо O взять OG.

11.4.2. *Если функция* $f(x)$ *не убывает в интервале* (a, b), *то она имеет почти всюду в этом интервале конечную производную* $f'(x)$.

Пусть *) E — множество, на котором $D_+f < D^+f$. Прежде всего мы покажем, что $m_e(E) = 0$.

Пусть u, v — рациональные числа и $E(u, v)$ — множество, на котором

$$D_+f < u < v < D^+f.$$

E есть сумма всех множеств $E(u, v)$ $(u < v)$. Следовательно, достаточно доказать, что $m_e\{E(u, v)\} = 0$ для любой пары u, v.

Предположим, в противоположность этому, что одно из множеств $E(u, v)$ имеет положительную внешнюю меру, скажем, μ. Каждая точка x этого множества является левым концом сколь

*) Это доказательство принадлежит Райхману и Саксу; см. Rajchman et Saks [1].

угодно малых интервалов $(x, x+h)$, для которых

$$f(x+h)-f(x)<hu.$$

Следовательно (лемма 2), существует такой конечный набор неперекрывающихся интервалов $(x, x+h)$, что их сумма S покрывает часть E' множества $E(u, v)$ с внешней мерой $m_e(E')>\mu-\varepsilon$ и что $\sum_1 h<\mu+\varepsilon$, где $\sum_1$ обозначает суммирование по этим интервалам. Очевидно,

$$\sum_1 \{f(x+h)-f(x)\}<u\sum_1 h<u(\mu+\varepsilon).$$

Но каждая точка множества E' служит левым концом интервалов $(x, x+k)$, для которых

$$f(x+k)-f(x)>kv,$$

так что, в силу леммы 3, можно найти конечное число неперекрывающихся интервалов $(x, x+k)$, лежащих в S, сумма которых имеет внешнюю меру, бо́льшую $m_e(E')-\varepsilon>\mu-2\varepsilon$. Если $\sum_2$ обозначает суммирование по этим интервалам, то

$$\sum_2 \{f(x+k)-f(x)\}>v\sum_2 k>v(\mu-2\varepsilon).$$

Так как $f(x)$ не убывает и интервалы $(x, x+k)$ лежат в интервалах $(x, x+h)$, то

$$\sum_2 \{f(x+k)-f(x)\}\leqslant \sum_1 \{f(x+h)-f(x)\}.$$

Следовательно, $v(\mu-2\varepsilon)<u(\mu+\varepsilon)$, чего не может быть, если ε достаточно мало. Таким образом, $f'_+(x)$ существует почти всюду. Подобным же образом $f'_-(x)$ существует почти всюду.

Такое же рассуждение можно провести, взяв D^- вместо D^+: каждая точка множества E' служит правым концом сколь угодно малых интервалов $(x-k, x)$, для которых $f(x)-f(x-k)>kv$, и, поступая, как выше, мы приходим к заключению, что почти всюду $D_+f\geqslant D^-f$, т.е. почти всюду $f'_+(x)\geqslant f'_-(x)$. Так же можно установить обратное неравенство, что и завершает доказательство.

11.4.3. Существует более общая теорема о множестве, на котором может иметь место неравенство $f'_-(x)\neq f'_+(x)$: результат не зависит от того, монотонна ли функция.

Множество точек, в которых правая и левая производные какой-либо функции существуют и различны, конечно или счетно.

Пусть E — множество, на котором $f'_-(x)<f'_+(x)$. Занумеруем все рациональные числа в последовательность $r_1, r_2, \ldots$ Если x — точка множества E, то существует такой номер k, что

$$f'_-(x)<r_k<f'_+(x);$$

будем считать, что k — наименьший из таких номеров. Далее, существует такой номер m, что $r_m<x$ и что при $r_m<\xi<x$

$$\frac{f(\xi)-f(x)}{\xi-x}<r_k;$$

будем считать, что m — наименьший из таких номеров. Наконец, существует такой номер n, что $r_n > x$ и что при $x < \xi < r_n$

$$\frac{f(\xi)-f(x)}{\xi-x} > r_k;$$

будем считать, что n — наименьший из таких номеров. Из выбора m и n следует, что

$$f(\xi)-f(x) > r_k(\xi-x) \qquad (r_m < \xi < r_n;\ \xi \neq x). \tag{1}$$

Итак, каждой точке x множества E отвечает вполне определенная тройка натуральных чисел (k, m, n). При этом различным точкам отвечают различные тройки; действительно, если точкам x_1 и x_2 отвечает одна и та же тройка, то, полагая в неравенстве (1) $x=x_1$, $\xi=x_2$, мы видим, что $f(x_2)-f(x_1) > r_k(x_2-x_1)$, полагая же $x=x_2$, $\xi=x_1$, получаем обратное неравенство.

Так как множество троек (k, m, n) счетно, то из этого следует, что множество E конечно или счетно. Подобным же образом множество, на котором $f'_+(x) < f'_-(x)$, конечно или счетно, что и завершает доказательство теоремы.

Поскольку мера счетного множества равна нулю, этой теоремой можно воспользоваться для того, чтобы закончить другим способом доказательство теоремы предыдущего параграфа.

11.5. Интегралы. Функция, являющаяся неопределенным интегралом Лебега от другой функции, называется *интегралом.*

Интеграл непрерывен. Действительно, если $F(x)$ — интеграл от $f(x)$, то

$$F(x+h)-F(x) = \int_x^{x+h} f(t)\,dt,$$

правая же часть, согласно теореме § 10.7.3. (V), стремится к нулю вместе с h.

Интеграл положительной функции есть неубывающая функция. Действительно, если $f(x) \geqslant 0$ и $h > 0$, то

$$F(x+h)-F(x) = \int_x^{x+h} f(t)\,dt \geqslant 0.$$

Интеграл есть функция ограниченной вариации. Действительно, пусть $F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)\,dt$. Положим $f_1(x) = f(x)$, если $f(x) \geqslant 0$, и $f_1(x) = 0$, если $f(x) < 0$. Тогда $f_1(x) \geqslant 0$, $f_2(x) = f_1(x) - f(x) \geqslant 0$ и

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f_1(t)\,dt - \int_a^x f_2(t)\,dt,$$

так что $F(x)$ есть разность двух ограниченных неубывающих функций.

11.5.1. Дифференцирование неопределенного интеграла. Пусть функция $f(x)$ интегрируема в интервале (a, b), и пусть

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt.$$

Так как функция $F(x)$ имеет ограниченную вариацию, то она почти всюду имеет конечную производную $F'(x)$. Нашей ближайшей целью является доказательство того, что почти всюду $F'(x)=f(x)$.

11.5.2. Доказательство основывается на следующей лемме.

Если функция $\varphi(x)$ интегрируема и $\int_a^x \varphi(t)\,dt=0$ для любого значения x в интервале (a, b), то $\varphi(x)=0$ почти всюду в этом интервале.

Если это не так, то по крайней мере одно из неравенств $\varphi(x)>0$, $\varphi(x)<0$ имеет место на множестве положительной меры. Пусть, например, это первое неравенство. Всякое множество положительной меры содержит замкнутое множество положительной меры; действительно, его дополнение может быть заключено в открытое множество, мера которого меньше длины интервала (a, b). Таким образом, $\varphi(x)>0$ на некотором замкнутом множестве E положительной меры.

Но интеграл от φ по любому интервалу есть нуль. Следовательно (§ 10.7.1), и интеграл по любому открытому множеству есть нуль. Следовательно, и интеграл по любому замкнутому множеству есть нуль и, в частности, $\int_E \varphi(x)\,dx=0$. Следовательно (§ 10.7.3), $\varphi(x)=0$ почти всюду на E, что противоречит определению E. Этим лемма доказана.

11.5.3. *Если функция $f(x)$ ограничена и $F(x)$ есть ее неопределенный интеграл, то почти всюду $F'(x)=f(x)$.*

Пусть $|f(x)|\leqslant M$. Тогда

$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h}\right|=\left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt\right|\leqslant M$$

и почти всюду $\lim\limits_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=F'(x)$. Применяя теорему об ограниченной сходимости*), мы видим, что при $h\to 0$

$$\int_a^x \frac{F(t+h)-F(t)}{h}\,dt\to\int_a^x F'(t)\,dt.$$

*) Чтобы применить эту теорему в том виде, в каком она изложена в § 10.5, мы берем какую-нибудь стремящуюся к нулю *последовательность* значений h. То же относится к следующему параграфу.

Но левая часть равна

$$\frac{1}{h}\int\limits_{a+h}^{x+h} F(t)\,dt - \frac{1}{h}\int\limits_{a}^{x} F(t)\,dt = \frac{1}{h}\int\limits_{x}^{x+h} F(t)\,dt - \frac{1}{h}\int\limits_{a}^{a+h} F(t)\,dt,$$

и так как функция F непрерывна, то эта разность стремится к $F(x)-F(a)$. Следовательно,

$$\int\limits_{a}^{x} F'(t)\,dt = F(x) - F(a), \tag{1}$$

т. е.

$$\int\limits_{a}^{x} \{F'(t) - f(t)\}\,dt = 0 \tag{2}$$

для всех значений x. В силу леммы из этого следует, что $F'(x) = f(x)$ почти всюду.

11.5.4. Чтобы распространить теорему на неограниченные функции, мы докажем еще одну лемму.

Если функция $\varphi(x)$ непрерывна и не убывает в интервале (a, b), то производная $\varphi'(x)$ интегрируема и

$$\int\limits_{a}^{b} \varphi'(x)\,dx \leqslant \varphi(b) - \varphi(a).$$

Так как $\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h} \geqslant 0$ и при $h \to 0$ это отношение почти всюду стремится к $\varphi'(x)$, то, в силу теоремы Фату (§ 10.8.1),

$$\lim_{\overline{h \to a}} \int\limits_{a}^{b} \frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}\,dx \geqslant \int\limits_{a}^{b} \varphi'(x)\,dx.$$

Но функция φ непрерывна. Следовательно, левая часть равна $\varphi(b)-\varphi(a)$ (см. предыдущее доказательство), что и завершает доказательство.

11.5.5. $F'(x) = f(x)$ *почти всюду для всякой интегрируемой функции* $f(x)$.

Как обычно, мы можем считать, что $f(x) \geqslant 0$. Мы определяем $\{f(x)\}_n$, как в § 10.7. Так как $f(t) - \{f(t)\}_n \geqslant 0$, то функция $\int\limits_{a}^{x} [f(t) - \{f(t)\}_n]\,dt$ не убывает, и потому ее производная неотрицательна. Следовательно,

$$\frac{d}{dx}\left\{\int\limits_{a}^{x} f(t)\,dt\right\} \geqslant \frac{d}{dx}\left\{\int\limits_{a}^{x} \{f(t)\}_n\,dt\right\}$$

всюду, где эти производные существуют. Следовательно (§ 11.5.3), $F'(x) \geqslant \{f(x)\}_n$ почти всюду. Заставляя n стремиться к бесконечности, мы видим, что почти всюду $F'(x) \geqslant f(x)$. Из этого следует, что

$$\int_a^b F'(x)\,dx \geqslant \int_a^b f(x)\,dx.$$

Но из только что доказанной леммы следует обратное неравенство. Таким образом, имеет место равенство, т. е.

$$\int_a^b \{F'(x) - f(x)\}\,dx = 0.$$

Так как подынтегральная функция неотрицательна, то она почти всюду равна нулю. Этим теорема доказана.

