является неубывающей функцией от n. Кроме того,

$$\int_0^1 F_n(t)\,dt=\int_0^1 dt\int_0^1 \{f(x)\}_n g(x+t)\,dx=\int_0^1 \{f(x)\}_n dx\int_0^1 g(x+t)\,dt, \qquad (1)$$

если обращение порядка интегрирования возможно.

Чтобы оправдать его, аппроксимируем функцию g непрерывной функцией ψ, как в предыдущем доказательстве, и положим:

$$\chi(t)=\int_0^1 \{f(x)\}_n \psi(x+t)\,dx.$$

В силу предыдущей теоремы

$$\int_0^1 \chi(t)\,dt=\int_0^1 \{f(x)\}_n\,dx\int_0^1 \psi(x+t)\,dt. \qquad (2)$$

Но

$$|F_n(t)-\chi(t)|\leqslant\int_0^1 \{f(x)\}_n\,|g(x+t)-\psi(x+t)|\,dx<n\eta,$$

так что левая часть равенства (1) отличается от левой части равенства (2) меньше, чем на $n\eta$. Подобным же образом и правые части этих равенств отличаются друг от друга меньше, чем на $n\eta$, и, заставляя η стремиться к нулю, мы получаем равенство (1).

Из (1) следует, что

$$\int_0^1 F_n(t)\,dt\leqslant\int_0^1 f(x)\,dx\int_0^2 g(y)\,dy,$$

и потому (§ 10.8.2), когда $n\to\infty$, $F_n(t)$ стремится к конечному пределу для почти всех значений t. Доказательство завершается теперь ссылкой на теорему § 10.8.2.

12.6.2. Повторные несобственные интегралы. *Пусть $f(x)$, $g(x)$ и $k(x, y)$ положительны и удовлетворяют условиям § 12.6 при всех значениях $b>a$ и $\beta>\alpha$. Тогда*

$$\int_a^\infty f(x)\,dx\int_\alpha^\infty g(y)\,k(x, y)\,dy=\int_\alpha^\infty g(y)\,dy\int_a^\infty f(x)\,k(x, y)\,dx, \qquad (1)$$

если только одна из частей этого равенства сходится.

Эта теорема аналогична теореме § 1.8.5, но имеющиеся там дополнительные условия являются теперь следствиями основных предположений.

Предположим, что сходится правая часть равенства (1). Так как

$$\int_a^X f(x)\,k(x, y)\,dx\leqslant\int_a^\infty f(x)\,k(x, y)\,dx \qquad (2)$$

и так как левая часть равенства (2) есть измеримая (даже непрерывная) функция от y, то из этого предположения следует, что интеграл

$$\int_{\alpha}^{\infty} g(y)\,dy \int_{a}^{X} f(x)\,k(x,\ y)\,dx$$

сходится. Таким образом, предел

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\alpha}^{n} g(y)\,dy \int_{a}^{X} f(x)\,k(x,\ y)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_{a}^{X} f(x)\,dx \int_{\alpha}^{n} g(y)\,k(x,\ y)\,dy$$

конечен. Сверх того,

$$F_n(x) = f(x) \int_{\alpha}^{n} g(y)\,k(x,\ y)\,dy$$

есть при любом значении x неубывающая функция от n. Поэтому из теоремы § 10.8.2 следует, что $F_n(x)$ стремится при $n\to\infty$ к конечному пределу для почти всех значений x в интервале $(a,\ X)$, т. е. что интеграл

$$\int_{\alpha}^{\infty} g(y)\,k(x,\ y)\,dy$$

сходится для почти всех значений x в этом интервале. Далее, согласно теореме § 10.8.2,

$$\int_{a}^{X} f(x)\,dx \int_{\alpha}^{\infty} g(y)\,k(x,\ y)\,dy = \lim_{n\to\infty} \int_{a}^{X} f(x)\,dx \int_{\alpha}^{n} g(y)\,k(x,\ y)\,dy =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_{\alpha}^{n} g(y)\,dy \int_{a}^{X} f(x)\,k(x,\ y)\,dx = \int_{\alpha}^{\infty} g(y)\,dy \int_{a}^{X} f(x)\,k(x,\ y)\,dx. \quad (3)$$

В силу неравенства (2) правая часть соотношения (3) остается ограниченной, когда $X\to\infty$. Следовательно, ограничена и левая часть, и потому левая часть равенства (1) сходится.

Подобным же образом можно доказать обратимость порядка интегрирования в интеграле

$$\int_{\alpha}^{Y} g(y)\,dy \int_{a}^{\infty} f(x)\,k(x,\ y)\,dx.$$

После этого окончательный результат получается, как в § 1.8.5.

РАЗЛИЧНЫЕ ПРИМЕРЫ

1. Если функция $f(x)$ интегрируема в интервале (a, b) и $a=x_0<x_1<x_2<\ldots$ $\ldots<x_n=b$, то

$$\sum_{\nu=0}^{n-1}\left|\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} f(t)\,dt\right| \to \int_a^b |f(t)|\,dt,$$

когда длина наибольшего частичного интервала стремится к нулю.

[Для непрерывных функций доказательство элементарно. Общий случай может быть сведен к этому специальному случаю с помощью теоремы § 12.2.]

2. Если функция $F(x)$ абсолютно непрерывна в интервале (a, b), то ее полная вариация в этом интервале равна

$$\int_a^b |F'(x)|\,dx.$$

[Воспользоваться теоремой предыдущего примера.]

3. Показать, что если функции $f(x)$ и $g(x)$ принадлежат к L^2, то

$$\int \{f(x)\}^2\,dx \int \{g(x)\}^2\,dx - \left\{\int f(x)\,g(x)\,dx\right\}^2 =$$
$$= \frac{1}{2}\int dy \int \{f(x)\,g(y) - f(y)\,g(x)\}^2\,dx,$$

и получить этим путем другое доказательство неравенства Шварца.

4. Положим $\log' x = \log x$, если $x \geqslant e$, и $\log' x = 1$, если $x < e$. Показать, что если функции $\{f(x)\}^2 \log' f(x)$ и $\dfrac{\{g(x)\}^2}{\log' g(x)}$ интегрируемы в интервале (a, b), то и функция $f(x)\,g(x)$ интегрируема в интервале (a, b).

[Пусть E — множество, где $f \leqslant \dfrac{g}{\log' g}$. Тогда

$$\int_E fg\,dx \leqslant \int_E \frac{\{g(x)\}^2}{\log' g(x)}\,dx.$$

На CE, наоборот, $g < f \log' g$. Если $g \leqslant e$, то из этого неравенства следует, что

$$g \leqslant f \leqslant f \log' f.$$

Если $g > e$, то $\sqrt{g} < \dfrac{Ag}{\log' g} < Af$, $\log g < A \log f$ и $g < Af \log' f$. Следовательно,

$$\int_{CE} fg\,dx \leqslant A \int_{CE} \{f(x)\}^2 \log' f(x)\,dx.]$$

5. Если функции $f^p(\log' f)^q$ и $g^{\frac{p}{p-1}}(\log' g)^{-\frac{q}{p-1}}$ интегрируемы, то и функция $f(x)\,g(x)$ интегрируема.

6. Доказать, что

$$uv \leqslant u \log u + e^{v-1} \qquad (u > 1,\ v > 1).$$

Вывести из этого, что если функции $f(x) \log' f(x)$ и $e^{g(x)}$ интегрируемы, то такова же функция $f(x)\,g(x)$ *).

[Неравенство можно проверить при помощи подстановки $u = e^x$, $v = y + 1$.]

---

*) W. H. Young [4].

7. Если $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$, $\alpha+\beta+\gamma=1$, то

$$\left|\int fgh\,dx\right| \leqslant \left(\int |f|^{1/\alpha}\,dx\right)^{\alpha}\left(\int |g|^{1/\beta}\,dx\right)^{\beta}\left(\int |h|^{1/\gamma}\,dx\right)^{\gamma}.$$

8. Если $\lambda > 0$, $\mu > 0$, $\lambda\mu < 1$ и функции $f(x)$ и $g(x)$ принадлежат соответствующим L-классам, то *)

$$\left|\int fg\,dx\right|^{\frac{(1+\lambda)(1+\mu)}{1-\lambda\mu}} \leqslant$$

$$\leqslant \int |f|^{1+\lambda}|g|^{1+\mu}\,dx\left(\int |f|^{1+\lambda}\,dx\right)^{\frac{\mu(1+\lambda)}{1-\lambda\mu}}\left(\int |g|^{1+\mu}\,dx\right)^{\frac{\lambda(1+\mu)}{1-\lambda\mu}}.$$

[Это неравенство можно получить из примера 7 при помощи надлежащих подстановок.]

9. Если $F(x)$ — интеграл функции класса L^p с $p > 1$, то при $h \to 0$

$$F(x+h)-F(x)=o\left(h^{1-\frac{1}{p}}\right).$$

[Если $F(x)$ — интеграл от $f(x)$, то

$$|F(x+h)-F(x)| = \left|\int_x^{x+h} f(t)\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left\{\int_x^{x+h} |f(t)|^p\,dt\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\int_x^{x+h} dt\right\}^{1-\frac{1}{p}} = h^{1-\frac{1}{p}}\left\{\int_x^{x+h} |f(t)|^p\,dt\right\}^{\frac{1}{p}},$$

последний же интеграл стремится к нулю вместе с h.]

10. Если $f(x)$ принадлежит к $L^p(0, \infty)$ с $p > 1$, то интеграл $\int\limits_0^{\infty} f(x)\frac{\sin xy}{x}\,dx$ равномерно сходится во всяком конечном интервале.

11. Если $f(x)$ принадлежит к L^p с $p > 1$ и $\varphi(y)$ есть интеграл, определенный в предыдущем примере, то при $h \to 0$

$$\varphi(y+h)-\varphi(y)=o\left(h^{1/p}\right).$$

[Действительно,

$$\varphi(y+h)-\varphi(y)=\int_0^{\infty}\frac{f(x)}{x}\left[\sin\{x(y+h)\}-\sin xy\right]dx=$$

$$=2\int_0^{\infty}\frac{f(x)}{x}\sin\frac{1}{2}xh\cos x\left(y+\frac{1}{2}h\right)dx,$$

и, следовательно,

$$|\varphi(y+h)-\varphi(y)| \leqslant 2\int_0^{\infty}\left|f(x)\frac{\sin\frac{1}{2}xh}{x}\right|dx \leqslant$$

$$\leqslant 2\left\{\int_0^{\infty}|f(x)|^p\,dx\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\int_0^{\infty}\left|\frac{\sin\frac{1}{2}xh}{x}\right|^{\frac{p}{p-1}}dx\right\}^{1-\frac{1}{p}}.$$

*) W. H. Young [2].

В первых скобках стоит постоянная, а последний сомножитель, как показывает подстановка $x=\frac{\xi}{h}$, кратен $h^{1/p}$. Это дает то, что нужно, но с O вместо o. Если, однако, применить предыдущие соображения к интегралам, взятым по интервалам $(0, \delta)$ и (Δ, ∞), где δ мало, а Δ велико, и принять во внимание, что при фиксированных δ и Δ

$$\left|\int_{\delta}^{\Delta} \frac{f(x)}{x} \sin\frac{1}{2}xh \cos x\left(y+\frac{1}{2}h\right) dx\right| \leqslant \int_{\delta}^{\Delta} \frac{|f(x)|}{x} \left|\sin\frac{1}{2}xh\right| dx = O(h),$$

то получится доказываемая формула.]

12. Пусть $f(x)$ принадлежит к $L^p(0, \infty)$, причем $1<p<2$. Показать, что интеграл

$$\varphi(y)=\int_0^{\infty} f(x)\frac{\sin xy}{\sqrt{x}}\,dx$$

абсолютно сходится и что при $y\to 0$

$$\varphi(y)=o\left(y^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}\right).$$

13. Если функция $f(x)$ равномерно непрерывна в интервале $(0, \infty)$ и принадлежит одному из классов $L^p(0, \infty)$, то $f(x)\to 0$ при $x\to\infty$.

14. Если $f(x)$ принадлежит к $L^p(0, \infty)$ с $p>1$, то тому же классу принадлежат функции *)

$$\varphi(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt, \qquad \psi(x)=\int_x^{\infty}\frac{f(t)}{t}\,dt.$$

[Рассмотрим, например, функцию $\varphi(x)$. Она ограничена при $0<a<x<<b<\infty$. Следовательно, интеграл

$$\int_a^b |\varphi(x)|^p\,dx$$

существует при $0<a<b<\infty$, и достаточно доказать, что он остается ограниченным, когда $a\to 0$, $b\to\infty$.

Без ограничения общности можно считать, что $f(t)\geqslant 0$. Положим

$$f_1(x)=\int_0^x f(t)\,dt$$

и покажем, что $x^{1-p}\{f_1(x)\}^p\to 0$ как при $x\to 0$, так и при $x\to\infty$. Первое следует из неравенства

$$\{f_1(x)\}^p\leqslant\int_0^x \{f(t)\}^p\,dt\left(\int_0^x dt\right)^{p-1}=x^{p-1}\int_0^x \{f(t)\}^p\,dt.$$

Подобная же оценка показывает, что при $x>\xi$

$$f_1(x)\leqslant\int_0^{\xi} f(t)\,dt+\left[x^{p-1}\int_{\xi}^{x}\{f(t)\}^p\,dt\right]^{1/p},$$

*) Hardy [17] и [19].

последний же интеграл сколь угодно мал, если ξ достаточно велико и $x > \xi$. Этим доказано и второе.

