2.71. Примеры бесконечных произведений

Рассмотрим бесконечное произведение

$$\left(1-\frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{3^2\pi^2}\right)\ldots,$$

которое, как будет показано ниже (§ 7.5), представляет функцию

$$z^{-1}\sin z.$$

Чтобы узнать, будет ли оно абсолютно сходящимся, мы должны рассмотреть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^2}{n^2\pi^2}$, или $\frac{z^2}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$; этот ряд абсолютно сходится, и таким образом, произведение будет абсолютно сходящимся при всех значениях z.

Перепишем теперь бесконечное произведение в виде

$$\left(1-\frac{z}{\pi}\right)\left(1+\frac{z}{\pi}\right)\left(1-\frac{z}{2\pi}\right)\left(1+\frac{z}{2\pi}\right)\ldots$$

Абсолютная сходимость этого бесконечного произведения зависит от абсолютной сходимости ряда

$$-\frac{z}{\pi}+\frac{z}{\pi}-\frac{z}{2\pi}+\frac{z}{2\pi}-\ldots$$

Но этот ряд только условно сходящийся, так как ряд модулей

$$\frac{|z|}{\pi}+\frac{|z|}{\pi}+\frac{|z|}{2\pi}+\frac{|z|}{2\pi}+\ldots$$

расходится. Следовательно, в этом виде бесконечное произведение не будет абсолютно сходящимся и, таким образом, при изменении порядка множителей $\left(1\pm\frac{z}{n\pi}\right)$ нужно опасаться изменения значения произведения.

Наконец, пусть то же самое бесконечное произведение будет написано в виде

$$\left\{\left(1-\frac{z}{\pi}\right)e^{\frac{z}{\pi}}\right\}\left\{\left(1+\frac{z}{\pi}\right)e^{-\frac{z}{\pi}}\right\}\left\{\left(1-\frac{z}{2\pi}\right)e^{\frac{z}{2\pi}}\right\}\left\{\left(1+\frac{z}{2\pi}\right)e^{-\frac{z}{2\pi}}\right\}\ldots,$$

в котором каждое из выражений

$$\left(1\pm\frac{z}{m\pi}\right)ex^{\mp\frac{z}{m\pi}}$$

считается за один множитель бесконечного произведения. Абсолютная сходимость этого произведения зависит от абсолютной сходимости

ряда, $(2m-1)$-й и $2m$-й члены которого будут

$$\left(1 \mp \frac{z}{m\pi}\right) e^{\pm \frac{z}{m\pi}} - 1.$$

Но легко убедиться в том, что

$$\left(1 \mp \frac{z}{m\pi}\right) e^{\pm \frac{z}{m\pi}} = 1 + O\left(\frac{1}{m^2}\right),$$

и, таким образом, абсолютная сходимость ряда следует из сравнения его с рядом

$$1 + 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots$$

Бесконечное произведение в этом последнем виде будет поэтому опять абсолютно сходящимся; таким образом, введение множителей $e^{\pm \frac{z}{n\pi}}$ превратило условную сходимость в абсолютную. Этот результат является частным случаем первой части теоремы Вейерштрасса (§ 7.6) о бесконечных произведениях.

Пример 1. Доказать, что $\prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1 - \frac{z}{c+n}\right) e^{\frac{z}{n}} \right\}$ будет абсолютно сходящимся при всех значениях z, если c — какое угодно постоянное число, отличное от отрицательных целых чисел.

Действительно, бесконечное произведение будет абсолютно сходящимся одновременно с рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1 - \frac{z}{c+n}\right) e^{\frac{z}{n}} - 1 \right\}.$$

Общий же член этого ряда будет

$$\left(1 - \frac{z}{c+n}\right) \left\{ 1 + \frac{z}{n} + \frac{z^2}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \right\} - 1 =$$

$$= \frac{zc - \frac{1}{2} z^2}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Но ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится; таким образом, по § 2.34 ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1 - \frac{z}{c+n}\right) e^{\frac{z}{n}} - 1 \right\}$$

сходится абсолютно, а потому и бесконечное произведение абсолютно сходится.

Пример 2. Показать, что $\prod_{n=2}^{\infty}\left\{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} z^{-n}\right\}$ сходится во всех точках, расположенных вне круга с радиусом единица и с центром в начале координат.

В самом деле, бесконечное произведение сходится абсолютно при абсолютной сходимости ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} z^{-n}.$$

Но $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}=e$, так что предел отношения $(n+1)$-го члена ряда к n-му равен $\frac{1}{z}$; поэтому абсолютная сходимость ряда имеет место, когда

$$\left|\frac{1}{z}\right|<1, \quad \text{т. е. при} \quad |z|>1.$$

Пример 3. Показать, что

$$\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots(m-1)}{(z+1)(z+2)\ldots(z+m-1)}\, m^{z}$$

стремится к конечному пределу при $m\to\infty$, если только z не будет целым отрицательным числом.

Это выражение может быть записано как произведение, n-й множитель которого равен

$$\frac{n}{z+n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{z}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{z}\left(1+\frac{z}{n}\right)^{-1}=\left\{1+\frac{z(z-1)}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right\}.$$

Таким образом, это произведение абсолютно сходится, если только сходится абсолютно ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{z(z-1)}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right\}.$$

Сравнение последнего ряда со сходящимся рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ показывает, что это именно и имеет место. Если же z есть отрицательное целое число, то данное выражение не существует, так как один из множителей в знаменателе равен нулю.

Пример 4. Доказать, что

$$z\left(1-\frac{z}{\pi}\right)\left(1-\frac{z}{2\pi}\right)\left(1+\frac{z}{\pi}\right)\left(1-\frac{z}{3\pi}\right)\left(1-\frac{z}{4\pi}\right)\left(1+\frac{z}{2\pi}\right)\ldots=e^{-\frac{z}{\pi}\lg 2}\sin z.$$

Действительно,

$$\lim_{k\to\infty} z\left(1-\frac{z}{\pi}\right)\left(1-\frac{z}{2\pi}\right)\left(1+\frac{z}{\pi}\right)\ldots\left(1-\frac{z}{(2k-1)\pi}\right)\left(1-\frac{z}{2k\pi}\right)\left(1+\frac{z}{k\pi}\right)=$$

$$=\lim_{k\to\infty}\left[e^{\frac{z}{\pi}\left(-1-\frac{1}{2}+1-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\ldots-\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}+\frac{1}{k}\right)}\times\right.$$

$$\left.\times z\left(1-\frac{z}{\pi}\right)e^{\frac{z}{\pi}}\left(1-\frac{z}{2\pi}\right)e^{-\frac{z}{2\pi}}\ldots\left(1-\frac{z}{2k\pi}\right)e^{\frac{z}{2k\pi}}\left(1+\frac{z}{k\pi}\right)e^{-\frac{z}{k\pi}}\right]=$$

$$=\lim_{k\to\infty} e^{-\frac{z}{\pi}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)}\times$$

$$\times z\left(1-\frac{z}{\pi}\right)e^{\frac{z}{\pi}}\left(1+\frac{z}{\pi}\right)e^{-\frac{z}{\pi}}\left(1-\frac{z}{2\pi}\right)e^{\frac{z}{2\pi}}\left(1+\frac{z}{2\pi}\right)e^{-\frac{z}{2\pi}}\ldots,$$

ибо произведение, множителями которого будут

$$\left(1\pm\frac{z}{r\pi}\right)e^{\mp\frac{z}{r\pi}}$$

абсолютно сходится и, таким образом, порядок его членов можно менять.

Но так как

$$\lg 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\ldots,$$

то это показывает, что данное произведение равно

$$e^{-\frac{z}{\pi}\lg 2}\sin z.$$

2.8. Бесконечные определители

Бесконечные ряды и бесконечные произведения отнюдь не являются единственными известными бесконечными процессами, которые приводят к разумным результатам. Исследования Г. У. Хилла по теории движения Луны[1]) привели к рассмотрению *бесконечных определителей*.

Фактическое исследование сходимости принадлежит не Хиллу, а Пуанкаре (Poincaré, Bull. de la Soc. Math. de France, XIV, 87 (1886)). Мы придерживаемся изложения, данного Кохом (H. von Koch, Acta Math., XVI (1892), 217).

---

[1]) Hill G. W., Researches in the Lunar theory, Amer. J. Math., 1, 5—26, 126—147, 245—260 (1878). Перепечатано в Acta Mathematica, VIII, 1—36 (1886).

Бесконечные определители раньше встречались в изысканиях об алгебраических уравнениях n-й степени, Фюрстенау (Fürstenau, Darstellung der reelen Wurzeln algebraischer Gleichungen durch Determinanten der Coeffizienten, Marburg, 1860). Специальные типы бесконечных определителей (известных как *континуанты*) встречаются в теории бесконечных непрерывных дробей; см. Silvester, Math. Papers, I, ч. 1, 504 и III, 249.

Пусть A_{ik} определено для всех целых значений (положительных и отрицательных) i и k; обозначим через

$$D_m = [A_{ik}]_{i,\,k=-m,\,\ldots,+m}$$

определитель, составленный из чисел A_{ik} $(i,\ k = -m,\ \ldots,\ +m)$. Тогда, если при $m \to \infty$ определитель D_m стремится к определенному пределу D, то мы будем говорить, что бесконечный определитель

$$[A_{ik}]_{i,\,k=-\infty,\,\ldots,\,+\infty}$$

сходится и имеет значение D. Если предела не существует, то говорят, что рассматриваемый определитель *расходится*.

Об элементах A_{ii} (где i принимает всевозможные значения) говорят, что они образуют *главную диагональ* определителя D. Элементы A_{ik}, где i постоянно, а k принимает всевозможные значения, образуют *строку* i, а элементы A_{ik}, где k постоянно, а i принимает всевозможные значения, образуют *столбец* k. Элемент A_{ik} называется *диагональным* или *недиагональным* в зависимости от того, будет ли $i = k$ или $i \lessgtr k$. Элемент A_{00} называется *началом* определителя.

2.81. Сходимость бесконечного определителя

Покажем теперь, что *бесконечный определитель сходится, если произведение диагональных элементов и сумма недиагональных элементов сходятся абсолютно.*

Обозначим диагональные элементы бесконечного определителя через $1 + a_{ii}$, а недиагональные через $a_{ik}\,(i \neq k)$, так что определитель запишется так:

$$\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & 1 + a_{-1-1} & a_{-10} & a_{-11} & \cdots \\ \cdots & a_{0-1} & 1 + a_{00} & a_{01} & \cdots \\ \cdots & a_{1-1} & a_{10} & 1 + a_{11} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}.$$

Тогда, так как ряд $\sum\limits_{i,\,k=-\infty}^{\infty} |a_{ik}|$ сходится, то произведение

$$\bar{P} = \prod_{i=-\infty}^{\infty} \left(1 + \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_{ik}|\right)$$

также сходится.

Составим теперь произведения

$$P_m = \prod_{i=-m}^{m} \left(1 + \sum_{k=-m}^{m} a_{ik}\right), \quad \bar{P}_m = \prod_{i=-m}^{m} \left(1 + \sum_{k=-m}^{m} |a_{ik}|\right);$$

тогда, если в развернутом выражении P_m некоторые члены заменить нулями и у некоторых других членов изменить знак, то мы получим D_m; таким образом, каждому члену в выражении D_m соответствует в выражении $\overline{P}_m$ член с равным или большим модулем. Далее, $D_{m+p} - D_m$ представляет сумму тех членов в определителе D_{m+p}, которые обращаются в нуль, если числа $a_{ik}\{l, k=\pm(m+1), \ldots, \pm(m+p)\}$ заменить нулями; каждому из этих членов соответствует член равного или большего модуля в $\overline{P}_{m+p} - \overline{P}_m$.

Таким образом,

$$|D_{m+p} - D_m| \leqslant \overline{P}_{m+p} - \overline{P}_m.$$

Но так как $\overline{P}_m$ стремится к пределу при $m \to \infty$, то и D_m стремится к пределу, что и доказывает предложение.