11.6. Лебеговское множество. Предыдущая теорема была следующим образом обобщена Лебегом.

Если функция $f(x)$ интегрируема, то для всех значений x, не принадлежащих некоторому множеству меры нуль, и всех значений α

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - \alpha|\,dt = |f(x) - \alpha|.$$

Другими словами, $|f(x) - \alpha|$ есть производная своего неопределенного интеграла для всех значений α и почти всех значений x.

Если бы значение α было фиксированным, то тут нечего было бы доказывать: поскольку функция $|f(x) - \alpha|$ интегрируема, равенство следовало бы из предыдущей основной теоремы.

Рассмотрим сначала все рациональные значения α, занумеровав их в последовательность $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ Множества, на которых доказываемая формула не верна при $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \ldots$, все имеют меру нуль, так что и их сумма имеет меру нуль. Следовательно, $|f(x) - \alpha|$ есть производная своего неопределенного интеграла при всех рациональных значениях α во всех точках x, не принадлежащих некоторому множеству E меры нуль.

Пусть теперь x — любая точка, не принадлежащая E, α — любое иррациональное число и β — близкое к нему рациональное число. Так как $||f(t) - \alpha| - |f(t) - \beta|| \leqslant |\beta - \alpha|$, то

$$\left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - \alpha|\,dt - \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - \beta|\,dt \right| \leqslant |\beta - \alpha|.$$

Но $\left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - \beta|\,dt - |f(x) - \beta| \right| \leqslant \varepsilon$, если $|h| \leqslant h_0\ (\beta, \varepsilon)$.

Следовательно,

$$\left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h}|f(t)-\alpha|\,dt-|f(x)-\alpha|\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h}|f(t)-\alpha|\,dt-\frac{1}{h}\int_x^{x+h}|f(t)-\beta|\,dt\right|+$$

$$+\left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h}|f(t)-\beta|\,dt-|f(x)-\beta|\right|+\Big||f(x)-\beta|-|f(x)-\alpha|\Big|\leqslant$$

$$\leqslant|\beta-\alpha|+\varepsilon+|\beta-\alpha|,$$

правую же часть можно сделать сколь угодно малой, выбрав соответствующим образом сначала β, а затем ε. Таким образом, во всякой точке x, не принадлежащей к E, $|f(x)-\alpha|$ есть производная своего неопределенного интеграла и при всех иррациональных значениях α. Этим теорема доказана.

Полагая, в частности, $\alpha=f(x)$, мы видим, что при $h\to 0$

$$\int_0^h|f(x+t)-f(x)|\,dt=o(h)$$

для почти всех значений x. Множество значений x, для которых имеет место это соотношение, называется *лебеговским множеством.*

Лебеговскому множеству принадлежат, конечно, все точки непрерывности.

Значение лебеговского множества состоит в том, что многие теоремы, доказанные ранее для точек непрерывности, оказались верными и для всех точек лебеговского множества и, таким образом, верными почти всюду. Примеры будут даны в главе, посвященной рядам Фурье.

Заметим в заключение, что если мы опустим в формуле знак абсолютной величины, то α исчезнет и теорема сведется к теореме предыдущего параграфа.

11.7. Абсолютно непрерывные функции. *Функция $f(x)$ называется абсолютно непрерывной в интервале (a, b), если для всякого ε можно найти такое δ, что*

$$\sum_{\nu=1}^{n}|f(x_\nu+h_\nu)-f(x_\nu)|\leqslant\varepsilon$$

для любых неперекрывающихся интервалов $(x_1, x_1+h_1), \ldots, (x_n, x_n+h_n)$, у которых $\sum h_\nu\leqslant\delta$.

Абсолютно непрерывная функция непрерывна, так как в качестве предыдущей последовательности интервалов можно взять последовательность, составленную из одного интервала.

Абсолютно непрерывная функция имеет ограниченную вариацию. Действительно, ее полная вариация в любом интервале длины δ не превосходит ε, вследствие чего ее полная вариация в интервале (a, b) не превосходит $(b-a)\,\varepsilon/\delta$.

Существуют, однако, непрерывные функции ограниченной вариации, не являющиеся абсолютно непрерывными. Пример такой функции будет дан в § 11.7.2.

11.7.1. *Для того чтобы функция была интегралом, необходимо и достаточно, чтобы она была абсолютно непрерывна.*

Если $F(x)$ — интеграл от $f(x)$, то

$$\sum_{\nu=1}^{n} |F(x_\nu+h_\nu)-F(x_\nu)| \leqslant \sum_{\nu=1}^{n} \int_{x_\nu}^{x_\nu+h_\nu} |f(x)|\,dx = \int_E |f(x)|\,dx,$$

где E — сумма интервалов $(x_\nu, x_\nu+h_\nu)$. Согласно теореме § 10.7.3 (V), правая часть стремится к нулю вместе с $\sum h_\nu$, как этого требует определение предыдущего параграфа. Следовательно, функция $F(x)$ абсолютно непрерывна.

Для доказательства обратного утверждения нам нужна следующая лемма.

Если функция $\varphi(x)$ абсолютно непрерывна и почти всюду $\varphi'(x)=0$, то $\varphi(x)$ есть постоянная.

Пусть E — множество, на котором $\varphi'(x)=0$. Каждая точка x из E является левым концом сколь угодно малых интервалов $(x, x+h)$, для которых

$$|\varphi(x+h)-\varphi(x)| < \varepsilon h.$$

В силу лемм § 11.4.1 мы можем найти конечное число неперекрывающихся интервалов $(x, x+h)$, которые покрывают все множество E, за исключением некоторой его части с мерой, меньшей δ, и следовательно, весь интервал (a, b), за исключением некоторой его части с мерой, меньшей δ.

Пусть $x_1, x_2, \ldots$ — концы выбранных интервалов, и пусть $\sum_1$ обозначает суммирование по этим интервалам, а $\sum_2$ — суммирование по дополнительным интервалам. Тогда

$$|\varphi(b)-\varphi(a)| \leqslant \sum\nolimits_1 |\varphi(x_{\nu+1})-\varphi(x_\nu)| + \sum\nolimits_2 |\varphi(x_{\nu+1})-\varphi(x_\nu)|.$$

Но

$$\sum\nolimits_1 |\varphi(x_{\nu+1})-\varphi(x_\nu)| < \varepsilon \sum\nolimits_1 (x_{\nu+1}-x_\nu) \leqslant \varepsilon(b-a),$$

а

$$\sum\nolimits_2 |\varphi(x_{\nu+1})-\varphi(x_\nu)|$$

стремится к нулю вместе с δ (в силу определения абсолютной непрерывности), так как $\sum_2 (x_{\nu+1}-x_\nu) < \delta$. Таким образом, переходя к пределу при $\delta \to 0$, мы видим, что

$$|\varphi(b)-\varphi(a)| \leqslant \varepsilon(b-a),$$

откуда следует, благодаря произвольности ε, что $\varphi(b)=\varphi(a)$. Подобным же образом $\varphi(x)=\varphi(a)$ при любом значении x.

Пусть теперь $F(x)$ — абсолютно непрерывная функция. Так как она непрерывна и имеет ограниченную вариацию, то мы можем представить ее в виде $F(x)=F_1(x)-F_2(x)$, где $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — неубывающие непрерывные функции. В силу леммы § 11.5.4, производные $F_1'(x)$ и $F_2'(x)$ интегрируемы, и, следовательно, такова же производная $F'(x)$. Рассмотрим функцию $\int\limits_a^x F'(t)\,dt$. Она абсолютно непрерывна, и, следовательно, такова же функция

$$\varphi(x)=F(x)-\int\limits_a^x F'(t)\,dt.$$

Но $\varphi'(x)=0$ почти всюду, так что, в силу леммы, $\varphi(x)$ есть постоянная. Таким образом,

$$F(x)-\int\limits_a^x F'(t)\,dt=F(a),$$

т. е. $F(x)$ есть интеграл от $F'(x)$.

11.7.2. Неубывающая непрерывная функция, не являющаяся интегралом*). Такую функцию можно построить, пользуясь канторовым троичным множеством (§ 10.2.9.1).

Пусть a_n принимает значение 0, 2, и пусть $b_n=\frac{1}{2}a_n$, так что b_n всегда есть 0 или 1. Если $x=0, a_1a_2a_3\ldots(3)$ — точка канторова множества E, то мы полагаем, пользуясь двоичными дробями:

$$f(x)=0, b_1b_2b_3\ldots(2).$$

На концах интервала $\delta_{p,k}$ функция $f(x)$ принимает значения

$$0, b_1\ldots b_m0111\ldots(2), \qquad 0, b_1\ldots b_m1000\ldots(2),$$

которые равны между собой. Мы определяем функцию $f(x)$ в интервале $\delta_{p,k}$, полагая ее равной ее значению на концах этого интервала.

$f(x)$ есть неубывающая функция. Так как на интервалах множества CE функция $f(x)$ постоянна, то при доказательстве можно ограничиться рассмотрением точек множества E. Пусть

$$x'=0, a_1'a_2'\ldots(3), \qquad x''=0, a_1''a_2''\ldots(3)$$

*) Подробности об этой функции: Hille and Tamarkin [1].

— две такие точки, и пусть $x'' > x'$. Тогда существует такой номер n, что $a'_m = a''_m$ при $m < n$, но $a'_n < a''_n$, и ясно, что

$$f(x') = 0, b'_1 \ldots b'_{n-1} b'_n \ldots (2) \leqslant 0, b''_1 \ldots b''_{n-1} b''_n \ldots (2) = f(x'').$$

$f(x)$ есть непрерывная функция. Мы должны доказать, что $f(x') \to f(x)$, когда $x' \to x$, и опять-таки можно ограничиться рассмотрением точек x, x' из E. Пусть

$$x = 0, a_1 a_2 \ldots (3), \quad x' = 0, a'_1 a'_2 \ldots (3).$$

Если $x' \to x$, то существует такая стремящаяся к бесконечности функция $n = n(x')$, что $a'_m = a_m$ при $m < n$, и мы видим, что

$$f(x) - f(x') = 0, 0 0 \ldots 0 b_n \ldots - 0, 0 0 \ldots b'_n \ldots \to 0.$$

Однако $\int\limits_0^1 f'(x)\,dx \neq f(1) - f(0)$. Действительно, правая часть равна единице, так как

$$f(1) = 0, 111 \ldots (2) = 1, \quad f(0) = 0;$$

левая же часть равна нулю, так как функция $f(x)$ постоянна в интервалах $\delta_{p,k}$, вследствие чего $f'(x) = 0$ во всех этих интервалах, т. е. почти всюду.