Так как

$$\int_a^b \{\varphi(x)\}^p\,dx = \int_a^b \{f_1(x)\}^p x^{-p}\,dx,$$

то интегрирование по частям дает:

$$\left[\frac{\{f_1(x)\}^p x^{1-p}}{1-p}\right]_a^b + \frac{p}{p-1}\int_a^b \{f_1(x)\}^{p-1} f(x)\,x^{1-p}\,dx =$$

$$= o(1) + \frac{p}{p-1}\int_a^b \{\varphi(x)\}^{p-1} f(x)\,dx.$$

Таким образом,

$$\int_a^b \{\varphi(x)\}^p\,dx \leqslant o(1) + \frac{p}{p-1}\left\{\int_a^b \{\varphi(x)\}^p\,dx\right\}^{1-\frac{1}{p}} \left\{\int_a^b \{f(x)\}^p\,dx\right\}^{\frac{1}{p}},$$

и после деления на $\left\{\int_a^b \{\varphi(x)\}^p\,dx\right\}^{1-\frac{1}{p}}$ и перехода к пределу при $a \to 0$, $b \to \infty$ мы получаем неравенство

$$\left\{\int_0^\infty \{\varphi(x)\}^p\,dx\right\}^{1/p} \leqslant \frac{p}{p-1}\left\{\int_0^\infty \{f(x)\}^p\,dx\right\}^{1/p}.$$

Соответствующее доказательство для $\psi(x)$ мы предоставляем читателю.]

15. Доказать, что в условиях предыдущего примера интегралы

$$\int_0^\infty |\varphi(x)|^q x^{\frac{q}{p}-1}\,dx, \qquad \int_0^\infty |\psi(x)|^q x^{\frac{q}{p}-1}\,dx$$

сходятся при $q \geqslant p$.

16. Если функция $f(x)$ принадлежит к $L^p(0, \infty)$ с $p > 1$ и

$$\varphi(x) = \int_0^\infty e^{-xy} f(y)\,dy,$$

то и функция $x^{1-\frac{2}{p}}\varphi(x)$ принадлежит к $L^p(0, \infty)$.

[Поскольку

$$|\varphi(x)| \leqslant \int_0^{1/x} |f(y)|\,dy + \int_{1/x}^\infty \frac{|f(y)|}{xy}\,dy,$$

это получается из примера 14.]

17. Если $f(x)$ принадлежит к $L^p(a, b)$, то для всякого положительного ε существует такая непрерывная функция $g(x)$, что $\int_a^b |f(x) - g(x)|^p\,dx < \varepsilon$.

[Если функция $f(x)$ ограничена, то это сразу следует из § 12.2. Общий случай может быть сведен к случаю ограниченной функции.]

18. Если $f(x)$ принадлежит к L^p в некотором интервале, внутри которого лежит интервал (a, b), то

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b |f(x+h)-f(x)|^p\,dx=0.$$

[Это получается сразу, если функция $f(x)$ непрерывна. В общем случае можно воспользоваться предыдущим примером.]

19. Если $f(x)$ принадлежит к $L^p(-\infty, \infty)$, то

$$\lim_{h\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+h)-f(x)|^p\,dx=0.$$

20. Если $f(x)$ принадлежит к $L^p(-\infty, \infty)$, а $g(x)$ — к $L^{\frac{p}{p-1}}(-\infty, \infty)$, то

$$F(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)\,g(x)\,dx$$

есть непрерывная функция от t.

[Действительно,

$$|F(t+h)-F(t)|\leqslant$$

$$\leqslant\left\{\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+t+h)-f(x+t)|^p\,dx\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}|g(x)|^{\frac{p}{p-1}}\,dx\right\}^{1-\frac{1}{p}}.]$$

21. Функция $F(t)$ предыдущего примера стремится к нулю в бесконечности.

[Воспользоваться разложением

$$\int_{-\infty}^{\infty}=\int_{-\infty}^{-\frac{1}{2}t}+\int_{-\frac{1}{2}t}^{\infty}.]$$

22. Если функция $f(x)$ принадлежит к $L^p(-\infty, \infty)$, то функция

$$F(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)}{1+(x-t)^2}\,dt$$

непрерывна и принадлежит к $L^p(-\infty, \infty)$.

[Воспользоваться неравенством

$$|F(x)|^p\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|f(t)^p|\,dt}{\{1+(x-t)^2\}^{\frac{1}{2}p}}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{\{1+(x-t)^2\}^{\frac{p}{2(p-1)}}}\right\}^{p-1}.]$$

23. Если функция $f(x)$ интегрируема, то интеграл

$$f_\alpha(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\,dt \qquad (\alpha>0)$$

существует почти всюду и функция $f_\alpha(x)$ интегрируема.

[Функция $f_\alpha(x)$ есть интеграл от $f(x)$ порядка α *).]

24. Показать, пользуясь методом примера 20, что если $f(x)$ принадлежит к L^p с $p>1$ и $\alpha>\frac{1}{p}$, то функция $f_\alpha(x)$ непрерывна.

25. Если $f_{\alpha,\beta}(x)$ — интеграл порядка β от $f_\alpha(x)$, то $f_{\alpha,\beta}(x)=f_{\alpha+\beta}(x)$ $(\alpha>0,\ \beta>0)$ всюду, где правая часть существует.

[Нужно обратить повторный интеграл

$$\int\limits_0^x (x-t)^{\beta-1}\,dt \int\limits_0^t (t-u)^{\alpha-1} f(u)\,du$$

и воспользоваться примером 18 гл. I. Интеграл $\int\limits_\delta^x \int\limits_0^{t-\delta}$ можно обратить согласно § 12.6. После этого можно перейти к пределу при $\delta\to 0$ и воспользоваться теоремой § 10.8.2.]

---

*) О некоторых свойствах таких интегралов см. Hardy [12] и Hardy and Littlewood [5].

ГЛАВА XIII

РЯДЫ ФУРЬЕ

13.1. Тригонометрические ряды и ряды Фурье. Тригонометрический ряд есть ряд вида

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \tag{1}$$

где коэффициенты a_0, a_1, $b_1, \ldots$ не зависят от x. С проблемой представления заданной функции $f(x)$ таким рядом впервые встретился Фурье в одной задаче о распространении тепла. Впоследствии эти ряды стали играть важную роль в теории функций действительного переменного, и именно с этой точки зрения мы будем рассматривать их здесь.

Мы начнем, естественно, с попытки найти формулы, выражающие коэффициенты a_n, b_n через $f(x)$. Предположим, что ряд сходится к $f(x)$ равномерно или хотя бы ограниченно. Умножим его на $\cos mx$, где m — положительное целое число, и проинтегрируем почленно в интервале $(0, 2\pi)$. Так как

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx\, dx = \begin{cases} \pi & (n = m), \\ 0 & (n \neq m) \end{cases}$$

и

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \sin nx\, dx = 0$$

для всех значений n, то мы получим формулу

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos mx\, dx. \tag{2}$$

Эта формула дает и a_0. Подобным же образом, умножая ряд на $\sin mx$ и интегрируя его почленно, мы видим, что

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin mx\, dx. \tag{3}$$

Формулы (2) и (3) известны как формулы Эйлера — Фурье.

A priori нет, однако, никаких оснований предполагать, что заданная функция может быть разложена в ограниченно сходящийся тригонометрический ряд. Поэтому предыдущая процедура не является доказательством того, что коэффициенты всегда имеют указанный вид. Но она наводит на мысль, что здесь возможна другая точка зрения. Вместо того чтобы начинать с ряда и делать предположения о его свойствах, мы начнем с функции и определим коэффициенты формулами (2), (3). Свойства построенного таким образом ряда мы будем затем изучать.

Итак, имеется функция $f(x)$, интегрируемая в интервале $(0, 2\pi)$ по Лебегу. Тогда существуют интегралы (2) и (3). Определяемые ими числа a_m, b_m называются *коэффициентами Фурье* функции $f(x)$. Тригонометрический ряд (1) с этими коэффициентами называется *рядом Фурье функции* $f(x)$.

Глава построена по следующему плану. Сначала мы попытаемся найти условия, при которых ряд Фурье сходится к $f(x)$; имеется несколько таких условий, но все они носят специальный характер (§§ 13.1.1 — 13.2.5). Затем мы рассмотрим один обобщенный вид сходимости (суммируемость (С, 1)) и окажемся в состоянии привести всю теорию в более систематический вид (§§ 13.3 — 13.3.5). В последующих параграфах мы рассмотрим некоторые проблемы, касающиеся почленного интегрирования; это приведет нас к изучению коэффициентов Фурье самих по себе, вне связи с рядами Фурье. В §§ 13.8 — 13.8.6 мы вернемся к вопросу о том, каково отношение рядов Фурье к тригонометрическим рядам общего вида. В заключение мы изложим кое-что из соответствующей теории интегралов Фурье.

13.1.1. Проблема сходимости. Первая проблема, которую мы должны рассмотреть, состоит в том, сходится ли ряд, построенный описанным выше способом, и если да, то равна ли его сумма $f(x)$.

В то время, когда ряды Фурье только начали входить в употребление, многим математикам казалось парадоксальным утверждение, что «произвольная» функция может быть представлена рядом функций, каждая из которых непрерывна и периодична. Читатель, познакомившийся в гл. I с особенностями некоторых рядов, пожалуй, готов будет поверить, что даже это возможно. И мы покажем, что *в существенном* ряд Фурье дает такое представление. Не следует, однако, ожидать слишком многого.

Прежде всего, каждый член ряда имеет период 2π; следовательно, сумма ряда, если она существует, также имеет период 2π. Поэтому мы будем считать функцию $f(x)$ определенной первоначально в интервале $0 \leqslant x < 2\pi$; за пределами этого интервала мы определяем ее по периодическому закону, т. е. соотношением

$$f(x+2\pi)=f(x).$$

Далее, не для всякой функции $f(x)$ ряд Фурье сходится при всех значениях x к сумме $f(x)$. Рассмотрим, например, две функции, $f(x)$ и $g(x)$, отличающиеся друг от друга только в одной точке. Такие функции имеют один и тот же ряд Фурье, так что последний не может представлять обе функции в каждой точке. Более общим образом, всякие две «эквивалентные», т. е. почти всюду равные, функции имеют один и тот же ряд Фурье, так что последний не может представлять обе эти функции, если они различны.

Мы увидим, что в действительности ряд Фурье представляет функцию, если она не слишком сложна, и что в основных чертах он, в некотором смысле, представляет ее даже в самых сложных случаях.

13.1.2. Ряд Фурье и ряд Лорана. Существует тесная формальная связь между рядами Фурье и рядами Лорана. Пусть $F(z)$ — однозначная аналитическая функция, регулярная при $R' < |z| < R$. Тогда

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n,$$

где $c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=r} \frac{F(z)}{z^{n+1}} dz$ $(R' < r < R)$. Полагая $z = re^{i\theta}$, мы видим, что

$$F(re^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{in\theta},$$

где $A_n = \int\limits_0^{2\pi} F(re^{i\varphi}) e^{-in\varphi} d\varphi$. Это разложение можно представить также в виде

$$F(re^{i\theta}) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{(A_n + A_{-n}) \cos n\theta + i(A_n - A_{-n}) \sin n\theta\},$$

где

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} F(re^{i\varphi}) d\varphi, \quad A_n + A_{-n} = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} F(re^{i\varphi}) \cos n\varphi \, d\varphi,$$

$$i(A_n - A_{-n}) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} F(re^{i\varphi}) \sin n\varphi \, d\varphi.$$

Итак, мы представили ряд Лорана в форме ряда Фурье. То, что здесь ряд представляет функцию и даже сходится к ней равномерно, следует из теории аналитических функций. Но в общем случае мы не предполагаем функцию аналитической, и проблема требует совсем других методов.

13.2. Интеграл Дирихле. Пусть $0 \leqslant x < 2\pi$; положим

$$s_n = s_n(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{m=1}^{n}(a_m \cos mx + b_m \sin mx). \tag{1}$$

Эта частичная сумма может быть нижеследующим образом представлена в виде определенного интеграла. Мы можем написать:

$$s_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{n}\left\{\cos mx \int_0^{2\pi} f(t)\cos mt\,dt + \sin mx \int_0^{2\pi} f(t)\sin mt\,dt\right\} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{n}\cos m(x-t)\right\} f(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(x-t)}{\sin\frac{1}{2}(x-t)} f(t)\,dt.$$

Подстановка $t = x + u$ показывает, что

$$s_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-x}^{2\pi - x}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{1}{2}u} f(x+u)\,du,$$

и так как подынтегральная функция имеет период 2π, то

$$s_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{1}{2}u} f(x+u)\,du. \tag{2}$$

Эта формула известна как *интеграл Дирихле*. Она может быть представлена в виде

$$s_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{1}{2}u}\{f(x+u) + f(x-u)\}\,du. \tag{3}$$

Действительно, если в интервале $(\pi, 2\pi)$ положить $u = -v$ и воспользоваться периодичностью, то соответствующая часть интеграла (2) примет вид

$$\int_{-2\pi}^{-\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)v}{\sin\frac{1}{2}v} f(x-v)\,dv = \int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{1}{2}u} f(x-u)\,du.$$

Если, в частности, $f(x) = 1$ при всех значениях x, то $a_0 = 2$, а все остальные коэффициенты Фурье равны нулю, так что $s_n = 1$

при $n>0$. Поэтому предыдущая формула показывает, что

$$1=\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{1}{2}u}\,2\,du.$$

Умножая это равенство на s и вычитая из равенства (3), мы получаем формулу

$$s_n-s=\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{1}{2}u}\{f(x+u)+f(x-u)-2s\}\,du. \tag{4}$$

Таким образом, необходимое и достаточное условие сходимости ряда к сумме s заключается в сходимости этого интеграла к нулю. «Проблема сходимости» есть проблема отыскания условий, при которых этот интеграл стремится к нулю, и условий, при которых $s=f(x)$. Мы можем рассматривать проблему сходимости для некоторого частного значения x, для всех значений x, для почти всех значений x или для какого-нибудь множества значений x. Мы начнем с частного значения x.