2.82. Теорема об изменении элементов в сходящихся бесконечных определителях

Покажем теперь, что *определитель, сходящийся в вышеуказанном смысле, остается сходящимся, если элементы любой строки заменить произвольной системой элементов, все модули которых меньше некоторого определенного положительного числа.*

Заменим, например, элементы

$$\ldots, A_{0,-m}, \ldots, A_{0,0}, \ldots, A_{0,m}, \ldots$$

начальной строки элементами

$$\ldots, \mu_{-m}, \ldots, \mu_0, \ldots, \mu_m, \ldots,$$

удовлетворяющими неравенству

$$|\mu_r| < \mu,$$

где μ — некоторое положительное число. Новые значения D_m и D обозначим через D'_m и D'. Кроме того, обозначим через $\overline{P}'_m$ и $\overline{P}'$ произведения, полученные из $\overline{P}_m$ и $\overline{P}$ отбрасыванием множителя, соответствующего индексу ноль; мы видим, что ни один из членов D'_m не может иметь большего модуля, чем соответственный член в выражении $\mu\overline{P}'_m$; следовательно, рассуждая, как в предыдущем параграфе, мы получим

$$|D'_{m+p} - D'_m| < \mu\overline{P}'_{m+p} - \mu\overline{P}'_m.$$

что достаточно для установления высказанного результата.

Пример. Показать, что необходимое и достаточное условие абсолютной сходимости бесконечного определителя

$$\lim_{m\to\infty}\begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_1 & 1 & \alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 1 & \alpha_3 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & & 0 & \beta_m & 1 \end{vmatrix}$$

заключается в том, чтобы ряд $\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 + \ldots$ был абсолютно сходящимся.

(von Koch)

ЛИТЕРАТУРА

Сходящиеся ряды

A. Pringsheim, Math. Ann., XXXV, 297—394 (1890).
T. J. I'a Bromwich, Theory of infinite series, гл. II, III, IV, 1908.

Условно сходящиеся ряды

G. F. B. Riemann, Ges. math. Werke, 221—225.
A. Pringsheim, Math. Ann., XXII, 455—503 (1883).

Двойные ряды

A. Pringsheim, Münchener Sitzungsberichte, XXVII, 101—152 (1897).
A. Pringsheim, Math. Ann., LIII, 289—321 (1900).
G. H. Hardy, Proc. London Math. Soc. (2), 1, 124—128 (1904).

Примеры

1. Определить $\lim\limits_{n\to\infty}(e^{-na}n^b)$, $\lim\limits_{n\to\infty}(n^{-a}\lg n)$ при $a>0$, $b>0$.

2. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{1 - n\lg\frac{2n+1}{2n-1}\right\}.$$

(Trinity, 1904)

3. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1\cdot 3\ldots 2n-1}{2\cdot 4\ldots 2n}\cdot\frac{4n+3}{2n+2}\right\}^2$$

(Peterhouse, 1906)

4. Найти совокупность значений z, при которых ряд

$$2\sin^2 z - 4\sin^4 z + 8\sin^6 z - \ldots + (-1)^{n+1}2^n\sin^{2n} z + \ldots$$

сходится.

5. Показать, что ряд

$$\frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z+2} - \frac{1}{z+3} + \ldots$$

будет условно сходящимся при всех значениях z, за исключением некоторых частных значений, а ряд

$$\frac{1}{z}+\frac{1}{z+1}+\ldots+\frac{1}{z+p-1}-\frac{1}{z+p}-\frac{1}{z+p+1}-\ldots$$
$$\ldots-\frac{1}{z+2p+q-1}+\frac{1}{z+2p+q}+\ldots,$$

в котором всегда за p положительными членами следуют $p+q$ отрицательных членов, будет расходящимся.

(Simon)

6. Показать, что

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\ldots=\frac{1}{2}\ln 2.$$

(Trinity, 1908)

7. Показать, что ряд

$$\frac{1}{1^\alpha}+\frac{1}{2^\beta}+\frac{1}{3^\alpha}+\frac{1}{4^\beta}+\ldots \qquad (1<\alpha<\beta)$$

сходится, хотя

$$\frac{u_{2n+1}}{u_{2n}}\to\infty.$$

(Cesàro)

8. Показать, что ряд

$$\alpha+\beta^2+\alpha^3+\beta^4+\ldots \qquad (0<\alpha<\beta<1)$$

сходится, хотя

$$\frac{u_{2n}}{u_{2n-1}}\to\infty.$$

(Cesàro)

9. Показать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nz^{n-1}\{(1+n^{-1})^n-1\}}{(z^n-1)\{z^n-(1+n^{-1})^n\}}$$

абсолютно сходится при всех значениях z, исключая значения

$$z=\left(1+\frac{a}{m}\right)e^{2k\pi i/m},$$

где $a=0,1;\quad k=0,\ 1,\ldots,m-1;\quad m=1,2,3,\ldots$

10. Показать, что при $s>1$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\frac{1}{s-1}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n^s}+\frac{1}{s-1}\left\{\frac{1}{(n+1)^{s-1}}-\frac{1}{n^{s-1}}\right\}\right]$$

и что ряд в правой части сходится при $0<s<1$.

(De la Vallée Poussin, Mém. de l'Acad. de Belgique, LIII, № 6 (1896))

11. Для ряда, общий член которого

$$u_n = q^{n-\nu} x^{\frac{1}{2}\nu(\nu+1)} \qquad (0 < q < 1 < x),$$

где ν обозначает число цифр в числе n, записанном в обычной десятичной системе счисления, показать, что

$$\lim_{n\to\infty} u_n^{\frac{1}{n}} = q$$

и что ряд сходится, хотя $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \infty$.

12. Показать, что ряд

$$q_1 + q_1^2 + q_2^3 + q_1^4 + q_2^5 + q_3^6 + q_1^7 + \ldots,$$

где

$$q_n = q^{1+\frac{4}{n}},$$

сходится, хотя отношение $(n+1)$-го члена к n-му больше единицы, когда n не будет треугольным числом [1]).

13. Показать, что ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{2n\pi i x}}{(w+n)^s},$$

где w вещественно и под $(w+n)^s$ понимается значение $e^{s \lg (w+n)}$, где логарифм взят в его арифметическом смысле, будет сходящимся при всех значениях s, если $\operatorname{Im} x$ положительна. Он будет также сходящимся при всех значениях s, вещественная часть которых положительна, при условии, что x вещественно и не равно целому числу.

14. При $u_n > 0$ показать, что если ряд $\sum u_n$ сходится, то $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} (nu_n) = 0$, и что если, сверх того, $u_n \geqslant u_{n+1}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} (nu_n) = 0$.

15. Показать, что если

$$a_{m,n} = \frac{m-n}{2^{m+n}} \frac{(m+n-1)!}{m!\, n!} \qquad (m, n > 0),$$

$$a_{m,0} = 2^{-m}, \quad a_{0,n} = -2^{-n}, \quad a_{0,0} = 0,$$

то

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n} \right) = -1, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_{m,n} \right) = 1.$$

(Trinity, 1904)

---

[1]) Под треугольным числом понимается число вида $\dfrac{k(k+1)}{2}$, где k — целое. (*Прим. ред.*)

16. Обращением ряда

$$1+\frac{8q}{1-q}+\frac{16q^2}{1+q^2}+\frac{24q^3}{1-q^3}+\cdots$$

(где $|q|<1$) в двойной ряд показать, что он равен

$$1+\frac{8q}{(1-q)^2}+\frac{8q^2}{(1+q^2)^2}+\frac{8q^3}{(1-q^3)^2}+\cdots$$

(Jacobi)

17. Принимая, что $\sin z = z\prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{r^2\pi^2}\right)$, показать, что если $m\to\infty$ и $n\to\infty$ таким образом, что $\lim\frac{m}{n}=k$, где k конечно, то

$$\lim\prod_{r=-n}^{m}{}'\left(1+\frac{z}{r\pi}\right)=k^{\frac{z}{\pi}}\,\frac{\sin z}{z},$$

причем штрих обозначает, что множитель, для которого $r=0$, опущен.

(Math. Trip., 1904)

18. Если $u_0=u_1=u_2=0$ и если при $n>1$

$$u_{2n-1}=-\frac{1}{\sqrt{n}},\qquad u_{2n}=\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n\sqrt{n}},$$

то $\prod_{n=0}^{\infty}(1+u_n)$ сходится, хотя ряды $\sum_{n=0}^{\infty}u_n$ и $\sum_{n=0}^{\infty}u_n^2$ расходятся.

(Math. Trip., 1906)

19. Доказать, что бесконечное произведение

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1-\frac{z}{n}\right)^{n^k}\exp\left(\sum_{m=1}^{k+1}\frac{n^{k-m}z^m}{m}\right)\right\},$$

где k — любое целое положительное число, абсолютно сходится при всех значениях z.

20. Если $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ — условно сходящийся ряд с вещественными членами, то $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ будет сходящимся (но не абсолютно) к нулю или расходящимся, смотря по тому, будет ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ сходиться или расходиться.

(Cauchy)

21. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n$ абсолютно сходится. Показать, что бесконечный определитель

$$\Delta(c) = \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \frac{(c-4)^2-\theta_0}{4^2-\theta_0} & \frac{-\theta_1}{4^2-\theta_0} & \frac{-\theta_2}{4^2-\theta_0} & \frac{-\theta_3}{4^2-\theta_0} & \frac{-\theta_1}{4^2-\theta_0} & \cdots \\ \cdots & \frac{-\theta_1}{2^2-\theta_0} & \frac{(c-2)^2-\theta_0}{2^2-\theta_0} & \frac{-\theta_1}{2^2-\theta_0} & \frac{-\theta_2}{2^2-\theta_0} & \frac{-0_3}{2^2-\theta_0} & \cdots \\ \cdots & \frac{-\theta_2}{0^2-\theta_0} & \frac{-\theta_1}{0^2-\theta_0} & \frac{c^2-\theta_0}{0^2-\theta_0} & \frac{-\theta_1}{0^2-\theta_0} & \frac{-\theta_2}{0^2-\theta_0} & \cdots \\ \cdots & \frac{-\theta_3}{2^2-\theta_0} & \frac{-\theta_2}{2^2-\theta_0} & \frac{-\theta_1}{2^2-\theta_0} & \frac{(c+2)^2-\theta_0}{2^2-\theta_0} & \frac{-\theta_1}{2^2-\theta_0} & \cdots \\ \cdots & \frac{-\theta_4}{4^2-\theta_0} & \frac{-\theta_3}{4^2-\theta_0} & \frac{-\theta_2}{4^2-\theta_0} & \frac{-\theta_1}{4^2-\theta_0} & \frac{(c+4)^2-\theta_0}{4^2-\theta_0} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

сходится и что уравнение

$$\Delta(c) = 0$$

эквивалентно уравнению

$$\sin^2 \frac{1}{2} \pi c = \Delta(0) \sin^2 \frac{1}{2} \pi \theta_0^{\frac{1}{2}}.$$

(Hill; см § 19. 42)

ГЛАВА 3

НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ И РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ

3.1. Зависимость одного комплексного числа от другого

Задачи, которыми занимается анализ, относятся в основном к *зависимости* одного комплексного числа от другого.

Если z и ζ — два комплексных числа, связанные между собою так, что для значений z, принадлежащих к некоторой совокупности, можно определить соответственные значения ζ (например, если ζ есть квадрат z или если $\zeta = 1$ при z вещественном и $\zeta = 0$ для всех остальных значений z), то говорят, что ζ есть функция от z.

Эту зависимость не надо смешивать с наиболее важным случаем ее, который будет объяснен ниже под названием *аналитической функциональной* зависимости.

Если ζ есть вещественная функция от вещественной переменной z, то соотношение между ζ и z, записываемое в виде

$$\zeta = f(z),$$

может быть наглядно представлено при помощи кривой на плоскости, именно геометрическим местом точек, прямоугольные координаты которых суть (z, ζ). Но нельзя найти такого простого и удобного геометрического способа для наглядного представления соотношения $\zeta = f(z)$ в случае, когда ζ и z будут комплексными переменными, т. е.

$$\zeta = \xi + i\eta, \quad z = x + iy.$$

В этом случае представление, полностью аналогичное указанному для вещественных переменных, потребовало бы четырехмерного пространства, ибо здесь имеется четыре переменных: ξ, η, x и y.

Один из способов, предложенный Ли и Вейерштрассом, заключается в применении двупараметрической системы прямых, принадлежащих к четырехпараметрической системе прямых трехмерного пространства.

Другое предложение заключается в представлении ξ и η отдельно при помощи поверхностей

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y)$$

Третий прием, принадлежащий Хеффтеру [1]), заключается в том, чтобы, записав

$$\zeta = re^{i\theta},$$

построить поверхность $r = r(x, y)$, которую можно бы назвать *поверхностью модуля* функции, и на ней отмечать значения θ. Можно было бы изменить это предложение различными способами, изображая θ кривыми, вычерченными на поверхности $r = r(x, y)$.

