Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон

Курс современного анализа

I

ØM

A COURSE OF MODERN ANALYSIS

AN INTRODUCTION TO THE GENERAL THEORY OF INFINITE PROCESSES AND OF ANALYTIC FUNCTIONS; WITH AN ACCOUNT OF THE PRINCIPAL TRANSCENDENTAL FUNCTIONS

BY

E. T. WHITTAKER, Sc. D., F. R. S.

Professor of Mathematics in the University of Edinburgh

AND

G. N. WATSON, Sc. D., F. R. S.

Professor of Mathematics in the University of Birmingham

FOURTH EDITION

CAMBRIDGE
AT THE UNIVERSITY PRESS
1927

Э. Т. УИТТЕКЕР, Дж. Н. ВАТСОН

КУРС СОВРЕМЕННОГО АНАЛИЗА

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ
ОСНОВНЫЕ ОПЕРАЦИИ АНАЛИЗА

ПЕРЕВОД С АНГЛИЙСКОГО
ПОД РЕДАКЦИЕЙ Ф. В. ШИРОКОВА

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1963

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

«Курс современного анализа» Уиттекера и Ватсона выдержал за рубежом несколько изданий. Начиная с четвертого издания (1927 г.) зарубежные издания стали стереотипными. Первое русское издание вышло в 1933—1934 гг. под редакцией Г. М. Голузина. Второе русское издание, предлагаемое сейчас читателю, еще раз сверено с английскими изданиями. В нем устранены замеченные опечатки, произведена незначительная модернизация терминологии и добавлены некоторые ссылки. В остальном оно сохранило стиль английской школы классического комплексного анализа (Бромуич, Барнс, Бэйли, Харди и Литлвуд, Титчмарш), с которой советский читатель знаком теперь по многочисленным переводам.

Книга разделена на две части. Первая из них содержит изложение основных вопросов комплексного анализа. Вторая часть посвящена главным образом изучению различных классов специальных функций. Хотя за тридцать лет, прошедшие с выхода первого русского издания, появилось много книг и справочников по специальным функциям (например, справочник Эрдейи, Магнуса, Оберхеттингера и Трикоми «Higher transcendental functions», тт. I—III), книга Уиттекера и Ватсона остается непревзойденной по широте охвата и четкости комплексной («современной») точки зрения на специальные функции.

В книге отсутствуют, однако, такие методы теории функций комплексного переменного, как, скажем, метод конформных отображений и метод перевала, играющие важную роль в современной теории специальных функций и в ее приложениях. В этом смысле книга не является исчерпывающей. Некоторые главы, как, например, глава о тригонометрических рядах или глава об интегральных уравнениях, сейчас были бы написаны по-иному.

Основная цель книги в целом — научить читателя обращаться со специальными функциями так же свободно, как он обращается с элементарными функциями, к которым он только и приучен школой и, увы, университетом. Специальные функции в вещественном анализе обладают «жесткостью». Методами вещественного анализа можно, например, разложить котангенс в ряд элементарных дробей. Однако решение каждой такой задачи требует своего искусственного приема.

Только при комплексном подходе «жесткие» функции вещественного анализа становятся «пластическими». Метод комплексного переменного позволяет (естественным способом!) преобразовать ряд в произведение, произведение превратить в ряд элементарных дробей, ряд элементарных дробей просуммировать и вновь свернуть в функцию и т. п. Этой комплексной «пластике» и учит читателя книга Уиттекера и Ватсона.

Огромную роль в книге играют примеры и задачи (их около тысячи в обеих частях). Трудные, а иногда и очень трудные выкладки влекут за собой свободное владение аналитическим аппаратом.

Квантовая механика, теория распространения радиоволн и многие другие дисциплины нуждаются в теории специальных функций; эту потребность и призвано удовлетворить (теперь уже только отчасти) новое издание «современного» анализа, ставшего ныне уже классическим.

Ф. Широков

ГЛАВА 1

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

1.1. Рациональные числа

Идея совокупности чисел возникает в первую очередь из рассмотрения совокупности *положительных*[1]) *целых чисел*, т. е. чисел 1, 2, 3, 4, ... Положительные целые числа обладают многими свойствами, которые излагаются в руководствах по теории чисел. Однако еще на самой ранней стадии развития математики было известно, что арифметические действия вычитания и деления выполнимы в области положительных целых чисел лишь при некоторых неудобных ограничениях. Вследствие этого в элементарной арифметике область чисел была расширена таким образом, чтобы арифметические действия вычитания и деления были всегда выполнимы в области этих чисел.

Чтобы получить класс чисел, над которыми может производиться без всяких ограничений действие вычитания, мы строим класс *целых* чисел, который содержит в себе класс положительных[2]) целых чисел ($+1$, $+2$, $+3$, ...), класс отрицательных целых чисел (-1, -2, -3, ...) и число 0.

Для того же, чтобы получить класс чисел, над которыми и вычитание и деление[3]) можно производить без всякого ограничения, мы строим класс *рациональных чисел*. Числами, принадлежащими к этому классу, будут, например, $1/2$, 3, 0, $-15/7$.

Мы, таким образом, ввели три класса чисел: (I) *беззначные целые числа*, (II) *целые числа*, (III) *рациональные числа*. В план настоящей книги не входит рассмотрение того, как строится класс целых чисел, а также логическое обоснование теории рациональных чисел[4]).

---

[1]) Строго говоря, более подходящим названием было бы не *положительные*, а *беззначные*.

[2]) В узком смысле.

[3]) За исключением деления на рациональное число 0.

[4]) Такое изложение, определяющее рациональное число как упорядоченную пару целых чисел, подобно тому как комплексное число в § 1.3 определяется как упорядоченная пара вещественных чисел, можно найти в книге Гобсона (Hobson) «Functions of a real variable», §§ 1—12. См. также Э. Ландау, Основы анализа, ИЛ, 1957.

Только что изложенное обобщение идеи числа происходило не без некоторого противодействия со стороны более консервативных математиков. В последнюю половину XVIII века Мазерес (Maseres, 1731—1824) и Френд (Frend, 1757—1841) опубликовали работы по алгебре, тригонометрии и т. д., в которых они совершенно отказались от применения отрицательных чисел, хотя Декарт свободно пользовался отрицательными числами более чем за сто лет до них.

Рациональное число x может быть наглядно представлено следующим образом.

Если на прямой взять начальную точку O и определенный отрезок OP_1 (пусть P_1 лежит справа от O), то мы можем отложить от O длину OP_x так, что отношение $\frac{OP_x}{OP_1}$ будет равно x. Точка P_x берется справа или слева от O, смотря по тому, будет ли число x положительным или отрицательным. Мы можем рассматривать или *точку* P_x, или *перемещение* OP_x (которое мы будем обозначать $\mathbf{OP}_x$) как изображение числа x.

Все рациональные числа, таким образом, могут быть представлены точками прямой; обратное же заключение будет неправильным. В самом деле, если мы отложим на прямой длину OQ, равную диагонали квадрата со стороной OP_1, то можно доказать, что точка Q не будет соответствовать никакому рациональному числу.

Будем считать, что точки, не представляющие рациональных чисел, представляют *иррациональные* числа. Так, точка Q изображает собою иррациональное число $\sqrt{2} = 1{,}414213\ldots$ Если такое разъяснение существования иррациональных чисел удовлетворяло математиков XVIII столетия и, может быть, еще является удовлетворительным для тех, интересы которых направлены более к приложениям математики, чем к выяснению логических основ самой теории, то с логической точки зрения замена арифметического доказательства существования иррационального числа интуитивными геометрическими представлениями является неправильной. Дедекинд (Dedekind) в 1858 г. доказал, что теория иррациональных чисел может быть построена на чисто арифметической основе, без помощи геометрии.

1.2. Теория иррациональных чисел Дедекинда[1])

Геометрическое свойство точек прямой, послужившее исходным пунктом построения арифметической теории иррациональных чисел, заключается в том, что если все точки прямой разделены на два класса таким образом, что каждая точка первого класса расположена правее каждой точки второго класса, то на прямой имеется одна и только одна точка, которая производит указанное разделение точек на прямой.

---

[1]) Теория, разработанная в 1858 г., не была, однако, опубликована ранее появления труда Дедекинда «Stetigkeit und irrationale Zahlen», Braunschweig, 1872. Другие теории принадлежат Вейерштрассу (см. von Dantscher, Die Weierstrass'sche Theorie der irrationalen Zahlen, Leipzig, 1908) и Кантору (Cantor, Math. Ann., 123—130 (1872)).

Следуя этой идее, Дедекинд установил правила, по которым может быть осуществлено разделение, или *сечение*[1]), *всех* рациональных чисел на два класса так, чтобы эти классы (которые назовем: классом L и классом R или левым и правым классами) обладали следующими свойствами:

(I) существует по крайней мере одно число каждого класса;

(II) каждое число класса L меньше каждого числа класса R.

Ясно, что такое сечение производится любым рациональным числом x, и x будет наибольшим числом класса L, или наименьшим числом класса R. Но можно произвести сечения, в которых никакое рациональное число x не будет обладать этим свойством. Например, так как нет такого рационального числа, квадрат которого был бы равен 2 [2]), то мы можем образовать сечение, в котором класс R содержит положительные рациональные числа, квадраты которых превосходят 2, а класс L — все остальные рациональные числа.

Тогда это сечение будет таково, что класс R не будет иметь наименьшего числа, а класс L — наибольшего числа. В самом деле, если x будет каким-либо положительным рациональным числом и $y = \frac{x(x^2+6)}{3x^2+2}$, то тогда $y - x = \frac{2x(2-x^2)}{3x^2+2}$ и $y^2 - 2 = \frac{(x^2-2)^3}{(3x^2+2)^2}$, и x^2, y^2 и 2 будут расположены в порядке возрастания или убывания; поэтому, если будет дано какое-нибудь число x класса L, то мы можем всегда найти большее число того же класса L, и, если будет дано какое-либо число x' класса R, мы можем всегда найти меньшее число класса R; такими числами могут быть, например, y и y', где y' будет определяться той же самой функцией от x', как и y от x.

Если произведено сечение, при котором класс R имеет наименьшее число A_2 или класс L имеет наибольшее число A_1, то это сечение определит *рациональное вещественное число*, которое принято обозначать тем же самым символом A_2 или A_1 [3]).

---

[1]) Этот процесс составлял основу рассмотрения иррациональных чисел греческих математиков в VI и V веках до нашей эры. Прогресс, достигнутый Дедекиндом, заключался в том, что он заметил, что на этом процессе может быть построена чисто арифметическая теория иррациональных чисел.

[2]) Если $\frac{p}{q}$ будет таким числом с наименьшим возможным знаменателем, то легко видеть, что $\frac{2q-p}{p-q}$ будет другим таким числом и $0 < p - q < q$, так что $\frac{p}{q}$ не будет таким числом с наименьшим возможным знаменателем. Это противоречие приводит к заключению, что такого рационального числа существовать не может.

[3]) Это не вызывает на практике никакой путаницы.

Если произведено такое сечение, что класс R не имеет наименьшего, а класс L наибольшего числа, то оно определяет *иррациональное вещественное число*[1]).