13.2.1. Теорема Римана—Лебега. Следующая теорема является основной для всей теории.

Если функция $f(x)$ интегрируема в интервале (a, b), то при $\lambda\to\infty$

$$\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,dx\to 0,\quad \int_a^b f(x)\sin\lambda x\,dx\to 0.$$

Рассмотрим, например, первый интеграл. Если $f(x)$ есть некоторый интеграл, то можно интегрировать по частям, так что

$$\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,dx=\left[f(x)\frac{\sin\lambda x}{\lambda}\right]_a^b-\frac{1}{\lambda}\int_a^b f'(x)\sin\lambda x\,dx.$$

Последний интеграл ограничен, и потому правая часть есть $O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$.

В общем случае мы можем (§ 12.2) найти для заданного ε такую абсолютно непрерывную функцию $\varphi(x)$, что

$$\int_a^b |f(x)-\varphi(x)|\,dx<\varepsilon.$$

Так как при любом значении λ

$$\left|\int_a^b \{f(x)-\varphi(x)\}\cos\lambda x\,dx\right|\leqslant\int_a^b |f(x)-\varphi(x)|\,dx<\varepsilon$$

и так как, в силу уже доказанного,

$$\left|\int_a^b \varphi(x)\cos\lambda x\,dx\right| < \varepsilon \qquad (\lambda > \lambda_0),$$

то

$$\left|\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,dx\right| < 2\varepsilon \qquad (\lambda > \lambda_0),$$

и первое соотношение доказано. Аналогичное доказательство применимо ко второму интегралу.

Имеется также доказательство в духе § 13.7.2, использующее пример § 12.2.

13.2.2. Теорема Римана — Лебега имеет нижеследующие важные следствия.

Коэффициенты Фурье любой интегрируемой функции стремятся к нулю.

Это — частный случай теоремы, который получается, если $\lambda = n$, $a = 0$, $b = 2\pi$.

Поведение ряда Фурье в некоторой точке x зависит только от поведения функции в сколь угодно малой окрестности этой точки.

Пусть δ — положительное число, меньшее π, и пусть $g(t) = f(t)$ в интервале $x - \delta < t < x + \delta$ и $g(t) = 0$ в остальной части интервала $(x - \pi,\ x + \pi)$. Обозначим частичные суммы ряда Фурье функции $g(t)$ через S_n. Мы можем написать:

$$S_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{1}{2}u}\{g(x+u)+g(x-u)\}\,du =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\delta} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{1}{2}u}\{f(u+u)+f(x-u)\}\,du.$$

Таким образом,

$$s_n - S_n = \frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{1}{2}u}\{f(x+u)+f(x-u)\}\,du.$$

Но функция

$$\operatorname{cosec}\frac{1}{2}u\,\{f(x+u)+f(x-u)\}$$

интегрируема в интервале (δ, π), если $\delta > 0$, так что, в силу теоремы Римана — Лебега,

$$s_n - S_n \to 0.$$

Следовательно, как бы мало ни было δ, поведение суммы s_n зависит только от свойств функции $f(t)$ в интервале $(x-\delta,\ x+\delta)$; значения, которые она принимает вне этого интервала, не играют роли.

Именно это свойство делает возможным представление рядами Фурье произвольных функций. В действительности ряд представляет лишь некоторого рода предел среднего значения функции в интервале $(x-\delta,\ x+\delta)$, и этот предел равен $f(x)$ только в случае, когда поведение функции достаточно просто. Как уже было замечено в § 13.1.1, значение функции в самой точке x не оказывает на ряд никакого влияния.

13.2.3. Признаки сходимости. Сначала мы представим «необходимое и достаточное условие сходимости к сумме s» в более удобной форме. Положим

$$\varphi(u)=f(x+u)+f(x-u)-2s.$$

Указанное условие (см. формулу § 13.2 (4)) состоит в том, что

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{1}{2}u}\varphi(u)\,du=0. \tag{1}$$

Это условие можно заменить условием

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\delta}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{1}{2}u}\varphi(u)\,du=0, \tag{2}$$

где $0<\delta\leqslant\pi$; действительно, в силу теоремы Римана — Лебега разность между интегралами в формулах (1) и (2) стремится к нулю. Далее, условие (2) можно заменить условием

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\delta}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{u}\varphi(u)\,du=0; \tag{3}$$

действительно, функция $\left(\operatorname{cosec}\frac{1}{2}u-\frac{2}{u}\right)\varphi(u)$ интегрируема в интервале $(0,\ \delta)$, так что, в силу теоремы Римана — Лебега,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\delta}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u\left\{\frac{1}{\sin\frac{1}{2}u}-\frac{2}{u}\right\}\varphi(u)\,du=0.$$

Теперь мы в состоянии указать некоторые признаки сходимости.

13.2.3.1. Признак Дини. *Если функция* $\frac{\varphi(u)}{u}$ *интегрируема в интервале* $(0,\ \delta)$, *то ряд сходится к сумме* s.

Это сразу следует из формулы (3) и теоремы Римана — Лебега. Следует, конечно, помнить, что интегрируемость функции $\frac{\varphi(u)}{u}$ по Лебегу есть абсолютная интегрируемость. Существование предела

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{\delta}\frac{\varphi(u)}{u}\,du$$

не является достаточным условием сходимости.

Примеры. (I) Ряд сходится к сумме $f(x)$ в каждой точке, где функция $f(x)$ дифференцируема.

[В такой точке x функция $\varphi(u)/u$ ограничена.]

(II) Более общим образом, если функция $f(x)$ удовлетворяет «условию Липшица»

$$f(x+h)-f(x)=O(|h^{\alpha}|)\qquad (0<\alpha<1),$$

то ряд сходится к сумме $f(x)$.

13.2.3.2. Признак Жордана. *Если функция $f(t)$ имеет в окрестности точки $t=x$ ограниченную вариацию, то ряд сходится к сумме $\frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\}$.*

Так как ограниченность вариации есть условие, всегда относящееся к некоторому интервалу, то в действительности этот признак является признаком сходимости в некотором интервале.

Мы знаем, что если $f(x)$ есть функция ограниченной вариации, то пределы $f(x+0)$ и $f(x-0)$ существуют. Функция

$$\varphi(u)=f(x+u)+f(x-u)-f(x+0)-f(x-0)$$

имеет ограниченную вариацию в некотором интервале справа от точки $u=0$, и $\varphi(u)\to 0$ при $u\to 0$. Следовательно,

$$\varphi(u)=\varphi_1(u)-\varphi_2(u),$$

где φ_1 и φ_2 — положительные неубывающие функции от u, стремящиеся при $u\to 0$ к одному и тому же пределу; вычитая из обеих функций одну и ту же постоянную, мы можем добиться того, чтобы этот предел был равен нулю.

Пусть δ столь мало, что в интервале $(0, \delta)$ функция $\varphi(u)$ имеет ограниченную вариацию. Тогда

$$\int_0^{\delta}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{u}\varphi(u)\,du=$$

$$=\int_0^{\delta}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{u}\varphi_1(u)\,du-\int_0^{\delta}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{u}\varphi_2(u)\,du.$$

Обозначим два последних интеграла через I_1 и I_2 и рассмотрим интеграл I_1. Для заданного ε существует столь малое η, что

$\varphi_1(\eta) < \varepsilon$, и, в силу второй теоремы о среднем значении,

$$\int_0^\eta \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{u}\varphi_1(u)\,du =$$

$$= \varphi_1(\eta)\int_\xi^\eta \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{u}\,du = \varphi_1(\eta)\int_{\left(n+\frac{1}{2}\right)\xi}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\eta} \frac{\sin v}{v}\,dv.$$

Последний интеграл ограничен для всех значений n, ξ и η, так что

$$\left|\int_0^\eta \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{u}\varphi_1(u)\,du\right| < A\varepsilon.$$

В силу теоремы Римана — Лебега, при фиксированном η

$$\left|\int_\eta^\delta \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{u}\varphi_1(u)\,du\right| < \varepsilon \qquad (n > n_0).$$

Следовательно, $I_1 \to 0$, и подобным же образом $I_2 \to 0$. Теорема доказана.

В частности, *если функция* $f(x)$ *имеет в интервале* $(0, 2\pi)$ *только конечное число максимумов и минимумов и конечное число точек разрыва, то ее ряд Фурье сходится при всех значениях* x *к сумме* $\frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\}$. Действительно, такая функция имеет ограниченную вариацию во всем интервале $(0, 2\pi)$.

Эти условия известны как *условия Дирихле*. Конечно, они выполнены во многих случаях; однако они представляют то неудобство, что сумма двух функций, которые им удовлетворяют, может им не удовлетворять.

В связи с признаком Жордана представляет интерес тот факт, что *если функция* $f(x)$ *имеет в интервале* $(0, 2\pi)$ *ограниченную вариацию, то ее ряд Фурье сходится ограниченно.*

Для доказательства представим интеграл Дирихле для $s_n(x)$ при $0 \leqslant x < \pi$ в виде

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(x-t)}{\sin\frac{1}{2}(x-t)} f(t)\,dt.$$

Так как функция

$$\frac{1}{\sin\frac{1}{2}(x-t)}-\frac{1}{\frac{1}{2}(x-t)}$$

ограничена при $-\frac{3}{2}\pi<x-t<\frac{3}{2}\pi$, то этот интеграл отличается от интеграла

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(x-t)}{x-t}f(t)\,dt$$

на ограниченную функцию. Воспользуемся представлением $f(t)=$ $=f_1(t)-f_2(t)$, где f_1 и f_2 положительны и не убывают в интервале $\left(-\frac{1}{2}\pi,\ \frac{3}{2}\pi\right)$. В силу второй теоремы о среднем значении,

$$\int\limits_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(x-t)}{x-t}f_1(t)\,dt=f_1\left(\frac{3}{2}\pi\right)\int\limits_{\xi}^{\frac{3}{2}\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(x-t)}{x-t}\,dt$$

$$\left(-\frac{1}{2}\pi<\xi<\frac{3}{2}\pi\right),$$

а этот интеграл ограничен для всех значений n и x (ср. предыдущее доказательство). Такое же заключение верно для f_2. Следовательно, ряд ограниченно сходится в интервале $(0,\ \pi)$, и то же верно для интервала $(\pi,\ 2\pi)$.

13.2.3.3. Признак Валле-Пуссена*). *Если функция*

$$\psi(t)=\frac{1}{t}\int\limits_0^t\varphi(u)\,du$$

имеет ограниченную вариацию в некотором интервале с левым концом $t=0$, то ряд сходится. Если значение s выбрано так, что $\psi(t)\to 0$ при $t\to 0$, то сумма ряда равна s.

Действительно,

$$\varphi(t)=\frac{d}{dt}\{t\psi(t)\}=\psi(t)+t\psi'(t),$$

так что интеграл § 13.2.3 (3) распадается на две части. Если $\psi(t)$ имеет ограниченную вариацию и стремится к нулю, то часть,

*) Этот признак был указан ранее Дюбуа-Реймоном, но, конечно, с интегралом Римана вместо интеграла Лебега.

содержащая $\psi(t)$, стремится к нулю, как в признаке Жордана. Часть же, содержащая $t\psi'(t)$, стремится к нулю, как в признаке Дини, поскольку функция $\psi'(t)$ интегрируема (§ 11.5.4).

13.2.4. Отношения между признаками *). Рассмотрим функцию

$$f(x)=\frac{1}{\log\frac{1}{x}}\quad (0<x<\pi),\qquad =0\quad (\pi\leqslant x\leqslant 2\pi).$$

Она ограничена и монотонна в окрестности точки $x=0$, так что условие Жордана выполнено и ряд сходится. Но условие Дини не выполнено, так как интеграл $\int\limits_0^\delta \frac{dt}{t\log\frac{1}{t}}$ расходится. Таким образом, *признак Жордана не содержится в признаке Дини.*

Но и *признак Дини не содержится в признаке Жордана.* Действительно, рассмотрим функцию

$$f(x)=x^\alpha\sin\frac{1}{x}\quad (0<x<\pi),\qquad =0\quad (\pi\leqslant x\leqslant 2\pi),$$

где $0<\alpha<1$. В точке $x=0$ для нее, очевидно, выполнено условие Дини. Однако эта функция не имеет ограниченной вариации (гл. XI, пример 5), так что условие Жордана не выполнено.

Наконец, *как признак Дини, так и признак Жордана содержится в признаке Валле-Пуссена.* Это значит, что если выполнено условие Дини или условие Жордана, то выполнено и условие Валле-Пуссена.

Заметим, прежде всего, что *если функция $g(x)$ имеет в интервале $(0, \delta)$ ограниченную вариацию, то тем же свойством обладает функция $G(x)=\frac{1}{x}\int\limits_0^x g(t)\,dt$.*

Действительно, $g(x)=g_1(x)-g_2(x)$, где $g_1(x)$ и $g_2(x)$ положительны, не убывают и ограничены, так что

$$G(x)=\frac{1}{x}\int\limits_0^x g_1(t)\,dt-\frac{1}{x}\int\limits_0^x g_2(t)\,dt=G_1(x)-G_2(x).$$

Нетрудно проверить, что обе функции $G_1(x)$, $G_2(x)$ положительны, не убывают и ограничены. Следовательно, $G(x)$ есть функция ограниченной вариации.

---

*) Подробности: Hardy [13].

Отношение признака Жордана к признаку Валле-Пуссена определяется этим непосредственно: если $\varphi(t)$ — функция ограниченной вариации, то такова же функция $\psi(t)$.