3.2. Непрерывность функций вещественных переменных

Читатель, конечно, имеет общее представление (полученное из графического представления функций вещественной переменной) о том, что понимается под непрерывностью.

Мы должны теперь дать точное определение, которое придало бы определенность этому расплывчатому представлению.

Пусть $f(x)$ есть функция x, которая определена при $a \leqslant x \leqslant b$, и пусть x_1 таково, что $a \leqslant x_1 \leqslant b$. Если существует такое число l, что при произвольно выбранном положительном числе ε можно найти такое положительное число η, что

$$|f(x) - l| < \varepsilon,$$

когда $|x - x_1| < \eta$, $x \neq x_1$ и $a \leqslant x \leqslant b$, то l называется пределом $f(x)$ при $x \to x_1$.

Может случиться, что мы сможем найти такое число l_+ (даже тогда, когда не существует l), что $|f(x) - l_+| < \varepsilon$ при $x_1 < x < x_1 + \eta$. Мы называем тогда l_+ пределом $f(x)$ при x, стремящемся к x_1 справа, и обозначаем этот предел через $f(x_1 + 0)$; подобным же образом мы определяем $f(x_1 - 0)$, если он существует. Если $f(x_1 + 0)$, $f(x_1)$, $f(x_1 - 0)$ все существуют и равны между собой, то мы говорим, что $f(x)$ *непрерывна в* x_1. Следовательно, если $f(x)$ непрерывна в x_1, то при данном ε мы можем найти такое η, что

$$|f(x) - f(x_1)| < \varepsilon,$$

когда $|x - x_1| < \eta$ и $a \leqslant x \leqslant b$.

Если l_+ и l_- существуют и не равны между собой, то говорят, что $f(x)$ имеет *разрыв первого рода* [2]) при x_1; если же $l_+ = l_- \neq f(x_1)$, то говорят, что $f(x)$ имеет *устранимый разрыв* в x_1.

Если $f(x)$ — комплексная функция вещественной переменной, т. е. если, $f(x) = g(x) + ih(x)$, где $g(x)$ и $h(x)$ вещественны, то из непрерывности $f(x)$ в x_1 вытекает непрерывность $g(x)$ и $h(x)$. Ибо если $|f(x) - f(x_1)| < \varepsilon$, то $|g(x) - g(x_1)| < \varepsilon$ и $|h(x) - h(x_1)| < \varepsilon$; поэтому высказанное утверждение очевидно.

---

[1]) Heffter, Zeitschrift für Math. und Phys., XLIX, 235, (1899).

[2]) Если говорится, что функция имеет разрыв первого рода в определенных точках интервала, то подразумевается, что она непрерывна во всех остальных точках интервала.

Пример. 1. Из примеров 1 и 2 § 2.2 вывести, что если $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны при x_1, то таковыми будут и $f(x)\pm\varphi(x)$, $f(x)\cdot\varphi(x)$, а если $\varphi(x_1)\neq 0$, то и $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$.

Распространенное представление о непрерывности, поскольку оно относится к вещественной переменной $f(x)$, зависящей от другой вещественной переменной x, несколько отличается от только что установленного, и его, пожалуй, лучше всего можно выразить следующим образом: $f(x)$ — непрерывная функция x, если при прохождении x всех значений, промежуточных между любыми двумя смежными значениями x_1 и x_2 функция $f(x)$ пробегает все значения, промежуточные между соответственными значениями $f(x_1)$ и $f(x_2)$.

Возникает теперь вопрос, насколько это наглядное определение будет эквивалентно точному определению, данному выше.

Коши показал, что если вещественная функция $f(x)$ вещественной переменной x удовлетворяет точному определению, то она удовлетворяет и тому, которое мы назвали наглядным определением; этот результат будет доказан в § 3.63. Но обратное предложение, как показал Дарбу, неверно. Это может быть иллюстрировано следующим примером [1]). Пусть $f(x)=\sin\dfrac{\pi}{2x}$ между $x=-1$ и $x=+1$ (исключая $x=0$) и $f(0)=0$. Можно доказать, что $f(x)$ зависит непрерывно от x вблизи $x=0$ в смысле наглядного определения, но не будет непрерывна при $x=0$ в смысле точного определения.

Пример 2. Если $f(x)$ будет определенной и возрастающей функцией в промежутке (a, b), то пределы $f(x\pm 0)$ существуют во всех точках внутри этого промежутка.

[В самом деле, если $f(x)$ — возрастающая функция, то можно найти такое сечение рациональных чисел, что если a и A будут какими-либо числами соответственно классов L и R, то $a<f(x+h)$ для любого положительного значения h и $A\geqslant f(x+h)$ для некоторого положительного значения h. Число, определяемое этим сечением, будет $f(x+0)$.]

3.21. Простые кривые. Континуумы [2])

Пусть x и y — две вещественные функции вещественной переменной t, непрерывные для всех значений t в промежутке $a\leqslant t\leqslant b$. Обозначим зависимость x и y от t следующим образом:

$$x=x(t),\qquad y=y(t)\qquad (a\leqslant t\leqslant b).$$

Функции $x(t)$, $y(t)$ предполагаются такими, что они не принимают одной и той же пары значений ни при каких двух различных значениях t в промежутке $a\leqslant t\leqslant b$. Тогда совокупность точек с координатами, соответствующими этим значениям t, называется *простой кривой* [3]). Если $x(a)=x(b)$, $y(a)=y(b)$, то простая кривая называется *замкнутой*.

---

[1]) Принадлежащим Меншену (Mansion, Mathesis (2), XIX, 129—131 (1899)).

[2]) Терминология авторов отличается от принятой в русской литературе. (*Прим. ред.*)

[3]) В русской литературе употребляется термин «простая жорданова кривая». (*Прим ред.*)

Пример. Окружность $x^2+y^2=1$ представляет собой простую замкнутую кривую, ибо мы можем написать [1])

$$x=\cos t, \quad y=\sin t \qquad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

Двумерным континуумом [2]) называется совокупность точек на плоскости, обладающих следующими двумя свойствами:

(I) Если (x, y) — декартовы координаты любой ее точки, то можно найти такое *положительное* число δ (зависящее от x и y), что каждая точка, расстояние которой от (x, y) меньше δ, принадлежит этой совокупности.

(II) Любые две точки совокупности могут быть соединены простой кривой, состоящей целиком из точек совокупности.

Пример. Точки, для которых $x^2+y^2<1$, образуют континуум. Если P есть одна из точек внутри единичного круга, и притом такая, что $OP=r<1$, то мы можем взять $\delta=1-r$; любые две точки внутри круга можно соединить прямой, целиком лежащей внутри круга.

Следующие две теоремы [3]) принимаются в этой книге без доказательства. Простые случаи их кажутся очевидными геометрически, в общем же случае теоремы подобного рода принимаются без доказательства потому, что точные доказательства обычно чрезвычайно длинны и трудны.

(I) Простая замкнутая кривая делит плоскость на два континуума («внутренность» и «внешность»).

(II) Если P — точка на кривой и Q — точка вне кривой, то угол между QP и Ox изменяется на $\pm 2\pi$ или на нуль, когда P описывает кривую, смотря по тому, будет ли Q внутренней или внешней точкой.

Если изменение будет $+2\pi$, то говорят, что P описывает кривую «против часовой стрелки».

Континуум, образованный из внутренности простой кривой, часто называется *открытой двумерной областью* или, короче, *открытой областью*, а кривая называется ее *контуром*; такой континуум, взятый вместе с контуром, называется *замкнутой двумерной областью* или, короче, *замкнутой областью*. Простая кривая часто называется *замкнутой одномерной областью*, а простая кривая с исключением концевых точек называется *открытой одномерной областью*.

---

[1]) Доказательство того, что синус и косинус представляют собой непрерывные функции, помещено в приложении, § А. 41.

[2]) В русской литературе употребляется термин «область». (*Прим. ред.*)

[3]) Точное доказательство можно найти в книге Ватсона: Watson, Complex integration and Cauchy's theorem (Cambridge Math. Tracts., № 15). (См. также П. С. Александров, Комбинаторная топология, гл. II, Гостехиздат, 1947.)

3.22. Непрерывные функции комплексных переменных

Пусть $f(z)$ есть функция от z, определенная во всех точках некоторой замкнутой области (одно- или двумерной) на плоскости комплексного переменного, и пусть z_1 — одна из точек этой области. Тогда говорят, что $f(z)$ является непрерывной в точке z_1, если для любого заданного положительного числа ε мы можем найти такое положительное число η, что

$$|f(z)-f(z_1)|<\varepsilon,$$

когда $|z-z_1|<\eta$, причем z — точка области.

3.3. Ряды с переменными членами. Равномерная сходимость

Рассмотрим ряд

$$x^2+\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{x^2}{(1+x^2)^2}+\ldots+\frac{x^2}{(1+x^2)^n}+\ldots$$

Этот ряд будет абсолютно сходящимся (§ 2.33) для всех вещественных значений x.

Если $S_n(x)$ — сумма n первых членов, то

$$S_n(x)=1+x^2-\frac{1}{(1+x^2)^{n-1}},$$

откуда следует

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x)=1+x^2 \qquad (x\neq 0).$$

Но $S_n(0)=0$, поэтому

$$\lim_{n\to\infty} S_n(0)=0.$$

Следовательно, хотя этот ряд непрерывных функций от x абсолютно сходится, тем не менее его сумма является разрывной функцией от x. Нас, естественно, интересуют причины этого замечательного явления, исследованного в 1841—1848 гг. Стоксом[1]), Зейделем[2]) и Вейерштрассом[3]), которые показали, что оно встречается только при наличии другого явления, а именно *неравномерной сходимости*, к объяснению которой мы теперь и перейдем.

Пусть функции $u_1(z)$, $u_2(z)$, ... определены во всех точках некоторой замкнутой области на плоскости комплексного переменного. Пусть, далее,

$$S_n(z)=u_1(z)+u_2(z)+\ldots+u_n(z).$$

---

[1]) Stokes, Camb. Phil. Trans., VIII, 533—583 (1847) (Collected Papers, 1, 236—313).

[2]) Seidel, Münchener Abhandlungen, V, 381 (1848).

[3]) Weierstrass, Ges. math. Werke, I, 67, 75.

Условие, чтобы ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ был *сходящимся* для какого-нибудь частного значения z, заключается в том, что для данного ε должно существовать такое число n, что

$$|S_{n+p}(z) - S_n(z)| < \varepsilon$$

для *всех* положительных значений p; значение n, конечно, зависит от ε.

Пусть n — наименьшее целое число, удовлетворяющее условию. Это число *вообще* будет зависеть от рассматриваемого частного значения z. Обозначим эту зависимость через $n(z)$. *Может случиться*, что мы найдем такое *не зависящее* от z число N, что

$$n(z) < N$$

для всех значений z в рассматриваемой области.

Если это число N существует, то говорят, что ряд *сходится равномерно* во всей области.

Если же такого числа N не существует, то говорят, что сходимость ряда будет неравномерной [1]).

Равномерная сходимость является, таким образом, свойством, зависящим от *всей совокупности* значений z, между тем как раньше мы рассматривали сходимость ряда только для отдельных частных значений z, не *принимая во внимание другие его значения*.

Если существует такое положительное число δ, что ряд сходится равномерно в области, общей кругу $|z - z_1| \leqslant \delta$, и области его сходимости, то мы говорим, что он сходится равномерно *вблизи* точки z_1.

3.31. Об условии равномерной сходимости [2])

Положим $R_{n,p}(z) = u_{n+1}(z) + u_{n+2}(z) + \ldots + u_{n+p}(z)$; мы видели, что равномерная сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ в области заключается в том, что для любого данного числа ε можно было найти N,

---

[1]) Читатель, незнакомый с понятием равномерной сходимости, сможет получить более ясное представление, обратившись к Бромуичу (Bromwich, Infinite series, гл. VII), где дано изложение графического исследования Осгуда (Osgood).