Если x, y — вещественные числа (определяемые сечениями), то мы говорим, что x больше, чем y, если класс L, определяющий x, содержит по крайней мере два[2]) числа класса R, определяющего y.

Пусть α, β, ... — вещественные числа, A_1, B_1, ... — какие-либо числа соответствующих классов L, а A_2, B_2, ... — какие-либо числа соответствующих классов R. Классы, элементами которых будут соответственно A_1, A_2, ..., будем обозначать символами (A_1), (A_2), ...

Тогда *суммой* (обозначаемой $\alpha+\beta$) двух вещественных чисел α и β будем называть такое вещественное число (рациональное или иррациональное), которое определяется классом (A_1+B_1) как классом L и классом (A_2+B_2) как классом R.

Конечно, необходимо доказать, что эти классы определяют сечение рациональных чисел. Ясно, что $A_1+B_1<A_2+B_2$ и что существует по крайней мере одно число каждого из классов (A_1+B_1), (A_2+B_2). Остается доказать, что существует не более *одного* рационального числа, большего, чем любое из чисел A_1+B_1, и меньшего, чем любое из чисел A_2+B_2; для этого допустим, что имеются два таких числа x и y $(x<y)$. Пусть a_1 будет число из (A_1) и a_2 — число из (A_2), и пусть N будет ближайшее целое число, большее, чем $\dfrac{a_2-a_1}{\frac{1}{2}(y-x)}$.

Возьмем последнее из чисел $a_1+\frac{m}{N}(a_2-a_1)$ $(m=0, 1, \ldots, N)$, принадлежащее к (A_1), и первое из чисел, принадлежащее к (A_2); пусть этими числами будут c_1 и c_2. Тогда $c_2-c_1=\frac{1}{N}(a_2-a_1)<\frac{1}{2}(y-x)$.

Выберем d_1 и d_2 подобным же образом из классов, определяющих β; тогда

$$c_2+d_2-c_1-d_1<y-x.$$

Но $c_2+d_2\geqslant y$; $c_1+d_1\leqslant x$; поэтому $c_2+d_2-c_1-d_1\geqslant y-x$; таким образом, мы пришли к противоречию, предполагая, что существуют два рациональных числа x, y, не принадлежащие ни к (A_1+B_1), ни к (A_2+B_2).

Если всякое рациональное число принадлежит или к классу (A_1+B_1), или к классу (A_2+B_2), то классы (A_1+B_1), (A_2+B_2) определяют иррациональное число. Если существует одно рациональное число x, не

---

[1]) Б. Рассел (B. A. W. Russel) определяет класс вещественных чисел просто как *класс всех классов* L; класс вещественных чисел, классы L которых имеют наибольшее число, соответствует классу рациональных чисел, и, хотя рациональное вещественное число x, соответствующее рациональному числу x, будет как понятие отличаться от него, обозначение обоих одним и тем же символом не вызывает никакой путаницы.

[2]) Если эти два класса имеют только одно число общим, то оно может оказаться наибольшим среди чисел класса L числа x и наименьшим среди чисел класса R числа y.

принадлежащее ни к какому классу, то тогда класс L, образованный из x, (A_1+B_1), и класс R, образованный из (A_2+B_2), определяют рациональное вещественное число x. В обоих случаях определяемое число называется суммой $\alpha+\beta$.

Разность $\alpha-\beta$ двух вещественных чисел определяется классом (A_1-B_2) как классом L и классом (A_2-B_1) как классом R.

Произведение двух положительных вещественных чисел α и β определяется классом (A_2B_2) как классом R и классом L, состоящим из всех остальных рациональных чисел. Читатель легко сообразит, как определить произведение отрицательных вещественных чисел и частное двух вещественных чисел. Можно доказать, что вещественные числа можно комбинировать согласно сочетательному, распределительному и переместительному законам.

Совокупность вещественных рациональных и вещественных иррациональных чисел называется совокупностью вещественных чисел; для краткости вещественные рациональные числа и иррациональные числа называются, соответственно, рациональными и иррациональными числами.

1.3. Комплексные числа

Мы видели, что вещественное число может быть представлено наглядно как перемещение вдоль определенной прямой. Если же P и Q — две какие-либо точки на плоскости, то для определения перемещения $\boldsymbol{PQ}$ требуется уже два вещественных числа, например разности координат точек P и Q, отнесенных к неподвижным прямоугольным осям. Если координаты P суть (ξ, η), а $(\xi+x, \eta+y)$ — координаты Q, то перемещение $\boldsymbol{PQ}$ может быть обозначено символом $[x, y]$. Таким образом, мы должны в этом случае рассматривать упорядоченные пары вещественных чисел[1]).

Естественным определением суммы двух перемещений $[x, y]$, $[x', y']$ является перемещение, заменяющее последовательное применение этих двух перемещений; поэтому принято определять сумму двух пар чисел равенством

$$[x, y]+[x', y']=[x+x', y+y'].$$

Произведение пары чисел и вещественного числа x' естественно тогда определить равенством

$$x'\times[x, y]=[x'x, x'y].$$

Мы можем определить действие умножения пар чисел различным образом, но единственным определением, приводящим к нетривиальным результатам, является то, которое выражается равенством

$$[x, y]\times[x', y']=[xx'-yy', xy'+x'y].$$

---

[1]) Порядок чисел отличает упорядоченную пару $[x, y]$ от упорядоченной пары $[y, x]$.

Очевидно, что

$$[x, 0] \times [x', y'] = [xx', xy'] = x \times [x', y'],$$
$$[0, y] \times [x', y'] = [-yy', x'y] = y \times [-y', x'].$$

Геометрическая интерпретация этих определений заключается в том, что результат умножения на перемещение $[x, 0]$ совпадает с умножением на вещественное число x, а результат умножения перемещения на $[0, y]$ совпадает с умножением его на вещественное число y и поворотом на прямой угол.

Принято обозначать пару чисел $[x, y]$ составным символом $x+iy$ и называть (следуя Гауссу) *комплексным числом*. В основных действиях арифметики комплексное число $x+i0$ может быть заменено вещественным числом x, и, определяя i как комплексное число $0+i1$, мы будем иметь $i^2=[0, 1]\times[0, 1]=[-1, 0]$; следовательно, i^2 может быть заменено через -1.

Читатель легко убедится в том, что определение сложения и умножения пар чисел установлено таким образом, что обычные действия алгебры можно осуществлять по тем же самым правилам, как и с вещественными числами, рассматривая символ i как число и заменяя произведение ii, где оно встретится, через -1.

Например, легко убедиться, что если a, b, c — комплексные числа, то

$$a+b=b+a,$$
$$ab=ba,$$
$$(a+b)+c=a+(b+c),$$
$$ab\cdot c=a\cdot bc,$$
$$a(b+c)=ab+ac.$$

Если ab равно нулю, то или a, или b равно нулю.

Оказывается, что алгебраические действия прямые и обратные, примененные к комплексным числам, не приводят к каким-либо новым классам чисел, поэтому комплексное число можно рассматривать для наших целей как наиболее общий тип числа.

Введение комплексных чисел привело к важным открытиям в математике. Например, некоторые функции, рассматриваемые только как функции вещественных аргументов, кажутся существенно различными, между тем как они оказываются родственными, если рассматривать их как функции комплексных аргументов. Так, было найдено, что тригонометрические функции могут быть выражены через показательные функции комплексного аргумента при помощи равенств $\cos x=\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix})$, $\sin x=\frac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix})$.

Кроме того, многие важнейшие теоремы современного анализа окажутся неверными, если ограничиться областью вещественных чисел. Так, теорема о том, что всякое алгебраическое уравнение степени n имеет n корней, будет справедлива в общем случае только в области комплексных чисел.

Кватернионы Гамильтона дают пример дальнейшего расширения идеи числа. Кватернион $w+xi+yj+zk$ составляется из четырех вещественных чисел w, x, y, z и четырех числовых единиц 1, i, j, k таким же образом, как и обычное комплексное число $x+yi$ составляется из двух вещественных чисел x, y и двух числовых единиц 1, i. Кватернионы не подчиняются, однако, переместительному закону умножения.

1.4. Модуль комплексного числа

Пусть $x+iy$ — комплексное число, x и y — вещественные числа. Тогда положительный квадратный корень из x^2+y^2 называется *модулем* $x+iy$ и обозначается $|x+iy|$.

Рассмотрим комплексное число, представляющее сумму двух комплексных чисел $x+iy$ и $u+iv$. Мы имеем

$$(x+iy)+(u+iv)=(x+u)+i(y+v).$$

Модуль суммы этих двух чисел будет поэтому

$$\{(x+u)^2+(y+v)^2\}^{\frac{1}{2}},$$

или

$$\{(x^2+y^2)+(u^2+v^2)+2(xu+yv)\}^{\frac{1}{2}}.$$

Но

$$\{|x+iy|+|u+iv|\}^2=\left\{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}+(u^2+v^2)^{\frac{1}{2}}\right\}^2=$$
$$=(x^2+y^2)+(u^2+v^2)+2(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}(u^2+v^2)^{\frac{1}{2}}=$$
$$=(x^2+y^2)+(u^2+v^2)+2\{(xu+yv)^2+(xv-yu)^2\}^{\frac{1}{2}}.$$

Последнее выражение будет больше (или, самое меньшее, равно)

$$(x^2+y^2)+(u^2+v^2)+2(xu+yv).$$

Поэтому мы имеем

$$|x+iy|+|u+iv|\geqslant|(x+iy)+(u+iv)|,$$

т. е. *модуль суммы двух комплексных чисел не может быть больше суммы их модулей*; по индукции получим, что модуль суммы любого числа комплексных чисел не может быть больше суммы их модулей.

Далее, рассмотрим комплексное число, представляющее собой произведение двух данных комплексных чисел $x+iy$ и $u+iv$; имеем

$$(x+iy)(u+iv)=(xu-yv)+i(xv+yu),$$

и поэтому

$$|(x+iy)(u+iv)|=\{(xu-yv)^2+(xv+yu)^2\}^{\frac{1}{2}}=$$
$$=\{(x^2+y^2)(u^2+v^2)\}^{\frac{1}{2}}=|x+iy|\cdot|u+iv|,$$

т. е. *модуль произведения двух комплексных чисел* (и, следовательно, по индукции, любого числа комплексных чисел) *равен произведению их модулей.*

1.5. Диаграмма Аргана

Мы видели, что комплексное число можно представить геометрически на плоскости, пользуясь прямоугольными осями Ox и Oy.

Тогда точку P, координаты которой относительно этих осей будут x, y, можно рассматривать как изображение комплексного числа $x+iy$. Таким образом, каждой точке плоскости соответствует некоторое комплексное число и, наоборот, любому комплексному числу соответствует одна и только одна точка на плоскости. Комплексное число $x+iy$ может быть обозначено одной буквой z[1]). Тогда точку P будем называть *изображением* числа z. Мы будем также говорить, что число z есть *аффикс* точки P.

Если мы обозначим $(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$ ч рез r и возьмем θ такое, что $r\cos\theta = x$, $r\sin\theta = y$, то, очевидно, r будет длиной радиуса-вектора точки P относительно начала O, а θ — его углом с осью Ox.