Рассмотрим теперь признак Дини. Если $\varphi(u)/u$ — интегрируемая функция, то

$$\chi(t)=\int_0^t \frac{\varphi(u)}{u}\,du$$

есть функция ограниченной вариации. Такова же тогда, в силу предыдущего замечания, и функция

$$\psi(t)=\frac{1}{t}\int_0^t u\,\frac{d}{du}\{\chi(u)\}\,du=\chi(t)-\frac{1}{t}\int_0^t \chi(u)\,du.$$

Следовательно, условие Валле-Пуссена выполнено.

13.2.5. Сходимость в целом интервале. Если одно из предыдущих условий выполнено во всех точках некоторого интервала, то, конечно, ряд будет сходиться во всем этом интервале. Если же условие выполнено равномерно, то и сходимость будет равномерной. Вот простейший случай такого рода.

Если функция $f(x)$ непрерывна и имеет ограниченную вариацию в некотором интервале, то во всяком внутреннем интервале ряд Фурье функции $f(x)$ равномерно сходится к $f(x)$.

Действительно, в указанном интервале $f(x)=f_1(x)-f_2(x)$, где $f_1(x)$ и $f_2(x)$ непрерывны и не убывают. В силу равномерной непрерывности функции $f_1(x)$ существует такое η, что

$$|f_1(x+h)-f_1(x)|<\varepsilon \qquad (|h|<\eta),$$

причем выбор η зависит только от ε, т. е. на зависит от значения x в рассматриваемом интервале. Из доказательства достаточности условия Жордана видно, что оцениваемый там интеграл сходится тогда равномерно. Остается еще проверить, что часть интеграла Дирихле, которая, как было показано в § 13.2.3, стремится к нулю, в действительности стремится к нулю равномерно; здесь читатель не встретит никаких трудностей.

В случае рядов Фурье равномерная сходимость, однако, не столь важна, как можно было бы ожидать, так как проблема почленного интегрирования решается для них в более общих условиях (§ 13.5).

Простые ограничения, относящиеся к функции $f(x)$, которые обеспечивали бы сходимость ряда Фурье *почти всюду*, но при этом не обеспечивали бы очевидным образом нечто большее, по-видимому, неизвестны. Можно предположить, например, что таким условием является непрерывность, однако ничего подобного доказать не удалось. С другой стороны, условие, относящееся не к самой функции, а к ее коэффициентам Фурье, было найдено *): *если ряд*

$$\sum (a_n^2 + b_n^2) \log n$$

сходится, то ряд § 13.1 (1) *сходится почти всюду* **).

13.3. Суммирование ряда арифметическими средними. Если некоторый ряд $u_1 + u_2 + \ldots$ не сходится, т. е. если $s_n = u_1 + \ldots + u_n$ не стремится к пределу, то иногда бывает возможно приписать ряду некоторую «сумму» менее прямым способом. Простейшим из таких способов является «суммирование арифметическими средними». Речь идет об арифметических средних

$$\sigma_n = \frac{s_1 + s_2 + \ldots + s_n}{n}$$

частичных сумм ряда. Если $s_n \to s$, то и $\sigma_n \to s$; действительно, если $s_n = s + \delta_n$, то

$$\sigma_n = s + \frac{\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_n}{n},$$

и в силу леммы § 1.2.3 последний член стремится к нулю, если $\delta_n \to 0$.

Но σ_n может стремиться к некоторому пределу и тогда, когда s_n не стремится ни к какому пределу. Рассмотрим, например, ряд

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

Здесь частичные суммы s_n равны попеременно 1 и 0, но, как нетрудно проверить, $\sigma_n \to \frac{1}{2}$.

Ряд, для которого σ_n стремится к некоторому пределу, называется суммируемым арифметическими средними или чезаровскими средними первого порядка, а также суммируемым $(C, 1)$.

Примеры. (I) Ряд $1 + 0 - 1 + 1 + 0 - 1 + \ldots$ суммируем $(C, 1)$ к сумме 2/3.

(II) Ряд $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \ldots$ суммируем $(C, 1)$ при всех значениях x; сумма равна $\frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{1}{2} x$, если x не есть четное кратное π, и 0 в противном случае.

(III) Если x не есть четное кратное π, то ряд $\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots$ суммируем $(C, 1)$ к нулю.

(IV) Если ряд $\sum u_n$ суммируем $(C, 1)$, то $s_n = o(n)$.

[Действительно, $s_n = n\sigma_n - (n-1)\sigma_{n-1}$.]

---

*) Plessner [2].

**) Положение изменилось: теперь известно, что ряд Фурье функции из L^p с $p > 1$ сходится почти всюду; см. Carleson [1] и Hunt [1], а также Fefferman [1]. (*Примечание переводчика.*)

(V) Пусть $t_n = u_1 + 2u_2 + \ldots + nu_n$. Если ряд $\sum u_n$ суммируем $(C, 1)$, то он сходится тогда и только тогда, когда $t_n = o(n)$.

[Действительно, $t_n = (n+1)s_n - n\sigma_n$.]

(VI) Если ряд $\sum u_n$ суммируем $(C, 1)$ и $u_n = o(1/n)$, то ряд $\sum u_n$ сходится. [В силу леммы § 1.2.3, $t_n = o(n)$. Теорема аналогична теореме Таубера.]

(VII) Для того чтобы ряд $\sum u_n$ был суммируем $(C, 1)$, необходимо и достаточно, чтобы ряд $\sum \frac{t_n}{n(n+1)}$ был сходящимся.

[Действительно,

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{t_n}{n(n+1)} = \frac{N}{N+1}\sigma_N.]$$

(VIII) Если ряд $\sum u_n$ суммируем $(C, 1)$ и $u_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$, то ряд $\sum u_n$ сходится.

[Харди; это — аналог литтлвудовского усиления теоремы Таубера. Если ряд $\sum u_n$ не сходится, то $t_N > A_1 N$ или $t_N < -A_1 N$ для бесконечного числа значений N. Будем считать, что имеет место первое. Так как $t_{n+1} = t_n + (n+1)u_n > t_n - A_2$, то $t_{N+\nu} > \frac{1}{2} A_1 N$ $\left(0 \leqslant \nu < \frac{NA_1}{2A_2}\right)$. Следовательно,

$$\sum_{n=N}^{N+\frac{NA_1}{2A_2}} \frac{t_n}{n(n+1)} > A,$$

так что (см. пример (VII)) ряд не суммируем $(C, 1)$.]

(IX) Ряд с положительными членами суммируем $(C, 1)$ только в случае, когда он сходится.

[Если $s_n \to \infty$, то $\sigma_n \to \infty$.]

13.3.1. Суммируемость рядов Фурье. Фейером было открыто *), что метод суммирования арифметическими средними особенно плодотворен в применении к рядам Фурье. Мы полагаем

$$\sigma_n = \frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_{n-1}}{n},$$

где s_n определяется формулой § 13.2 (3). Таким образом,

$$\sigma_n = \frac{1}{2n\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin\frac{1}{2}u + \ldots + \sin\left(n - \frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{1}{2}u}\{f(x+u) + f(x-u)\}\,du =$$

$$= \frac{1}{2n\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin^2\frac{1}{2}nu}{\sin^2\frac{1}{2}u}\{f(x+u) + f(x-u)\}\,du. \qquad (1)$$

---

*) Fejér [1].

Эта формула известна как *интеграл Фейера*. Она обязана своим значением тому факту, что множитель $\dfrac{\sin^2 \frac{1}{2} nu}{\sin^2 \frac{1}{2} u}$ положителен. Эта положительность делает обращение с интегралом Фейера значительно более простым, чем обращение с интегралом Дирихле, в котором соответствующий множитель $\dfrac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{\sin \frac{1}{2} u}$ колеблется между положительными и отрицательными значениями.

В том частном случае, когда $f(x)=1$, формула принимает вид

$$1=\frac{1}{2n\pi}\int_0^\pi \frac{\sin^2 \frac{1}{2} nu}{\sin^2 \frac{1}{2} u}\, 2du;$$

действительно, здесь $\sigma_n=1$ при $n>0$. Умножая это равенство на s и вычитая из равенства (1), мы видим, что

$$\sigma_n - s=\frac{1}{2n\pi}\int_0^\pi \frac{\sin^2 \frac{1}{2} nu}{\sin^2 \frac{1}{2} u}\{f(x+u)+f(x-u)-2s\}\, du. \tag{2}$$

Таким образом, ряд в том и только в том случае суммируем $(C, 1)$ к сумме s, если интеграл (2) стремится к нулю.

Это условие может быть упрощено так же, как соответствующее условие в проблеме сходимости. Мы полагаем

$$\varphi(u)=f(x+u)+f(x-u)-2s,$$

как выше. Пусть δ — произвольное положительное число, меньшее π. Так как

$$\left|\frac{1}{n}\int_\delta^\pi \frac{\sin^2 \frac{1}{2} nu}{\sin^2 \frac{1}{2} u}\varphi(u)\, du\right| \leqslant \frac{1}{n}\int_\delta^\pi \frac{|\varphi(u)|}{\sin^2 \frac{1}{2} u}\, du$$

и так как правая часть стремится к нулю, то ряд в том и только в том случае суммируем $(C, 1)$ к сумме s, если

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_0^\delta \frac{\sin^2 \frac{1}{2} nu}{\sin^2 \frac{1}{2} u}\varphi(u)\, du=0. \tag{3}$$

Наконец, это условие может быть представлено в виде

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_0^\delta \frac{\sin^2\frac{1}{2}nu}{u^2}\varphi(u)\,du=0. \tag{4}$$

Действительно,

$$\left|\frac{1}{n}\int_0^\delta \sin^2\frac{1}{2}nu\left\{\frac{1}{\sin^2\frac{1}{2}u}-\frac{1}{\left(\frac{1}{2}u\right)^2}\right\}\varphi(u)\,du\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{n}\int_0^\delta\left\{\frac{1}{\sin^2\frac{1}{2}u}-\frac{1}{\left(\frac{1}{2}u\right)^2}\right\}|\varphi(u)|\,du,$$

а правая часть стремится к нулю.

13.3.2. Теорема Фейера. *Ряд Фурье функции $f(x)$ суммируем $(C, 1)$ к сумме $\frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\}$ в каждой точке x, в которой это выражение имеет смысл. В частности, ряд суммируем $(C, 1)$ к сумме $f(x)$ всюду, где функция $f(x)$ непрерывна.*

Мы полагаем в предыдущей формуле $s=\frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\}$. Тогда $\varphi(u)\to 0$ вместе с u, и мы должны доказать, что выполняется соотношение § 13.3.1 (4). Пусть $|\varphi(u)|\leqslant\varepsilon$ при $u\leqslant\eta$. Тогда

$$\left|\frac{1}{n}\int_0^\delta\frac{\sin^2\frac{1}{2}nu}{u^2}\varphi(u)\,du\right|\leqslant\frac{1}{n}\int_0^\eta\frac{\sin^2\frac{1}{2}nu}{u^2}\varepsilon\,du+$$

$$+\frac{1}{n}\int_\eta^\delta\frac{\sin^2\frac{1}{2}nu}{u^2}|\varphi(u)|\,du\leqslant\frac{\varepsilon}{n}\int_0^\eta\frac{\sin^2\frac{1}{2}nu}{u^2}du+\frac{1}{n}\int_\eta^\delta\frac{|\varphi(u)|}{u^2}du=I_1+I_2.$$

Но

$$\frac{1}{n}\int_0^\eta\frac{\sin^2\frac{1}{2}nu}{u^2}du=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}n\eta}\frac{\sin^2 v}{v^2}dv<\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{\sin^2 v}{v^2}dv.$$

Справа стоит постоянная, и, следовательно, $I_1<A\varepsilon$. Наконец, очевидно, что если η фиксировано, то $I_2\to 0$ при $n\to\infty$. Этим теорема доказана.

13.3.3. Суммируемость в целом интервале. Следующая теорема является почти непосредственным следствием изложенного в предыдущем параграфе.

Ряд Фурье функции $f(x)$ равномерно суммируем к $f(x)$ во всяком интервале, внутреннем к интервалу непрерывности.

Действительно, в таком интервале функция $f(x)$ равномерно непрерывна, так что выбор η в предыдущем доказательстве зависит только от ε, т. е. не зависит от x. В остальном доказательство остается прежним.

Аппроксимационная теорема Вейерштрасса. *Для всякой функции $f(x)$, непрерывной в интервале (a, b), и всякого положительного числа ε существует такой многочлен $p(x)$, что*

$$|f(x)-p(x)|<\varepsilon \qquad (a \leqslant x \leqslant b).$$

Надлежащим предварительным преобразованием можно добиться того, чтобы рассматриваемый интервал лежал внутри интервала $(0, 2\pi)$. В силу предыдущей теоремы существует такой «тригонометрический многочлен» $\sigma_n(x)$, что $|f(x)-\sigma_n(x)|<\frac{1}{2}\varepsilon$ во всем интервале. Если мы заменим теперь в этом многочлене каждый синус и каждый косинус достаточно большим числом членов соответствующего степенного ряда, то мы получим такой многочлен $p(x)$, что $|\sigma_n(x)-p(x)|<\frac{1}{2}\varepsilon$ во всем интервале. Этим теорема доказана.

13.3.4. Суммируемость почти всюду. Пока мы ограничивались обычной сходимостью, мы не могли доказать, что ряд Фурье представляет функцию в целом, не налагая на функцию сильных ограничений. Теория суммируемости устраняет этот недостаток.

Теорема Фейера—Лебега. *Ряд Фурье функции $f(x)$ суммируем $(C, 1)$ к сумме $f(x)$ при каждом значении x, для которого*

$$\int_0^t |f(x+u)-f(x)|\,du = o(t). \tag{1}$$

В частности, он суммируем $(C, 1)$ к $f(x)$ почти всюду.