[2]) Авторы определяют равномерную сходимость при помощи неравенства $|R_{n,p}(z)| < \varepsilon$, выполняющегося равномерно по z, а в качестве необходимого и достаточного условия равномерной сходимости используют неравенство $|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$. Обычно принимают обратный порядок. (*Прим. ред.*)

не *зависящее* от z (но зависящее от ε), для которого при *всех* положительных целых значениях p выполняется неравенство

$$|R_{N,p}(z)| < \varepsilon.$$

Если это условие удовлетворяется, то по § 2.22 $S_n(z)$ стремится к некоторому пределу $S(z)$ для каждого рассматриваемого значения z, и тогда, так как ε не зависит от p,

$$\left|\lim_{p\to\infty} R_{N,p}(z)\right| \leqslant \varepsilon.$$

Но при $n > N$

$$S(z) - S_n(z) = \left\{\lim_{p\to\infty} R_{N,p}(z)\right\} - R_{N,\,n-N}(z)$$

и, таким образом,

$$|S(z) - S_n(z)| < 2\varepsilon.$$

Заменяя ε на $\frac{1}{2}\varepsilon$, получаем как *необходимое* условие равномерной сходимости, что $|S(z) - S_n(z)| < \varepsilon$, когда $n > N$, где N не зависит от z. Это условие будет также и *достаточным*, так как если оно удовлетворяется, то, как в § 2.22 (I), получаем, что $|R_{N,p}(z)| < 2\varepsilon$, что по определению и является условием равномерной сходимости.

Пример 1. Показать, что если x вещественно, то сумма ряда

$$\frac{x}{1(x+1)} + \frac{x}{(x+1)(2x+1)} + \ldots + \frac{x}{[(n-1)x+1][nx+1]} + \ldots$$

будет разрывной функцией в точке $x = 0$ и ряд будет неравномерно сходящимся вблизи $x = 0$.

Сумма первых n членов, как легко видеть, будет $1 - \frac{1}{nx+1}$; таким образом, при $x = 0$ сумма ряда равна 0; при $x \neq 0$ сумма ряда равна 1. Значение $R_n(x) = S(x) - S_n(x)$ равно $\frac{1}{nx+1}$, если $x \neq 0$; таким образом, когда x мало, например $x = \frac{1}{100 \cdot 10^6}$, остаток после миллиона членов будет равен $\frac{1}{\frac{1}{100}+1}$ или $1 - \frac{1}{101}$, так что первый миллион членов ряда не дает даже одного процента суммы. И вообще, чтобы сделать $\frac{1}{nx+1} < \varepsilon$, необходимо взять

$$n > \frac{1}{x}\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right).$$

Для данного ε не существует такого числа N, не зависящего от x, чтобы было $n < N$ для всех значений x в каком-либо промежутке, содержащем $x = 0$, так как, взяв x достаточно малым, мы можем сделать n больше, чем любое число N, не зависящее от x. Поэтому вблизи $x = 0$ сходимость будет неравномерной.

Пример 2. Рассмотреть ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x\{n(n+1)x^2-1\}}{\{1+n^2x^2\}\{1+(n+1)^2x^2\}},$$

в котором x вещественно.

n-й член может быть записан в виде

$$\frac{nx}{1+n^2x^2} - \frac{(n+1)x}{1+(n+1)^2x^2},$$

так что

$$S(x) = \frac{x}{1+x^2}, \quad R_n(x) = \frac{(n+1)x}{1+(n+1)^2x^2}.$$

Мы видим, что в этом примере сумма ряда не имеет разрыва при $x=0$. Но $\left(\text{беря } \varepsilon < \frac{1}{2} \text{ и } x \neq 0\right)$ будем иметь

$$|R_n(x)| < \varepsilon,$$

если

$$\varepsilon^{-1}(n+1)|x| < 1+(n+1)^2x^2,$$

т. е. если

$$n+1 > \frac{1}{2}\{\varepsilon^{-1}+\sqrt{\varepsilon^{-2}-4}\}|x|^{-1}$$

или

$$n+1 < \frac{1}{2}\{\varepsilon^{-1}-\sqrt{\varepsilon^{-2}-4}\}|x|^{-1}.$$

Мы видим, что второе неравенство не может удовлетворяться для всех значений n, больших некоторого значения, при всех значениях x; первое же неравенство дает значение $n(x)$, стремящееся к бесконечности при $x \to 0$, так что для любого промежутка, содержащего точку $x=0$, не существует числа N, *не зависящего* от x. Поэтому ряд будет неравномерно сходящимся вблизи $x=0$.

Заметим, что $n(x)$ будет разрывной функцией при $x=0$, ибо $n(x) \to \infty$ при $x \to 0$, но $n(0)=0$.

3.32. Связь разрывности с неравномерной сходимостью

Покажем теперь, *что если ряд непрерывных функций от z равномерно сходится для всех значений z в данной замкнутой области, то его сумма будет непрерывной функцией z во всех точках области.*

Пусть ряд будет

$$f(z) = u_1(z) + u_2(z) + \ldots + u_n(z) + \ldots = S_n(z) + R_n(z),$$

где $R_n(z)$ — n-й остаточный член ряда.

Так как ряд равномерно сходится, то для любого заданного положительного числа ε мы можем найти такое целое число n, *не зависящее* от z, что $|R_n(z)| < \frac{1}{3}\varepsilon$ для *всех* значений z в области. Фиксировав теперь эти n и ε, мы можем на основании непрерывно-

сти $S_n(z)$ найти такое положительное число η, что

$$|S_n(z) - S_n(z')| < \frac{1}{3}\varepsilon$$

при

$$|z - z'| < \eta.$$

Следовательно, мы будем иметь

$$|f(z) - f(z')| = |S_n(z) - S_n(z')| + |R_n(z) - R_n(z')| < \\ < |S_n(z) - S_n(z')| + |R_n(z)| + |R_n(z')| < \varepsilon,$$

что и является условием непрерывности в точке z.

Пример 1. Показать, что вблизи $x = 0$ ряд

$$u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \ldots,$$

где

$$u_1(x) = x, \quad u_n(x) = x^{\frac{1}{2n-1}} - x^{\frac{1}{2n-3}}$$

и x вещественно, имеет разрывную сумму и, следовательно, сходится неравномерно.

В этом примере удобно применять признак равномерной сходимости в несколько ином виде; мы покажем, что для данного произвольно малого числа ε можно найти как угодно малые значения x, зависящие от n, так что $|R_n(x)|$ будет *не меньше*, чем ε, для любого значения n, как угодно большого. Легко видеть, что существование таких значений x несовместимо с условием равномерной сходимости.

Величина $S_n(x)$ будет $x^{\frac{1}{2n-1}}$; при стремлении n к бесконечности $S_n(x)$ приближается к 1, 0 или -1, смотря по тому, будет ли x положительно, равно нулю или отрицательно. Ряд поэтому абсолютно сходится для всех значений x и имеет разрыв при $x = 0$. В этом ряде

$$R_n(x) = 1 - x^{\frac{1}{2n-1}} \qquad (x > 0),$$

и каким бы большим ни было n, если взять [1]) $x = e^{-(2n-1)}$, то мы получим остаток, равный $1 - e^{-1}$, что не будет произвольно малой величиной. Ряд будет поэтому неравномерно сходящимся вблизи $x = 0$.

Пример 2. Показать, что вблизи $z = 0$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2z(1+z)^{n-1}}{[1+(1+z)^{n-1}][1+(1+z)^n]}$$

неравномерно сходится и сумма его имеет разрыв.

n-й член может быть записан в виде

$$\frac{1-(1+z)^n}{1+(1+z)^n} - \frac{1-(1+z)^{n-1}}{1+(1+z)^{n-1}},$$

---

[1]) Это значение x удовлетворяет условию $|x| < \delta$ при $2n - 1 > \lg \delta^{-1}$,

так что сумма первых n членов равна

$$\frac{1-(1+z)^n}{1+(1+z)^n}.$$

Рассматривая вещественные значения z, бо́льшие -1, видим, что сумма всего ряда будет равна 1, 0 или -1, смотря по тому, будет ли z отрицательным, нулем или положительным числом. Таким образом, в точке $z=0$ имеется разрыв. Этот разрыв объясняется неравномерной сходимостью ряда вблизи $z=0$. Действительно, n-й остаток ряда при положительном z равен

$$\frac{-2}{1+(1+z)^n},$$

и, как бы велико ни было n, взяв $z=\frac{1}{n}$, можно сделать этот остаток по абсолютной величине бо́льшим числа $\frac{2}{1+e}$, которое не будет произвольно малым. Ряд будет поэтому неравномерно сходящимся вблизи $z=0$.

3.33. Различие между абсолютной и равномерной сходимостью

Ряд, *равномерно* сходящийся в области, не обязательно *абсолютно* сходится в каких-либо точках этой области, и наоборот. Например, ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^2}{(1+z^2)^n}$$

сходится *абсолютно*, но *неравномерно* (вблизи $z=0$). С другой стороны, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{z^2+n}$$

сходится только *условно*, ибо ряд модулей его членов $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|n+z^2|}$ расходится. Но для всех вещественных значений z члены ряда будут попеременно положительными и отрицательными, убывающими по абсолютной величине, так что сумма ряда заключается между суммой его первых n членов и суммой его первых $n+1$ членов; таким образом, остаток после n членов будет меньше по абсолютной величине, чем n-й член ряда, и необходимо взять лишь конечное число членов (не зависящее от z), чтобы получить для всех вещественных значений z остаток меньший, чем любое заданное число ε. Следовательно, ряд будет *равномерно* сходящимся.

Абсолютно сходящиеся ряды подобны рядам с конечным числом членов в том отношении, что их можно перемножать и переставлять в них члены.

Равномерно сходящиеся ряды подобны рядам с конечным числом членов в том отношении, что их сумма будет непрерывной функцией, если каждый член ряда есть непрерывная функция, и что можно (как мы увидим) интегрировать эти ряды почленно.

3.34. Признак равномерной сходимости Вейерштрасса[1])

Достаточное, хотя и *не необходимое* условие для равномерной сходимости ряда может быть высказано следующим образом.

Если для всех значений z в некоторой области модули членов ряда

$$S = u_1(z) + u_2(z) + u_3(z) + \ldots$$

будут меньше соответствующих членов сходящегося ряда с положительными членами

$$T = M_1 + M_2 + M_3 + \ldots,$$

где M_n *не зависит от* z, то ряд S равномерно сходится в этой области. Это вытекает из того обстоятельства, что в силу сходимости ряда T всегда можно найти такое n, что n-й остаток ряда T, а следовательно и модуль остатка ряда S, будет меньше, чем наперед заданное положительное число ε. И так как значение n, найденное таким образом, не зависит от z, то отсюда вытекает (§ 3.31), что ряд S равномерно сходится; по § 2.34 этот ряд S будет также и абсолютно сходящимся.

Пример. Ряд

$$\cos z + \frac{1}{2^2}\cos^2 z + \frac{1}{3^2}\cos^3 z + \ldots$$

равномерно сходится для всех вещественных значений z, так как модули его членов не больше соответствующих членов сходящегося ряда

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots,$$

члены которого — положительные постоянные числа.

3.341. Равномерная сходимость бесконечных произведений[2])

Говорят, что сходящееся произведение $\prod_{n=1}^{\infty}\{1 + u_n(z)\}$ сходится равномерно в некоторой области значений z, если при заданном ε можно найти

---

[1]) Weierstrass, Abhandlungen aus der Funktionenlehre, 70. Этот признак обычно называется (например, Osgood, Ann. Math., III, 30 (1889)) M-признаком.

[2]) Приводимое определение было дано Осгудом (Osgood, Funktionentheorie, 462). Условие, данное здесь для равномерной сходимости, также установлено в этой книге.

такое *не зависящее от* z целое число m, что

$$\left| \prod_{n=1}^{m+p} \{1+u_n(z)\} - \prod_{n=1}^{m} \{1+u_n(z)\} \right| < \varepsilon$$

для всех положительных целых значений p.

Единственный признак равномерной сходимости, которым мы будем пользоваться в дальнейшем, заключается в том, что произведение сходится равномерно, если

$$|u_n(z)| < M_n,$$

где M_n не зависят от z и таковы, что ряд $\sum_1^\infty M_n$ сходится.

Чтобы доказать справедливость этого признака, отметим, что

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1+M_n)$$

сходится (§ 2.7), и поэтому мы можем найти такое m, что

$$\prod_1^{m+p} \{1+M_n\} - \prod_1^{m} \{1+M_n\} < \varepsilon,$$

а тогда будем иметь

$$\left| \prod_{n=1}^{m+p} \{1+u_n(z)\} - \prod_{n=1}^{m} \{1+u_n(z)\} \right| =$$

$$= \left| \prod_{n=1}^{m} \{1+u_n(z)\} \left[\prod_{n=m+1}^{m+p} \{1+u_n(z)\} - 1 \right] \right| \leqslant$$

$$\leqslant \prod_{n=1}^{m} (1+M_n) \left[\prod_{n=m+1}^{m+p} \{1+M_n\} - 1 \right] < \varepsilon,$$

причем выбор m независим от z.