Такое представление комплексного числа называется часто *диаграммой* Аргана[2]). По данному выше определению очевидно, что r есть модуль числа z, угол же θ называется *аргументом*, *амплитудой* или *фазой*.

Мы пишем

$$\theta = \arg z.$$

Из геометрических соображений ясно, что аргумент комплексного числа не однозначен (в то время как модуль однозначен)[3]); если θ есть одно значение аргумента, то другие значения аргумента даются выражением $2n\pi+\theta$, где n — любое целое число, не равное нулю. Значение $\arg z$, которое удовлетворяет неравенству $-\pi < \arg z \leqslant \pi$, называется *главным* его значением.

Если P_1 и P_2 — точки, соответствующие числам z_1 и z_2, то точка, представляющая значение z_1+z_2, будет конечной точкой отрезка, проведенного из P_1, который равен и параллелен отрезку, соединяющему начало координат с P_2. Чтобы найти точку, представляющую

---

[1]) Принято называть x и y соответственно *вещественной* и *мнимой частью* z. Мы будем часто писать $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$.

[2]) J. R. Argand, Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques, 1806 г.; однако ею пользовался уже Гаусс в его хельмштедской диссертации 1799 г. (Werke, III, 20—23), который пришел к ней в октябре 1797 г. (Math. Ann. LXIII, 18); Вессель (Caspar Wessel) рассмотрел ее в мемуаре, представленном Датской академии в 1797 г. и опубликованном там в 1798—1799 гг. Термин «комплексное число» впервые встречается в 1831 г. (Gauss, Werke, II, 102).

[3]) См. приложение, § A.521.

комплексное число z_1z_2, где z_1, z_2 — два данных комплексных числа, заметим, что если

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1), \quad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2),$$

то перемножение дает

$$z_1z_2 = r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)].$$

Точка, представляющая число z_1z_2, имеет поэтому модуль, равный произведению модулей точек P_1 и P_2, и аргумент, равный сумме аргументов точек P_1 и P_2.

ЛИТЕРАТУРА

Логические основания теории чисел

A. N. Whitehead and B. A. W. Russell, Principia mathematica, 1910—1913.
B. A. W. Russell, Introduction to mathematical philosophy, 1919.

Иррациональные числа

Р. Дедекинд, Непрерывность и иррациональные числа, изд. 3, перев. с нем., Одесса, 1914.
V. von Dantscher, Vorlesungen über die Weierstrass'sche Theorie der irrationalen Zahlen, Leipzig, 1908.
E. W. Hobson, Functions of a real variable, гл. 1, 1907.
T. J. I'a Bromwich, Theory of infinite series, приложение 1, 1908.

Комплексные числа

H. Hankel, Theorie der complexen Zahlen-Systeme, Leipzig, 1867.
O. Stolz, Vorlesungen über allgemeine Arithmetik, II, Leipzig, 1886.
Г. Х. Харди, Курс чистой математики, гл. III, ИЛ, 1949.

Примеры

1. Показать, что точки, представляющие комплексные числа $1+4i$, $2+7i$, $3+10i$, лежат на одной прямой.

2. Показать, что можно провести параболу через точки, представляющие комплексные числа

$$2+i, \quad 4+4i, \quad 6+9i, \quad 8+16i, \quad 10+25i.$$

3. Представить n корней из единицы на диаграмме Аргана и показать, что число первообразных корней (т. е. корней, степени каждого из которых дают все корни) равно числу целых чисел (включая единицу), меньших n и взаимно простых с n.

Доказать, что если $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots$ — аргументы первообразных корней, то $\sum \cos p\theta = 0$, когда p — положительное целое число, меньшее, чем $\frac{n}{abc\ldots k}$, причем $a, b, c, \ldots, k$ — все различные простые множители числа n; а также, что если $p = \frac{n}{abc\ldots k}$, то $\sum \cos p\theta = \frac{(-1)^{\mu} n}{abc\ldots k}$, где μ — число простых множителей числа n.

(Math. Trip., 1895)

ГЛАВА 2

ТЕОРИЯ СХОДИМОСТИ

2.1. Определение[1]) предела последовательности

Пусть $z_1, z_2, z_3, \ldots$ — бесконечная последовательность чисел, вещественных или комплексных. Тогда, если существует такое число l, что соответственно всякому положительному[2]) числу ε, как угодно малому, может быть найдено такое число n_0, что

$$|z_n - l| < \varepsilon$$

для всех значений n, больших n_0, то говорят, что *последовательность* (z_n) *стремится к пределу* l *при стремлении* n *к бесконечности.*

Символически утверждение «предел последовательности (z_n) при n, стремящемся к бесконечности, равен l» записывается следующим образом[3]):

$$\lim_{n\to\infty} z_n = l; \quad \lim z_n = l; \quad z_n \to l, \quad \textit{когда} \quad n \to \infty.$$

Если последовательность такова, что при заданном произвольном числе N (как угодно большом) можно найти такое число n_0, что $|z_n| > N$ для всех значений $n > n_0$, то говорят, что «$|z_n|$ стремится к бесконечности при стремлении n к бесконечности», и записывают

$$|z_n| \to \infty.$$

Соответственно в случае, когда $-x_n > N$ при $n > n_0$, говорят, что

$$x_n \to -\infty.$$

Если последовательность вещественных чисел не стремится ни к конечному пределу, ни к $+\infty$ и ни к $-\infty$, то она называется *колеблющейся.*

---

[1]) Определение, равноценное данному, впервые дано Валлисом в 1655 г. (J. Wallis, Opera, I, 382, 1695).

[2]) Число нуль исключается из класса положительных чисел.

[3]) Обозначение стрелкой принадлежит Лизему (Leathem, Camb. Math. Tracts., № 1).

2.11. Определение термина «порядок величины»

Если две последовательности (ζ_n) и (z_n) таковы, что существует такое число n_0, что $|\zeta_n/z_n| < K$ при $n > n_0$, причем K не зависит от n, то говорят, что величина ζ_n имеет порядок величины z_n, и записывают [1])

$$\zeta_n = O(z_n);$$

так, например,

$$\frac{15n+19}{1+n^3} = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Если $\lim\left(\frac{\zeta_n}{z_n}\right) = 0$, то записывают $\zeta_n = o(z_n)$.

2.2. Предел возрастающей последовательности

Пусть (x_n) — такая последовательность вещественных чисел, что $x_{n+1} \geqslant x_n$ для всех значений n. Тогда *эта последовательность стремится к некоторому пределу или к бесконечности* (и, таким образом, она не является колеблющейся последовательностью).

Пусть x — какое-либо рациональное число; тогда или (I) $x_n \geqslant x$ для всех значений n, больших некоторого числа n_0, зависящего от величины x, или (II) $x_n < x$ для всех значений n.

Если условие (II) не выполняется *ни для какого* значения x (как угодно большого), то $x_n \to \infty$.

Но если существует такое значение x, для которого условие (II) имеет место, то мы можем разделить рациональные числа на два класса: класс L, содержащий те рациональные числа x, для которых имеет место (I), и класс R тех рациональных чисел x, для которых имеет место (II). Это сечение определяет вещественное число α, рациональное или иррациональное.

Если ε есть произвольное положительное число, то число $\alpha - \frac{1}{2}\varepsilon$ принадлежит к классу L, определяющему α, и мы можем, таким образом, найти такое n_1, что $x_n > \alpha - \frac{1}{2}\varepsilon$ при $n > n_1$; напротив, число $\alpha + \frac{1}{2}\varepsilon$ будет числом класса R и, следовательно, $x_n < \alpha + \frac{1}{2}\varepsilon$.

Поэтому при $n > n_1$

$$|\alpha - x_n| < \varepsilon$$

и, таким образом,

$$x_n \to \alpha.$$

---

[1]) Это обозначение принадлежит Бахману (Bachmann, Zahlentheorie, 401, 1894) и Ландау (Landau, Primzahlen, I, 61, 1909).

Следствие. Убывающая последовательность стремится к некоторому пределу или к $-\infty$.

Пример 1. Если $\lim z_m = l$, $\lim z'_m = l'$, то $\lim(z_m + z'_m) = l + l'$, ибо для данного ε мы можем подыскать такие n и n', что

$$\text{(I)}\quad |z_m - l| < \frac{1}{2}\varepsilon, \quad \text{когда } m > n,$$

$$\text{(II)}\quad |z'_m - l'| < \frac{1}{2}\varepsilon, \quad \text{когда } m > n'.$$

Пусть n_1 будет больше n и n'; тогда при $m > n_1$

$$|(z_m + z'_m) - (l + l')| \leqslant |z_m - l| + |z'_m - l'| < \varepsilon,$$

а это и означает, что

$$\lim(z_m + z'_m) = l + l'.$$

Пример 2. Доказать аналогично, что $\lim(z_m - z'_m) = l - l'$, $\lim(z_m z'_m) = ll'$ и если $l' \neq 0$, $\lim(z_m/z'_m) = l/l'$.

Пример 3. Если $0 < x < 1$, то $x^n \to 0$, ибо если $x = (1+a)^{-1}$ и $a > 0$, то по формуле бинома для положительного целого показателя имеем

$$0 < x^n \frac{1}{(1+a)^n} < \frac{1}{1+na}.$$

С другой стороны, очевидно, что для данного положительного числа ε мы можем взять такое n_0, что $(1+na)^{-1} < \varepsilon$ при $n > n_0$; таким образом, $x^n \to 0$.

2.21. Предельные точки и теорема Больцано — Вейерштрасса[1])

Пусть (x_n) — последовательность вещественных чисел. Если существует такое число G, что для каждого положительного значения ε, как угодно малого, может быть найдено неограниченное число таких членов последовательности, что

$$G - \varepsilon < x_n < G + \varepsilon,$$

то G называется *предельной точкой* или *точкой сгущения* последовательности.

Теорема Больцано состоит в том, что *если $\lambda \leqslant x_n \leqslant \rho$, где λ, ρ не зависят от n, то последовательность (x_n) имеет по крайней мере одну предельную точку.*

Для доказательства теоремы возьмем сечение, при котором (I) класс R состоит из таких рациональных чисел, что если A есть одно из них, то имеется только ограниченное число членов x_n, удовлетворяющих условию $x_n > A$; (II) класс L такой, что в нем

[1]) Эта теорема, часто приписываемая Вейерштрассу, была доказана Больцано (Bolzano, Abh. der k. böhmischen Ges. der Wiss. v. (1817)) (перепечатано в «Klassiker der Exakten Wiss.», № 153). По-видимому, она была известна и Коши.

имеется неограниченное число членов x_n таких, что $x_n \geqslant a$ для всех чисел a класса L.

Это сечение определяет вещественное число G, и если ε — произвольное положительное число, то $G - \frac{1}{2}\varepsilon$ и $G + \frac{1}{2}\varepsilon$ соответственно будут числами классов L и R; следовательно, имеется неограниченное число членов последовательности, удовлетворяющих условию

$$G - \varepsilon < G - \frac{1}{2}\varepsilon \leqslant x_n \leqslant G + \frac{1}{2}\varepsilon < G + \varepsilon,$$

а тогда G и будет предельной точкой.