В § 11.6 было доказано, что условие (1) выполнено почти всюду для всякой интегрируемой функции. Благодаря этому вторая часть теоремы сразу получается из первой.

Пусть x — точка, в которой условие (1) выполнено. Положим в формулах § 13.3.1 $s=f(x)$. Мы можем написать:

$$\int_0^t |\varphi(u)|\,du = \int_0^t |f(x+u)+f(x-u)-2f(x)|\,du \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^t |f(x+u)-f(x)|\,du + \int_0^t |f(x-u)-f(x)| = o(t).$$

Положим

$$\Phi(t)=\int_0^t |\varphi(u)|\,du$$

и найдем для заданного ε такое η, что $\Phi(t) < \varepsilon t$ при $t \leqslant \eta$. Далее, предполагая, что $n > \frac{1}{\eta}$, напишем:

$$\int_0^\delta \frac{\sin^2 \frac{1}{2} nu}{u^2} \varphi(u)\, du = \int_0^{\frac{1}{n}} + \int_{\frac{1}{n}}^{\eta} + \int_\eta^\delta = I_1 + I_2 + I_3.$$

Так как $\sin^2 \theta \leqslant \theta^2$, то

$$|I_1| \leqslant \left(\frac{1}{2} n\right)^2 \int_0^{\frac{1}{n}} |\varphi(u)|\, du < \frac{1}{4} \varepsilon n,$$

$$|I_2| \leqslant \int_{\frac{1}{n}}^{\eta} \frac{|\varphi(u)|}{u^2}\, du = \frac{\Phi(\eta)}{\eta^2} - n^2 \Phi\left(\frac{1}{n}\right) + 2 \int_{\frac{1}{n}}^{\eta} \frac{\Phi(u)}{u^3}\, du <$$

$$< \frac{\varepsilon}{\eta} + 2\varepsilon \int_{\frac{1}{n}}^{\eta} \frac{du}{u^2} < \frac{\varepsilon}{\eta} + 2\varepsilon n < 3\varepsilon n$$

и, очевидно,

$$|I_3| < \frac{A}{\eta^2}.$$

Следовательно,

$$\left| \frac{1}{n} \int_0^\delta \frac{\sin^2 \frac{1}{2} nu}{u^2} \varphi(u)\, du \right| < \frac{1}{4} \varepsilon + 3\varepsilon + \frac{A}{n \eta^2},$$

и, чтобы закончить доказательство, остается выбрать надлежащим образом сначала ε, затем η и, наконец, n.

13.3.5. Непосредственным следствием доказанной теоремы является тот факт, что *тригонометрический ряд не может быть рядом Фурье двух функций, отличающихся друг от друга на множестве положительной меры.* Действительно, если он является рядом Фурье функции $f(x)$ и функции $g(x)$, то он почти всюду суммируем $(C, 1)$ как к $f(x)$, так и к $g(x)$, а тогда $f(x) = g(x)$ почти всюду.

13.4. Непрерывная функция с расходящимся рядом Фурье. Мы видели, что непрерывность функции является достаточным условием суммируемости $(C, 1)$ ее ряда Фурье. Однако для сходимости ряда мы должны были искать другие условия. Что это соответствует действительному положению вещей, показывает следующий пример, построенный Фейером *). Это — пример ряда Фурье, который расходится в некоторой точке, несмотря на то, что породившая его функция непрерывна.

13.4.1. Прежде всего нам нужна одна лемма.

Сумма

$$\varphi(n, r, x) = \frac{\cos(r+1)x}{2n-1} + \frac{\cos(r+2)x}{2n-3} + \ldots + \frac{\cos(r+n)x}{1} - \\ - \frac{\cos(r+n+1)x}{1} - \frac{\cos(r+n+2)x}{3} - \ldots - \frac{\cos(r+2n)x}{2n-1}$$

ограничена для всех значений n, r *и* x.

Действительно,

$$\varphi(n, r, x) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\cos(r+n-\nu+1)x}{2\nu-1} - \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\cos(r+n+\nu)x}{2\nu-1} =$$

$$= 2\sin\left(r+n+\frac{1}{2}\right)x \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\sin\left(\nu-\frac{1}{2}\right)x}{2\nu-1} =$$

$$= 2\sin\left(r+n+\frac{1}{2}\right)x \left\{ \sum_{\lambda=1}^{2n} \frac{\sin\frac{1}{2}\lambda x}{\lambda} - \frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{n} \frac{\sin\mu x}{\mu} \right\},$$

суммы же, стоящие в скобках, ограничены (§ 1.7.6).

13.4.2. Пусть G_n — последовательность $2n$ чисел

$$\frac{1}{2n-1}, \frac{1}{2n-3}, \ldots, \frac{1}{3}, 1, -1, -\frac{1}{3}, \ldots, -\frac{1}{2n-1}$$

и $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ — какая-нибудь возрастающая последовательность целых положительных чисел. Расположим в одну последовательность все числа всех групп $G_{\lambda_1}, G_{\lambda_2}, \ldots$, умножив все числа группы G_{λ_ν} на ν^{-2}. Мы получим последовательность

$$\frac{1}{1^2}\frac{1}{2\lambda_1-1}, \ldots, -\frac{1}{1^2}\frac{1}{2\lambda_1-1}, \frac{1}{2^2(2\lambda_2-1)}, \frac{1}{2^2(2\lambda_2-3)}, \ldots,$$

члены которой обозначим по порядку через $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos nx. \tag{1}$$

Предположим сначала, что члены, отвечающие каждой из групп G_n, взяты в скобки. Тогда получится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(\lambda_n, 2\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+2\lambda_{n-1}, x)}{n^2}, \tag{2}$$

*) Fejér [2], [3], [4].

который в силу леммы абсолютно и равномерно сходится. Сумма $f(x)$ ряда (2) есть, таким образом, непрерывная функция.

Покажем, что (1) есть ряд Фурье функции $f(x)$. Так как ряд (2) равномерно сходится, то его можно умножить на $\cos mx$ с $m \geqslant 1$ и почленно проинтегрировать. Интегралы всех членов, кроме члена, содержащего $\alpha_m \cos mx$, будут равны нулю, и мы получим равенство

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos mx \, dx = \pi \alpha_m.$$

Таким образом, α_m есть коэффициент Фурье функции $f(x)$, стоящий при $\cos mx$. Аналогично доказывается, что остальные коэффициенты Фурье равны нулю.

Покажем, наконец, что числа λ_n можно выбрать так, чтобы ряд (1) расходился в точке $x = 0$, т. е. чтобы расходился ряд $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots$ Обозначим n-ю частичную сумму этого ряда через s_n. Мы можем написать:

$$s_{2\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + 2\lambda_{\nu-1} + \lambda_\nu} = \frac{1}{\nu^2}\left(\frac{1}{2\lambda_\nu - 1} + \frac{1}{2\lambda_\nu - 3} + \ldots + \frac{1}{3} + 1\right) \sim \frac{\log \lambda_\nu}{2\nu^2}.$$

Следовательно, если λ_ν стремится к бесконечности достаточно быстро, например, если $\lambda_\nu = \nu^{\nu^2}$, то $s_n \to \infty$, когда $n \to \infty$ по некоторой последовательности значений. В этом случае ряд расходится.

13.4.3. Пример Фейера, соединенный с простым рассуждением, основанным на интегральной формуле Дирихле, позволяет судить о том, как велики могут быть частичные суммы s_n ряда Фурье непрерывной функции.

Если функция $f(x)$ непрерывна, то

$$s_n = o(\log n).$$

Ничего большего утверждать нельзя: для всякой монотонно стремящейся к нулю положительной функции $\psi(n)$ существует такая непрерывная функция $f(x)$, что для бесконечного множества значений n

$$s_n > \psi(n) \log n.$$

Чтобы доказать первую часть, мы покажем, что

$$\int_0^{\delta} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) u}{u} \varphi(u) \, du = o(\log n),$$

если $\varphi(u)\to 0$ при $u\to 0$. Пусть $|\varphi(u)|<\varepsilon$ при $u\leqslant\eta$. Если $n+\frac{1}{2}>\frac{1}{\eta}$, то

$$\int_0^\delta \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)}{u}\varphi(u)\,du=\int_0^{\frac{1}{n+1/2}}+\int_{\frac{1}{n+1/2}}^{\eta}+\int_\eta^\delta=I_1+I_2+I_3,$$

и остается воспользоваться неравенствами

$$|I_1|\leqslant\left(n+\frac{1}{2}\right)\int_0^{\frac{1}{n+1/2}}|\varphi(u)|\,du<\varepsilon,$$

$$|I_2|\leqslant\int_{\frac{1}{n+\frac{1}{2}}}^{\eta}\frac{\varepsilon}{u}\,du<\varepsilon\log\left(n+\frac{1}{2}\right),\qquad |I_3|\leqslant\frac{1}{\eta}\int_\eta^\delta|\varphi(u)|\,du.$$

Чтобы доказать вторую часть, нужно лишь взять числа λ_ν в примере Фейера достаточно большими. Пусть $\lambda_\nu>2\nu$, и пусть

$$n=2\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+2\lambda_{\nu-1}+\lambda_\nu.$$

Тогда

$$\lambda_\nu<n<2\nu\lambda_\nu<\lambda_\nu^2$$

и $s_n>\psi(n)\log n$ для достаточно больших значений ν, если

$$\frac{\log\lambda_\nu}{2\nu^2}>\psi(n)\log n.$$

Так как $\psi(n)\log n<\psi(\lambda_\nu)\log\lambda_\nu^2$, то это условие выполнено, если

$$\psi(\lambda_\nu)<\frac{1}{4\nu^2},$$

последнее же обеспечено, если λ_ν достаточно быстро стремится к бесконечности.

13.5. Интегрирование рядов Фурье. *Всякий ряд Фурье можно интегрировать в любых пределах — независимо от того, сходится он или не сходится. Это значит, что сумма ряда интегралов членов ряда всегда равна интегралу функции, для которой он служит рядом Фурье.*

Пусть a_n, b_n — коэффициенты Фурье функции $f(x)$. Положим:

$$F(x)=\int_0^x\left\{f(t)-\frac{1}{2}a_0\right\}dt.$$

Функция $F(x)$ периодична с периодом 2π, непрерывна и имеет ограниченную вариацию. Следовательно, она может быть разложена при всех значениях x в ряд Фурье:

$$F(x)=\frac{1}{2}A_0+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos nx+B_n\sin nx).$$

Здесь

$$A_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}F(x)\cos nx\,dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[F(x)\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{2\pi}-\frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi}\left\{f(x)-\frac{1}{2}a_0\right\}\sin nx\,dx=$$

$$=-\frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\,dx=-\frac{b_n}{n},$$

$$B_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}F(x)\sin nx\,dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[-F(x)\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{2\pi}+\frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi}\left\{f(x)-\frac{1}{2}a_0\right\}\cos nx\,dx=$$

$$=\frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{a_n}{n};$$

внеинтегральные члены пропадают, так как $F(2\pi)=F(0)=0$. Таким образом,

$$F(x)=\frac{1}{2}A_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\sin nx-b_n\cos nx}{n}.$$

Полагая $x=0$, мы видим, что $\frac{1}{2}A_0=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}$. Окончательно:

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\sin nx+b_n(1-\cos nx)}{n}.$$

Этим теорема доказана.

13.5.1. Интересный факт, содержащийся в доказанной теореме, состоит в том, что *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}$ *сходится*. Это замечание дает нам возможность строить сходящиеся тригонометрические ряды, не являющиеся рядами Фурье. Простым примером служит ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{\log n}$. Он сходится при всех значениях x, но не может быть рядом Фурье своей суммы, так как ряд $\sum \frac{1}{n \log n}$ расходится. Сумма этого тригонометрического ряда не интегрируема по Лебегу, и нетрудно доказать непосредственно, что сумма проинтегрированного ряда $\sum \frac{\cos nx}{n \log n}$ стремится к бесконечности, когда $x \to 0$.

13.5.2. Нижеследующее другое доказательство предыдущей теоремы об интегрировании также представляет интерес. Мы знаем, что ряд

$$\frac{\sin (x-t)}{1} + \frac{\sin 2(x-t)}{2} + \ldots$$

ограниченно сходится к своей сумме $\varphi(t)$. Умножим его на $\frac{1}{\pi} f(t)$ и проинтегрируем почленно в интервале $(0, 2\pi)$. Мы получим:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \int_0^{2\pi} \sin n(x-t) f(t)\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \sin nx - b_n \cos nx}{n}.$$

С другой стороны,

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(t) f(t)\, dt = \frac{1}{\pi} \int_{x-2\pi}^{x} \varphi(t) f(t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{x-2\pi}^{x} \frac{1}{2} (\pi - x + t) f(t)\, dt = \frac{1}{2\pi} [(\pi - x + t) F(t)]_{x-2\pi}^{x} -$$

$$- \frac{1}{2\pi} \int_{x-2\pi}^{x} F(t)\, dt = F(x) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(t)\, dt,$$

где $F(x)$ обозначает то же, что в § 13.5. Мы воспользовались тем, что $F(x - 2\pi) = F(x)$. Заканчивается доказательство так же, как в § 13.5.

13.5.3. Близкий метод приводит к следующей более общей теореме об интегрировании.

Ряд Фурье можно умножить на любую функцию ограниченной вариации и почленно проинтегрировать в любых конечных пределах.

Пусть

$$g(x) = \frac{1}{2} \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx)$$

— функция ограниченной вариации. Так как ряд ограниченно сходится (§ 13.2.3.2), то его можно умножить на любую интегрируемую функцию $f(x)$ и почленно проинтегрировать в интервале $(0, 2\pi)$. Мы получим равенство

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,g(x)\,dx = \frac{1}{2}a_0\alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\alpha_n + b_n\beta_n), \tag{1}$$

где a_n, b_n — коэффициенты Фурье функции $f(x)$. Это — как раз то, что мы получили бы, если бы умножили ряд Фурье функции $f(x)$ на $g(x)$ и проинтегрировали его почленно в интервале $(0, 2\pi)$.