3.35. Признак равномерной сходимости Харди[1])

Аналогично рассуждениям § 2.31 легко доказать, что если в данной области

$$\left| \sum_{n=1}^{p} a_n(z) \right| \leqslant k,$$

где $a_n(z)$ вещественно, а k — число, конечное и не зависящее от p и z, и если

$$f_n(z) \geqslant f_{n+1}(z) \text{ и } f_n(z) \to 0$$

---

[1]) Hardy, Proc. London Math. Soc. (2), IV, 247—265 (1907). Эти результаты, представляющие обобщение теоремы Абеля (§ 3.71), хотя и хорошо известны, по-видимому, были опубликованы не ранее 1907 г. По сходству с признаками сходимости Дирихле и Абеля Бромуич предложил назвать их соответственно признаками Дирихле и Абеля.

равномерно при $n \to \infty$, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z) f_n(z)$$

сходится равномерно.

Подобным же образом, если

$$\varkappa \geqslant u_n(z) \geqslant u_{n+1}(z) \geqslant 0,$$

где $\varkappa$ *не зависит от* n и z, и если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z)$ сходится равномерно, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z) u_n(z)$ сходится равномерно.

Для доказательства последнего утверждения заметим, что можно найти такое m, что

$$a_{m+1}(z),\ a_{m+1}(z) + a_{m+2}(z),\ \ldots,\ a_{m+1}(z) + a_{m+2}(z) + \ldots + a_{m+p}(z)$$

будут по абсолютной величине меньше, чем $\frac{\varepsilon}{\varkappa}$, и потому (§ 2.301)

$$\left| \sum_{n=m+1}^{m+p} a_n(z) u_n(z) \right| < \frac{\varepsilon u_{m+1}(z)}{\varkappa} < \varepsilon,$$

причем выбор ε и m *не зависит от* z.

Пример 1. Показать, что ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n}$$

ходятся равномерно на отрезке

$$\delta \leqslant \theta \leqslant 2\pi - \delta \qquad (\delta > 0).$$

Получить соответствующий результат для рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos n\theta}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin n\theta}{n}$$

путем замены θ на $\theta + \pi$.

Пример 2. Если при $a \leqslant x \leqslant b$

$$|\omega_n(x)| \leqslant k_1 \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\omega_{n+1}(x) - \omega_n(x)| < k_2,$$

где k_1, k_2 не зависят от n и x, и если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с членами, не зависящими от x, сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \omega_n(x)$ будет равномерно сходящимся при $a \leqslant x \leqslant b$ (Hardy).

[В самом деле, можно найти такое m, не зависящее от x, что

$$\left|\sum_{n=m+1}^{m+p} a_n\right| < \varepsilon,$$

и тогда по следствию § 2.301 мы имеем:

$$\left|\sum_{n=m+1}^{m+p} a_n \omega_n(x)\right| < (k_1 + k_2)\,\varepsilon.]$$

3.4. Исследование некоторых двойных рядов

Пусть ω_1 и ω_2 — любые постоянные, отношение которых не является вещественным числом, и пусть α — положительное число.

Ряд

$$\sum_{m,\,n} \frac{1}{(z + 2m\omega_1 + 2n\omega_2)^\alpha},$$

в котором суммирование распространяется на все положительные, отрицательные и нулевые значения m и n, имеет большое значение в теории эллиптических функций. В точках $z = -2m\omega_1 - 2n\omega_2$ ряд теряет смысл. Можно показать, что ряд будет абсолютно сходящимся для всех остальных значений z, если $\alpha > 2$, и что сходимость будет равномерной для тех значений z, для которых неравенство $|z + 2m\omega_1 + 2n\omega_2| \geqslant \delta$ справедливо при всех целых значениях m и n, причем δ — произвольное положительное число.

Пусть $\sum'$ обозначает суммирование по всем целым значениям m и n, за исключением $m = n = 0$.

Если не оба числа m и n нули и если $|z + 2m\omega_1 + 2n\omega_2| \geqslant \delta > 0$ для всех целых значений m и n, то можно найти такое положительное число C, зависящее от δ, но не от z, что

$$\left|\frac{1}{(z + 2m\omega_1 + 2n\omega_2)^\alpha}\right| < C\left|\frac{1}{(2m\omega_1 + 2n\omega_2)^\alpha}\right|.$$

Следовательно, по признаку § 3.34 данный ряд будет абсолютно и равномерно[1]) сходящимся в рассматриваемой области, если ряд

$$\sum{}' \frac{1}{|m\omega_1 + n\omega_2|^\alpha}$$

будет сходящимся.

Чтобы исследовать сходимость последнего ряда, положим

$$\omega_1 = \alpha_1 + i\beta_1, \quad \omega_2 = \alpha_2 + i\beta_2,$$

[1]) Читатель легко даст определение равномерной сходимости двойного ряда (см. § 3.5).

где α_1, α_2, β_1, β_2 вещественны. Так как $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ не вещественно, то $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0$. Рассматриваемый ряд записывается в виде

$$\sum{}' \frac{1}{\{(\alpha_1 m + \alpha_2 n)^2 + (\beta_1 m + \beta_2 n)^2\}^{\alpha/2}},$$

который сходится, если сходится ряд

$$S = \sum{}' \frac{1}{(m^2 + n^2)^{\alpha/2}}.$$

Действительно, отношение соответствующих членов равно

$$\left[\frac{(\alpha_1 + \alpha_2\mu)^2 + (\beta_1 + \beta_2\mu)^2}{1 + \mu^2}\right]^{\alpha/2},$$

где $\mu = \frac{n}{m}$. Можно доказать, что это выражение, как функция вещественной переменной μ, будет иметь положительный минимум [1]) (не нуль), так как $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0$, и, следовательно, рассматриваемое отношение будет всегда больше некоторого *положительного* числа K (не зависящего от μ).

Поэтому нам необходимо изучить сходимость только ряда S. Пусть

$$S_{p,q} = \sum_{m=-p}^{p} \sum_{n=-q}^{q}{}' \frac{1}{(m^2 + n^2)^{\alpha/2}} \leqslant 4 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty}{}' \frac{1}{(m^2 + n^2)^{\alpha/2}}.$$

Разбивая $S_{p,q}$ на слагаемые, в которых $m = n$, $m > n$ и $m < n$ соответственно, получим

$$\frac{1}{4} S_{p,q} = \sum_{m=1}^{p} \frac{1}{(2m^2)^{\alpha/2}} + \sum_{m=1}^{p} \sum_{n=0}^{m-1} \frac{1}{(m^2 + n^2)^{\alpha/2}} + \sum_{n=1}^{q} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{(m^2 + n^2)^{\alpha/2}}.$$

Но

$$\sum_{n=0}^{m-1} \frac{1}{(m^2 + n^2)^{\alpha/2}} < \frac{m}{(m^2)^{\alpha/2}} = \frac{1}{m^{\alpha-1}}.$$

Поэтому

$$\frac{1}{4} S \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\alpha/2} m^{\alpha}} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{\alpha-1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

---

[1]) Читатель без труда сумеет доказать это утверждение; минимум дается соотношением

$$K^{\frac{2}{\alpha}} = \frac{1}{2}\left[\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 - \{(\alpha_1 - \beta_2)^2 + (\alpha_2 + \beta_1)^2\}^{\frac{1}{2}} \{(\alpha_1 + \beta_2)^2 + (\alpha_2 - \beta_1)^2\}^{\frac{1}{2}}\right].$$

Но последние ряды, как известно, сходятся при $\alpha - 1 > 1$. Таким образом, ряд S будет сходиться при $\alpha > 2$. Первоначальный ряд будет поэтому абсолютно и равномерно сходящимся в определенной выше области значений z, если $\alpha > 2$.

Пример. Доказать, что ряд

$$\sum \frac{1}{(m_1^2 + m_2^2 + \ldots + m_r^2)^{\mu}},$$

в котором суммирование распространяется на все положительные, отрицательные и нулевые значения $m_1, m_2, \ldots, m_r$, исключая совокупность одновременных нулевых значений, будет абсолютно сходящимся, если $\mu > \frac{1}{2} r$.

(Eisenstein, Journal für Math., XXXV.)

3.5. Общее понятие равномерности

Кроме суммирования рядов имеются другие процессы, в которых идея равномерности имеет важное значение.

Пусть ε — произвольное положительное число и $f(z, \zeta)$ — функция двух переменных z и ζ, которая для каждой точки z замкнутой области удовлетворяет неравенству $|f(z, \zeta)| < \varepsilon$, когда ζ дается какая-нибудь совокупность значений, которую мы обозначим через (ζ_z); эта совокупность значений, конечно, зависит от рассматриваемого частного значения z.

Если можно найти такую совокупность значений $(\zeta)_0$, что каждое значение совокупности $(\zeta)_0$ будет содержаться во *всех* совокупностях $(\zeta)_z$, то говорят, что функция $f(z, \zeta)$ удовлетворяет неравенству *равномерно* для *всех* точек z области. Если функция $\varphi(z)$ обладает некоторым свойством для любого положительного значения ε в силу неравенства $|f(z, \zeta)| < \varepsilon$, то говорят, что $\varphi(z)$ *обладает этим свойством равномерно.*

В дополнение к равномерной сходимости рядов и произведений мы рассмотрим в дальнейшем равномерную сходимость интегралов, а также равномерную непрерывность с точки зрения общего понятия равномерности.

Так, ряд будет равномерно сходящимся, если $|R_n(z)| < \varepsilon$, когда $\zeta (= n)$ принимает целые значения, не зависящие от z.

Далее, функция $f(z)$ будет непрерывной в замкнутой области, если при заданном ε мы можем найти такое положительное число η_z, что

$$|f(z + \zeta_z) - f(z)| < \varepsilon,$$

если

$$0 < |\zeta_z| < \eta_z$$

и $z + \zeta_z$ будет точкой области.

Функция будет *равномерно* непрерывной, если можно найти такое положительное число η, *не зависящее от* z, что $\eta < \eta_z$ и

$$|f(z + \zeta) - f(z)| < \varepsilon,$$

если

$$0 < |\zeta| < \eta$$

и $z+\zeta$ будет точкой области (в этом случае совокупность $(\zeta)_0$ будет совокупностью точек, модули которых будут меньше η).

Ниже мы найдем (§ 3.61), что непрерывность влечет за собой равномерную непрерывность; это составляет резкую противоположность тому факту, что сходимость не влечет за собой равномерной сходимости.

3.6. Видоизмененная теорема Гейне — Бореля

Следующая теорема имеет большое значение в связи со свойствами равномерности; мы дадим доказательство для одномерной замкнутой области [1]).

Дан (I) *отрезок CD и дан* (II) *закон, по которому соответственно каждой точке* [2]) *P отрезка CD мы можем определить замкнутый интервал $I(P)$ на прямой CD, для которого P будет внутренней* [3]) *точкой.*

Тогда отрезок CD может быть разделен на конечное число таких замкнутых интервалов $J_1, J_2, \ldots, J_k$, что каждый интервал J_r будет содержать по меньшей мере одну точку P_r (отличную от его концов) такую, что никакая точка интервала J_r не лежит вне интервала $I(P_r)$, соответствующего (на основании данного закона) этой точке P_r [4]).

Замкнутый интервал описанного характера будем называть *подходящим* интервалом и говорить, что он удовлетворяет условию (A).

Если CD удовлетворяет условию (A), то теорема доказана, если этого нет, то разделим CD пополам; если один или оба интервала, на которые разделен CD, будут неподходящими, то неподходящий интервал или оба делим опять пополам [5]).

Процесс деления пополам неподходящих интервалов *либо закончится, либо не закончится.* Если он закончится, то теорема будет доказана, ибо CD будет разделен на подходящие интервалы.

Предположим, что процесс не закончится, и условимся говорить об интервале, который может быть разделен на подходящие интер-

---

[1]) Точное доказательство теоремы для двумерной области имеется в книге Ватсона: Watson, Complex integration and Cauchy's theorem (Camb. Math. Tracts, № 15).