2.211. Определение «наибольшего из пределов»

Число G, полученное в § 2.21, называется «наибольшим из пределов последовательности (x_n)». Последовательность (x_n) не может иметь предельной точки, большей G, ибо, если G' будет такой точкой и $\varepsilon = \frac{1}{2}(G' - G)$, то $G' - \varepsilon$ будет числом класса R, определяющего G, так что будет только ограниченное число членов последовательности, удовлетворяющих условию $x_n > G' - \varepsilon$. Это условие противоречит принятому предположению, что G' — предельная точка. Мы обозначаем

$$G = \overline{\lim_{n \to \infty}}\, x_n.$$

«Наименьший из пределов» L последовательности (обозначаемый $\underline{\lim}_{n \to \infty}\, x_n$) определяется как

$$-\overline{\lim_{n \to \infty}}\,(-x_n).$$

2.22. Теорема Коши[1]) о необходимом и достаточном условии существования предела

Покажем теперь, что необходимое и достаточное условие существования предела последовательности чисел $z_1, z_2, z_3, \ldots$ состоит в том, чтобы *соответственно всякому данному положительному числу* ε, *как угодно малому, можно было найти такое число* n, *что*

$$|z_{n+p} - z_n| < \varepsilon$$

---

[1]) Cauchy, Analyse algébrique, стр. 125, 1821.

для всех положительных целых значений p. Этот результат является одной из важнейших и основных теорем анализа. Иногда его называют *принципом сходимости.*

Мы должны показать, во-первых, что это условие *необходимо*, т. е. что оно удовлетворяется, когда предел существует. Итак, предположим, что существует предел l; тогда (§ 2.1) для любого положительного как угодно малого числа ε можно найти такое целое число n, что

$$|z_n - l| < \frac{1}{2}\varepsilon, \quad |z_{n+p} - l| < \frac{1}{2}\varepsilon$$

для всех положительных значений p; поэтому

$$|z_{n+p} - z_n| = |(z_{n+p} - l) - (z_n - l)| \leqslant |z_{n+p} - l| + |z_n - l| < \varepsilon,$$

что показывает *необходимость* условия

$$|z_{n+p} - z_n| < \varepsilon,$$

и таким образом, первая половина теоремы доказана.

Далее мы должны доказать[1]), что это условие *достаточно*, т. е. что если оно удовлетворяется, то предел существует.

(I) Предположим, что последовательность *вещественных* чисел (x_n) удовлетворяет условию Коши, иначе говоря, что для любого положительного числа ε можно найти такое целое число n, что

$$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$$

для всех положительных целых значений p.

Пусть значение n, соответствующее $\varepsilon = 1$, будет m. Пусть, далее, λ_1, ρ_1 будут наименьшим и наибольшим из значений x_1, x_2, ..., x_m; тогда

$$\lambda_1 - 1 < x_n < \rho_1 + 1$$

для всех значений n; обозначим $\lambda_1 - 1 = \lambda$, $\rho_1 + 1 = \rho$.

Тогда для всех значений n имеем $\lambda < x_n < \rho$. Поэтому *по теореме* § 2.21 *последовательность* (x_n) *имеет по крайней мере одну предельную точку* G.

Докажем, что не может быть более одной предельной точки; действительно, если их имеется две, G и H $(H < G)$, то возьмем $\varepsilon < \frac{1}{4}(G - H)$; тогда по условию будет существовать такое число n, что $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$ для всех положительных значений p. Но так как, с другой стороны, G и H являются предельными точками, то существуют такие положительные числа q и r, что

$$|G - x_{n+q}| < \varepsilon, \quad |H - x_{n+r}| < \varepsilon.$$

---

[1]) Это доказательство дано Штольцем и Гмайнером (Stolz, Gmeiner, Theoretische Arithmetik, II, стр. 144, 1902).

Отсюда имеем

$$|G - x_{n+q}| + |x_{n+q} - x_n| + |x_n - x_{n+r}| + |x_{n+r} - H| < 4\varepsilon.$$

Но по § 1.4 сумма в левой части больше или равна $|G - H|$. Поэтому $G - H < 4\varepsilon$, что противоречит предположению; следовательно, существует только одна предельная точка. Отсюда же вытекает, что существует только конечное число членов последовательности вне интервала $(G - \delta, G + \delta)$, где δ — произвольное положительное число. Ибо если бы существовало неограниченное число таких членов, то они имели бы предельную точку, которая была бы предельной точкой данной последовательности и которая не совпадала бы с G; итак, *G есть предел (x_n)*.

(II) Теперь пусть последовательность (z_n) вещественных или комплексных чисел удовлетворяет условию Коши; пусть $z_n = x_n + iy_n$, где x_n и y_n вещественны; тогда для всех значений n и p

$$|x_{n+p} - x_n| \leqslant |z_{n+p} - z_n|, \quad |y_{n+p} - y_n| \leqslant |z_{n+p} - z_n|.$$

Поэтому последовательности вещественных чисел (x_n) и (y_n) удовлетворяют условию Коши и, следовательно, по (I) существуют пределы (x_n) и (y_n). Тогда, согласно примеру 1 § 2.2, существует и предел (z_n), и теорема, таким образом, доказана.

2.3. Сходимость бесконечных рядов

Пусть $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n \ldots$ — последовательность чисел, вещественных или комплексных. Обозначим через S_n сумму

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n.$$

Тогда, если S_n стремится к пределу S при стремлении n к бесконечности, то говорят, что бесконечный ряд

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$$

является *сходящимся* или что этот ряд *сходится к сумме S*. В противном же случае говорят, что бесконечный ряд будет *расходящимся*. Если ряд сходится, то выражение $S - S_n$, представляющее сумму ряда

$$u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \ldots,$$

называется n-м *остатком* ряда и обозначается часто символом R_n. Сумму

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}$$

будем обозначать символом $S_{n,p}$.

Из этого определения и результатов предыдущего параграфа непосредственно получаем, что необходимое и достаточное условие сходимости бесконечного ряда заключается в том, чтобы для любого

данного положительного числа ε можно было найти такое n, что $|S_{n,p}| < \varepsilon$ для всех положительных значений p.

Так как $u_{n+1} = S_{n,1}$, то отсюда, как частный случай, следует, что $\lim u_{n+1} = 0$, другими словами, n-й член сходящегося ряда стремится к нулю при стремлении n к бесконечности. Это последнее условие хотя и необходимо, но недостаточно для сходимости ряда, как это видно из рассмотрения ряда

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots$$

В этом ряде

$$S_{n,n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{2n}.$$

Выражение в правой части уменьшится при замене каждого члена на $(2n)^{-1}$, и таким образом,

$$S_{n,n} > \frac{1}{2}.$$

Поэтому

$$S_{2^{n+1}} = 1 + S_{1,1} + S_{2,2} + S_{4,4} + S_{8,8} + S_{16,16} + \ldots$$
$$\ldots + S_{2^n,2^n} > \frac{1}{2}(n+3) \to \infty$$

и ряд, следовательно, расходится; этот результат был замечен Лейбницем в 1673 г.

Существует два общих класса проблем, побуждающих нас к исследованию сходимости рядов:

(I) Мы можем получить ряд какими-нибудь формальными действиями, например, при решении линейного дифференциального уравнения с помощью рядов, и тогда для оправдания этих действий требуется обычно доказать, что ряд, полученный таким образом формально, будет сходящимся.

Простые признаки, которые позволяют судить о сходимости рядов в таких случаях, рассматриваются в §§ 2.31—2.61.

(II) Может случиться, что для данного выражения S можно получить разложение $S = \sum_{m=1}^{n} u_m + R_n$, годное для всех значений n; из определения предела следует, что если мы сможем доказать, что $R_n \to 0$, то ряд $\sum_{m=1}^{\infty} u_m$ сходится и его сумма равна S.

Пример такой задачи приведен в § 5.4.

Бесконечные ряды встречаются[1]) у лорда Браункера (Brouncker, Phil. Trans., II, 645—649 (1668)). Выражение «сходящийся» было введено

[1]) См. примечание к § 2.7.

в том же самом году Джеймсом Грегори (James Gregory), профессором математики в Эдинбурге, а термин «расходящийся» — Н. Бернулли в 1713 г. Бесконечные ряды применялись систематически Ньютоном в 1669 г. в «De analysi per aequat. num. term. inf.», и он же исследовал в 1704 г. сходимость гипергеометрических рядов (§ 14.1). Но великие математики XVIII столетия пользовались бесконечными рядами свободно и по большей части без рассмотрения вопроса об их сходимости. Так, Эйлер (Euler) утверждал, что сумма ряда

$$\ldots \frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+1+z+z^2+z^3+\ldots \tag{a}$$

равна нулю, на основании того, что

$$z+z^2+z^3+\ldots=\frac{z}{1-z} \tag{b}$$

и

$$1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\ldots=\frac{z}{z-1}. \tag{c}$$

Ошибка произошла, конечно, вследствие того, что ряд (b) сходится только при $|z|<1$, а ряд (c) сходится только при $|z|>1$; так что ряд (a) никогда не сходится. Относительно истории исследований о сходимости см. Прингсгейм и Мольк (Pringsheim, Molk, Encyclopédie des Sci. Math., I (I)) и Райф (Reiff, Geschichte der unendlichen Reihen, Tübingen, 1889).

2.301. Неравенство Абеля[1])

Пусть $f_n \geqslant f_{n+1} > 0$ для всех целых значений n. Тогда $\left|\sum_{n=1}^{m} a_n f_n\right| \leqslant A f_1$, где A есть наибольшая из сумм

$$|a_1|,\ |a_1+a_2|,\ |a_1+a_2+a_3|,\ \ldots,\ |a_1+a_2+\ldots+a_m|.$$

В самом деле, положив $a_1+a_2+\ldots+a_n=s_n$, мы имеем

$$\sum_{n=1}^{m} a_n f_n = s_1 f_1+(s_2-s_1)f_2+(s_3-s_2)f_3+\ldots+(s_m-s_{m-1})f_m=$$
$$=s_1(f_1-f_2)+s_2(f_2-f_3)+\ldots+s_{m-1}(f_{m-1}-f_m)+s_m f_m.$$

Так как f_1-f_2, f_2-f_3, ... не отрицательны, то мы имеем при $n=2, 3, \ldots, m$

$$|s_{n-1}|(f_{n-1}-f_n) \leqslant A(f_{n-1}-f_n);$$

кроме того,

$$|s_m| f_m \leqslant A f_m;$$

таким образом, суммируя и пользуясь § 1.4, мы получаем

$$\left|\sum_{n=1}^{m} a_n f_n\right| \leqslant A f_1.$$

---

[1]) Abel, Journal für Math., 311—399 (1826). Частный случай теоремы § 2.31, следствие (I), имеется в этой же статье.

Следствие. Если $a_1, a_2, \ldots, w_1, w_2, \ldots$ — какие-либо числа, вещественные или комплексные, то

$$\left|\sum_{n=1}^{m} a_n w_n\right| \leqslant A\left\{\sum_{n=1}^{m-1} |w_{n+1}-w_n| + |w_m|\right\},$$

где A есть наибольшая из сумм $\left|\sum_{n=1}^{p} a_n\right|$ $(p=1, 2, \ldots, m)$ (Харди).