Чтобы получить тот же результат для других областей интегрирования, достаточно заменить вне области интегрирования функцию $g(x)$ нулем.

13.5.4. Теорема Парсеваля. Если $f(x)$ — функция ограниченной вариации, то в формуле § 13.5.3 (1) можно положить $g(x) = f(x)$, и, следовательно,

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\{f(x)\}^2\,dx = \frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2).$$

Это соотношение известно как теорема Парсеваля. Мы покажем в § 13.6.3, что оно верно при гораздо более широких условиях.

13.6. Функции класса L^2. Пусть $f(x)$ — функция класса $L^2(0, 2\pi)$ с коэффициентами Фурье a_n, b_n. Тогда функция

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{1}{2}a_0 - \sum_{m=1}^{n}(a_m\cos mx + b_m\sin mx)$$

также принадлежит к L^2, и, согласно формуле Эйлера — Фурье,

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\{\varphi(x)\}^2\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\{f(x)\}^2\,dx + \frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{m=1}^{n}(a_m^2 + b_m^2) -$$
$$- \frac{a_0}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx - \frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{n}\int_0^{2\pi}(a_m\cos mx + b_m\sin mx)\,f(x)\,dx =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\{f(x)\}^2\,dx - \frac{1}{2}a_0^2 - \sum_{m=1}^{n}(a_m^2 + b_m^2).$$

Так как левая часть неотрицательна, то из этого равенства следует, что при любом значении n

$$\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{m=1}^{n}(a_m^2 + b_m^2) \leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\{f(x)\}^2\,dx. \tag{1}$$

Это соотношение известно как неравенство Бесселя.

Так как правая часть неравенства (1) не зависит от n, то из него следует, что *ряд*

$$\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{m=1}^{\infty}(a_m^2+b_m^2) \tag{2}$$

сходится и

$$\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{m=1}^{\infty}(a_m^2+b_m^2)\leqslant\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\{f(x)\}^2\,dx. \tag{3}$$

13.6.1. Теорема Парсеваля для непрерывных функций. Мы видели, что для функций ограниченной вариации предыдущее неравенство превращается в равенство (равенство Парсеваля). Следующие соображения показывают, что это равенство верно и для непрерывных функций. Если функция $f(x)$ непрерывна, то $\sigma_n(x)$ равномерно стремится к $f(x)$ и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\{f(x)-\sigma_n(x)\}f(x)\,dx=0.$$

Но

$$\sigma_n(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{m=1}^{n-1}(a_m\cos mx+b_m\sin mx)\left(1-\frac{m}{n}\right),$$

и вычисляя интеграл, как в предыдущем параграфе, мы видим, что

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\{f(x)\}^2\,dx-\frac{1}{2}a_0^2-\sum_{m=1}^{n-1}(a_m^2+b_m^2)\left(1-\frac{m}{n}\right)\to 0.$$

Этим доказана формула, в которую переходит равенство Парсеваля при замене сходимости ряда суммированием $(C, 1)$. Но так как (согласно § 13.6) этот ряд сходится, то (согласно § 13.3) формула верна и в обычном смысле.

Это доказательство нетрудно распространить на функции, имеющие простые разрывы. В действительности же теорема Парсеваля верна для всех функций класса L^2. Мы выведем это из теоремы следующего параграфа.

13.6.2. Теорема Рисса—Фишера. Пусть

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \tag{1}$$

— тригонометрический ряд, коэффициенты которого удовлетворяют тому единственному условию, что ряд § 13.6 (2) сходится.

До сих пор мы не доказали в настоящей главе ничего, что позволило бы решить, является ли такой ряд рядом Фурье. Проблема решается с помощью теории сходимости в среднем (§ 12.5). Именно для решения этой проблемы и была первоначально построена указанная теория.

Нижеследующая теорема была почти одновременно доказана Ф. Риссом и Фишером *).

Если числа a_n, b_n таковы, что ряд § 13.6 (2) *сходится, то* (1) *есть ряд Фурье некоторой функции $f(x)$ класса L^2. В этом случае частичная сумма ряда сходится в среднем к $f(x)$.*

Обозначив n-ю частичную сумму ряда (1) через $s_n(x)$, мы можем написать:

$$\int_0^{2\pi}\{s_n(x)-s_m(x)\}^2\,dx=\int_0^{2\pi}\left\{\sum_{\nu=m+1}^{n}(a_\nu\cos\nu x+b_\nu\sin\nu x)\right\}^2 dx=$$
$$=\pi\sum_{\nu=m+1}^{n}(a_\nu^2+b_\nu^2);$$

все остальные члены исчезают при интегрировании. Когда m и n независимо друг от друга стремятся к бесконечности, правая часть стремится к нулю. Следовательно, $s_n(x)$ сходится в среднем к некоторой функции $f(x)$ класса L^2.

Согласно § 12.5.3

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}s_n(x)\cos\nu x\,dx=\int_0^{2\pi}f(x)\cos\nu x\,dx.$$

Но при $n\geqslant\nu$ интеграл, стоящий слева, равен πa_ν. Следовательно, $a_\nu=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}f(x)\cos\nu x dx$, т. е. a_ν есть коэффициент Фурье функции $f(x)$, стоящий при $\cos\nu x$. Точно так же b_ν есть коэффициент Фурье функции $f(x)$, стоящий при $\sin\nu x$. Таким образом, исходный тригонометрический ряд есть ряд Фурье функции $f(x)$.

Важное замечание: мы достигли пункта, где, впервые в излагаемой теории, переход от интеграла Римана к интегралу Лебега становится неизбежным. Бóльшая часть предыдущего верна для интегралов Римана и элементарно определенных абсолютно сходящихся интегралов. Здесь же, как показывает теорема Рисса — Фишера, лебеговское обобщение интеграла действительно необходимо.

13.6.3. Теорема Парсеваля для функций класса L^2. Пусть $f(x)$ — функция, принадлежащая к $L^2(0, 2\pi)$, и a_n, b_n —

*) F. Riesz [1], Fischer [1].

ее коэффициенты Фурье. Тогда ряд § 13.6 (2) сходится. Следовательно (теорема Рисса — Фишера), частичные суммы $s_n(x)$ сходятся в среднем к некоторой функции $g(x)$ с рядом Фурье § 13.6.2 (1). Согласно § 13.3.5, $g(x)=f(x)$ почти всюду. Наконец, согласно § 12.5.2,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}\{s_n(x)\}^2\,dx=\int_0^{2\pi}\{f(x)\}^2\,dx,$$

и, вычисляя стоящий слева интеграл, мы получаем формулу Парсеваля.

Более общая формула § 13.5.3 (1) *также верна для любых функций класса* L^2. Действительно, если $f(x)$ и $g(x)$ принадлежат к L^2, то формула Парсеваля верна для $f(x)+g(x)$ и $f(x)-g(x)$, откуда формула § 13.5.3 (1) получается вычитанием.

13.7. Свойства коэффициентов Фурье. Первоначально коэффициенты Фурье были только материалом, из которого строился ряд Фурье. Но эти коэффициенты и сами по себе обладают интересными свойствами. Неравенство Бесселя и теоремы Парсеваля и Рисса — Фишера привлекают внимание к проблеме поведения коэффициентов Фурье функций данных классов и дают о нем некоторые важные сведения.

Первая теорема этого рода (§ 13.2.2) состоит в том, что *коэффициенты Фурье всякой интегрируемой функции стремятся к нулю.* Однако нельзя указать никакого определенного порядка стремления их к нулю. Это значит, что всякая теорема вроде «$a_n=O\left(\frac{1}{\log n}\right)$ для всех интегрируемых функций» заведомо неверна. Действительно, рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos k_n x}{n^2},$$

где k_1, k_2, ... — положительные целые числа. Ряд равномерно сходится и потому является рядом Фурье своей суммы. При этом

$$a_{k_n}=\frac{1}{n^2},$$

чем и опровергается любая теорема указанного типа, поскольку последовательность k_1, k_2, ... может стремиться к бесконечности как угодно быстро.

13.7.1. Предположим теперь, что $f(x)$ принадлежит классу L^2. Это не позволяет нам доказать что-либо большее о порядке коэффициентов; действительно, функция, определенная предыдущим рядом, непрерывна и потому принадлежит к L^2. Но мы получаем определенный результат, касающийся *среднего* порядка: ряд

$$\sum (a_n^2+b_n^2)$$

сходится (§ 13.6).

Этот результат был обобщен применительно к другим лебеговским классам: *если* $f(x)$ *принадлежит к* L^p, *где* $1<p\leqslant 2$, *то ряд*

$$\sum \left(|a_n|^{\frac{p}{p-1}}+|b_n|^{\frac{p}{p-1}}\right)$$

сходится.

Доказательство этой теоремы, однако, слишком длинно для того, чтобы мы могли изложить его здесь *).

Имеется также соответствующее обобщение теоремы Рисса — Фишера: *если ряд* $\sum (|a_n|^p+|b_n|^p)$, *где* $1<p\leqslant 2$, *сходится, то числа* a_n, b_n *являются коэффициентами Фурье некоторой функции класса* $L^{\frac{p}{p-1}}$.

Обе эти теоремы перестают быть верными при $p>2$, так что при $p\neq 2$ они не являются обратными по отношению друг к другу.

13.7.2. Мы получим новые теоремы о коэффициентах, если наложим на функцию еще более специальные ограничения. *Пусть* $f(x)$ *удовлетворяет условию Липшица порядка* α, *т. е. пусть при* $h=0$

$$f(x+h)-f(x)=O(|h|^\alpha) \qquad (0<\alpha\leqslant 1)$$

равномерно относительно x. *Тогда*

$$a_n=O(n^{-\alpha}), \quad b_n=O(n^{-\alpha}).$$

Действительно,

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx=-\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{n}}^{2\pi-\frac{\pi}{n}} f\left(\frac{\pi}{n}+t\right)\cos nt\,dt=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f\left(\frac{\pi}{n}+t\right)\cos nt dt,$$

и, следовательно,

$$a_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{f(x)-f\left(\frac{\pi}{n}+x\right)\right\}\cos nx\,dx=\int_0^{2\pi} O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)=O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Подобным же образом получается нужная оценка для b_n.

*) W. H. Young [2], [3], [5], [6]; Hausdorff [1]; F. Riesz [4].

13.7.3. Следующая теорема того же типа состоит в том, что *если* $f(x)$ — *функция ограниченной вариации, то*

$$a_n = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad b_n = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Воспользуемся представлением $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$, где $f_1(x)$ и $f_2(x)$ положительны и не убывают. В силу второй теоремы о среднем значении

$$\int_0^{2\pi} f_1(x)\cos nx\,dx = f_1(2\pi)\int_\xi^{2\pi}\cos nx\,dx = -f_1(2\pi)\frac{\sin n\xi}{n} = O\left(\frac{1}{n}\right),$$

и аналогично оцениваются остальные интегралы.

Из этой теоремы можно получить другое доказательство теоремы Жордана (§ 13.2.3.2). Если $f(x)$ — функция с ограниченной вариацией, то (по § 13.3.2) ее ряд Фурье суммируем $(C, 1)$ к сумме $\frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\}$. А так как $a_n = O(1/n)$, $b_n = O(1/n)$, то в действительности ряд сходится к этой сумме (§ 13.3, пример (VIII)).

Если $f(x)$ *есть интеграл и имеет период* 2π, *то*

$$a_n = o(1/n), \quad b_n = o(1/n).$$

Действительно, если

$$f(x) = f(0) + \int_0^x \varphi(t)\,dt \qquad (x \geqslant 0),$$

то

$$\pi a_n = \left[f(x)\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{2\pi}\varphi(x)\sin nx\,dx,$$

$$\pi b_n = \left[-f(x)\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{2\pi}\varphi(x)\cos nx\,dx.$$

Так как $f(2\pi) = f(0)$, то внеинтегральные члены равны нулю, интегралы же стремятся к нулю в силу теоремы Римана — Лебега. Этим теорема доказана.

Если производная $f'(x)$ удовлетворяет специальным условиям, подобным условию Липшица, то можно, конечно, получить и дальнейшие результаты этого рода.

13.8. Единственность тригонометрических рядов. В начале главы мы связали с каждой интегрируемой функцией особый тригонометрический ряд, называемый ее рядом Фурье, и показали, что ряд Фурье представляет, различными способами, свою функцию. Читатель может на это возразить, что мы, возможно, придали рядам Фурье чрезмерное значение и что, возможно, существуют другие типы тригонометрических рядов, в которые разлагается данная функция.

Трудно дать полное решение этой проблемы. Однако, при надлежащих предположениях о множестве точек, в которых ряд сходится, можно показать, что к данной функции может сходиться только один ряд и что, следовательно, функция, разложимая в сходящийся ряд Фурье, не может быть разложена в сходящийся ряд другого вида.

Теория была построена Риманом, Дюбуа-Реймоном и Кантором. Теорема, которую мы докажем, заключается в следующем.

Если два тригонометрических ряда сходятся к одной и той же сумме во всех точках интервала $(0, 2\pi)$ *за возможным исключением конечного числа точек, то коэффициенты этих рядов равны, т. е. ряды тождественны.*

Это не все, что известно; имеются более общие теоремы *). Однако некоторые обобщения, могущие показаться естественными, не верны; если вместо «сходятся» мы скажем «суммируемы $(C, 1)$», то, как показывает пример (III) § 13.3, теорема окажется неверной.