Таким образом, функция $f(x)$ не является интегралом своей производной и, значит, не является абсолютно непрерывной. Последнее легко усмотреть и непосредственно. Рассмотрим сумму

$$\sum |f(\beta_k) - f(\alpha_k)|,$$

распространенную на интервалы (α_k, β_k), которые сохраняются после p-го шага, т. е. после удаления интервалов $\delta_{p,k}$. Она равна

$$\sum \{f(\beta_k) - f(\alpha_k)\} = f(1) - f(0) = 1.$$

Но сумма $\sum (\beta_k - \alpha_k) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{2}{9} - \ldots - \frac{2^{p-1}}{3^p} = \left(\frac{2}{3}\right)^p$ стремится к нулю, когда $p \to \infty$. Следовательно, функция $f(x)$ не является абсолютно непрерывной.

11.8. Интегрирование производной. Формула

$$\int\limits_a^x f'(t)\,dt = f(x) - f(a) \qquad (a \leqslant x \leqslant b) \tag{1}$$

может оказаться неверной не только для функции, имеющей производную почти всюду, но и для функции, имеющей производную всюду в интервале (a, b). Это может объясняться двумя обстоятельствами. Возьмем, например, функцию

$$f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x^2} \quad (x \neq 0), \qquad f(0) = 0,$$

уже рассмотренную в § 10.7. Для нее

$$f'(x)=2x\sin\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}\quad(x\neq 0),\qquad f'(0)=0,$$

так что производная $f'(x)$ существует всюду; однако, как мы видели в § 10.7, она не интегрируема по Лебегу, вследствие чего формула (1) не имеет смысла в лебеговской теории.

Если мы представим себе функцию, у которой особенности такого рода распределены по всему интервалу, то мы получим некоторое представление о существе проблемы интегрирования производной. Проблема эта была решена при помощи интеграла Данжуа, представляющего собой неабсолютно сходящийся интеграл чрезвычайно общего типа. Рассмотрение его свойств завело бы нас слишком далеко. Результат состоит в том, что *формула* (1), *в которой интеграл есть интеграл Данжуа, верна для всякой функции со всюду конечной производной.*

Если предположить, что $f'(x)$ существует не всюду, а только почти всюду, то формула (1) может потерпеть еще более полное крушение. Интеграл слева может существовать как интеграл Лебега, но не быть равным правой части. Пример уже был приведен в § 11.7.2; это — пример, в котором $f'(x)=0$ почти всюду, но $f(x)$ не есть постоянная.

Поэтому, чтобы получить формулу (1) в теории Лебега, мы должны наложить на $f(x)$ или на $f'(x)$ дальнейшие ограничения. Здесь имеется несколько теорем различной степени трудности, зависящей от того, что предполагается. Общим для них является то, что производная $f'(x)$ предполагается существующий всюду. Пример § 11.7.2 показывает, что никакие условия, выполненные почти всюду, не являются достаточными.

11.8.1. *Формула* § 11.8 (1) *верна, если производная* $f'(x)$ *существует всюду и ограничена.*

Если $|f'(x)|\leqslant M$, то (*Ч. М.*, § 126) существует такое число θ, заключенное между 0 и 1, что

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right|=|f'(x+\theta h)|\leqslant M. \tag{1}$$

Таким образом, стоящее слева отношение ограниченно сходится к $f'(x)$, и доказательство может быть проведено так же, как доказательство формулы § 11.5.3 (1) (с $f(x)$ вместо $F(x)$).

Другое доказательство: из неравенства (1) следует, что

$$\sum_{\nu=1}^{n}|f(x_\nu+h_\nu)-f(x_\nu)|\leqslant M\sum_{\nu=1}^{n}h_\nu.$$

Таким образом, функция $f(x)$ абсолютно непрерывна, и остается сослаться на § 11.7.1.

11.8.2. *Формула § 11.8 (1) верна, если производная $f'(x)$ всюду конечна и интегрируема.*

Из этого, в частности, следует, что формула § 11.8 (1) верна, если $f(x)$ есть функция ограниченной вариации и производная $f'(x)$ всюду конечна. Действительно, если функция $f(x)$ имеет ограниченную вариацию, то производная $f'(x)$ интегрируема (см. § 11.5.4 и пример 12 ниже).

Нижеследующее доказательство совпадает в основном с доказательством Шлезингера и Плеснера *). Оно опирается на две леммы.

Лемма 1. *Пусть E — множество меры нуль, лежащее в интервале (a, b), и ε — положительное число. Существует такая неубывающая абсолютно непрерывная функция $\chi(x)$, что $\chi'(x) = +\infty$ на E и $\chi(b)-\chi(a)<\varepsilon$.*

Заключим E в такую последовательность открытых множеств $O_1, O_2, \ldots$, что $O_1 \supset O_2 \supset \ldots$, $m(O_n)<\varepsilon_n$ и $\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots=\varepsilon$. Пусть $f_n(x)$ — характеристическая функция множества O_n. Тогда

$$\int_a^b f_n(t)\,dt = m(O_n) < \varepsilon_n.$$

Положим $\varphi_n(x)=f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)$. При любом значении t последовательность чисел $\varphi_n(t)$ не убывает, и

$$\int_a^x \varphi_n(t)\,dt < \varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_n<\varepsilon.$$

Следовательно (§ 10.8.2), $\varphi_n(t)$ почти всюду стремится к некоторому конечному пределу $\varphi(t)$ и

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^x \varphi_n(t)\,dt = \int_a^x \varphi(t)\,dt.$$

Покажем, что функция $\chi(x)=\int_a^x \varphi(t)\,dt$ обладает требуемыми свойствами. Так как она является интегралом неотрицательной функции, то она абсолютно непрерывна и не убывает. Далее,

$$\chi(b)-\chi(a)=\int_a^b \varphi(t)\,dt<\varepsilon.$$

Наконец, на O_n

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f_\nu(t)\,dt = 1,$$

*) Schlesinger und Plessner, *Lebesguesche Integrale*, 166—174.

так что, если $\chi_n(x)=\int\limits_a^x \varphi_n(t)\,dt$, то на O_n

$$\chi_n'(x)=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{d}{dx}\int\limits_a^x f_\nu(t)\,dt=n.$$

Следовательно, на O_n

$$\frac{\chi(x+h)-\chi(x)}{h}\geqslant\frac{\chi_n(x+h)-\chi_n(x)}{h}>n-\delta,$$

если $|h|<h_0(\delta)$, так что $D\chi\geqslant n$ для каждого из четырех производных чисел функции χ. Поскольку каждая точка множества E принадлежит всем множествам O_n, из этого следует, что $\chi'(x)=+\infty$ на E.

Лемма 2. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна в интервале (a, b). Если почти всюду в этом интервале $D^+f\geqslant 0$ и нигде не имеет места равенство $D^+f=-\infty$, то $f(x)$ есть неубывающая функция.*

Достаточно доказать, что $f(b)\geqslant f(a)$, так как интервал (a, b) можно заменить любым меньшим интервалом.

Пусть E — множество, на котором $D^+f<0$. В силу леммы 1, существует такая неубывающая абсолютно непрерывная функция $\chi(x)$, что $\chi'(x)=+\infty$ на E и $\chi(b)-\chi(a)<\varepsilon$.

Положим $g(x)=f(x)+\chi(x)$. Так как $D^+g\geqslant D_+\chi+D^+f$, причем $D^+f\neq-\infty$, а $D_+\chi=+\infty$ на E, то $D^+g=+\infty$ на E. Далее, так как χ есть неубывающая функция, то на CE

$$D^+g\geqslant D^+f.$$

Таким образом, $D^+g\geqslant 0$ всюду, и, следовательно (§ 11.3, пример (IV)), $g(b)\geqslant g(a)$, т. е.

$$f(b)-f(a)\geqslant-\{\chi(b)-\chi(a)\}>-\varepsilon.$$

Ввиду произвольности ε из этого следует, что $f(b)\geqslant f(a)$.

11.8.3. Теперь мы можем доказать теорему, сформулированную в § 11.8.2. Пусть n — произвольное положительное число. Положим

$$g_n(x)=\min\{f'(x),\ n\},\qquad G_n(x)=\max\{f'(x),\ -n\}.$$

Так как функция $f'(x)$ интегрируема, то таковы же функции $g_n(x)$, $G_n(x)$, и $g_n(x)\leqslant f'(x)\leqslant G_n(x)$. Положим, далее,

$$f_n(x)=\int\limits_a^x g_n(t)\,dt,\qquad F_n(x)=\int\limits_a^x G_n(t)\,dt.$$

Очевидно,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty} F_n(x)=\int\limits_a^x f'(t)\,dt.$$

Но

$$D^+\{F_n(x)-f(x)\} \geqslant D^+F_n - D^+f,$$

последняя же разность почти всюду равна $G_n(x)-f'(x)$. Таким образом, почти всюду

$$D^+\{F_n(x)-f(x)\} \geqslant 0.$$

Кроме того, всюду

$$\frac{F_n(x+h)-F_n(x)}{h} \geqslant \frac{1}{h}\int\limits_x^{x+h}(-n)\,dt = -n,$$

так что $D^+F_n \geqslant -n$ и $D^+(F_n-f) \neq -\infty$. Следовательно (лемма 2), $F_n(x)-f(x)$ есть неубывающая функция, и, в частности,

$$F_n(x)-f(x) \geqslant F_n(a)-f(a) = -f(a).$$

Заставляя n стремиться к ∞, мы видим, что

$$\int\limits_a^x f'(t)\,dt \geqslant f(x)-f(a).$$

Аналогично, взяв $f_n(x)$ вместо $F_n(x)$, мы получаем обратное неравенство. Этим теорема доказана.

РАЗЛИЧНЫЕ ПРИМЕРЫ

1. При $x=\frac{1}{3}$ функция $f(x)$, определенная в § 11.2.3, имеет производную, равную $+\infty$.

2. Плотность множества E в точке x может быть определена как

$$\lim_{h\to\infty}\frac{m(EH)}{2h},$$

где H — интервал $(x-h,\ x+h)$.

Доказать, что плотность множества почти всюду на нем равна 1 и почти всюду вне его равна 0.

[Рассмотреть интеграл характеристической функции множества E.]

3. Пусть E — множество, лежащее в интервале $(0, 1)$. Показать, что если существует такое положительное число δ, что для всякого интервала (α, β)

$$m\{E(\alpha,\ \beta)\} \geqslant \delta(\beta-\alpha),$$

то $m(E)=1$.

4. Если при $h \to 0$

$$\int\limits_a^b |f(x+h)-f(x)| = o(h),$$

то функция $f(x)$ почти всюду равна некоторой постоянной.

$\left[\text{Рассмотреть} \int\limits_{x_1}^{x_2}\{f(x+h)-\ (x)\}\,dx\ ^*).\right]$

*) См. Titchmarsh [7], где, однако, доказательство излишне сложно.