2.31. Признак сходимости Дирихле[1])

Пусть $\left|\sum_{n=1}^{p} a_n\right| < K$, *где* K *не зависит от* p. *Тогда, при* $f_n \geqslant f_{n+1} > 0$ *и* $\lim f_n = 0$[2]) *ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n$ *сходится.* В самом деле, так как $\lim f_n = 0$, то мы можем для данного произвольного положительного числа ε найти такое m, что $f_{m+1} < \frac{\varepsilon}{2K}$. Но

$$\left|\sum_{n=m+1}^{m+q} a_n\right| \leqslant \left|\sum_{n=1}^{m+q} a_n\right| + \left|\sum_{n=1}^{m} a_n\right| < 2K$$

для всех положительных значений q, и таким образом, по неравенству Абеля мы имеем для всех положительных значений p

$$\left|\sum_{n=m+1}^{m+p} a_n f_n\right| \leqslant A f_{m+1},$$

где

$$A < 2K.$$

Поэтому $\left|\sum_{n=m+1}^{m+p} a_n f_n\right| < K f_{m+1} < \varepsilon$, и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n$ по § 2.3 сходится.

Следствие (I). *Признак сходимости Абеля.* Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а последовательность (u_n) монотонна (т. е. всегда или $u_n \geqslant u_{n+1}$, или $u_n \leqslant u_{n+1}$) и $|u_n| < x$, где x не зависит от n, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n$ сходится.

В самом деле, по § 2.2 u_n стремится к пределу u; положим $|u-u_n| = f_n$. Тогда $f_n \to 0$ монотонно, и поэтому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n$ сходится. Если теперь (u_n)

---

[1]) Dirichlet, Journal de Math. (2), VII, 253—255 (1862). До опубликования во 2-м издании жордановского «Cours d'Analyse» (1893) признак Дирихле и признак Абеля часто объединялись как признак Дирихле — Абеля (см. Pringsheim, Math. Ann., XXV, 423 (1885)).

[2]) При этих условиях мы говорим, что $f_n \to 0$ *монотонно.*

есть возрастающая последовательность, то $f_n = u - u_n$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (u - u_n) a_n$ сходится. Поэтому, так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u a_n$ сходится, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n a_n$ будет сходиться. Если же (u_n) есть убывающая последовательность, то $f_n = u_n - u$, и доказательство аналогичное.

Следствие (II). Взяв в признаке Дирихле $a_n = (-1)^{n-1}$, получим, что при $f_n \geqslant f_{n+1}$ и $\lim f_n = 0$ ряд $f_1 - f_2 + f_3 - f_4 + \ldots$ сходится.

Пример 1. Показать, что при $0 < \theta < 2\pi$

$$\left| \sum_{n=1}^{p} \sin n\theta \right| < \operatorname{cosec} \frac{1}{2} \theta;$$

вывести отсюда, что если $f_n \to 0$ монотонно, то ряд

$$\sum_{n+1}^{\infty} f_n \sin n\theta$$

сходится для всех вещественных значений θ и что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \cos n\theta$$

сходится, если θ не будет четным кратным π.

Пример 2. Показать, что если $f_n \to 0$ монотонно, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n f_n \cos n\theta$$

сходится при θ вещественном и не равном нечетному кратному π, а ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n f_n \sin a\theta$$

сходится для всех вещественных значений θ [заменить θ на $\pi + \theta$ в примере 1].

2.32. Абсолютная и условная сходимость

Для того чтобы ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ вещественных или комплексных чисел сходился, *достаточно* (но не необходимо), чтобы ряд модулей $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ был сходящимся. В самом деле, полагая $\sigma_{n,p} = |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \ldots + |u_{n+p}|$, мы можем, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ сходится, по данному числу ε найти такое n, что $\sigma_{n,p} < \varepsilon$ для всех значений p. Но $|S_{n,p}| \leqslant \sigma_{n,p} < \varepsilon$, так что и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится.

Условие это не необходимое, ибо, положив $f_n = \frac{1}{n}$ в § 2.31, следствие (II), мы видим, что ряд $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ сходится, хотя (§ 2.3) ряд модулей $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$, как известно, будет расходящимся.

В этом случае, следовательно, расходимость ряда модулей не влечет за собой расходимости самого ряда.

Ряды, для которых ряды модулей их членов сходятся, обладают особыми весьма важными свойствами и называются *абсолютно сходящимися* рядами. Ряды же, хотя и сходящиеся, но не абсолютно (т. е. если сами ряды сходятся, но ряды модулей расходятся), называются *условно сходящимися* рядами.

2.33. Геометрический ряд и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$

Сходимость отдельных рядов в большинстве случаев устанавливается не прямым рассмотрением суммы $S_{n,p}$, а (как будет показано в последующем) сравнением данного ряда с некоторым другим рядом, о котором известно, что он сходится или расходится. Мы исследуем теперь сходимость двух рядов, наиболее часто применяемых для сравнения.

(I) *Геометрический ряд.*

Геометрическим рядом называется ряд

$$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \ldots$$

Рассмотрим ряд модулей

$$1 + |z| + |z|^2 + |z|^3 + \ldots$$

Для этого ряда

$$S_{n,p} = |z|^{n+1} + |z|^{n+2} + \ldots + |z|^{n+p} = |z|^{n+1} \frac{1 - |z|^p}{1 - |z|}.$$

Отсюда при $|z| < 1$

$$S_{n,p} < \frac{|z|^{n+1}}{1 - |z|}$$

для всех значений p, и по примеру 3 § 2.2 для любого данного положительного числа ε можно найти такое n, что

$$|z|^{n+1} \{1 - |z|\}^{-1} < \varepsilon.$$

Таким образом, для данного ε мы можем найти такое n, что $S_{n,p} < \varepsilon$ для всех значений p. Следовательно, по § 2.22 ряд

$$1 + |z| + |z|^2 + \ldots$$

сходится при $|z| < 1$, и геометрический ряд будет *абсолютно сходящимся* при $|z| < 1$.

Если же $|z| \geqslant 1$, то члены геометрического ряда не стремятся к нулю при стремлении n к бесконечности, и ряд будет *расходящимся*

(II) *Ряд* $\frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \ldots$

Рассмотрим теперь сумму

$$S_n = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m^s}, \text{ где } s > 1.$$

Мы имеем

$$\frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} < \frac{2}{2^s} = \frac{1}{2^{s-1}},$$

$$\frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{7^s} < \frac{4}{4^s} = \frac{1}{4^{s-1}} \text{ и т. д.}$$

Таким образом, сумма $2^p - 1$ членов ряда будет меньше, чем

$$\frac{1}{1^{s-1}} + \frac{1}{2^{s-1}} + \frac{1}{4^{s-1}} + \frac{1}{8^{s-1}} + \ldots + \frac{1}{2^{(p-1)(s-1)}} < \frac{1}{1 - 2^{1-s}},$$

а следовательно, сумма *любого* числа членов ряда будет меньше $(1 - 2^{1-s})^{-1}$. Поэтому возрастающая последовательность $\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m^s}$ не может стремиться к бесконечности, так что по § 2.2 *ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ *будет сходящимся, если* $s > 1$; а так как все его члены вещественны и положительны, то они равны своим модулям, и ряд модулей членов будет поэтому сходящимся, т. е. *сходимость будет абсолютной.*

При $s = 1$ получается ряд

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots,$$

который, как мы показали, будет расходящимся. Если $s < 1$, то ряд *a fortiori* будет расходящимся, так как с уменьшением s члены ряда возрастают. *Итак, ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ *будет расходящимся при* $s \leqslant 1$.

2.34. Теорема сравнения

Покажем теперь, *что ряд* $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$ *будет абсолютно сходящимся, если* $|u_n|$ *всегда меньше, чем* $C|v_n|$, *где* C — *некоторое число, не зависящее от* n, а v_n — n-*й член другого ряда, о котором известно, что он абсолютно сходится.*

При этих условиях имеем

$$|u_{n+1}|+|u_{n+2}|+\ldots+|u_{n+p}|<C\{|v_{n+1}|+|v_{n+2}|+\ldots+|v_{n+p}|\},$$

где n и p — какие угодно целые числа. Но так как ряд $\sum v_n$ абсолютно сходится, то ряд $\sum|v_n|$ является сходящимся, и таким образом, для данного ε можем найти такое n, что

$$|v_{n+1}|+|v_{n+2}|+\ldots+|v_{n+p}|<\frac{\varepsilon}{C}$$

для всех значений p. Отсюда вытекает, что можно найти такое n, для которого

$$|u_{n+1}|+|u_{n+2}|+\ldots+|u_{n+p}|<\varepsilon$$

для всех значений p, т. е. ряд $\sum|u_n|$ будет сходящимся, ряд же $\sum u_n$ абсолютно сходящимся.

Следствие. Итак, ряд будет абсолютно сходиться, если отношение его n-го члена к n-му члену другого ряда сходящегося абсолютно будет по модулю меньше некоторого конечного числа, не зависящего от n.

Пример 1. Показать, что ряд

$$\cos z+\frac{1}{2^2}\cos 2z+\frac{1}{3^2}\cos 3z+\frac{1}{4^2}\cos 4z+\ldots$$

будет абсолютно сходящимся для всех вещественных значений z.

Когда z вещественно, мы имеем $|\cos nz|\leqslant 1$, и поэтому

$$\left|\frac{\cos nz}{n^2}\right|\leqslant\frac{1}{n^2}.$$

Модули членов данного ряда будут поэтому меньше (или в крайнем случае равны) соответствующих членов ряда

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots,$$

который по § 2.33 будет абсолютно сходящимся. Поэтому и данный ряд абсолютно сходится.

Пример 2. Показать, что ряд

$$\frac{1}{1^2(z-z_1)}+\frac{1}{2^2(z-z_2)}+\frac{1}{3^2(z-z_3)}+\ldots,$$

где

$$z_n=e^{ni}\qquad(n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

будет сходящимся для всех значений z, не лежащих на окружности $|z|=1$.

При рассмотрении вопросов такого рода весьма полезно геометрическое представление комплексных чисел. Пусть значения комплексного числа z представлены на некоторой плоскости; тогда числа z_1, z_2, z_3, ... дадут последовательность точек, лежащих на окружности радиуса, равного 1, и с центром в начале координат; можно показать, что любая точка окружности является предельной точкой (§ 2.21) точек z_n.

Для этих частных значений z_n величины z данный ряд не существует, так как знаменатель n-го члена равен нулю при $z=z_n$. Ради простоты мы не будем рассматривать наш ряд в точках z, расположенных на окружности радиуса 1.

Итак, предположим, что $|z| \neq 1$. Тогда для всех значений n

$$|z - z_n| \geqslant |1 - |z|| > c^{-1}$$

при некотором значении c и, таким образом, модули членов данного ряда будут меньше соответствующих членов ряда

$$\frac{c}{1^2} + \frac{c}{2^2} + \frac{c}{3^2} + \frac{c}{4^2} + \ldots,$$

о котором известно, что он абсолютно сходится.

Данный ряд поэтому будет абсолютно сходящимся для всех значений z, исключая те, которые лежат на окружности $|z| = 1$.

Интересно отметить, что область плоскости z, в которой ряд сходится, делится окружностью $|z| = 1$ на две части, между которыми нет никакого сообщения.