[2]) Примеры таких законов, связывающих интервалы с точками, приведены в §§ 3.61, 5.13.

[3]) Исключаются случаи, когда P будет в C или D, т. е. когда она будет концом интервала.

[4]) Эта формулировка теоремы Гейне — Бореля, которую иногда называют теоремой Бореля — Лебега, принадлежащая Бейкеру (Baker, Proc. London Math. Soc. (2), II, 24 (1904), Hobson, The theory of functions of a real variable, 87 (1907), показывает, что теорема по существу дана в доказательстве Гурса теоремы Коши (Goursat, Trans. Amer. Math. Soc., 1, 14 (1900)); обычную форму теоремы Гейне — Бореля читатель найдет в указанном сочинении.

[5]) Подходящий интервал не подлежит делению надвое, ибо одна из частей, на которые он будет разделен, может быть и неподходящей.

валы вышеописанным процессом деления пополам, что он удовлетворяет условию (B).

Тогда по предположению CD не будет удовлетворять условию (B); поэтому по меньшей мере одна из половин CD не будет удовлетворять условию (B). Возьмем ту, которая не удовлетворяет (если условию (B) не удовлетворяет ни одна из половин, то возьмем левую); разделим ее пополам и выделим ту из половин, которая не удовлетворяет условию (B). Этот процесс деления пополам и выделения дает бесконечную последовательность интервалов s_0, s_1, s_2, ... таких, что

(I) длина s_n равна $2^{-n}CD$,

(II) ни одна точка s_{n+1} не лежит вне s_n,

(III) интервал s_n не удовлетворяет условию (A).

Пусть расстояния концов s_n от C будут x_n и y_n; тогда $x_n \leqslant x_{n+1} < y_{n+1} \leqslant y_n$. Поэтому по теореме § 2.2 x_n и y_n имеют пределы и по условию (I) эти пределы будут одинаковы; пусть они равны ξ, и пусть Q будет точкой, расстояние которой от C равно ξ. Но по условию имеется такое число δ_Q, что каждая точка CD, расстояние которой от Q будет меньше δ_Q, будет точкой соответствующего интервала $I(Q)$. Возьмем n настолько большим, чтобы $2^{-n}CD < \delta_Q$, тогда Q будет внутренней точкой или концом интервала s_n и расстояние любой точки интервала s_n от Q будет меньше δ_Q. А потому интервал s_n удовлетворяет условию (A), что противоречит условию (III). Предположение, что процесс деления пополам не закончится, приводит к противоречию; поэтому процесс должен закончиться, и теорема, таким образом, доказана.

В теореме для двумерной области [1]) интервал CD заменяется замкнутой двумерной областью, интервал $I(P)$ — кругом [2]) с центром в P, а интервал J_r — квадратом со сторонами, параллельными координатным осям.

3.61. Равномерная непрерывность

Из только что доказанной теоремы легко вывести, что если функция $f(x)$ вещественной переменной x непрерывна при $a \leqslant x \leqslant b$, то $f(x)$ будет равномерно непрерывной [3]) на всем отрезке

$$a \leqslant x \leqslant b.$$

---

[1]) Доказательство можно построить подобным же образом, рассматривая квадрат, содержащий область, и применяя процесс деления квадратов на 4 равных квадрата.

[2]) Или частью круга, лежащей внутри этой области.

[3]) Этот результат принадлежит Гейне (Heine, Journal für Math., LXXI, 361 (1870) и LXXIV, 188 (1872)).

Пусть ε — произвольное положительное число; тогда, в силу непрерывности $f(x)$ для любого значения x, можно найти такое положительное число δ_x, зависящее от x, что

$$|f(x') - f(x)| < \frac{1}{4}\varepsilon$$

для всех значений x', удовлетворяющих неравенству

$$|x' - x| < \delta_x.$$

Тогда по § 3.6 мы можем разделить отрезок (a, b) на *конечное* число замкнутых интервалов, обладающих тем свойством, что в каждом интервале будет находиться такое число x_1, что

$$|f(x') - f(x_1)| < \frac{1}{4}\varepsilon,$$

когда x' лежит в том же интервале, что и x_1. Пусть δ_0 — длина наименьшего из этих интервалов, и пусть ξ, ξ' — любые два числа в замкнутом интервале (a, b) такие, что $|\xi - \xi'| < \delta_0$. Тогда ξ, ξ' будут лежать в одном и том же или смежных интервалах. Если они лежат в смежных интервалах, то пусть ξ_0 — общий конец этих интервалов; тогда мы можем найти такие числа x_1, x_2, по одному в каждом интервале, что

$$|f(\xi) - f(x_1)| < \frac{1}{4}\varepsilon, \quad |f(\xi_0) - f(x_1)| < \frac{1}{4}\varepsilon,$$

$$|f(\xi') - f(x_2)| < \frac{1}{4}\varepsilon, \quad |f(\xi_0) - f(x_2)| < \frac{1}{4}\varepsilon,$$

откуда

$$|f(\xi) - f(\xi')| = |\{f(\xi) - f(x_1)\} - \{f(\xi_0) - f(x_1)\} - \\ - \{f(\xi') - f(x_2)\} + \{f(\xi_0) - f(x_2)\}| < \varepsilon.$$

Если же ξ, ξ' лежат в одном и том же интервале, то мы можем доказать подобным же образом, что

$$|f(\xi) - f(\xi')| < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

В обоих случаях мы показали, что для любого числа ξ из рассматриваемого отрезка имеем

$$|f(\xi) - f(\xi + \zeta)| < \varepsilon,$$

когда $\xi + \zeta$ принадлежит тому же отрезку и $-\delta_0 < \zeta < \delta_0$, причем δ_0 *не зависит от* ξ. *Равномерность* непрерывности, таким образом, установлена.

Следствие (I). С помощью двумерного варианта теоремы из § 3.6 мы можем доказать, что функция комплексного переменного, непрерывная во всех точках замкнутой области плоскости комплексного переменного, будет равномерно непрерывной во всей области.

Следствие (II). Функция $f(x)$, непрерывная на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$, будет ограниченной на этом отрезке, т. е. мы можем найти такое число k, не зависящее от x, что $|f(x)| < k$ для всех точек x этого отрезка.

[Пусть n — число частей, на которое разделен отрезок. Пусть a, ξ_1, $\xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$, b — их концы; тогда, если x есть любая точка r-го интервала, мы можем найти такие числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$, что

$$|f(a)-f(x_1)| < \frac{1}{4}\varepsilon, \quad |f(x_1)-f(\xi_1)| < \frac{1}{4}\xi, \quad |f(\xi_1)-f(x_2)| < \frac{1}{4}\varepsilon,$$

$$|f(x_2)-f(\xi_2)| < \frac{1}{4}\varepsilon, \ldots, \quad |f(x_{r-1})-f(x)| < \frac{1}{4}\varepsilon.$$

Поэтому

$$|f(a)-f(x)| < \frac{1}{4} r\varepsilon$$

и

$$|f(x)| < |f(a)| + \frac{1}{2} n\varepsilon,$$

что и представляет требуемый результат, так как правая часть не зависит от x.]

Вывод соответствующей теоремы для функций комплексной переменной предоставляем читателю.

3.62. Вещественная функция вещественной переменной, непрерывная в замкнутом интервале, достигает своей верхней границы

Пусть $f(x)$ — вещественная непрерывная функция x при $a \leqslant x \leqslant b$. Определим сечение, класс R которого содержит такие числа r, что $r > f(x)$ для всех значений x на отрезке (a, b), а класс L — все остальные числа. Это сечение определяет такое число α, что $f(x) \leqslant \alpha$, но, *каково бы ни было* положительное число δ, на отрезке существуют такие значения x, что $f(x) > \alpha - \delta$. Это число α называется *верхней границей* функции $f(x)$. Теорема утверждает, что на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ можно найти такое число x', что $f(x') = \alpha$.

Действительно, как бы мало ни было δ, мы можем найти такие значения x, для которых $|f(x)-\alpha|^{-1} > \delta^{-1}$; поэтому $|f(x)-\alpha|^{-1}$ не ограничен на отрезке (a, b) и [§ 3.61, следствие (II)] не будет непрерывным в одной или более точках отрезка (a, b); но так как $|f(x)-\alpha|$ будет непрерывным во всех точках отрезка, то его обратная величина будет непрерывной во всех точках отрезка (§ 3.2, пример 1), за исключением тех точек, в которых $f(x) = \alpha$; поэтому $f(x) = \alpha$ в некоторой точке отрезка (a, b); теорема, таким образом, доказана.

Следствие (I). Нижняя граница непрерывной функции может быть определена подобным же образом, поэтому можно утверждать, что непрерывная функция достигает также своей нижней границы.

Следствие (II). Если $f(z)$ — функция комплексной переменной — непрерывна в замкнутой области, то $|f(z)|$ достигает своей верхней границы.

3.63. Вещественная функция вещественной переменной, непрерывная в замкнутой области, принимает все значения между верхней и нижней границами

Пусть M, m — верхняя и нижняя границы функции $f(x)$, тогда по § 3.62 можно найти такие числа $\bar{x}$, $\underline{x}$, что $f(\bar{x}) = M$, $f(\underline{x}) = m$. Пусть μ — произвольное число такое, что $m < \mu < M$. Соответственно любому заданному положительному числу ε можно (по § 3.61) разделить отрезок $(\bar{x}, \underline{x})$ на такое *конечное* число r замкнутых интервалов, что

$$\left|f\left(x_1^{(r)}\right) - f\left(x_2^{(r)}\right)\right| < \varepsilon,$$

где $x_1^{(r)}$, $x_2^{(r)}$ — любые точки r-го интервала; примем за $x_1^{(r)}$, $x_2^{(r)}$ концы r-го интервала, тогда найдется по крайней мере один интервал, для которого $f\left(x_1^{(r)}\right) - \mu$, $f\left(x_2^{(r)}\right) - \mu$ будут иметь разные знаки, а так как

$$\left|\left\{f\left(x_1^{(r)}\right) - \mu\right\} + \left\{f\left(x_2^{(r)}\right) - \mu\right\}\right| < \varepsilon,$$

то

$$\left|f\left(x_1^{(r)}\right) - \mu\right| < \varepsilon.$$

Поскольку для каждого сколь угодно малого значения ε можно найти число $x_1^{(r)}$, удовлетворяющее этому неравенству, нижней границей функции $|f(x) - \mu|$ будет нуль, и в силу непрерывности этой функции от x получаем по следствию (I) § 3.62, что $f(x) - \mu$ равняется нулю при некотором значении x.

3.64. Полная вариация функции вещественной переменной [1])

Пусть $f(x)$ — вещественная ограниченная функция, определенная при $a \leqslant x \leqslant b$, и пусть

$$a \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant b.$$

Тогда $|f(a) - f(x_1)| + |f(x_1) - f(x_2)| + \ldots + |f(x_n) - f(b)|$ называется *вариацией* функции $f(x)$ на отрезке (a, b) для разбиения $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Если вариация имеет верхнюю границу F_a^b при всевозможных значениях n и чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то говорят, что $f(x)$ имеет *ограниченную вариацию* на отрезке (a, b). Число F_a^b называется *полной вариацией* на отрезке (a, b).

---

[1]) Терминология этого параграфа принадлежит частично Гобсону (Hobson, The Theory of functions of a real variable, 1907), а частично Юнгу (Young, The theory of sets of points, 1906).

Пример 1. Если $f(x)$ монотонна [1]) на отрезке (a, b), то ее полная вариация на этом отрезке равна $|f(a)-f(b)|$.

Пример 2. Функция ограниченной вариации может быть представлена как разность двух положительных возрастающих монотонных функций.

За такие функции можно принять $\frac{1}{2}\left\{F_a^x+f(x)\right\}$, $\frac{1}{2}\left\{F_a^x-f(x)\right\}$.

Пример 3. Если $f(x)$ имеет ограниченную вариацию на отрезке (a, b), то существуют пределы $f(x\pm 0)$ во всех точках этого отрезка (см. пример § 3.2).

Пример 4. Если функции $f(x)$, $g(x)$ имеют ограниченную вариацию на отрезке (a, b), то функция $f(x)g(x)$ также имеет на нем ограниченную вариацию.

[Действительно,

$$|f(x')g(x')-f(x)g(x)|\leqslant|f(x')||g(x')-g(x)|+|g(x)||f(x')-f(x)|,$$

и следовательно, вариация функции $f(x)g(x)$ не может превосходить $gF_a^b+fG_a^b$, где f, g — верхние границы функций $|f(x)|$, $|g(x)|$.]