5. Пусть α и β — положительные числа, и пусть $f(x)=x^{\alpha}\sin x^{-\beta}$ $(0<x\leqslant 1)$, $f(0)=0$. Доказать, что $f(x)$ имеет в интервале $(0, 1)$ ограниченную вариацию, если $\alpha>\beta$, и не имеет в нем ограниченной вариации, если $\alpha\leqslant\beta$.

6. Пусть функция $f(x)$, определенная при $0\leqslant x<1$, абсолютно непрерывна в любом интервале $(0, \xi)$ с $\xi<1$, и пусть ее полная вариация в интервале $(0, \xi)$ остается ограниченной, когда $\xi\to 1$. Показать, что $f(x)$ стремится к некоторому пределу, когда $x\to 1$, и что если мы примем значение $f(1)$ равным этому пределу, то функция $f(x)$ будет абсолютно непрерывной во всем интервале $(0, 1)$.

[Этот пример показывает, что различие между непрерывностью и ограниченностью вариации, с одной стороны, и абсолютной непрерывностью, с другой стороны, связано с целым интервалом и не может быть обнаружено по поведению функции в окрестности какой-либо отдельной точки.]

7. Теорема § 11.8.2 остается верной, если $f'(x)=+\infty$ на некотором счетном множестве.

8. Для того чтобы функция была выпуклой в интервале (a, b) в смысле § 5.3.1, необходимо и достаточно, чтобы она была интегралом некоторой ограниченной возрастающей функции в каждом интервале, внутреннем к интервалу (a, b).

9. Если функция $f(x)$ абсолютно непрерывна, то такова же при $p\geqslant 1$ функция $|f(x)|^p$.

10. Для того чтобы функция $f(x)$ почти всюду в интервале (a, b) была равна некоторой функции ограниченной вариации, необходимо и достаточно, чтобы при $h\to 0$ имело место соотношение

$$\int_a^b |f(x+h)-f(x)|\,dx=O(h)$$

(вне интервала (a, b) можно положить, например, $f(x)=0$) *).

[Если $f(x)$ — функция ограниченной вариации, то существуют такие положительные неубывающие и ограниченные в интервале (a, b) функции φ и ψ, что $f(x)=\varphi(x)-\psi(x)$. При $h>0$

$$\int_a^b |f(x+h)-f(x)|\,dx\leqslant\int_a^b \{\varphi(x+h)-\varphi(x)\}\,dx+\int_a^b \{\psi(x+h)-\psi(x)\}\,dx=$$

$$=\int_b^{b+h}\varphi(t)\,dt-\int_a^{a+h}\varphi(t)\,dt+\int_b^{b+h}\psi(t)\,dt-\int_a^{a+h}\psi(t)\,dt=O(h),$$

так что предыдущее условие выполнено.

Предположим теперь, что это условие выполнено, и положим

$$\varphi_n(x)=n\int_x^{x+\frac{1}{n}} f(t)\,dt.$$

*) Hardy and Littlewood [5], стр. 599—601 и [6], стр. 619.

Мы можем написать:

$$\int_a^b |\varphi_n(x+h)-\varphi_n(x)|\,dx = n\int_a^b dx\left|\int_{x+h}^{x+h+\frac{1}{n}} f(t)\,dt - \int_x^{x+\frac{1}{n}} f(t)\,dt\right| =$$

$$= n\int_a^b dx\left|\int_0^{\frac{1}{n}}\{f(x+t+h)-f(x+t)\}\,dt\right| \leqslant n\int_a^b dx\int_0^{\frac{1}{n}} |f(x+t+h)-f(x+t)|\,dt =$$

$$= n\int_0^{\frac{1}{n}} dt\int_a^b |f(x+t+h)-f(x+t)|\,dx = O(h).$$

С другой стороны, для всякого конечного набора неперекрывающихся интервалов $(x_\nu,\ x_\nu+h_\nu)$

$$\sum|\varphi_n(x_\nu+h_\nu)-\varphi_n(x_\nu)| = \sum\left|\int_{x_\nu}^{x_\nu+h_\nu}\varphi_n'(x)\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum\int_{x_\nu}^{x_\nu+h_\nu}|\varphi_n'(x)|\,dx \leqslant \int_a^b |\varphi_n'(x)|\,dx,$$

в силу же теоремы Фату и только что доказанного

$$\int_a^b |\varphi_n'(x)|\,dx \leqslant \varliminf \int_a^b \left|\frac{\varphi_n(x+h)-\varphi_n(x)}{h}\right| dx = O(1).$$

Таким образом,

$$\sum|\varphi_n(x_\nu+h_\nu)-\varphi_n(x_\nu)| = O(1).$$

Но $\varphi_n(x) \to f(x)$ почти всюду. Следовательно,

$$\sum|f(x_\nu+h_\nu)-f(x_\nu)| < A,$$

если ни одна из точек x_ν, $x_\nu+h_\nu$ не принадлежит некоторому множеству E меры нуль. Если a не принадлежит E, то мы выводим отсюда методом § 11.4, что $f(x)=f(a)+P(x)-N(x)$ на CE, где $P(x)$ и $N(x)$ ограничены и не убывают на CE. На E мы можем определить $P(x)$ как предел, к которому стремится $P(x')$, когда $x' \to x$ слева по множеству CE. После этого доказательство заканчивается без затруднений.]

11. В § 11.4 из существования $f'(x)$ в некоторой точке не следует существование $V'(x)$.

[Рассмотреть функцию $f(x)=x^2\cos x^{-\alpha}$ $(0<x\leqslant 1)$, $f(0)=0$; $1<\alpha<2$.]

12. В § 11.5.4 условие непрерывности функции $\varphi(x)$ может быть отброшено.

[Из имеющегося там доказательства видно, что если α и β — любые точки непрерывности, то

$$\int_\alpha^\beta \varphi'(x)\,dx \leqslant \varphi(\beta)-\varphi(\alpha).$$

Но точки непрерывности неубывающей функции расположены всюду плотно, и, переходя к пределу при $\alpha \to a+0$, $\beta \to b-0$ по множеству таких точек, мы видим, что

$$\int_a^b \varphi'(x)\,dx \leqslant \varphi(b-0)-\varphi(a+0).\Big]$$

13. Множество, состоящее из интервалов $\left(\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n}\right)$ $(n=1, 2, \ldots)$, имеет в точке $x=0$ плотность $1/4$.

14. Сходящийся ряд неубывающих функций можно почти всюду дифференцировать почленно *).

[Пусть

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)=s_n(x)\to s(x) \qquad (a\leqslant x\leqslant b).$$

$s(x)$ есть неубывающая функция, и при любом N

$$\frac{s(x+h)-s(x)}{h}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n(x+h)-u_n(x)}{h}\geqslant\sum_{n=1}^{N}\frac{u_n(x+h)-u_n(x)}{h}.$$

Из этого следует, что почти всюду

$$s'(x)\geqslant\sum_{n=1}^{N}u_n'(x).$$

Таким образом, ряд $\sum u_n'(x)$ почти всюду сходится к некоторой сумме $\varphi(x)$ и $\varphi(x)\leqslant s'(x)$.

Предположим, что множество $E(u, v)$, на котором $\varphi(x)<u<v<s'(x)$, имеет положительную меру μ. При любом n почти всюду на $E(u, v)$

$$s_n'(x)<u<v<s'(x),$$

так что при достаточно малом h

$$s_n(x+h)-s_n(x)<hu<hv<s(x+h)-s(x).$$

Эти неравенства можно написать для некоторого конечного набора попарно неперекрывающихся интервалов $(x, x+h)$ с суммой длин $l>\frac{1}{2}\mu>0$. Так как $s(x)-s_n(x)$ — неубывающая функция, то суммирование по этим интервалам дает:

$$l(v-u)<\sum\{s(x+h)-s_n(x+h)\}-\{s(x)-s_n(x)\}\leqslant$$
$$\leqslant\{s(b)-s_n(b)\}-\{s(a)-s_n(a)\}.$$

Заставляя n стремиться к ∞, мы приходим к неравенству $l\leqslant 0$, которое противоречит предыдущему неравенству $l>0$. Следовательно, $\varphi(x)=s'(x)$ почти всюду.]

15. Если производная $f'(x)$ всюду конечна и почти всюду равна некоторой непрерывной функции, то она равна ей всюду.

16. Показать, что

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{\delta}^{1}\frac{f(x+t)-f(x-t)}{t}\,dt,$$

где $f(x)$ — недифференцируемая функция Вейерштрасса, существует при любом значении x.

Показать, что для (непрерывной) функции $f(x)=0$ $(x\leqslant 0)$, $\frac{1}{\log\frac{1}{x}}$ $(x>0)$ этот предел при $x=0$ не существует.

[Этот предел существует почти всюду для всякой интегрируемой функции $f(x)$ **).]

---

*) Фубини; см. Rajchman et Saks [1].

**) См. Титчмарш. *Введение в теорию интегралов Фурье,* теорема 105.

ГЛАВА XII

ДАЛЬНЕЙШИЕ ТЕОРЕМЫ ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ ПО ЛЕБЕГУ

12.1. Интегрирование по частям. В двух предыдущих главах мы построили в нужном нам объеме общую теорию определенных и неопределенных интегралов. В этой главе мы встанем на несколько более практическую точку зрения и докажем несколько теорем, полезных при оперировании с интегралами.

12.1.1. Формула интегрирования по частям в теории Лебега, конечно, такова же, как и в обычной теории: если $G(x)$ — неопределенный интеграл от $g(x)$, то

$$\int_a^b f(x) g(x)\, dx = [f(x) G(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) G(x)\, dx.$$

Эта формула верна для всякой интегрируемой функции $g(x)$ *и всякого интеграла* $f(x)$.

Доказательство основано на том, что *произведение двух абсолютно непрерывных функций есть абсолютно непрерывная функция.* Пусть $\varphi(x)$ и $\psi(t)$ — функции, абсолютно непрерывные в интервале (a, b), и пусть M и M' — верхние грани их модулей $|\varphi(x)|$ и $|\psi(x)|$. Пусть $(x_1, x_1+h_1), \ldots, (x_n, x_n+h_n)$ — попарно неперекрывающиеся интервалы, лежащие в интервале (a, b). Тогда

$$\begin{aligned}
&\sum |\varphi_\nu(x_\nu+h_\nu)\psi(x_\nu+h_\nu) - \varphi(x_\nu)\psi(x_\nu)| = \\
&= \sum |\varphi(x_\nu+h_\nu)\{\psi(x_\nu+h_\nu) - \psi(x_\nu)\} + \psi(x_\nu)\{\varphi(x_\nu+h_\nu) - \varphi(x_\nu)\}| \leqslant \\
&\qquad \leqslant M \sum |\psi(x_\nu+h_\nu) - \psi(x_\nu)| + M' \sum |\varphi(x_\nu+h_\nu) - \varphi(x_\nu)|.
\end{aligned}$$

Две последние суммы стремятся к нулю вместе с $\sum h_\nu$, из чего и следует, что функция $\varphi(x)\psi(x)$ абсолютно непрерывна.