Пример 3. Показать, что ряд

$$2 \sin \frac{z}{3} + 4 \sin \frac{z}{9} + 8 \sin \frac{z}{27} + \ldots + 2^n \sin \frac{z}{3^n} + \ldots$$

будет абсолютно сходящимся для всех значений z. Так как [1]) $\lim\limits_{n \to \infty} 3^n \sin\left(\frac{z}{3^n}\right) = z$, то мы можем найти такое число k, *не зависящее от* n (но зависящее от z), что $\left|3^n \sin\left(\frac{z}{3^n}\right)\right| < k$, и поэтому

$$\left|2^n \sin \frac{z}{3^n}\right| < k\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ сходится, то данный ряд будет абсолютно сходящимся.

2.35. Признак абсолютной сходимости Коши [2])

Если $\lim\limits_{n \to \infty} |u_n|^{\frac{1}{n}} < 1$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *сходится абсолютно.*

В самом деле, мы можем найти такое m, что при $n \geqslant m$ имеем $|u_n|^{\frac{1}{n}} \leqslant \rho < 1$, где ρ не зависит от n. Тогда при $n > m$ будет $|u_n| < \rho^n$, а так как ряд $\sum\limits_{n=m+1}^{\infty} \rho^n$ сходится, то из § 2.34 следует, что ряд $\sum\limits_{n=m+1}^{\infty} u_n$ $\left(\text{а потому и ряд } \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n\right)$ сходится абсолютно.

Примечание. Если $\overline{\lim}\, |u_n|^{\frac{1}{n}} > 1$, то u_n не стремится к нулю и по § 2.3 ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ не будет сходящимся.

---

[1]) Это видно из результатов, доказанных в приложении.

[2]) Cauchy, Analyse algébrique, 132—135.

2.36. Признак абсолютной сходимости Даламбера [1])

Покажем теперь, что *ряд*

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots$$

будет абсолютно сходящимся, если для всех значений n, больших некоторой постоянной величины r, отношение $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ будет меньше ρ, где ρ — некоторое положительное число, не зависящее от n и меньшее единицы.

Действительно, члены ряда

$$|u_{r+1}| + |u_{r+2}| + |u_{r+3}| + \ldots$$

будут меньше соответствующих членов ряда

$$|u_{r+1}|(1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \ldots),$$

абсолютно сходящегося при $\rho < 1$; поэтому ряд $\sum\limits_{n=r+1}^{\infty} u_n$ (а вместе с тем и данный ряд) абсолютно сходится.

Частный случай этой теоремы: если $\lim \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = l < 1$, то ряд будет абсолютно сходящимся.

Действительно, по определению предела, мы можем найти такое r, что

$$\left|\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| - l\right| < \frac{1}{2}(1 - l) \quad \text{при } n > r,$$

и тогда

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < \frac{1}{2}(1 + l) < 1 \quad \text{при } n > r.$$

Примечание. Если $\lim \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| > 1$, то u_n не стремится к нулю и согласно § 2.3 ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ не будет сходиться.

Пример 1. Показать, что при $|c| < 1$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c^{n^2} e^{nz}$$

будет абсолютно сходящимся для всех значений z. $\left[\text{Ибо } \frac{u_{n+1}}{u_n} = c^{(n+1)^2 - n^2} e^z = c^{2n+1} e^z \to 0 \text{ при } n \to \infty, \text{ если } |c| < 1.\right]$

---

[1]) D'Alembert, Opuscules, V, 171—182 (1768).

Пример 2. Показать, что ряд

$$z+\frac{a-b}{2!}z^2+\frac{(a-b)(a-2b)}{3!}z^3+\frac{(a-b)(a-2b)(a-3b)}{4!}z^4+\ldots$$

будет абсолютно сходящимся при $|z|<|b|^{-1}$. $\left[\text{Ибо } \frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{a-nb}{n+1}z\to -bz,\right.$ когда $n\to\infty$; таким образом, условием абсолютной сходимости будет $|bz|<1$, т. е. $\left.|z|<|b|^{-1}.\right]$

Пример 3. Показать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{nz^{n-1}}{z^n-(1+n^{-1})^n}$ будет абсолютно сходящимся при $|z|<1$. $\left[\text{Ибо если } |z|<1, \text{ то } \right.|z^n-(1+n^{-1})^n|\geqslant(1+n^{-1})^n-$ $-|z^n|>1+1+\frac{n-1}{2n}+\ldots-1>1$ и модули членов ряда будут меньше соответствующих членов ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n|z^{n-1}|$; но последний ряд абсолютно сходится, и таким образом, данный ряд будет абсолютно сходящимся.]

2.37. Общая теорема о рядах, для которых $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=1$

Ясно, что если для всех значений n, больших некоторой постоянной величины r, $|u_{n+1}|$ будет больше $|u_n|$, то члены ряда не стремятся к нулю при $n\to\infty$ и ряд будет расходящимся. С другой стороны, если $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ будет меньше некоторого числа, которое само меньше единицы и не зависит от n (когда $n>r$), то, как мы показали в § 2.36, ряд будет абсолютно сходящимся. Сомнительным случаем будет тот, когда $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ при возрастании n стремится к единице. В этом случае необходимо дальнейшее исследование.

Покажем теперь, что *ряд*[1] $u_1+u_2+u_3+\ldots$, *в котором* $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=1$, *будет абсолютно сходящимся, если существует такое положительное число* c, *что*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n\left\{\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|-1\right\}=-1-c.$$

Действительно, сравним ряд $\sum|u_n|$ со сходящимся рядом $\sum v_n$, где $v_n=An^{-1-\frac{1}{2}c}$ и A — постоянная; мы имеем

$$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{1+\frac{1}{2}c}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\left(1+\frac{1}{2}c\right)}=1-\frac{1+\frac{1}{2}c}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

[1]) Это предложение занимает второе место в последовательности теорем, принадлежащей Де Моргану (De Morgan) (первое место занимает теорема Даламбера, доказанная в § 2.36). Относительно истории этих теорем см. Chrystal, Algebra, гл. XXVI.

При $n \to \infty$

$$n\left\{\frac{v_{n+1}}{v_n} - 1\right\} \to -1 - \frac{1}{2}c,$$

и таким образом, мы можем найти такое m, что при $n > m$

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

Надлежащим выбором постоянной A можно достичь того, что для всех значений n будем иметь

$$|u_n| < v_n.$$

Так как ряд $\sum v_n$ сходится, то и ряд $\sum |u_n|$ также сходится, а ряд $\sum u_n$ будет абсолютно сходящимся.

Следствие. Если $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 1 + \frac{A_1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, где A_1 не зависит от n, то ряд будет абсолютно сходящимся при $A_1 < -1$.

Пример. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^r \exp\left(-k\sum\limits_{1}^{n}\frac{1}{m}\right)$, когда $r > k$ и когда $r < k$.

2.38. Сходимость гипергеометрического ряда

Выведенные нами теоремы могут быть иллюстрированы на примере сходимости *гипергеометрического ряда*

$$1 + \frac{ab}{1\cdot c}z + \frac{a(a+1)b(b+1)}{1\cdot 2\cdot c(c+1)}z^2 + \\ + \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot c(c+1)(c+2)}z^2 + \ldots,$$

обозначаемого обычно (см. гл. 14) символом $F(a, b; c; z)$. Если c — отрицательное целое число, то все члены после $(1-c)$-го имеют знаменателями нули; а если a или b — отрицательное целое число, то ряд окончится соответственно $(1-a)$-м или $(1-b)$-м членом. Предположим, что эти случаи исключены, так что a, b и c не будут отрицательными целыми числами.

Для этого ряда при $n \to \infty$ имеем

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{(a+n-1)(b+n-1)}{n(c+n-1)}z\right| \to |z|.$$

Поэтому по § 2.36 *ряд будет абсолютно сходиться при* $|z| < 1$ *и расходиться при* $|z| > 1$.

Когда $|z|=1$, мы имеем[1])

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\left|1+\frac{a-1}{n}\right|\left|1+\frac{b-1}{n}\right|\left|1-\frac{c-1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right|=$$
$$=\left|1+\frac{a+b-c-1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right|.$$

Пусть a, b, c будут комплексными числами, заданными их вещественными и мнимыми частями:

$$a=a'+ia'',\quad b=b'+ib'',\quad c=c'+ic''.$$

Тогда мы имеем

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\left|1+\frac{a'+b'-c'-1+i(a''+b''-c'')}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right|=$$
$$=\left\{\left(1+\frac{a'+b'-c'-1}{n}\right)^2+\left(\frac{a''+b''-c''}{n}\right)^2+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right\}^{\frac{1}{2}}=$$
$$=1+\frac{a'+b'-c'-1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Согласно следствию § 2.37 условием абсолютной сходимости будет

$$a'+b'-c'<0.$$

Отсюда: *при* $|z|=1$ *для абсолютной сходимости гипергеометрического ряда является достаточным*[2]) *условие, чтобы вещественная часть* $a+b-c$ *была отрицательной.*

2.4. Влияние изменения порядка членов ряда

В конечной сумме порядок членов не имеет никакого значения, так как его изменение не оказывает влияния на результат сложения. В бесконечных же рядах дело обстоит иначе[3]), как это будет видно из следующего примера.

---

[1]) Символ $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ не обозначает всегда одну и ту же функцию от n. См. § 2.11.

[2]) Это условие также необходимо. См. Bromwich, Infinite series, 202—204.

[3]) Мы говорим, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ состоит из членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, взятых в другом порядке, если дано правило, по которому мы можем найти для каждого положительного целого числа p одно (и только одно) целое число q, и обратно, так что $v_q=u_p$. Результат этого параграфа был отмечен Дирихле (Dirichlet, Berliner Abh., 48 (1837), Journal de Math., IV, 397 (1839)). См. также Cauchy, Rèsumés analytiques (57, 1833, Turin).

Пусть

$$\Sigma = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \ldots$$

и

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots,$$

и пусть Σ_n и S_n обозначают суммы первых n их членов. Эти ряды составлены из одних и тех же членов, но порядок членов различен, и поэтому суммы Σ_n и S_n являются различными функциями n.

Пусть

$$\sigma_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n},$$

тогда

$$S_{2n} = \sigma_{2n} - \sigma_n$$

и, далее,

$$\Sigma_{3n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \ldots - \frac{1}{2n} =$$

$$= \sigma_{4n} - \frac{1}{2}\sigma_{2n} - \frac{1}{2}\sigma_n = (\sigma_{4n} - \sigma_{2n}) + \frac{1}{2}(\sigma_{2n} - \sigma_n) = S_{4n} + \frac{1}{2}S_{2n}.$$

Заставляя $n \to \infty$, мы видим, что

$$\Sigma = S + \frac{1}{2}S;$$

таким образом, перестановка членов в ряде S изменила его сумму.

Пример. Показать, что если в ряде $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ изменить порядок членов так, что отношение числа положительных членов к числу отрицательных в первых n членах ряда будет равно в пределе a^2, то сумма ряда будет равна $\ln(2a)$.