3.7. Равномерная сходимость степенных рядов

Пусть

$$a_0+a_1z+\ldots+a_nz^n+\ldots$$

абсолютно сходится при $z=z_0$.

Тогда при $|z|\leqslant|z_0|$ будет $|a_nz^n|\leqslant|a_nz_0^n|$.

Но так как ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_nz_0^n|$ сходится, то согласно § 3.34 получаем, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ сходится равномерно относительно переменной z, когда $|z|\leqslant|z_0|$.

Отсюда, согласно § 3.32, следует, что степенной ряд будет непрерывной функцией от z во всякой замкнутой области, состоящей из точек внутри и на границе всякого круга, концентрического с кругом сходимости и имеющего меньший радиус (§ 2.6).

3.71. Теорема Абеля о непрерывности вплоть до границы круга сходимости [2])

Пусть $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ — степенной ряд, радиус сходимости которого равен единице, и пусть он будет таков, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ сходится;

---

[1]) Функция называется монотонной, если $\frac{f(x)-f(x')}{x-x'}$ одного знака или равно нулю для всех пар различных значений x и x'.

[2]) Abel, Journal für Math., 1, 311—399 (1826), теорема IV. Доказательство Абеля использует непосредственно приемы, которыми были доказаны теоремы §§ 3.32 и 3.65. В том случае, когда ряд $\sum|a_n|$ сходится, теорема очевидна по § 3.7.

пусть, далее, $0 \leqslant x \leqslant 1$; тогда теорема Абеля утверждает, что

$$\lim_{x \to 1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Действительно, в обозначениях § 3.35 функция x^n удовлетворяет условиям, наложенным на $u_n(x)$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$; следовательно, ряд $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится *равномерно* на всем отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$; поэтому согласно § 3.32 его сумма будет непрерывной функцией от x на всем отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$; отсюда $\lim_{x \to 1-0} f(x) = f(1)$, что и доказывает теорему.

3.72. Теорема Абеля [1]) об умножении рядов

Эта теорема представляет собой видоизменение теоремы § 2.53 для абсолютно сходящихся рядов.

Пусть

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0.$$

Тогда сходимость рядов $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ *является достаточным условием для того, чтобы*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n.$$

В самом деле, пусть

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \quad C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

Тогда ряды $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ абсолютно сходятся при $|x| < 1$ (см. § 2.6) и, следовательно, согласно § 2.53

$$A(x) B(x) = C(x)$$

при $0 < x < 1$; поэтому по примеру 2 § 2.2

$$\left\{ \lim_{x \to 1-0} A(x) \right\} \left\{ \lim_{x \to 1-0} B(x) \right\} = \left\{ \lim_{x \to 1-0} C(x) \right\},$$

если предположить, что эти три предела существуют. Но по § 3.71 этими пределами будут ряды $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$; таким образом, теорема доказана.

---

[1]) Abel, Journal für Math., 1, 311—399 (1826), теорема VI. Мы приводим первоначальное доказательство Абеля. В некоторых учебниках дается более сложное доказательство с помощью сумм Чезаро (§ 8.43).

3.73. Степенные ряды, тождественно равные нулю

Если сходящийся степенной ряд равен нулю при всех значениях z, для которых $|z| < r_1$, где $r_1 > 0$, то все коэффициенты этого степенного ряда равны нулю.

В самом деле, если не все коэффициенты равны нулю, то пусть a_m будет первым из коэффициентов, отличных от нуля.

Тогда $a_m + a_{m+1}z + a_{m+2}z^2 + \ldots$ равняется нулю при всех значениях z, кроме нуля, и абсолютно сходится, когда $|z| \leqslant r < r_1$; отсюда, полагая $s = a_{m+1} + a_{m+2}z + \ldots$, имеем

$$|s| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |a_{m+n}| r^{n-1}$$

и, таким образом, можно найти [1]) такое *положительное число* $\delta \leqslant r$, что при $|z| \leqslant \delta$

$$|a_{m+1}z + a_{m+2}z^2 + \ldots| \leqslant \frac{1}{2}|a_m|;$$

тогда

$$|a_m + sz| \geqslant |a_m| - |sz| > \frac{1}{2}|a_m|$$

и, следовательно, $|a_m + sz| \neq 0$ при $|z| < \delta$.

Мы пришли, таким образом, к противоречию, предположив, что некоторые коэффициенты не равны нулю. Поэтому все коэффициенты равны нулю.

Следствие 1. Если суммы двух степенных рядов равны в области $|z| < \delta$, где $\delta > 0$, то коэффициенты в членах с одинаковыми степенями z соответственно равны.

Следствие 2. Если суммы двух степенных рядов равны хотя бы при z вещественных, то коэффициенты в членах с одинаковыми степенями z также соответственно равны.

ЛИТЕРАТУРА

T. J. I'a Bromwich, Theory of infinite series, гл. VII, 1908.
Э. Гурса, Курс математического анализа, гл. I, XIV, ОНТИ, 1936.
Ш. Ж. Валле-Пуссен, Курс анализа бесконечно малых, ГТТИ, 1933, гл. I, XI.
Г. Харди, Курс чистой математики, ИЛ, 1949, гл. V.
W. E. Osgood, Lehrbuch der Funktionentheorie, гл. II, III, Leipzig, 1912.
G. N. Watson, Complex integration and Cauchy's theorem, гл. I, II, Camb. Math. Tracts., № 15, 1914.

---

[1]) Достаточно выбрать δ так, чтобы

$$\delta \leqslant r \quad \text{и} \quad \delta \sum_{n=1}^{\infty} |a_{m+n}| r^{n-1} \leqslant \frac{1}{2}|a_m|.$$

Примеры

1. Показать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(1-z^n)(1-z^{n+1})}$$

равен $\frac{1}{(1-z)^2}$ при $|z|<1$ и равен $\frac{1}{z(1-z)^2}$ при $|z|>1$.

Связано ли это обстоятельство с теорией равномерной сходимости?

2. Показать, что ряд

$$2\sin\frac{1}{3z}+4\sin\frac{1}{9z}+\ldots+2^n\frac{1}{3^n z}+\ldots$$

сходится абсолютно для всех значений z (исключая $z=0$), но не будет равномерно сходящимся вблизи $z=0$.

3. Пусть

$$u_n(x)=-2(n-1)^2xe^{-(n-1)^2x^2}+2n^2xe^{-n^2x^2},$$

показать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ не будет равномерно сходящимся вблизи $x=0$.

(Math. Trip., 1907)

4. Показать, что ряд $\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\ldots$ сходится, но его квадрат (образованный по правилу Абеля)

$$\frac{1}{1}-\frac{2}{\sqrt{2}}+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{2}{\sqrt{4}}+\frac{2}{\sqrt{6}}\right)-\ldots$$

расходится.

5. Показать, что если сходящийся ряд $s=\frac{1}{1^r}-\frac{1}{2^r}+\frac{1}{3^r}-\frac{1}{4^r}+\ldots$ $(r>0)$ умножить на себя и члены произведения разместить по правилу Абеля, то полученный ряд расходится при $r\leqslant\frac{1}{2}$, но сходится к сумме s^2 при $r>\frac{1}{2}$.

(Cauchy и Cajori)

6. Показать, что если два условно сходящихся ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^r} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^s},$$

где r и s заключаются между 0 и 1, умножить друг на друга, и произведение представить в форме Абеля, то необходимым и достаточным условием сходимости полученного ряда является неравенство $r+s>1$.

(Cajori)

7. Показать, что если ряд

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots$$

умножить на себя любое число раз и произведение представить в форме Абеля, то полученный ряд будет сходящимся.

(Cajori)

8. Показать, что q-я степень ряда

$$a_1 \sin\theta + a_2 \sin 2\theta + \ldots + a_n \sin n\theta + \ldots$$

будет сходящейся, если $q(1-r) < 1$, где r — наибольшее число, удовлетворяющее неравенству $a_n \leqslant n^{-r}$ для всех значений n.

9. Показать, что если $\theta \neq 0$ и не кратно 2π и если $u_0, u_1, u_2, \ldots$ — такая последовательность, что $u_n \to 0$ монотонно, то ряд $\sum u_n \cos(n\theta + \alpha)$ сходится.

Показать также, что если предел $u_n \neq 0$, но $\{u_n\}$ все же монотонна, то ряд расходится, колеблясь, если $\frac{\theta}{\pi}$ рационально, но если $\frac{\theta}{\pi}$ иррационально, то сумма может принимать любое значение между определенными границами, разность которых равна $a \operatorname{cosec} \frac{1}{2}\theta$, где $a = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

(Math. Trip., 1896)

ГЛАВА 4

ТЕОРИЯ ИНТЕГРАЛА РИМАНА

4.1. Понятие интегрирования

Читатель, несомненно, знаком с идеей интегрирования как операции, обратной дифференцированию, а также и с тем, что интеграл (в этом смысле) от данной элементарной функции не всегда может быть выражен через элементарные же функции. Поэтому, чтобы дать определение интеграла функции, годное во всех случаях, даже если нахождение функции, производная от которой равнялась бы данной функции, является практически неосуществимым, мы должны обратиться к геометрическому смыслу интеграла[1]) $f(x)$ в пределах от a до b, который выражает площадь, ограниченную кривой $y=f(x)$, осью x и ординатами $x=a$, $x=b$. Это послужит исходной точкой для точного определения интегрирования.

4.11. Верхний и нижний интегралы[2])

Пусть $f(x)$ — ограниченная функция от x на отрезке (a, b). Разобьем этот отрезок на части точками $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ $(a \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_{n-1} \leqslant b)$. Пусть U, L — границы $f(x)$ на отрезке (a, b), и пусть U_r, L_r — границы $f(x)$ на отрезке (x_{r-1}, x_r), причем $x_0=a$, $x_n=b$.

Рассмотрим суммы[3])

$$S_n = U_1(x_1-a)+U_2(x_2-x_1)+\ldots+U_n(b-x_{n-1}),$$
$$s_n = L_1(x_1-a)+L_2(x_2-x_1)+\ldots+L_n(b-x_{n-1}).$$

---

[1]) Определяемого как (элементарная) функция, производная которой равна $f(x)$.

[2]) Данное изложение теорем существования, относящихся к интегралам, основано на изложении, данном Гурса, Курс анализа, т. I, гл. IV. Понятия верхнего и нижнего интегралов принадлежат Дарбу (Darboux, Ann. de l'Ecole norm. sup. (2), IV, 64 (1875)).

[3]) S_n и s_n представляют суммы площадей некоторого числа прямоугольников и соответственно больше и меньше площади, ограниченной кривой $y=f(x)$, $x=a$, $x=b$ и $y=0$, если предполагается, что такая площадь вообще существует.

Тогда

$$U(b-a) \geqslant S_n \geqslant s_n \geqslant L(b-a).$$

Для данного n суммы S_n и s_n будут ограниченными функциями от $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. Пусть их верхняя и нижняя границы [1]) будут соответственно $\underline{S}_n$, $\overline{s}_n$, так что $\underline{S}_n$, $\overline{s}_n$ зависят только от n и от вида $f(x)$, но не зависят от способа разбиения интервала на n частей.

Пусть нижняя и верхняя границы этих функций от n будут соответственно S, s.

Тогда

$$S_n \geqslant S, \quad s_n \leqslant s.$$

Мы покажем, что s самое большее равно S, т. е. $S \geqslant s$.

Пусть отрезки (a, x_1), (x_1, x_2), ... разбиты на меньшие отрезки новыми точками, и пусть

$$a, y_1, y_2, \ldots, y_{k-1}, y_k (= x_1), \quad y_{k+1}, \ldots, y_{l-1}, y_l (= x_2),$$
$$y_{l+1}, \ldots, y_{m-1}, b$$

будут концами меньших отрезков. Обозначим через U'_r, L'_r границы $f(x)$ на отрезке (y_{r-1}, y_r) и положим

$$T_m = \sum_{r=1}^{m} (y_r - y_{r-1}) U'_r, \quad t_m = \sum_{r=1}^{m} (y_r - y_{r-1}) L'_r.$$

Так как $U'_1, U'_2, \ldots, U'_k$ не могут превосходить U_1, то легко получаем, что

$$S_n \geqslant T_m \geqslant t_m \geqslant s_n.$$

Теперь рассмотрим разбиение отрезка (a, b) точками $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ и другой системой точек $x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n'-1}$. Пусть $S'_{n'}$, $s'_{n'}$ — суммы, соответствующие разбиению второй системой так же, как S_n, s_n соответствуют разбиению первой системой. Примем *все* точки $x_1, \ldots x_{n-1}$; $x'_1, \ldots x'_{n'-1}$ за точки $y_1, y_2, \ldots, y_m$.