Так как в доказываемой формуле функции $f(x)$ и $G(x)$ абсолютно непрерывны, то такова же функция $f(x)G(x)$, и потому

$$\int_a^b \frac{d}{dx}\{f(x) G(x)\}\, dx = [f(x) G(x)]_a^b.$$

Но

$$\frac{d}{dx}\{f(x) G(x)\} = f'(x) G(x) + f(x) g(x)$$

всюду, где $f'(x)$ и $G'(x)$ существуют и $G'(x)=g(x)$, т. е. почти всюду. Этим формула доказана.

12.2. Аппроксимация интегрируемой функции. Следующая теорема часто бывает полезна.

Пусть $f(x)$ — функция, измеримая в конечном интеграле. Для любых двух положительных чисел δ и ε можно найти такую абсолютно непрерывную функцию $\varphi(x)$, что $|f-\varphi|<\delta$ всюду вне некоторого множества с мерой, меньшей ε.

Предположим сначала, что функция $f(x)$ ограничена. Без ущерба для общности можно считать, что $f(x)\geqslant 0$. Пусть n — такое натуральное число, что $f(x)<n\delta$. Разделим интервал изменения функции $f(x)$ точками

$$0,\ \delta,\ 2\delta,\ \ldots,\ n\delta,$$

обозначим через e_ν множество, на котором $\nu\delta\leqslant f(x)<(\nu+1)\delta$, и положим $\psi_\nu(x)=\nu\delta$ на e_ν, $\psi_\nu(x)=0$ вне e_ν. Очевидно, функция

$$\psi(x)=\psi_0(x)+\ldots+\psi_{n-1}(x)$$

отличается от $f(x)$ меньше, чем на δ.

Пусть E_ν — открытое множество, содержащее e_ν, с мерой, меньшей $m(e_\nu)+\frac{\varepsilon}{3n}$. Пусть S_ν — сумма такого конечного множества интервалов из E_ν, что $m(E_\nu-S_\nu)<\frac{\varepsilon}{3n}$. Положим $\varphi_\nu(x)=\nu\delta$ на S_ν и $\varphi_\nu(x)=0$ вне S_ν. Ясно, что $\varphi_\nu=\psi_\nu$ всюду вне некоторого множества меры, меньшей $2\varepsilon/(3n)$, и что функция φ_ν разрывна только в конечном числе точек, именно, в концевых точках интервалов из S_ν. Устраним эти разрывы, соединив график функции на концах интервалов с осью x прямолинейными отрезками, притом так, чтобы вся модификация произошла на множестве меры, меньшей $\varepsilon/(3n)$. Модифицированная функция φ'_ν абсолютно непрерывна и может отличаться от ψ_ν только на множестве меры, меньшей ε/n.

Положим $\varphi=\varphi'_0+\varphi'_1+\ldots+\varphi'_{n-1}$. Функция $\varphi(x)$ абсолютно непрерывна, и $\varphi(x)=\psi(x)$ всюду вне некоторого множества меры, меньшей ε. Таким образом, $\varphi(x)$ обладает требуемыми свойствами.

Если функция $f(x)$ не ограничена, то мы полагаем $\{f(x)\}_k=f(x)$, если $|f(x)|\leqslant k$, и $\{f(x)\}_k=0$, если $|f(x)|>k$. Пусть k — столь большое число, что $\{f(x)\}_k=f(x)$ вне множества меры, меньшей $\frac{1}{2}\varepsilon$. В силу уже доказанного, можно найти такую абсолютно непрерывную функцию $\varphi(x)$, что $|\{f(x)\}_k-\varphi(x)|<\delta$ вне множества меры, меньшей $\frac{1}{2}\varepsilon$. Функция $\varphi(x)$ обладает требуемыми свойствами.

Заметим, что если функция $f(x)$ ограничена, то функцию $\varphi(x)$ можно построить так, чтобы она была заключена между теми же границами, что и $f(x)$.

Если функция $f(x)$ интегрируема, то функцию $\varphi(x)$ можно построить так, чтобы она удовлетворяла еще и неравенству

$$\int_a^b |f(x)-\varphi(x)|\,dx<\eta, \tag{1}$$

где η — произвольно малое число. Действительно, если $|f(x)|\leqslant M$, то можно считать, что и $|\varphi(x)|\leqslant M$; тогда

$$\int_a^b |f(x)-\varphi(x)|\,dx\leqslant\delta(b-a)+2\varepsilon M,$$

чем в этом случае доказательство и заканчивается. Если функция $f(x)$ не ограничена, то мы определяем функции $\{f(x)\}_k$ так же, как выше, но k выбираем так, чтобы интеграл функции $|f(x)-\{f(x)\}_k|$ в интервале (a, b) был меньше $\frac{\eta}{2}$, а функцию $\varphi(x)$ строим так, чтобы всюду вне некоторого множества меры $\frac{\varepsilon}{2k}$ было выполнено неравенство $|\{f(x)\}_k-\varphi(x)|<\delta$ и всюду — неравенство $|\varphi(x)|\leqslant k$. Так как

$$\int_a^b |f(x)-\varphi(x)|\,dx\leqslant\int_a^b |f(x)-\{f(x)\}_k|\,dx+\int_a^b |\{f(x)\}_k-\varphi(x)|\,dx$$

и так как первый член справа меньше $\eta/2$, а второй не превосходит $\delta(b-a)+\varepsilon$, то правая часть меньше η, если $\delta(b-a)+\varepsilon<\eta/2$.

Пример. Если функция $f(x)$ интегрируема в интервале $(a-\varepsilon,\ b+\varepsilon)$, то

$$\lim_{n\to 0}\int_a^b |f(x+h)-f(x)|\,dx=0.$$

12.2.1. Замена независимого переменного. Здесь опять-таки формула обычна, но условия, в которых она верна, являются новыми.

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — интегрируемые функции, причем $g(x)\geqslant 0$, и пусть $G(x)$ — неопределенный интеграл от $g(x)$. Тогда

$$\int_a^b f(t)\,dt=\int_\alpha^\beta f\{G(x)\}\,g(x)\,dx,$$

где α и β таковы, что $a=G(\alpha)$, $b=G(\beta)$.

Функция, обратная к $t=G(x)$, значениями которой являются α и β, может не быть однозначной, так как функция $G(x)$ может быть постоянной в некоторых интервалах. Но если некоторому значению t отвечает более чем одно значение x, то такие значения x образуют замкнутый интервал и мы можем сделать обратную функцию однозначной, приняв за ее значение, например, левый конец этого интервала.

Заметим, прежде всего, что *если $F(x)$ и $G(x)$ — абсолютно непрерывные функции и функция $G(x)$ монотонна, то функция $F\{G(x)\}$ абсолютно непрерывна.* Действительно, так как функция F абсолютно непрерывна, то сумма

$$\sum |F\{G(x_\nu+h_\nu)\}-F\{G(x_\nu)\}|$$

стремится к нулю вместе с суммой

$$\sum |G(x_\nu+h_\nu)-G(x_\nu)|,$$

а последняя, в силу абсолютной непрерывности функции $G(x)$, стремится к нулю вместе с $\sum h_\nu$.

Из этого замечания следует, что если $F(x)$ и $G(x)$ — интегралы от $f(x)$ и $g(x)$, то $F\{G(x)\}$ имеет конечную производную при почти всех значениях x и

$$\int_\alpha^\beta \frac{d}{dx}[F\{G(x)\}]\,dx = F\{G(\beta)\}-F\{G(\alpha)\} = \int_a^b f(t)\,dt.$$

Доказываемая формула следует отсюда, если для почти всех значений x

$$\frac{d}{dx}[F\{G(x)\}] = f\{G(x)\}\,g(x). \tag{1}$$

Однако последнее не очевидно. Именно,

$$\frac{F\{G(x+h)\}-F\{G(x)\}}{h} = \frac{F\{G(x+h)\}-F\{G(x)\}}{G(x+h)-G(x)}\,\frac{G(x+h)-G(x)}{h},$$

и второй сомножитель справа стремится к $g(x)$ для почти всех значений x, а первый — к $f\{G(x)\}$ для почти всех значений $G(x)$. Трудность заключается в том, что исключительное множество значений $G(x)$, имеющее меру нуль, не обязательно соответствует множеству значений x, имеющему меру нуль.

Предположим сначала, что функция $f(x)$ ограничена, скажем, $|f(x)| \leqslant M$. Разобьем следующим образом интервал (α, β) на множества E_1, E_2, E_3, E_4: E_1 есть множество, на котором $G'(x) = g(x) > 0$ и первый сомножитель справа стремится к $f\{G(x)\}$; E_2 — множество, на котором $G'(x) = g(x) > 0$, но первый сомножитель справа не стремится к $f\{G(x)\}$; E_3 — множество, на котором $G'(x) = g(x) = 0$; E_4 — множество, на котором $G'(x) \neq g(x)$ или $G'(x)$ не существует. Очевидно, что на E_1 соотношение (1) выполнено. Оно выполнено и на E_3, так как там обе его части равны нулю; действительно,

$$\left|\frac{F\{G(x+h)\}-F\{G(x)\}}{h}\right|=\left|\frac{1}{h}\int\limits_{G(x)}^{G(x+h)} f(t)\,dt\right|\leqslant M\left|\frac{G(x+h)-G(x)}{h}\right|\to 0.$$

Далее, $m(E_4)=0$, и остается доказать, что $m(E_2)=0$.

Пусть $E_{2,n}$ — часть множества E_2, на которой $G'(x)>1/n$. Заключим соответствующее множество значений t в открытое множество O меры, меньшей заданного ε. Сопоставим с каждой точкой x множества $E_{2,n}$ такой интервал $(x,\ x+h_x)$, что $G(x+h_x)-G(x)>h_x/n$ и что интервал с концами $G(x)$, $G(x+h_x)$ лежит в O. В силу леммы 1 § 11.4.1 можно найти такое конечное число неперекрывающихся интервалов $(x,\ x+h_x)$, что

$$m_e(E_{2,n})<m(S)+\varepsilon=\textstyle\sum_S h_x+\varepsilon,$$

где S — сумма выбранных интервалов. Это меньше, чем

$$n\textstyle\sum_S\{G(x+h_x)-G(x)\}+\varepsilon\leqslant nm(O)+\varepsilon<(n+1)\,\varepsilon.$$

Следовательно, $m(E_{2,n})=0$, и так как E_2 есть внешнее предельное множество для множеств $E_{2,n}$, то $m(E_2)=0$.

Пусть, наконец, $f(x)$ — произвольная интегрируемая функция. Без ущерба для общности можно считать, что она неотрицательна. Определим для нее обычным образом функции $\{f(x)\}_n$. Для них теорема верна, и остается доказать, что

$$\lim\int\limits_{\alpha}^{\beta}[f\{G(x)\}]_n\,g(x)\,dx=\int\limits_{\alpha}^{\beta}f\{G(x)\}\,g(x)\,dx.$$

Но

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta}[f\{G(x)\}]_n\,g(x)\,dx=\int\limits_{a}^{b}\{f(t)\}_n\,dt\leqslant\int\limits_{a}^{b}f(t)\,dt,$$

так что нужное равенство получается из теоремы § 10.8.2 о сходимости (если $f\{G(x)\}=\infty$, $g(x)=0$, то произведение $f\{G(x)\}\,g(x)$ считается равным нулю).