Вопрос о том, является ли данный тригонометрический ряд рядом Фурье, есть проблема, относящаяся к интегральным уравнениям. Заданы числа $a_0, a_1, b_1, \ldots$, и требуется узнать, существует ли интегрируемая функция $f(x)$, удовлетворяющая уравнениям Эйлера — Фурье § 13.1 (2) и (3). Этот вопрос не решается простой сходимостью ряда, так как тригонометрический ряд может всюду сходиться и не быть рядом Фурье (§ 13.5.1). Но если он сходится равномерно или ограниченно, или в среднем степени $p \geqslant 1$, то он является рядом Фурье. При этом теоремы §§ 13.6.2—13.7.1 дают условия сходимости в среднем степени $p \geqslant 2$.

Другая представляющаяся естественной теорема состояла бы в том, что если тригонометрический ряд почти всюду сходится к интегрируемой функции, то он является рядом Фурье этой функции. Однако в общем случае это неверно, и действительное положение вещей довольно сложно.

Доказательство сформулированной выше теоремы опирается на несколько лемм.

13.8.1. Лемма Кантора. *Если* $a_n \cos nx + b_n \sin nx$ *стремится к нулю при всех значениях* x *в некотором интервале, то* a_n *и* b_n *стремятся к нулю.*

Пусть $a_n \cos nx + b_n \sin nx \to 0$ в интервале (α, β). Если лемма не верна, то существуют постоянная $A > 0$ и последовательность значений n, для которых $a_n^2 + b_n^2 > A$. Когда $n \to \infty$ по этой по-

*) Hobson, *Theory of Functions*, §§ 420—450.

следовательности, функция

$$f_n(x) = \frac{(a_n \cos nx + b_n \sin nx)^2}{a_n^2 + b_n^2}$$

ограниченно стремится в интервале (α, β) к нулю, так что, в силу теоремы об ограниченной сходимости,

$$\int_\alpha^\beta f_n(x)\,dx \to 0.$$

Но вычисление показывает, что

$$\int_\alpha^\beta f_n(x)\,dx = \frac{1}{2}(\beta - \alpha) + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Полученное противоречие доказывает лемму.

13.8.2. Предположим теперь, что ряд

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{1}$$

сходится к сумме $f(x)$ в интервале (a, b) всюду, за возможным исключением конечного числа точек. Положим:

$$F(x) = \frac{1}{4}a_0 x^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{n^2}. \tag{2}$$

Так как (в силу леммы Кантора) a_n и b_n стремятся к нулю, то этот ряд равномерно сходится и функция $F(x)$ непрерывна при всех значениях x. Если бы мы могли произвести двукратное почленное дифференцирование, то нашли бы, что $F''(x) = f(x)$. Однако в общем случае это невозможно, и приходится действовать иначе.

Первая теорема Римана. *Положим*

$$G(x, h) = \frac{F(x+2h) + F(x-2h) - 2F(x)}{4h^2}. \tag{3}$$

При всяком значении x, для которого ряд (1) *сходится к* $f(x)$, $G(x, h) \to f(x)$, *когда* $h \to 0$.

Так как

$$\cos n(x+2h) + \cos n(x-2h) - 2\cos nx = -4\cos nx \sin^2 nh,$$

$$\sin n(x+2h) + \sin n(x-2h) - 2\sin nx = -4\sin nx \sin^2 nh,$$

то

$$G(x, h) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\frac{\sin^2 nh}{n^2 h^2}. \tag{4}$$

При $h \to 0$ n-й член ряда (4) стремится к n-му члену ряда (1). Поэтому достаточно доказать, что ряд (4) сходится равномерно относительно h. Пусть r_n — остаток ряда (1), состоящий из всех членов, начиная с $a_n \cos nx + b_n \sin nx$. Так как ряд сходится, то $|r_n| < \varepsilon$ при $n \geqslant N$ и

$$\sum_{n=N}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \frac{\sin^2 nh}{n^2h^2} = \sum_{n=N}^{\infty} (r_n - r_{n+1}) \left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2 =$$
$$= r_N \left(\frac{\sin Nh}{Nh}\right)^2 - \sum_{N+1}^{\infty} r_n \left[\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2 - \left\{\frac{\sin (n+1)h}{(n+1)h}\right\}^2\right].$$

Абсолютная величина правой части не превосходит

$$\varepsilon + \varepsilon \sum_{N+1}^{\infty} \sum_{nh}^{(n+1)h} \left|\frac{d}{dt}\left(\frac{\sin^2 t}{t^2}\right)\right| dt < \varepsilon + \varepsilon \int_0^{\infty} \left|\frac{d}{dt}\left(\frac{\sin^2 t}{t^2}\right)\right| dt,$$

последний же интеграл сходится. Таким образом, ряд (4) равномерно сходится.

13.8.3. Вторая теорема Римана. *Если a_n и b_n стремятся к нулю, то при всех значениях x*

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+2h) + F(x-2h) - 2F(x)}{2h} = 0.$$

Мы должны доказать, что сумма

$$a_0 h + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \frac{\sin^2 nh}{n^2 h}$$

стремится к нулю. Так как при заданном ε

$$|a_n \cos nx + b_n \sin nx| < \varepsilon \qquad (n > N)$$

и так как $\sin^2 nh \leqslant n^2h^2$, то при $n \leqslant 1/h$ абсолютная величина указанной суммы не превосходит

$$A|h| + 2 \sum_{n=1}^{N} A|h| + 2 \sum_{N < n \leqslant 1/h} \varepsilon h + 2 \sum_{n > 1/h} \frac{\varepsilon}{n^2 h} <$$
$$< AN|h| + 2\varepsilon + \frac{2\varepsilon}{h} \int_{1/h}^{\infty} \frac{du}{(u-1)^2} < AN|h| + A\varepsilon.$$

Чтобы завершить доказательство, остается выбрать достаточно малым сначала ε, а затем h.

13.8.4. Теорема Шварца. *Если функция $F(x)$ непрерывна в некотором интервале (a, b) и*

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h)+F(x-h)-2F(x)}{h^2}=0$$

при всех значениях x в этом интервале, то $F(x)$ есть линейная функция.

Выражение, стоящее слева, называется обобщенной второй производной функции $F(x)$. Если $F(x)$ имеет обыкновенную вторую производную, то обобщенная вторая производная равна ей и доказывать нечего.

Чтобы доказать теорему, рассмотрим функцию

$$\varphi(x)=F(x)-F(a)-\frac{x-a}{b-a}\{F(b)-F(a)\}.$$

Заметим, что $\varphi(a)=0$ и $\varphi(b)=0$. Покажем, что $\varphi(x)=0$ при всех значениях x. Пусть, например, $\varphi(x)$ принимает положительные значения: пусть $\varphi(c)>0$. Положим

$$\psi(x)=\varphi(x)-\frac{1}{2}\varepsilon(x-a)(b-x),$$

где ε — положительное число, столь малое, что $\psi(c)>0$. Функция $\psi(x)$ имеет положительную верхнюю грань и достигает ее, в силу своей непрерывности, в некоторой точке $x=\xi$. Очевидно,

$$\psi(\xi+h)+\psi(\xi-h)-2\psi(\xi)\leqslant 0.$$

Но

$$\frac{\psi(\xi+h)+\psi(\xi-h)-2\psi(\xi)}{h^2}=\frac{F(\xi+h)+F(\xi-h)-2F(\xi)}{h^2}+\varepsilon,$$

и при $h \to 0$ правая часть стремится к ε. Мы получили противоречие, и к подобному же противоречию приводит предположение, что $\varphi(x)$ принимает отрицательные значения. Следовательно, $\varphi(x)=0$ при всех значениях x, и $F(x)$ есть линейная функция.

13.8.5. Доказательство нашей главной теоремы основано на теореме Шварца. Достаточно доказать, что если тригонометрический ряд сходится к нулю всюду в интервале $(0, 2\pi)$, за возможным исключением конечного числа точек, то все его коэффициенты — нули. Если ряд § 13.8.2 (1) сходится в этом смысле к нулю, то функция $F(x)$ непрерывна и ее обобщенная вторая производная равна нулю всюду, за возможным исключением конечного числа точек. Следовательно, функция $F(x)$ линейна в интервалах с концами в соседних исключительных точках, и отрезки, образующие ее график, соединяются при исключительных значениях x. Беря теперь во второй теореме Римана в качестве x исключительную точку, мы видим, что эти отрезки имеют один и тот же наклон по обе стороны от этой точки. Таким образом, функция $F(x)$ линейна во всем интервале $(0, 2\pi)$, скажем

$$F(x) = ax + b,$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{n^2} = \frac{1}{4} a_0 x^2 - ax - b.$$

Так как сумма этого ряда периодична, то a_0 и a должны быть нулями. Далее, так как ряд равномерно сходится, то его можно умножить как на $\cos mx$, так и на $\sin mx$, и почленно проинтегрировать. Следовательно, при $m > 0$

$$\frac{\pi a_m}{m^2} = -b \int_0^{2\pi} \cos mx\, dx = 0, \quad \frac{\pi b_m}{m^2} = -b \int_0^{2\pi} \sin mx\, dx = 0,$$

что и завершает доказательство.

13.9. Интегралы Фурье. До сих пор все наши ряды представляли функции с периодом 2π. Ряд вида

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{nx}{\lambda} + b_n \sin \frac{nx}{\lambda} \right)$$

представляют функцию с периодом $2\pi\lambda$. Коэффициенты могут быть вычислены, как выше; мы получаем формулы:

$$a_n = \frac{1}{\pi\lambda} \int_{-\pi\lambda}^{\pi\lambda} f(t) \cos \frac{nt}{\lambda}\, dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi\lambda} \int_{-\pi\lambda}^{\pi\lambda} f(t) \sin \frac{nt}{\lambda}\, dt.$$

К таким рядам применима, конечно, вся изложенная теория.

13.9.1. Интегральная формула Фурье. Предыдущее разложение можно преобразовать к виду

$$f(x) = \frac{1}{2\pi\lambda} \int_{-\pi\lambda}^{\pi\lambda} f(t)\, dt + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi\lambda} \int_{-\pi\lambda}^{\pi\lambda} f(t) \cos \frac{n(x-t)}{\lambda}\, dt.$$

Представим себе, что $\lambda \to \infty$. Стоящий справа ряд имеет много общего с суммами, при помощи которых определяется интеграл Римана. Он может быть записан как

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_{n+1} - u_n)\, \varphi(u_n),$$

где $\varphi(u)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi\lambda}^{\pi\lambda} f(t)\cos u(x-t)\,dt$. Если мы решимся игнорировать такие затруднения, как то, что $\varphi(u)$ зависит от λ и что аппроксимирующие суммы являются бесконечными рядами, то получим после предельного перехода формулу

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} du \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos u(x-t) f(t)\,dt.$$

Это — интегральная формула Фурье. Она представляет функцию, определенную в бесконечном интервале $(-\infty, \infty)$, так же, как ряд Фурье представляет функцию с конечным периодом.

Мы встретились бы со значительными трудностями, если бы попытались провести на этом пути строгое доказательство. Но прямое изучение формулы сравнительно несложно.

13.9.2. Предположим, что функция $f(x)$ интегрируема по Лебегу в интервале $(-\infty, \infty)$. Тогда интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos u(x-t) f(t)\,dt$$

сходится равномерно относительно u в любом конечном интервале. Поэтому мы можем проинтегрировать его по u в интервале $(0, U)$ и обратить порядок интегрирования. Это приводит к равенству

$$\int\limits_{0}^{U} du \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos u(x-t) f(t)\,dt=\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin U(x-t)}{x-t} f(t)\,dt.$$

Для заданного ε существует столь большое T, что

$$\int\limits_{-\infty}^{-T} |f(t)|\,dt<\varepsilon, \quad \int\limits_{T}^{\infty} |f(t)|\,dt<\varepsilon;$$

при этом можно считать, что $T>|x|+1$, где x — фиксированное значение. При всех значениях U

$$\left|\int\limits_{-\infty}^{-T} \frac{\sin U(x-t)}{x-t} f(t)\,dt\right|<\varepsilon, \quad \left|\int\limits_{T}^{\infty} \frac{\sin U(x-t)}{x-t} f(t)\,dt\right|<\varepsilon.$$

Кроме того, при фиксированном T интегралы

$$\int\limits_{-T}^{x-\delta} \frac{\sin U(x-t)}{x-t} f(t)\,dt, \quad \int\limits_{x+\delta}^{T} \frac{\sin U(x-t)}{x-t} f(t)\,dt$$

стремятся, в силу теоремы Римана — Лебега, к нулю, когда $U \to \infty$. Следовательно,

$$\frac{1}{\pi}\int_0^U du \int_{-\infty}^{\infty} \cos u(x-t) f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{x-\delta}^{x+\delta} \frac{\sin U(x-t)}{x-t} f(t)\,dt + o(1) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta} \frac{\sin Ut}{t}\{f(x+t)+f(x-t)\}\,dt + o(1).$$

Значение предела (при $U \to \infty$) зависит поэтому только от поведения функции $f(t)$ вблизи точки $t=x$, и проблема сводится к изучению интеграла, подобного интегралу Дирихле. К этой проблеме применимы все критерии сходимости, имеющиеся в §§ 13.2.3.1 — 13.2.3.3. *В частности,*

$$\lim_{U\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_0^U du \int_{-\infty}^{\infty} \cos u(x-t) f(t)\,dt = \frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\},$$

если функция $f(t)$ интегрируема в интервале $(-\infty, \infty)$ и имеет ограниченную вариацию в некотором интервале, содержащем точку $t=x$.