2.41. Основные свойства абсолютно сходящихся рядов

Покажем, что сумма абсолютно сходящегося ряда *не зависит* от порядка, в котором следуют члены ряда. Пусть

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$$

— абсолютно сходящийся ряд, и пусть S' — ряд, составленный из тех же членов, расположенных в другом порядке.

Пусть ε — произвольное положительное число, и пусть n выбрано так, что

$$|u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \ldots + |u_{n+p}| < \frac{1}{2}\varepsilon$$

для всех значений p.

Предположим, что для получения первых n членов ряда S мы должны взять m членов в S'; тогда, если $k > m$, то $S'_k = S_n +$ члены ряда S с индексами, бо́льшими n, так что $S'_k - S = S_n - S +$ члены ряда S с индексами, бо́льшими n.

Модуль суммы любого числа членов ряда S с индексами, бо́льшими n, не превосходит суммы их модулей и поэтому будет меньше $\frac{1}{2}\varepsilon$.

Следовательно,

$$|S'_k - S| < |S_n - S| + \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Но

$$|S_n - S| \leqslant \lim_{p \to \infty} \{|u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \ldots + |u_{n+p}|\} \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Поэтому для данного ε мы можем найти такое m, что при $k > m$

$$|S'_k - S| < \varepsilon,$$

т. е. $S'_m \to S$, что и является требуемым результатом.

Если ряд с вещественными членами сходится, но не абсолютно, и если S_p — сумма первых p положительных членов, а σ_n — сумма первых n отрицательных членов, то $S_p \to \infty$, $\sigma_n \to -\infty$ и $\lim(S_p + \sigma_n)$ не существует, если не дано никакого соотношения между p и n. Риман даже показал, что можно надлежащим расположением членов ряда сделать $\lim(S_p + \sigma_n)$ равным *любому* данному вещественному числу [1]).

2.5. Двойные ряды [2])

Пусть $u_{m,n}$ — число, определенное для всех положительных целых значений m и n; рассмотрим таблицу чисел

$$\begin{array}{llll} u_{1,1}, & u_{1,2}, & u_{1,3}, & \ldots \\ u_{2,1}, & u_{2,2}, & u_{2,3}, & \ldots \\ u_{3,1}, & u_{3,2}, & u_{3,3}, & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

---

[1]) Riemann, Ges. Werke, 221.

[2]) Полная теория двойных рядов, на которой базируется данное изложение, дана Прингсгеймом (Pringsheim, Münchener Sitzungsberichte, XXVII, 101—152 (1897)). См., его же дальнейший мемуар, Math Ann., LIII, 289—321 (1900) и мемуар Лондона (London, там же, 322—370), а также Бромуича (Bromwich) «Infinite series», в котором, в дополнение к теории Прингсгейма, содержатся многие другие вопросы, относящиеся к той же теории. Другие важные теоремы даны Бромуичем (Proc. London Math. Soc. (2), 1, 176—201 (1904)).

Сумму членов в прямоугольнике, состоящем из первых m строк и первых n столбцов, обозначим через $S_{m,n}$.

Если существует такое число S, что при заданном произвольном положительном числе ε можно найти такие целые числа m и n, что

$$|S_{\mu,\nu} - S| < \varepsilon$$

при $\mu > m$ и $\nu > n$, то мы говорим[1]), что *двойной ряд, общий член которого есть* $u_{\mu,\nu}$, *сходится к сумме* S, и пишем

$$\lim_{\mu\to\infty,\ \nu\to\infty} S_{\mu,\nu} = S.$$

Если двойной ряд, общий член которого $|u_{\mu,\nu}|$, сходится, то мы говорим, что данный двойной ряд является *абсолютно сходящимся*.

Так как $u_{\mu,\nu} = (S_{\mu,\nu} - S_{\mu,\nu-1}) - (S_{\mu-1,\nu} - S_{\mu-1,\nu-1})$, то легко видеть, что если двойной ряд сходится, то

$$\lim_{\mu\to\infty,\ \nu\to\infty} u_{\mu,\nu} = 0.$$

Необходимое и достаточное условие сходимости Штольца[2]). Условие, состоящее в том, что при заданном ε мы можем найти такие m и n, что $|S_{\mu+\rho,\nu+\sigma} - S_{\mu,\nu}| < \varepsilon$, когда $\mu > m$ и $\nu > n$, а ρ, σ принимают *любые* из значений 0, 1, 2, ..., очевидно (§ 2.22), необходимо для сходимости. Условие это также и достаточно, ибо если оно удовлетворяется, то при $\mu > m + n$

$$|S_{\mu+\rho,\mu+\rho} - S_{\mu,\mu}| < \varepsilon;$$

поэтому по теореме § 2.22 $S_{\mu,\mu}$ имеет предел S, а тогда, заставляя ρ и σ стремиться к бесконечности таким образом, чтобы $\mu + \rho = \nu + \sigma$, мы увидим, что $|S - S_{\mu,\nu}| \leqslant \varepsilon$ при $\mu > m$ и $\nu > n$; а это и является условием сходимости двойного ряда.

Следствие. Абсолютно сходящийся двойной ряд будет сходящимся. Действительно, если двойной ряд абсолютно сходится и если $t_{m,n}$ — сумма членов первых m строк в первых n столбцах ряда модулей, то при заданном ε мы можем найти такое μ, что при $p > m > \mu$ и $q > n > \mu$ будет $t_{p,q} - t_{m,n} < \varepsilon$.

Но $|S_{p,q} - S_{m,n}| \leqslant t_{p,q} - t_{m,n}$ и, таким образом, $|S_{p,q} - S_{m,n}| < \varepsilon$ при $p > m > \mu$, $q > n > \mu$; а это и есть условие сходимости двойного ряда.

---

[1]) Это определение по существу принадлежит Коши (Analyse algébrique, 540.)

[2]) Это условие, высказанное Штольцем (Stolz, Math. Ann., XXIV, 157—171 (1884)), кажется, впервые было доказано Прингсгеймом.

2.51. Методы нахождения сумм двойных рядов[1])

Предположим, ряд $\sum_{\nu=1}^{\infty} u_{\mu,\nu}$ сходится к сумме S_μ. Тогда ряд $\sum_{\mu=1}^{\infty} S_\mu$ называют суммой двойного ряда *по строкам*; иначе говоря, сумма по строкам будет $\sum_{\mu=1}^{\infty}\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} u_{\mu,\nu}\right)$. Подобным же образом сумма *по столбцам* определяется как $\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\sum_{\mu=1}^{\infty} u_{\mu,\nu}\right)$. Эти суммы не обязательно одинаковы, как видно из примера $S_{\mu,\nu}=\frac{\mu-\nu}{\mu+\nu}$, в котором сумма по строкам равна -1, а сумма по столбцам $+1$; S же не существует.

Теорема Прингсгейма[2]). *Если S существует и существуют суммы по строкам и столбцам, то каждая из этих сумм равна S.* Действительно, если существует S, то мы можем найти такое m, что

$$|S_{\mu,\nu}-S|<\varepsilon, \text{ если } \mu>m,\ \nu>m.$$

Поэтому, так как $\lim\limits_{\nu\to\infty} S_{\mu,\nu}$ существует, то $\left|\lim\limits_{\nu\to\infty} S_{\mu,\nu}-S\right|\leqslant\varepsilon$, т. е. $\left|\sum_{p=1}^{\mu} S_p-S\right|\leqslant\varepsilon$ при $\mu>m$, и следовательно, (§ 2.22), сумма по строкам стремится к S. Подобным же способом доказывается сходимость к S суммы по столбцам.

2.52. Абсолютная сходимость двойных рядов

Аналогично § 2.41 мы можем доказать для двойных рядов, что *сумма членов абсолютно сходящегося двойного ряда, взятых в любом порядке как члены простого ряда, стремится к одному и тому же пределу, если только все члены участвуют в суммировании.*

Пусть $\sigma_{\mu,\nu}$ будет суммой членов в прямоугольнике, состоящем из μ первых строк первых ν столбцов двойного ряда, общий член которого $|u_{\mu,\nu}|$; пусть сумма этого двойного ряда будет σ. Тогда при заданном ε мы можем найти такие m и n, что $\sigma-\sigma_{\mu,\nu}<\frac{1}{2}\varepsilon$, когда $\mu>m$ и $\nu>n$.

Теперь предположим, что необходимо взять N членов переставленного ряда (в том порядке, в котором члены в нем стоят), чтобы

---

[1]) Эти методы принадлежат Коши.

[2]) Цит. соч., стр. 117.

в нем содержались все члены суммы $S_{M+1, M+1}$, и пусть сумма этих членов будет t_N.

Тогда $t_N - S_{M+1, M+1}$ будет состоять из суммы членов вида $u_{p, q}$, где $p > m$ и $q > n$, когда $M \geqslant m$ и $M \geqslant n$; поэтому

$$|t_N - S_{M+1, M+1}| \leqslant \sigma - \sigma_{M+1, M+1} < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Но $S - S_{M+1, M+1}$ также состоит из членов $u_{p, q}$, в которых $p > m$, $q > n$; поэтому $|S - S_{M+1, M+1}| \leqslant \sigma - \sigma_{M+1, M+1} < \frac{1}{2}\varepsilon$, и следовательно, $|S - t_N| < \varepsilon$; при этом для любого заданного ε мы можем найти соответствующее N; поэтому $t_N \to S$.

Пример 1. Доказать, что у абсолютно сходящегося двойного ряда существуют суммы $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_{m, n}$ и что суммы по строкам и столбцам сходятся к сумме ряда S.

[Пусть $t_{\mu, \nu}$ — сумма членов в первых μ строках и первых ν столбцах ряда модулей и пусть t — сумма ряда модулей.

Тогда $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} |u_{\mu, \nu}| < t$ и, таким образом, $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} u_{\mu, \nu}$ сходится; пусть b_μ — его сумма тогда

$$|b_1| + |b_2| + \ldots + |b_\mu| \leqslant \lim_{\nu \to \infty} t_{\mu, \nu} \leqslant t,$$

и, следовательно, $\sum\limits_{\mu=1}^{\infty} b_\mu$ сходится абсолютно. Поэтому сумма двойного ряда по строкам существует; подобным же образом доказывается существование суммы по столбцам. Требуемый результат получается тогда из теоремы Прингсгейма.]

Пример 2. Показать, исходя из простейших соображений, что если члены абсолютно сходящегося двойного ряда разместить в порядке

$$u_{1, 1} + (u_{2, 1} + u_{1, 2}) + (u_{3, 1} + u_{2, 2} + u_{1, 3}) + (u_{4, 1} + \ldots + u_{1, 4}) + \ldots,$$

то полученный ряд сходится к S.

2.53. Теорема Коши об умножении абсолютно сходящихся рядов[1])

Покажем теперь, что *если два ряда*

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$$

и

$$T = v_1 + v_2 + v_3 + \ldots$$

абсолютно сходятся, то ряд

$$P = u_1 v_1 + u_2 v_1 + u_1 v_2 + \ldots,$$

[1]) Cauchy, Analyse algébrique, прим. VII.

составленный из произведений их членов, написанных в любом порядке, также абсолютно сходится и его сумма равна ST.