12.3. Вторая теорема о среднем значении. *Если функция $f(x)$ интегрируема в интервале $(a,\ b)$, а функция $\varphi(x)$ положительна, ограничена и не возрастает, то*

$$\int\limits_{a}^{b}f(x)\,\varphi(x)\,dx=\varphi(a+0)\int\limits_{a}^{\xi}f(x)\,dx,$$

где ξ — некоторое число, заключенное между a и b.

Оставляя в стороне тривиальный случай, когда $\varphi(a+0)=\varphi(b-0)$, фиксируем какое-нибудь положительное число ε, меньшее чем $\varphi(a+0)-\varphi(b-0)$. Пусть x_1 — такая точка, что

$$\begin{aligned}\varphi(a+0)-\varphi(x) &< \varepsilon \qquad (a<x<x_1),\\ &\geqslant \varepsilon \qquad (x>x_1).\end{aligned}$$

Будем строить последовательно точки $x_2, x_3, \ldots$ такие, что

$$\begin{aligned}\varphi(x_{\nu-1}+0)-\varphi(x) &< \varepsilon \qquad (x_{\nu-1}<x<x_\nu),\\ &\geqslant \varepsilon \qquad (x>x_\nu),\end{aligned}$$

пока не придем к неравенству $\varphi(x_{n-1}+0)-\varphi(b-0)\leqslant\varepsilon$; в последнем случае положим $x_n=b$. Мы достигнем точки b через конечное число шагов потому, что вариация функции $\varphi(x)$ в каждом интервале $(x_{\nu-1}, x_\nu)$ не меньше ε.

Положим $\psi(x)=\varphi(x_\nu+0)$ при $x_\nu\leqslant x<x_{\nu+1}$. Ясно, что $0\leqslant\psi(x)-\varphi(x)<\varepsilon$ при всех значениях x, за возможным исключением значений $a=x_0, x_1, x_2, \ldots, b$, и что

$$\int_a^b \psi(x) f(x)\,dx=\sum_{\nu=0}^{n-1}\varphi(x_\nu+0)\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} f(x)\,dx.$$

Обозначим через m и M нижнюю и верхнюю грани функции $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$. Из леммы Абеля (§ 1.1.3.1) следует, что

$$m\varphi(a+0)\leqslant\int_a^b\psi(x)f(x)\,dx\leqslant M\varphi(a+0).$$

Но

$$\left|\int_a^b\psi(x)f(x)\,dx-\int_a^b\varphi(x)f(x)\,dx\right|\leqslant\varepsilon\int_a^b|f(x)|\,dx,$$

и, пользуясь произвольностью ε, мы получаем неравенства

$$m\varphi(a+0)\leqslant\int_a^b\varphi(x)f(x)\,dx\leqslant M\varphi(a+0).$$

Так как функция $F(x)$ непрерывна, то она принимает все значения, заключенные между m и M. Следовательно, в некоторой точке ξ она принимает значение

$$\frac{1}{\varphi(a+0)}\int_a^b\varphi(x)f(x)\,dx,$$

что и завершает доказательство.

Соответствующая формула для случая, когда функция $\varphi(x)$ положительна и не убывает, имеет вид

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx=\varphi(b-0)\int_\xi^b f(x)\,dx.$$

В случае произвольной монотонной функции $\varphi(x)$ существует такое число ξ, заключенное между a и b, что

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx=\varphi(a+0)\int_a^\xi f(x)\,dx+\varphi(b-0)\int_\xi^b f(x)\,dx.$$

Эта формула получается из предыдущих, если рассмотреть функцию $\varphi(x)-\varphi(a+0)$ или функцию $\varphi(x)-\varphi(b-0)$.

12.4. Лебеговские классы L^p*). Мы обозначаем через $L^p(a, b)$ с $p>0$ класс функций $f(x)$, определенных и измеримых в интервале (a, b), у которых степень $|f(x)|^p$ интегрируема в интервале (a, b). Если нет необходимости указывать, какой интервал имеется в виду, то мы обозначаем этот класс просто через L^p. Класс L^1 состоит из функций, интегрируемых в интервале (a, b), и обозначается также через L.

Подобным же образом определяются классы L^p для функций, заданных на произвольном измеримом множестве или в бесконечном интервале. Например, при $p>2$ функция $(1+x)^{-\frac{1}{2}}$ принадлежит к $L^p(0, \infty)$.

Если $f(x)$ принадлежит к L^p и $|g(x)|\leqslant|f(x)|$, то, очевидно, $g(x)$ также принадлежит к L^p.

Примеры. (I) Если (a, b) — конечный интервал, то всякая ограниченная функция принадлежит к $L^p(a, b)$ при любом p.

(II) Если (a, b) — конечный интервал и $f(x)$ принадлежит к $L^p(a, b)$, то $f(x)$ принадлежит и к $L^q(a, b)$ при $q<p$.

(III) Если $f(x)$ принадлежит к $L^p(0, \infty)$ и к $L^q(0, \infty)$, причем $p<q$, то $f(x)$ принадлежит и к $L^r(0, \infty)$ при $p<r<q$.

[Рассмотреть раздельно множества, где $|f(x)|\leqslant 1$ и $|f(x)|>1$.]

(IV) Сумма двух функций из L^p принадлежит к L^p.

[Действительно, $|f(x)+g(x)|^p\leqslant\max\{2^p|f(x)|^p, 2^p|g(x)|^p\}$.]

(V) Функция $\left\{x\log^2\frac{1}{x}\right\}^{-1}$ принадлежит к $L\left(0, \frac{1}{2}\right)$, но не принадлежит к $L^p\left(0, \frac{1}{2}\right)$ с $p>1$.

(VI) Функция $\left\{x^{\frac{1}{2}}(1+|\log x|)\right\}^{-1}$ принадлежит к $L^2(0, \infty)$, но не принадлежит к $L^p(0, \infty)$ ни при каком другом значении p.

12.4.1. Неравенство Шварца. *Если $f(x)$ и $g(x)$ принадлежат к L^2, то $f(x)g(x)$ принадлежит к L и*

$$\left|\int f(x)\,g(x)\,dx\right|\leqslant\left\{\int|f(x)|^2dx\int|g(x)|^2\,dx\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Интервал интегрирования может быть как конечным, так и бесконечным.

---

*) См., в частности, F. Riesz [2].

Так как $2|fg| \leqslant f^2+g^2$, то fg принадлежит к L. Следовательно, интеграл

$$\int \{\lambda f(x) + \mu g(x)\}^2 dx =$$
$$= \lambda^2 \int \{f(x)\}^2 dx + 2\lambda\mu \int f(x) g(x) dx + \mu^2 \int \{g(x)\}^2 dx$$

существует для всех значений λ и μ, и ясно, что он всегда неотрицателен. Но необходимое и достаточное условие неотрицательности трехчлена $a\lambda^2 + 2h\lambda\mu + b\mu^2$ при всех значениях λ и μ состоит в том, что $h^2 \leqslant ab$, $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, а это дает доказываемое неравенство.

Примеры. (I) Равенство в предыдущей теореме имеет место только в случае, когда $f(x)$ и $g(x)$ отличаются друг от друга почти всюду постоянным множителем.

(II) Если $f(x)$ и $g(x)$ принадлежат к L^p с $p>2$, то $f(x)g(x)$ принадлежит к $L^{\frac{1}{2}p}$.

12.4.2. Неравенство Гельдера. Это — обобщение неравенства Шварца.

Если $f(x)$ принадлежит к L^p с $p>1$, а $g(x)$ — к $L^{\frac{p}{p-1}}$, то $f(x)g(x)$ принадлежит к L и

$$\left|\int f(x) g(x) dx\right| \leqslant \left\{\int |f(x)|^p dx\right\}^{1/p} \left\{\int |g(x)|^{\frac{p}{p-1}} dx\right\}^{1-\frac{1}{p}}. \qquad (1)$$

Интервал интегрирования может быть как конечным, так и бесконечным.

Пусть E — множество, на котором $|g(x)| \leqslant |f(x)|^{p-1}$. Тогда на E

$$|f(x) g(x)| \leqslant |f(x)|^p,$$

так что на E функция $f(x)g(x)$ интегрируема. На дополнительном множестве $|f(x)| < |g(x)|^{\frac{1}{p-1}}$, и следовательно,

$$|f(x) g(x)| < |g(x)|^{\frac{p}{p-1}}.$$

Таким образом, функция $f(x)g(x)$ интегрируема и на CE, а потому и на всем рассматриваемом интервале.

Этим же рассуждением можно воспользоваться для того, чтобы получить неравенство (1), но с дополнительным множителем 2 справа. Положим

$$I = \int |f(x)|^p dx, \quad J = \int |g(x)|^{\frac{p}{p-1}} dx.$$

В силу предыдущего

$$\left|\int fg\,dx\right| \leqslant \int_E |fg|\,dx + \int_{CE} |fg|\,dx \leqslant \int_E |f|^p\,dx + \int_{CE} |g|^{\frac{p}{p-1}}\,dx \leqslant I + J. \tag{2}$$

Если оставить в стороне тривиальные случаи, когда $I = 0$ или $J = 0$, и заменить в этом неравенстве функции $f(x)$, $g(x)$ функциями

$$\left(\frac{J}{I}\right)^{\frac{p-1}{p^2}} f(x), \quad \left(\frac{I}{J}\right)^{\frac{p-1}{p^2}} g(x),$$

то его левая часть не изменится, а каждый член правой части превратится в $I^{\frac{1}{p}} J^{1-\frac{1}{p}}$. Следовательно,

$$\left|\int fg\,dx\right| \leqslant 2I^{\frac{1}{p}} J^{1-\frac{1}{p}}. \tag{3}$$

Неравенство (1) можно вывести из известного неравенства

$$x^m - 1 < m(x-1) \qquad (x > 1,\ 0 < m < 1). \tag{4}$$

Полагая в нем $x = \frac{a}{b}$ $(a > b)$, мы получаем после умножения на b неравенство

$$a^m b^{1-m} < b + m(a-b).$$

Если положить еще $m = \alpha$, $1 - m = \beta$, так что $\alpha + \beta = 1$, то неравенство примет вид

$$a^\alpha b^\beta < a\alpha + b\beta. \tag{5}$$

Благодаря своей симметрии неравенство (5) верно для любых двух различных положительных чисел a, b. При $a = b$ наступает равенство.

Пользуясь неравенством (5), мы видим, что если $F(x) \geqslant 0$, $G(x) \geqslant 0$, то

$$\int \left(\frac{F(x)}{\int F(t)\,dt}\right)^\alpha \left(\frac{G(x)}{\int G(t)\,dt}\right)^\beta dx \leqslant \int \left(\frac{\alpha F(x)}{\int F(t)\,dt} + \frac{\beta G(x)}{\int G(t)\,dt}\right) dx = \alpha + \beta = 1,$$

т. е.

$$\int \{F(x)\}^\alpha \{G(x)\}^\beta\,dx \leqslant \left\{\int F(x)\,dx\right\}^\alpha \left\{\int G(x)\,dx\right\}^\beta.$$

Наконец, полагая $\alpha = \frac{1}{p}$, $F(x) = |f(x)|^p$ и $G(x) = |g(x)|^{\frac{p}{p-1}}$, мы получаем неравенство (1) *).