13.9.3. Преобразования Фурье. Если $f(x)$ — четная функция, то интеграл Фурье принимает вид

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \cos xu\,du \int_0^{\infty} \cos ut\, f(t)\,dt; \tag{1}$$

член, содержащий $\sin ut$, тождественно равен нулю. Это — косинус-формула Фурье. Подобным же образом для нечетной функции получается синус-формула Фурье:

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \sin xu\,du \int_0^{\infty} \sin ut\, f(t)\,dt. \tag{2}$$

Если положить

$$g(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} \cos xt\, f(t)\,dt, \tag{3}$$

то формула (1) примет вид

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} \cos xt\, g(t)\,dt. \tag{4}$$

Отношения функций $f(x)$ и $g(x)$ друг к другу являются, таким образом, взаимно обратными. О двух функциях, связанных между собой в том или ином смысле формулами (3), (4), говорят, что они получаются друг из друга *косинус-преобразованием Фурье*. Если, например, $f(x)$ принадлежит к $L(0, \infty)$ и имеет ограниченную вариацию во всяком конечном интервале, то интеграл (3) абсолютно сходится и формула (4) верна в том смысле, что ее правая часть сходится (не обязательно абсолютно) к

$$\frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\}.$$

Подобным же образом из соотношения (2) получаются взаимно обратные формулы

$$h(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \sin xt\, f(t)\,dt, \qquad f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \sin xt\, h(t)\,dt; \tag{5}$$

функции $f(x)$ и $h(x)$ связаны между собой *синус-преобразованием Фурье*.

13.9.4. Интегрирование интегралов Фурье. Докажем теперь теорему, аналогичную теореме § 13.5: *формула*

$$\int_0^\xi f(x)\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin \xi u}{u}\,du\int_0^\infty \cos ut\, f(t)\,dt,$$

получающаяся при интегрировании соотношения § 13.9.3 (1), *верна для всякой функции* $f(t)$, *интегрируемой в интервале* $(0, \infty)$.

В силу равномерной сходимости,

$$\int_0^U \frac{\sin \xi u}{u}\,du\int_0^\infty \cos ut\, f(t)\,dt=\int_0^\infty f(t)\,dt\int_0^U \frac{\sin \xi u\,\cos ut}{u}\,du.$$

Внутренний интеграл справа ограничен для всех значений U и t; действительно, он равен

$$\frac{1}{2}\int_0^U \frac{\sin(\xi+t)u}{u}\,du+\frac{1}{2}\int_0^U \frac{\sin(\xi-t)u}{u}\,du=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{U(\xi+t)} \frac{\sin v}{v}\,dv \pm \frac{1}{2}\int_0^{U|\xi-t|} \frac{\sin v}{v}\,dv$$

(знак есть знак разности $\xi-t$), а $\int_0^V \frac{\sin v}{v}\,dv$ есть ограниченная функция от V. Согласно теореме Лебега об ограниченной сходимости, мы можем перейти под знаком интеграла к пределу при

$U \to \infty$. Так как

$$\int_0^\infty \frac{\sin \xi u \cos ut}{u} du = \begin{cases} \frac{1}{2}\pi & (t < \xi), \\ 0 & (t > \xi), \end{cases}$$

это дает доказываемую формулу.

Аналогичную теорему можно получить из синус-формулы Фурье.

13.9.5. Преобразования Фурье в классе L^2. Исследование, проведенное в § 13.9.3, дает условия, при которых справедливы взаимно обратные формулы Фурье. Полученные там результаты страдают, однако, тем недостатком, что, в то время как формулы симметричны относительно функций $f(x)$ и $g(x)$, условия, которым удовлетворяют эти функции, совершенно различны. Другие условия, уже вполне симметричные, можно получить, рассматривая функции класса L^2 и пользуясь теорией сходимости в среднем *).

Пусть функция $f(x)$ принадлежит классу $L^2(0, \infty)$. Тогда формулы § 13.9.3 (3) и (4) верны в том смысле, что при $a \to \infty$ интеграл

$$g_a(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a \cos xt\, f(t)\, dt \tag{1}$$

сходится в среднем к некоторой функции $g(x)$ класса $L^2(0, \infty)$, а интеграл

$$f_a(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a \cos xt\, g(t)\, dt \tag{2}$$

сходится в среднем к $f(x)$.

Мы докажем это методом, подсказанным формальной процедурой § 13.9.1. Положим:

$$a_n = \int_{n/\lambda}^{(n+1)/\lambda} f(x)\, dx \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Когда $\lambda \to \infty$, сумма $\Phi_{m,n} = \sum_{\nu=m+1}^{n} a_\nu \cos \frac{\nu x}{\lambda}$ стремится к интегралу $\int_a^b \cos ux\, f(u)\, du$, если $0 \leqslant a < b$ и $m = [\lambda a]$, $n = [\lambda b] - 1$. Действи-

*) Plancherel [1], [2], [3]; Titchmarsh [1], [3]; Hardy [12]; Pollard [1].

тельно, разность между этим интегралом и $\Phi_{m,n}$ равна

$$\sum_{\nu=m+1}^{n} \int_{\nu/\lambda}^{(\nu+1)/\lambda} \left(\cos ux - \cos\frac{\nu x}{\lambda}\right) f(u)\,du + {} \\ + \int_{a}^{(m+1)/\lambda} \cos ux f(u)\,du + \int_{(n+1)/\lambda}^{b} \cos ux f(u)\,du;$$

так как $\left|\cos ux - \cos\frac{\nu x}{\lambda}\right| \leqslant \frac{|x|}{\lambda}$, то сумма есть $O(1/\lambda)$, последние же два интеграла, очевидно, стремятся к нулю. Очевидно также, что сходимость равномерна относительно x при $0 \leqslant x \leqslant X$.

Теперь мы можем применить к $\Phi_{m,n}$ рассуждение, подобное тому, которым мы пользовались при доказательстве теоремы Рисса — Фишера. Так как

$$a_n^2 \leqslant \int_{n/\lambda}^{(n+1)/\lambda} \{f(x)\}^2\,dx \int_{n/\lambda}^{(n+1)/\lambda} dx = \frac{1}{\lambda} \int_{n/\lambda}^{(n+1)/\lambda} \{f(x)\}^2\,dx,$$

то

$$\int_0^{\pi\lambda} \Phi_{m,n}^2\,dx = \frac{1}{2}\pi\lambda \sum_{\nu=m+1}^{n} a_\nu^2 \leqslant \frac{1}{2}\pi \int_{(m+1)/\lambda}^{(n+1)/\lambda} \{f(x)\}^2\,dx \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{2}\pi \int_a^b \{f(x)\}^2\,dx,$$

и если $\pi\lambda > X$, то и подавно

$$\int_0^X \Phi_{m,n}^2\,dx \leqslant \frac{1}{2}\pi \int_a^b \{f(x)\}^2\,dx.$$

Фиксируя X и заставляя λ стремиться к ∞, мы видим, что

$$\int_0^X \{g_b(x) - g_a(x)\}^2\,dx \leqslant \int_a^b \{f(x)\}^2\,dx.$$

Заставляя теперь X стремиться к ∞, мы получаем неравенство

$$\int_0^\infty \{g_b(x) - g_a(x)\}^2\,dx \leqslant \int_a^b \{f(x)\}^2\,dx. \tag{3}$$

Правая часть, а с ней и левая часть стремится к нулю, когда $a \to \infty$, $b \to \infty$. Таким образом, $g_a(x)$ сходится в среднем к некоторой функции $g(x)$ класса $L^2(0, \infty)$.

Совершенно так же интеграл (2) сходится в среднем к некоторой функции класса L^2, скажем, $\varphi(x)$. Мы должны доказать, что $\varphi(x) = f(x)$ почти всюду. Для этого достаточно доказать, что при любом значении ξ

$$\int_0^\xi \varphi(x)\,dx = \int_0^\xi f(x)\,dx. \tag{4}$$

Мы можем написать:

$$\int_0^\xi \varphi(x)\,dx = \lim_{a\to\infty}\int_0^\xi f_a(x)\,dx = \lim_{a\to\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\xi dx\int_0^a \cos xt\,g(t)\,dt =$$

$$= \lim_{a\to\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^a \frac{\sin\xi t}{t}\,g(t)\,dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \frac{\sin\xi t}{t}\,g(t)\,dt.$$

С другой стороны, так как функция $f(x)$ интегрируема в интервале $(0, a)$, то, согласно § 13.9.4, при $0<\xi<a$

$$\int_0^\xi f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\xi u}{u}\,du\int_0^a \cos ut\,f(t)\,dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \frac{\sin\xi u}{u}\,g_a(u)\,du.$$

Переходя к пределу при $a\to\infty$ и замечая, что функция $\frac{\sin\xi u}{u}$ принадлежит к L^2, мы получаем равенство (см. § 12.5.3)

$$\int_0^\xi f(x)\,dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \frac{\sin\xi u}{u}\,g(u)\,du.$$

Этим равенство (4) доказано и доказательство теоремы доведено до конца.

Конечно, такая же теорема верна для формул § 13.9.3 (5).

13.9.6. Можно получить также формулу, соответствующую теореме Парсеваля. Полагая в неравенстве § 13.9.5 (3) $a=0$, мы видим, что

$$\int_0^\infty \{g_b(x)\}^2\,dx \leqslant \int_0^b \{f(x)\}^2\,dx \leqslant \int_0^\infty \{f(x)\}^2\,dx.$$

Заставляя затем b стремиться к ∞, мы получаем неравенство (см. § 12.5.1)

$$\int_0^\infty \{g(x)\}^2\,dx \leqslant \int_0^\infty \{f(x)\}^2\,dx.$$

Так как $f(x)$ и $g(x)$ равноправны, то верно и обратное неравенство. Таким образом, в действительности

$$\int_0^\infty \{g(x)\}^2\,dx = \int_0^\infty \{f(x)\}^2\,dx. \tag{1}$$

Наконец, если $\varphi(x)$ также принадлежит к L^2 и $\psi(x)$ получается из $\varphi(x)$ преобразованием Фурье, то $g(x)+\psi(x)$ получается преобразованием Фурье из $f(x)+\varphi(x)$. Следовательно,

$$\int_0^\infty \{g(x)+\psi(x)\}^2\,dx=\int_0^\infty \{f(x)+\varphi(x)\}^2\,dx,$$

и, вычитая из этого равенства равенство (1) и такое же равенство для φ и ψ, мы видим, что

$$\int_0^\infty g(x)\,\psi(x)\,dx=\int_0^\infty f(x)\,\varphi(x)\,dx. \qquad (2)$$

РАЗЛИЧНЫЕ ПРИМЕРЫ

1. Пусть функция $f(x)$ определена первоначально в интервале $(0, \pi)$, затем — в интервале $(-\pi, 0)$ по закону $f(-x)=f(x)$ и далее — как периодическая функция с периодом 2π. Показать, что ряд Фурье функции $f(x)$ имеет вид

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx$$

с $a_n=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi f(t)\cos nt\,dt.$

Подобным же образом, если $f(-x)=-f(x)$, то ряд Фурье имеет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin nx$$

с $b_n=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi f(t)\sin nt\,dt.$

2. Показать, что

$$e^{ax}=\frac{e^{2\pi a}-1}{\pi}\left\{\frac{1}{2a}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a\cos nx-n\sin nx}{a^2+n^2}\right\} \qquad (0<x<2\pi),$$

$$e^{ax}=\frac{e^{a\pi}-1}{a\pi}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\{(-1)^n e^{a\pi}-1\}\frac{a\cos nx}{a^2+n^2} \qquad (0<x<\pi),$$

$$e^{ax}=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\{1-(-1)^n e^{a\pi}\}\frac{n\sin nx}{a^2+n^2} \qquad (0<x<\pi).$$

Найти суммы этих рядов при $x=0$.

3. Просуммировать ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a\cos nx}{a^2+n^2},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin nx}{a^2+n^2} \qquad (0<x<2\pi).$$

4. Разложить в ряд Фурье в интервале $(0, 2\pi)$, а также в ряд Фурье по косинусам и в ряд Фурье по синусам в интервале $(0, \pi)$ функции

$$1,\ x,\ x^2,\ x^3,\ \cos ax,\ \sin ax,\ \operatorname{ch} ax,\ \operatorname{sh} ax,$$

$$e^{ax}\cos bx,\ e^{ax}\sin bx,\ [x/\pi],\ [2x/\pi].$$

Рассмотреть значения x, при которых ряды сходятся к значениям, отличным от значений разлагаемых функций.

5. Доказать, что при $-1<r<1$ для всех значений θ

$$\frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}=1+2\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\theta.$$

6. Если a_n, b_n — коэффициенты Фурье функции $f(x)$, то при $-1<r<1$

$$a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\,r^n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-t)+r^2}\,f(t)\,dt.$$

7. Доказать, что

$$\lim_{r\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-t)+r^2}\,f(t)\,dt=\frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\}$$

при всех значениях x, для которых существует правая часть.

[Изучение этого интеграла подобно изучению интеграла Фейера.]

8. Показать, что если функция $f(x)$ ограничена, то

$$s_n=O(\log n).$$

9. Показать, что если $m\leqslant f(x)\leqslant M$, то

$$m\leqslant \sigma_n(x)\leqslant M$$

при всех значениях n и x.

10. Показать, что если $m\leqslant f(x)\leqslant M$ и

$$|a_n|\leqslant\frac{A_1}{n},\quad |b_n|\leqslant\frac{A_2}{n},$$

то $m-A_1-A_2\leqslant s_n\leqslant M+A_1+A_2$.

[Воспользоваться формулой

$$s_n=\sigma_{n+1}-\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=1}^{n}\nu\,(a_\nu\cos\nu x+b_\nu\sin\nu x).\Big]$$

11. Показать, что

$$\frac{\pi-x}{2}=\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}+\ldots\qquad(0<x<2\pi),$$

и вывести из этого, что при всех значениях n и x

$$\left|\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 2x}{2}+\ldots+\frac{\sin nx}{n}\right|\leqslant\frac{1}{2}\pi+1.$$