Пусть

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n,$$
$$T_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n.$$

Тогда

$$ST = \lim S_n \lim T_n = \lim (S_n T_n)$$

согласно примеру 2 § 2.2. Далее,

$$\begin{aligned} S_n T_n = {} & u_1 v_1 + u_2 v_1 + \ldots + u_n v_1 + \\ & + u_1 v_2 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_2 + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + u_1 v_n + u_2 v_n + \ldots + u_n v_n. \end{aligned}$$

Но соответствующий двойной ряд будет абсолютно сходящимся, ибо если его члены заменить их модулями, то вместо $S_n T_n$ получим $\sigma_n \cdot \tau_n$, где

$$\sigma_n = |u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n|,$$
$$\tau_n = |v_1| + |v_2| + \ldots + |v_n|,$$

а $\sigma_n \tau_n$, по предположению, имеет предел. Поэтому, согласно § 2.52, если взять элементы двойного ряда, общий член которого $u_m v_n$, в любом порядке, то сумма их будет сходиться к ST.

Пример. Показать, что ряд, полученный умножением друх рядов

$$1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{2^2} + \frac{z^3}{2^3} + \ldots, \quad 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \ldots,$$

с последующим расположением членов полученного ряда по степеням z будет сходящимся, пока точка z лежит в кольцеобразной области, ограниченной окружностями $|z| = 1$ и $|z| = 2$.

2.6. Степенные ряды [1])

Ряд вида

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots,$$

в котором коэффициенты a_0, a_1, a_2, a_3, ... не зависят от z, *называется рядом, расположенным по возрастающим степеням z*, или, короче, *степенным рядом*.

Покажем теперь, что *если степенной ряд сходится для некоторого значения z_0 переменной z, то он будет абсолютно сходящимся для всех значений z, для которых соответствующие точки лежат внутри окружности, проходящей через z_0 и имеющей центр в начале координат.*

---

[1]) Результаты, изложенные в этом параграфе, принадлежат Коши (Cauchy, Analyse algébrique, гл. IX).

Действительно, если z такая точка, то имеем $|z|<|z_0|$; но так как $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$ сходится, то $a_n z_0^n$ должно стремиться к нулю при $n \to \infty$ и, следовательно, мы можем найти такое M (не зависящее от n), что

$$|a_n z_0^n| < M.$$

Поэтому

$$|a_n z^n| < M \left| \frac{z}{z_0} \right|^n.$$

Следовательно, каждый член ряда $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n|$ будет меньше соответственного члена сходящегося геометрического ряда $\sum_{n=0}^{\infty} M \left| \frac{z}{z_0} \right|^n$.

Отсюда следует, что первый ряд будет также сходиться, и поэтому степенной ряд будет *абсолютно* сходящимся, так как ряд модулей его членов сходится; теорема доказана.

Пусть $\underline{\lim} |a_n|^{-\frac{1}{n}} = r$, тогда по § 2.35 ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ будет абсолютно сходящимся при $|z|<r$. Если $|z|>r$, то $a_n z^n$ не стремится к нулю и, таким образом, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ расходится (§ 2.3).

Круг $|z| \leqslant r$, включающий все значения z, для которых степенной ряд

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots$$

сходится, называется *кругом сходимости* ряда. Радиус этого круга называется *радиусом сходимости*.

На практике применяется более простой способ нахождения r вытекающий из признака Даламбера (§ 2.36). Радиус сходимости есть $\lim \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} \right)$, если этот предел существует.

Степенной ряд может сходиться для всех значений переменной, как, например, ряд [1])

$$z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots,$$

представляющий функцию $\sin z$; в этом случае ряд сходится во всей плоскости z. С другой стороны, радиус сходимости степенного ряда

[1]) Ряды для e^z, $\sin z$, $\cos z$ и основные свойства этих функций, а также функции $\lg z$ предполагаются известными. Краткое изложение теории этих функций дано в приложении.

может быть равен нулю; так, в случае ряда

$$1+1!z+2!z^2+3!z^3+4!z^4+\ldots$$

имеем

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=n|z|.$$

Но последняя величина для всех n, начиная с некоторого значения, будет больше единицы для любого z, отличного от нуля. Поэтому ряд сходится только в точке $z=0$ и радиус его круга сходимости равен нулю. В точках, которые лежат *на границе* круга сходимости, ряд может как сходиться, так и расходиться; например, ряд

$$1+\frac{z}{1^s}+\frac{z^2}{2^s}+\frac{z^3}{3^s}+\frac{z^4}{4^s}+\ldots,$$

радиус сходимости которого равен единице, будет сходящимся или расходящимся в точке $z=1$ в зависимости от того, будет ли s больше или меньше единицы, как это мы видели в § 2.33.

Следствие. Если (a_n) — такая последовательность положительных членов, что $\lim\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ существует, то этот предел равен $\lim a_n^{\frac{1}{n}}$.

2.61. Сходимость рядов, получаемых дифференцированием степенного ряда

Пусть дан степенной ряд

$$a_0+a_1z+a_2z^2+a_3z^3+\ldots$$

Рассмотрим ряд

$$a_1+2a_2z+3a_3z^2+4a_4z^3+\ldots,$$

получаемый почленным дифференцированием данного степенного ряда. Покажем, что *полученный ряд имеет тот же самый круг сходимости, как и первоначальный.*

В самом деле, пусть z будет точкой внутри круга сходимости степенного ряда; выберем положительное число r_1, лежащее между $|z|$ и радиусом сходимости r. Тогда ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r_1^n$ будет сходиться абсолютно и его члены должны стремиться к нулю при $n\to\infty$. Вследствие этого можно найти такое не зависящее от n положительное число M, что $|a_n|<Mr_1^{-n}$ для всех значений n. Тогда члены

ряда $\sum_{n=1}^{\infty} n\,|a_n|\,|z|^{n-1}$ будут меньше соответствующих членов ряда

$$\frac{M}{r_1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\,|z|^{n-1}}{r_1^{n-1}}.$$

Но этот ряд будет сходиться по § 2.36, так как $|z|<r_1$. Поэтому по § 2.34 ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,|a_n|\,|z|^{n-1}$$

сходится, т. е. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} na_nz^{n-1}$ сходится абсолютно для всех точек z, расположенных внутри круга сходимости первоначального ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_nz^n$. Когда $|z|>r$, то a_nz^n, и тем более na_nz^{n-1}, не стремится к нулю; таким образом, оба ряда имеют один и тот же круг сходимости.

Следствие. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_nz^{n+1}}{n+1}$, полученный почленным интегрированием первоначального степенного ряда, имеет тот же самый круг сходимости, что и ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_nz^n$.

2.7. Бесконечные произведения

Рассмотрим класс пределов, известных под названием *бесконечных произведений*.

Пусть $1+a_1$, $1+a_2$, $1+a_3$, ... будет последовательностью, ни один член которой не равен нулю. Если при $n\to\infty$ произведение

$$(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)\ \ldots\ (1+a_n)$$

(которое мы обозначим через Π_n) стремится к определенному пределу, отличному от нуля, то этот предел называется *значением бесконечного произведения*

$$\Pi=(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)\ldots$$

В этом случае говорят, что бесконечное произведение *сходится* [1]). Очевидно, что условие $\lim a_n=0$ является *необходимым*

---

[1]) Сходимость произведения, в котором $a_{n-1}=-\frac{1}{n^2}$, была исследована Валлисом уже в 1655 г.

условием сходимости, потому что

$$\lim \Pi_{n-1} = \lim \Pi_n \neq 0.$$

Значение бесконечного произведения обозначают так:

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n).$$

Далее, имеем

$$\prod_{n=1}^{m} (1 + a_n) = \exp\left\{\sum_{n=1}^{m} \lg (1 + a_n)\right\}$$

и[1])

$$\exp\left\{\lim_{m\to\infty} u_m\right\} = \lim_{m\to\infty} \{\exp u_m\},$$

если первый предел существует; сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \lg (1 + a_n)$, где логарифмам приписывается их главное значение, является поэтому достаточным условием сходимости бесконечного произведения. Если этот ряд логарифмов сходится абсолютно, то говорят, что бесконечное произведение сходится *абсолютно*.

Условие абсолютной сходимости дается следующей теоремой: *для того чтобы бесконечное произведение*

$$(1 + a_1)(1 + a_2)(1 + a_3) \ldots$$

сходилось абсолютно, необходимо и достаточно, чтобы ряд

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$

был абсолютно сходящимся.

В самом деле, согласно определению Π будет или не будет абсолютно сходящимся, смотря по тому, будет или не будем абсолютно сходящимся ряд

$$\lg (1 + a_1) + \lg (1 + a_2) + \lg (1 + a_3) + \ldots$$

Но так как $\lim a_n = 0$, то мы можем найти такое m, что при $n > m$

$$|a_n| < \frac{1}{2},$$

и тогда

$$\left|a_n^{-1} \lg (1 + a_n) - 1\right| = \left|-\frac{a_n}{2} + \frac{a_n^2}{3} - \frac{a_n^3}{4} + \ldots\right| <$$
$$< \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots = \frac{1}{2}.$$

---

[1]) См. приложение, § А.2.

Следовательно, при $n > m$

$$\frac{1}{2} \leqslant \left| \frac{\lg(1+a_n)}{a_n} \right| \leqslant \frac{3}{2}.$$

По теореме о сравнении рядов отсюда следует, что абсолютная сходимость ряда $\sum \lg(1+a_n)$ влечет за собой абсолютную сходимость ряда $\sum a_n$, и обратно, лишь бы только $a_n \neq -1$ ни при каком значении n.

Этим теорема доказана [1]).

Если в бесконечном произведении конечное число множителей равняется нулю и при отбрасывании их остающееся произведение сходится, то говорят, что первоначальное бесконечное произведение сходится к нулю. Но о таком произведении, как $\prod_{n=2}^{\infty}(1-n^{-1})$, говорят, что оно *расходится* к нулю.

Следствие. Так как $\exp S_n \to \exp l$, при $S_n \to l$, то из § 2.41 следует, что множители абсолютно сходящегося произведения можно переставлять, не оказывая влияния на величину произведения.

Пример 1. Показать, что если $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ сходится, то сходится также $\sum_{n=1}^{\infty} \lg(1+a_n)$, если логарифмы имеют главные значения.

Пример 2. Показать, что бесконечное произведение

$$\frac{\sin z}{z} \cdot \frac{\sin \frac{1}{2} z}{\frac{1}{2} z} \cdot \frac{\sin \frac{1}{3} z}{\frac{1}{3} z} \cdot \frac{\sin \frac{1}{4} z}{\frac{1}{4} z} \cdots$$

абсолютно сходится при всех значениях z.

[Действительно, $\left(\sin \frac{z}{n}\right) \Big/ \left(\frac{z}{n}\right)$ может быть написано в виде $1 - \frac{\lambda_n}{n^2}$, где $|\lambda_n| < k$ и k не зависит от n, ряд же $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{n^2}$ является абсолютно сходящимся, как видно из сравнения с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Бесконечное произведение будет поэтому абсолютно сходящимся.]

---

[1]) Рассмотрение сходимости бесконечных произведений, в котором те же результаты получаются без помощи логарифмических функций, дано Прингсгеймом (Pringsheim, Math. Ann., XXXIII, 119—154 (1889)), а также Бромуичем (Bromwich, Infinite series, гл. VI).