Пример. Равенство может наступить только в случае, когда $|f(x)|^p$ и $|g(x)|^{\frac{p}{p-1}}$ отличаются друг от друга лишь почти всюду постоянным множителем.

---

*) Это доказательство принадлежит Харди (H a r d y [20]).

12.4.2.1. Неравенство Гельдера для сумм. Это — неравенство

$$|\sum a_n b_n| \leqslant (\sum |a_n|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum |b_n|^{\frac{p}{p-1}})^{1-\frac{1}{p}}.$$

Доказательство аналогично доказательству интегрального неравенства. Из неравенства § 12.4.2 (5) следует, что

$$\sum \left\{ \left(\frac{A_n}{\Sigma A_n}\right)^{\alpha} \left(\frac{B_n}{\Sigma B_n}\right)^{\beta} \right\} \leqslant \sum \left(\alpha \frac{A_n}{\Sigma A_n} + \beta \frac{B_n}{\Sigma B_n} \right) = \alpha + \beta = 1,$$

т. е.

$$\sum A_n^{\alpha} B_n^{\beta} \leqslant (\sum A_n)^{\alpha} (\sum B_n)^{\beta}.$$

Полагая здесь $\alpha = \frac{1}{p}$, $A_n = |a_n|^p$, $B_n = |b_n|^{\frac{p}{p-1}}$, мы и получаем доказываемое неравенство.

12.4.3. Неравенство Минковского. *Если $f(x)$ и $g(x)$ принадлежат к L^p с $p > 1$, то*

$$\left\{ \int |f(x) + g(x)|^p \, dx \right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant \left\{ \int |f(x)|^p \, dx \right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{ \int |g(x)|^p \, dx \right\}^{\frac{1}{p}}. \tag{1}$$

Действительно, в силу неравенства Гельдера,

$$\int |f+g|^p \, dx \leqslant \int |f| \cdot |f+g|^{p-1} \, dx + \int |g| \cdot |f+g|^{p-1} \, dx \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \int |f|^p \, dx \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \int |f+g|^p \, dx \right\}^{1-\frac{1}{p}} + \left\{ \int |g|^p \, dx \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \int |f+g|^p \, dx \right\}^{1-\frac{1}{p}},$$

и, деля обе части на $\left\{ \int |f+g|^p \, dx \right\}^{1-\frac{1}{p}}$, мы получаем неравенство (1).

Подобным же образом может быть доказано соответствующее неравенство для сумм:

$$(\sum |a_n + b_n|^p)^{1/p} \leqslant (\sum |a_n|^p)^{1/p} + (\sum |b_n|^p)^{1/p}. \tag{2}$$

12.4.4. Интеграл функции класса L^p. В предыдущей главе было показано, что функция является интегралом в том и только в том случае, если она абсолютно непрерывна. Существует и соответствующее условие, необходимое и достаточное для того, чтобы функция была интегралом некоторой функции класса L^p.

Функция $F(x)$ в том и только в том случае является интегралом некоторой функции класса $L^p(a, b)$ с $p > 1$, если сумма

$$\sum |F(x_\nu + h_\nu) - F(x_\nu)|^p h_\nu^{1-p},$$

взятая по любой системе попарно неперекрывающихся интервалов $(x_\nu, x_\nu + h_\nu)$, ограничена.

Теорема останется верной, если мы заменим слово «ограничена» словами «ограничена и стремится к нулю вместе с $\sum h_\nu$». В таком виде она верна и при $p=1$ и содержит как частный случай теорему об абсолютной непрерывности. При $p>1$ эти два условия, одно из которых кажется менее ограничительным, чем другое, равносильны.

Чтобы доказать необходимость условия, предположим, что

$$F(x)=F(a)+\int_a^x f(t)\,dt,$$

где $f(t)$ принадлежит к L^p. Тогда

$$|F(x_\nu+h_\nu)-F(x_\nu)|=\left|\int_{x_\nu}^{x_\nu+h_\nu} f(t)\,dt\right|\leqslant$$
$$\leqslant\left\{\int_{x_\nu}^{x_\nu+h_\nu}|f(t)|^p\,dt\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\int_{x_\nu}^{x_\nu+h_\nu}dt\right\}^{1-\frac{1}{p}}=h_\nu^{1-\frac{1}{p}}\left\{\int_{x_\nu}^{x_\nu+h_\nu}|f(t)|^p\,dt\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Следовательно,

$$\sum|F(x_\nu+h_\nu)-F(x_\nu)|^p h_\nu^{1-p}\leqslant\sum\int_{x_\nu}^{x_\nu+h_\nu}|f(t)|^p\,dt\leqslant\int_a^b|f(t)|^p\,dt.$$

Таким образом, условие действительно необходимо. Так как сумма $\sum\int_{x_\nu}^{x_\nu+h_\nu}|f(t)|^p\,dt$ стремится к нулю вместе с $\sum h_\nu$, то и усиленное условие необходимо.

Предположим теперь, что условие выполнено, и пусть M — верхняя грань указанных сумм. В силу неравенства Гельдера для сумм,

$$\sum|F(x_\nu+h_\nu)-F(x_\nu)|=\sum|F(x_\nu+h_\nu)-F(x_\nu)|h_\nu^{\frac{1}{p}-1}\cdot h_\nu^{1-\frac{1}{p}}\leqslant$$
$$\leqslant\left\{\sum|F(x_\nu+h_\nu)-F(x_\nu)|^p h_\nu^{1-p}\right\}^{\frac{1}{p}}\left(\sum h_\nu\right)^{1-\frac{1}{p}}\leqslant M^{\frac{1}{p}}\left(\sum h_\nu\right)^{1-\frac{1}{p}},$$

правая же часть стремится к нулю вместе с $\sum h_\nu$. Следовательно, функция $F(x)$ абсолютно непрерывна, т. е. является интегралом некоторой функции $f(t)$:

$$F(x)=F(a)+\int_a^x f(t)\,dt.$$

Остается доказать, что $f(t)$ принадлежит к L^p. Рассмотрим какую-нибудь последовательность подразделений интервала конечными системами точек $x_{m,1}, x_{m,2}, \ldots, x_{m,n}$ $(m=1, 2, \ldots)$, в которой

$$\lim_{m\to\infty}\max_\nu(x_{m,\nu+1}-x_{m,\nu})=0.$$

Если, например, речь идет об интервале $(0, 1)$, то можно взять $x_{m,\nu} = \frac{\nu}{2^m}$. Положим в интервале $x_{m,\nu} \leqslant x < x_{m,\nu+1}$

$$f_m(x) = \frac{F(x_{m,\nu+1}) - F(x_{m,\nu})}{x_{m,\nu+1} - x_{m,\nu}}.$$

Если точка x отлична от всех точек $x_{m,\nu}$ и в этой точке существует производная $F'(x)$, то при $x_{m,\nu} < x < x_{m,\nu+1}$

$$f_m(x) = \frac{F(x_{m,\nu+1}) - F(x)}{x_{m,\nu+1} - x} \frac{x_{m,\nu+1} - x}{x_{m,\nu+1} - x_{m,\nu}} + \frac{F(x_{m,\nu}) - F(x)}{x_{m,\nu} - x} \frac{x - x_{m,\nu}}{x_{m,\nu+1} - x_{m,\nu}} =$$
$$= \{F'(x) + \delta_1\} \frac{x_{m,\nu+1} - x}{x_{m,\nu+1} - x_{m,\nu}} + \{F'(x) + \delta_2\} \frac{x - x_{m,\nu}}{x_{m,\nu+1} - x_{m,\nu}} = F'(x) + \delta_3,$$

где $|\delta_3| \leqslant |\delta_1| + |\delta_2|$ и δ_1 и δ_2 стремятся к нулю, когда $x_{m,\nu+1} - x_{m,\nu} \to 0$. Следовательно,

$$\lim_{m\to\infty} f_m(x) = F'(x) = f(x)$$

почти всюду. А так как

$$\int_a^b |f_m(x)|^p\, dx = \sum |F(x_{m,\nu+1}) - F(x_{m,\nu})|^p (x_{m,\nu+1} - x_{m,\nu})^{1-p} \leqslant M,$$

то, в силу теоремы Фату (§ 10.8.1), $f(x)$ принадлежит к L^p и

$$\int_a^b |f(x)|^p\, dx \leqslant \varliminf \int_a^b |f_m(x)|^p\, dx \leqslant M.$$

12.5. Сходимость в среднем. При рассмотрении последовательности чисел, скажем, s_n, нам обычно приходится изучать поведение разности $s_n - s$ между s_n и с данным числом s. При рассмотрении последовательности функций, скажем, $f_n(x)$, часто представляет интерес не сама разность между $f_n(x)$ и данной функцией $f(x)$, а среднее значение этой разности. Последнее может быть определено различными способами. Если функции принадлежат классу L^p с $p \geqslant 1$, то рассматривают интеграл

$$\int_a^b |f_n(x) - f(x)|^p\, dx. \tag{1}$$

Если при $n \to \infty$ этот интеграл стремится к нулю, то говорят, что последовательность $f_1(x), f_2(x), \ldots$ сходится к $f(x)$ в среднем степени p.

Если интеграл

$$\int_a^b |f_m(x) - f_n(x)|^p\, dx \tag{2}$$

стремится к нулю, когда m и n независимо друг от друга стремятся к бесконечности, то мы говорим, что последовательность $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... сходится в среднем степени p. В это определение не входит какая-либо предельная функция $f(x)$.

Основная теорема *) теории утверждает, что *если последовательность $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... сходится в среднем степени p, то существует функция $f(x)$ класса L^p, однозначно определенная с точностью до множества меры нуль, к которой эта последовательность сходится в среднем степени p.*

Эта теорема аналогична «общему принципу сходимости», утверждающему, что если $s_m - s_n \to 0$, то существует такое число s, что $s_n \to s$.

Необходимо разъяснить, в каком смысле «единственна» предельная функция $f(x)$. Предположим, что мы нашли функцию $f(x)$, которая удовлетворяет поставленным условиям. Очевидно, что тогда этим условиям будет удовлетворять и всякая функция, равная $f(x)$ почти всюду. Таким образом, значение функции $f(x)$ не является определенным ни в какой отдельной точке, хотя весь комплекс ее значений в некотором смысле определен. Функция должна рассматриваться как представитель класса функций, каждые две из которых почти всюду равны между собой; при интегрировании все функции этого класса ведут себя одинаково.

Для конечного интервала при $p > 1$ теорема может быть доказана следующим образом. Каждому натуральному числу ν отвечает такое натуральное число n_ν, что

$$\int_a^b |f_m(x) - f_n(x)|^p\, dx < \frac{1}{3^\nu} \qquad (m \geqslant n_\nu,\ n \geqslant n_\nu).$$

В частности,

$$\int_a^b |f_{n_{\nu+1}}(x) - f_{n_\nu}(x)|^p\, dx < \frac{1}{3^\nu} \qquad (\nu = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Из этого неравенства следует, что мера множества E_ν, на котором $|f_{n_{\nu+1}}(x) - f_{n_\nu}(x)| > 2^{-\frac{\nu}{p}}$, меньше $\left(\frac{2}{3}\right)^\nu$. Таким образом, ряд

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |f_{n_{\nu+1}}(x) - f_{n_\nu}(x)|$$

(как показывает его сравнение с рядом $\sum 2^{-\frac{\nu}{p}}$) сходится, если x не принадлежит при некотором значении N множеству $E_{N+1} +$

*) Fischer [1], F. Riesz [1], [2]; W. H. Young and G. C. Young [2], где имеется несколько доказательств; и Hobson [1].

$+E_{N+2}+\ldots$ Поскольку мера этого множества стремится к нулю при $N\to\infty$, это значит, что указанный ряд сходится при почти всех значениях x. Поэтому и ряд

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\{f_{n_{\nu+1}}(x)-f_{n_\nu}(x)\}$$

сходится при почти всех значениях x, т. е. существует такая функция $f(x)$ (определенная почти всюду), что почти всюду

$$\lim_{\nu\to\infty} f_{n_\nu}(x)=f(x).$$

Эта функция $f(x)$ обладает требуемым свойством. Действительно, в силу теоремы Фату

$$\varliminf_{\nu\to\infty}\int_a^b |f_{n_\mu}(x)-f_{n_\nu}(x)|^p\,dx \geqslant \int_a^b |f_{n_\mu}(x)-f(x)|^p\,dx,$$

а так как

$$\int_a^b |f_{n_\mu}(x)-f_{n_\nu}(x)|^p\,dx<\varepsilon \qquad (\mu>\nu_0,\ \nu>\nu_0),$$

то

$$\int_a^b |f_{n_\mu}(x)-f(x)|^p\,dx\leqslant\varepsilon \qquad (\mu>\nu_0),$$

т. е.

$$\lim\int_a^b |f_{n_\mu}(x)-f(x)|^p\,dx=0.$$

Таким образом, последовательность $f_{n_1}(x)$, $f_{n_2}(x)$, $\ldots$ сходится в среднем к $f(x)$.

Далее, в силу неравенства Минковского

$$\left\{\int_a^b |f(x)-f_n(x)|^p\,dx\right\}^{1/p}\leqslant$$

$$\leqslant\left\{\int_a^b |f(x)-f_{n_\mu}(x)|^p\,dx\right\}^{1/p}+\left\{\int_a^b |f_{n_\mu}(x)-f_n(x)|^p\,dx\right\}^{1/p},$$

правая же часть, в силу уже доказанного, стремится к нулю, когда n и n_μ стремятся к бесконечности. Таким образом, и вся последовательность $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\ldots$ сходится в среднем к $f(x)$.

Предположим, наконец, что последовательность $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\ldots$ сходится в среднем к $f(x)$ и к $g(x)$. Тогда

$$\left(\int_a^b |f-g|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(\int_a^b |f-f_n|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_a^b |g-f_n|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\to 0.$$

Следовательно, левая часть равна нулю, т. е. $f(x)=g(x)$ почти всюду.

При $p=1$ доказательство упрощается, поскольку не нужно пользоваться неравенством Минковского.

12.5.1. То же доказательство применимо почти без изменений к бесконечному интервалу. Рассмотренные выше ряды сходятся почти всюду в интервале (a, b) при любом значении b, т. е. почти всюду в интервале (a, ∞). Теорема Фату также верна для бесконечного интервала; действительно, беря в § 10.8.1 в качестве E интервал (a, b), мы видим, что

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \underline{\lim} \int_a^b f_n(x)\,dx \leqslant \underline{\lim} \int_a^\infty f_n(x)\,dx,$$

и, заставляя b стремиться к бесконечности, получаем теорему Фату для интервала (a, ∞). После этого доказательство доводится до конца так же, как выше.

12.5.2. *В тех же условиях (как для конечного, так и для бесконечного интервала)*

$$\lim_{n\to\infty} \int |f_n(x)|^p\,dx = \int |f(x)|^p\,dx.$$

Действительно, в силу неравенства Минковского,

$$\left\{\int |f_n(x)|^p\,dx\right\}^{1/p} \leqslant \left\{\int |f(x)|^p\,dx\right\}^{1/p} + \left\{\int |f(x)-f_n(x)|^p\,dx\right\}^{1/p},$$

и

$$\left\{\int |f(x)|^p\,dx\right\}^{1/p} \leqslant \left\{\int |f_n(x)|^p\,dx\right\}^{1/p} + \left\{\int |f(x)-f_n(x)|^p\,dx\right\}^{1/p}.$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \left\{\int |f_n(x)|^p\,dx\right\}^{1/p} = \left\{\int |f(x)|^p\,dx\right\}^{1/p},$$

что и доказывает теорему.

12.5.3. *Пусть последовательность* $f_1(x), f_2(x), \ldots$ *сходится к* $f(x)$ *в среднем степени* p. *Если* $g(x)$ *принадлежит к* $L^{\frac{p}{p-1}}$, *то*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n(x)\,g(x)\,dx = \int f(x)\,g(x)\,dx. \tag{1}$$

Действительно,

$$\left|\int \{f_n(x)-f(x)\}\,g(x)\,dx\right| \leqslant \left\{\int |f_n(x)-f(x)|^p\,dx\right\}^{\frac{1}{p}} \left\{\int |g(x)|^{\frac{p}{p-1}}\right\}^{1-\frac{1}{p}},$$

правая же часть стремится к нулю.

В частности,

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt \tag{2}$$

для всех значений x *в рассматриваемом интервале.*

Действительно, функция $g(t)=1$ $(a\leqslant t\leqslant x)$, $=0\,(t>x)$ принадлежит к $L^{\frac{p}{p-1}}$.

Примеры. (I) Если $f_n(x)\to f(x)$ ограниченно в конечном интервале, то имеет место сходимость в среднем любой степени.

(II) Рассмотрим замкнутые интервалы $\left(0,\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2},1\right)$, $\left(0,\frac{1}{3}\right)$, $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$, $\left(\frac{2}{3},1\right)$, $\left(0,\frac{1}{4}\right)$ и т. д. Положим $f_n(x)=1$ в n-м интервале и $f_n(x)=0$ в остальной части интервала $(0, 1)$. Последовательность $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... сходится в интервале $(0, 1)$ к нулю в среднем любой степени, но не сходится к нулю ни при каком значении x.

(III) Если последовательность $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... сходится в среднем к $f(x)$ и $f_n(x)\to g(x)$ почти всюду, то $f(x)=g(x)$ почти всюду. [Воспользоваться теоремой Егорова.]

(IV) Если последовательность $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... сходится в среднем степени p к $f(x)$, а последовательность $g_1(x)$, $g_2(x)$, ...— в среднем степени $\frac{p}{p-1}$ к $g(x)$, то $\int f_n g_n\,dx\to\int fg\,dx$.

12.6. Повторные интегралы.

Соотношение

$$\int_a^b dx\int_\alpha^\beta f(x, y)\,dy=\int_\alpha^\beta dy\int_a^b f(x, y)\,dx, \tag{1}$$

установленное в § 1.8 для элементарных случаев, верно, вообще говоря, и в лебеговской теории. Его общее рассмотрение опирается, однако, на теорию двойного интеграла

$$\iint f(x, y)\,dx\,dy,$$

которая, в свою очередь, основана на теории двумерных точечных множеств. Поэтому детальное изучение вопроса завело бы нас слишком далеко.

Имеется, однако, специальный тип повторных интегралов, который охватывает много интересных случаев и может быть изучен средствами уже построенной теории.

Пусть функция $f(x)$ интегрируема по Лебегу в интервале (a, b), а функция $g(x)$ — в интервале (α, β), и пусть $k(x, y)$ — функция двух переменных, непрерывная или имеющая разрывы, описанные в § 1.8.2. Тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx\int_\alpha^\beta g(y)\,k(x, y)\,dy=\int_\alpha^\beta g(y)\,dy\int_a^b f(x)\,k(x, y)\,dx. \tag{2}$$

Предположим сначала, что функции $f(x)$ и $g(y)$ ограничены: $|f(x)|\leqslant M$, $|g(y)|\leqslant M$. Пусть $|k(x, y)|\leqslant K$.

Пусть $\varphi(x)$ — непрерывная функция, удовлетворяющая условию § 12.2 (1) и условию $|\varphi(x)|\leqslant M$, и пусть $\psi(y)$ — непрерывная функция, связанная таким же образом с функцией $g(y)$.

Обозначим левую часть равенства (2) через I и положим:

$$I' = \int_a^b \varphi(x)\,dx \int_\alpha^\beta \psi(y)\,k(x, y)\,dy.$$

Так как

$$I - I' = \int_a^b \{f(x) - \varphi(x)\}\,dx \int_\alpha^\beta g(y)\,k(x, y)\,dy + \\ + \int_a^b \varphi(x)\,dx \int_\alpha^\beta \{g(y) - \psi(y)\}\,k(x, y)\,dy,$$

то

$$|I - I'| \leqslant \int_a^b |f(x) - \varphi(x)|\,(\beta - \alpha)\,MK\,dx + (b - a)\,M\eta \leqslant \\ \leqslant MK(\beta - \alpha + b - a)\,\eta.$$

Подобным же образом, обозначив правую часть равенства (2) через J и положив

$$J' = \int_\alpha^\beta \psi(y)\,dy \int_a^b \varphi(x)\,k(x, y)\,dx,$$

мы видим, что $|J - J'|$ стремится к нулю вместе с η.

Но так как функция $\varphi(x)\,\psi(y)\,k(x, y)$ непрерывна или имеет лишь разрывы, описанные в § 1.8.2, то $I' = J'$. Следовательно, $I = J$.

Распространение теоремы на неограниченные функции мы оставляем читателю. Сначала следует предположить, что функции $f(x)$ и $g(x)$ положительны, и ввести, как обычно, функции $\{f(x)\}_n$ и $\{g(x)\}_n$.

12.6.1. *Если функция* $f(x)$ *интегрируема в интервале* $(0, 1)$, *а функция* $g(x)$ — *в интервале* $(0, 2)$, *то интеграл*

$$\int_0^1 f(x)\,g(x + t)\,dx$$

существует для почти всех значений t *в интервале* $(0, 1)$ *и представляет интегрируемую функцию от* t.

Достаточно рассмотреть случай, когда функции f и g положительны. Определим $\{f(x)\}_n$ как обычно и положим:

$$F_n(t) = \int_0^1 \{f(x)\}_n\,g(x + t)\,dx.$$

Этот интеграл существует для всех значений t, при фиксированном n функция $F_n(t)$ ограничена, и при каждом значении t она