Тогда

$$S_n \geqslant T_m \geqslant t_m \geqslant s_n$$

и

$$S'_{n'} \geqslant T_m \geqslant t_m \geqslant s'_{n'}.$$

Таким образом, всякая сумма S_n *больше* (или по меньшей мере равна) любой суммы $s'_{n'}$, и поэтому S не может быть меньше s. [Ибо если $S < s$ и $s - S = 2\eta$, то мы можем найти такое S_n и такое $s'_{n'}$, что $S_n - S < \eta$, $s - s'_{n'} < \eta$ и, следовательно, $s'_{n'} > S_n$, что невозможно.]

---

[1]) Границы функции от n переменных определяются таким же точно образом, как границы функции одной переменной (§ 3.62).

Граница S называется *верхним* интегралом $f(x)$ и обозначается символом $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$; s называется *нижним* интегралом и обозначается символом $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx$.

Если $S = s$, то их общая величина называется *интегралом*, взятым между пределами [1]) интегрирования a и b.

Он обозначается символом

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Когда $a < b$, мы определяем интеграл $\int_b^a f(x)\,dx$ как $-\int_a^b f(x)\,dx$.

Пример 1.

$$\int_a^b \{f(x) + \varphi(x)\}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Пример 2. При помощи примера 1 определить интеграл непрерывной комплексной функции вещественной переменной.

4.12. Условие интегрируемости в смысле Римана [2])

Говорят, что функция «интегрируема в смысле Римана», если (в обозначениях § 4.11) S_n и s_n имеют общий предел (называемый *интегралом Римана* от этой функции), когда число отрезков (x_{r-1}, x_r) стремится к бесконечности и длина наибольшего из них стремится к нулю.

Необходимое и достаточное условие интегрируемости ограниченной функции заключается в том, чтобы $S_n - s_n$ *стреми-*

---

[1]) «Крайние значения» было бы более подходящим термином, но «предел» имеет санкцию давности и привычки. Лэмбом было предложено слово «termini» (Lamb, Infinitesimal calculus, 207, 1897).

[2]) Риман (Riemann, Ges. math. Werke, 239) обосновал свое определение интеграла на пределе суммы, встречающейся в § 4.13, но тогда очень трудно доказать единственность предела. Более общее определение интегрирования (которое имеет весьма большое значение в современной теории функции вещественной переменной) дано Лебегом (Lebesgue, Annali di Mat. (3), VII, 231—359 (1902)). См. его «Интегрирование и отыскание примитивных функций», ГТТИ, 1934.

См. также И. П. Натансон, Теория функций вещественной переменной, Гостехиздат, М., 1957. (*Прим. ред.*)

лось к нулю, когда число отрезков (x_{r-1}, x_r) *беспредельно растет таким образом, что длина наибольшего из них стремится к нулю.*

Условие, очевидно, необходимо, ибо если S_n и s_n имеют общий предел, то $S_n - s_n \to 0$, когда $n \to \infty$. И оно достаточно, ибо из неравенства $S_n \geqslant S \geqslant s \geqslant s_n$ следует, что при $S_n - s_n \to 0$ имеем

$$\lim S_n = \lim s_n = S = s.$$

Примечание. Непрерывная функция $f(x)$ будет интегрируемой. В самом деле, для данного ε мы можем найти такое δ, что

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b-a},$$

когда

$$|x' - x''| < \delta.$$

Пусть все отрезки (x_{s-1}, x_s) меньше, чем δ, тогда $U_s - L_s < \frac{\varepsilon}{b-a}$ и, таким образом, $S_n - s_n < \varepsilon$; поэтому $S_n - s_n \to 0$ при $n \to \infty$ и $\delta \to 0$, что дает условие интегрируемости.

Следствие. Если S_n и s_n имеют один и тот же предел S для одного определенного способа разбиения отрезка (a, b) на части, то предел S_n и s_n для любого другого способа разбиения будет также S.

Пример 1. Произведение двух интегрируемых функций будет также интегрируемой функцией.

Пример 2. Функция непрерывная, за исключением конечного числа разрывов первого рода, будет интегрируемой.

[Если $f(x)$ имеет разрыв первого рода в c, то заключим c в интервал длины δ_1; для данного ε мы можем найти такое δ, что $|f(x') - f(x)| < \varepsilon$, когда $|x' - x| < \delta$ и x, x' не находятся в этом интервале.

Тогда $S_n - s_n \leqslant \varepsilon(b - a - \delta_1) + k\delta_1$, где k — наибольшее значение выражения $|f(x') - f(x)|$, когда x, x' лежат в этом интервале.

Когда $\delta_1 \to 0$, $k \to |f(c+0) - f(c-0)|$, а отсюда

$$\lim_{n \to \infty} (S_n - s_n) = 0.]$$

Пример 3. Функция ограниченной вариации с конечным числом разрывов первого рода интегрируема (см. § 3.64, пример 2).

4.13. Одна общая теорема об интеграле Римана

Пусть $f(x)$ — интегрируемая функция, а ε — какое-нибудь положительное число. Тогда можно выбрать δ так, чтобы

$$\left| \sum_{p=1}^{n} (x_p - x_{p-1}) f(x'_{p-1}) - \int_a^b f(x)\,dx \right| < \varepsilon$$

при условии, что

$$x_p - x_{p-1} \leqslant \delta, \quad x_{p-1} \leqslant x'_{p-1} \leqslant x_p.$$

Чтобы доказать эту теорему, заметим, что при данном ε мы можем выбрать длину наибольшего из промежутков δ настолько малой, что $S_n - s_n < \varepsilon$.

Далее,

$$S_n \geqslant \sum_{p=1}^{n} (x_p - x_{p-1}) f(x'_{p-1}) \geqslant s_n$$

и

$$S_n \geqslant \int_a^b f(x)\,dx \geqslant s_n.$$

Поэтому

$$\left| \sum_{p=1}^{n} (x_p - x_{p-1}) f(x'_{p-1}) - \int_a^b f(x)\,dx \right| \leqslant S_n - s_n < \varepsilon.$$

В качестве примера[1]) на вычисление определенного интеграла, основанного непосредственно на теореме этого параграфа, рассмотрим интеграл

$$\int_0^X \frac{dx}{(1-x^2)^{1/2}},$$

где $X < 1$.

Положим $\delta = \frac{1}{p} \arcsin X$, и пусть $x_s = \sin s\delta$ $\left(0 < s\delta < \frac{1}{2}\pi\right)$, так что

$$x_{s+1} - x_s = 2 \sin \frac{1}{2}\delta \cos\left(s + \frac{1}{2}\right)\delta < \delta;$$

пусть, далее,

$$x'_s = \sin\left(s + \frac{1}{2}\right)\delta.$$

Тогда

$$\sum_{s=1}^{p} \frac{x_s - x_{s-1}}{\left(1 - x'^2_{s-1}\right)^{1/2}} = \sum_{s=1}^{p} \frac{\sin s\delta - \sin(s-1)\delta}{\cos\left(s - \frac{1}{2}\right)\delta} = 2p \sin \frac{1}{2}\delta = \frac{\sin(\delta/2)}{\delta/2} \arcsin X.$$

Взяв p достаточно большим, мы можем сделать

$$\left| \int_0^X \frac{dx}{(1-x^2)^{1/2}} - \sum_{s=1}^{p} \frac{x_s - x_{s-1}}{\left(1 - x'^2_{s-1}\right)^{1/2}} \right|$$

произвольно малым.

Мы можем также сделать произвольно малым и выражение

$$\left\{ \frac{\sin(\delta/2)}{\delta/2} - 1 \right\} \arcsin X.$$

А это значит, что при данном произвольно малом числе ε мы можем сделать

$$\left| \int_0^X \frac{dx}{(1-x^2)^{1/2}} - \arcsin X \right| < \varepsilon,$$

---

[1]) Netto, Zeitschrift für Math. und Phys., XL (1895).

взяв p достаточно большим. Но рассматриваемое выражение *не зависит* от p, поэтому оно должно равняться нулю, так как ε произвольно мало.

Итак,

$$\int_0^X \frac{dx}{(1-x^2)^{1/2}} = \arcsin X.$$

Пример 1. Показать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+\cos\frac{x}{n}+\cos\frac{2x}{n}+\ldots+\cos\frac{n-1}{n}x}{n} = \frac{\sin x}{x}.$$

Пример 2. Если $f(x)$ имеет разрывы первого рода в точках

$$a_1, a_2, \ldots, a_k,$$

то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim\left\{\int_a^{a_1-\delta_1} + \int_{a_1+\varepsilon_1}^{a_2-\delta_2} + \ldots + \int_{a_k+\varepsilon_k}^{b} f(x)\,dx\right\},$$

где предел взят в предположении, что $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k$ стремятся к $+0$ независимо друг от друга.

Пример 3. Пусть $f(x)$ интегрируема на отрезке $a_1 \leqslant x \leqslant b_1$; при $a_1 \leqslant a < b < b_1$ положим

$$\int_a^b f(x)\,dx = \varphi(a, b),$$

тогда

$$\lim_{\delta\to+0} \frac{\varphi(a, b+\delta)-\varphi(a, b)}{\delta} = f(b+0),$$

если $f(b+0)$ существует.

Показать, что если $f(x)$ непрерывна в точках a и b, то

$$\frac{d}{da}\int_a^b f(x)\,dx = -f(a), \quad \frac{d}{db}\int_a^b f(x)\,dx = f(b).$$

Пример 4. Доказать дифференцированием, что если $\varphi(x)$ — непрерывная функция от x, а $\frac{dx}{dt}$ — непрерывная функция от t, то

$$\int_{x_0}^{x_1} \varphi(x)\,dx = \int_{t_0}^{t_1} \varphi(x)\frac{dx}{dt}\,dt.$$

Пример 5. Пусть $f'(x)$ и $\varphi'(x)$ непрерывны при $a \leqslant x \leqslant b$; показать, пользуясь примером 3, что

$$\int_a^b f'(x)\varphi(x)\,dx + \int_a^b \varphi'(x)f(x)\,dx = f(b)\varphi(b) - f(a)\varphi(a).$$

Пример 6. Пусть $f(x)$ интегрируема на отрезке (a, c) и $a \leqslant b \leqslant c$; показать, что $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ будет непрерывной функцией от b.

4.14. Теоремы о среднем значении

Следующие две общие теоремы являются особенно полезными.

(I) Пусть U и L будут верхней и нижней границами подинтегральной функции $f(x)$ на отрезке (a, b). Тогда из определения интеграла ясно, что

$$\int\limits_a^b \{U - f(x)\}\,dx, \quad \int\limits_a^b \{f(x) - L\}\,dx$$

будут не отрицательными и, следовательно,

$$U(b-a) \geqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \geqslant L(b-a).$$

Этот результат известен как *первая теорема о среднем значении*. Если $f(x)$ — *непрерывная* функция, то мы можем найти такое число ξ на отрезке (a, b), что $f(\xi)$ принимает любое заданное значение, лежащее между U и L (§ 3.63). Поэтому мы можем найти такое число ξ, что

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f(\xi).$$

Если $F(x)$ имеет непрерывную производную $F'(x)$ на отрезке (a, b), мы будем иметь, взяв $F'(x)$ вместо $f(x)$,

$$F(b) - F(a) = (b-a)\,F'(\xi),$$

где ξ — некоторое значение, для которого $a \leqslant \xi \leqslant b$.

Пример. Пусть $f(x)$ непрерывна и $\varphi(x) \geqslant 0$; доказать, что найдется такое ξ, что

$$\int\limits_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = f(\xi)\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx.$$

(II) Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ — интегрируемые функции на отрезке (a, b), и пусть $\varphi(x)$ — *положительная убывающая функция от x*. Тогда *вторая теорема о среднем значении в форме Бонне*[1]) утвер-

[1]) Bonnet, Journal de Math., XIV, 249 (1849). Данное доказательство есть видоизмененная форма доказательства, принадлежащего Гёльдеру (Hölder, Gött. Nach., 38—47 (1889).

ждает, что найдется такое число ξ на отрезке (a, b), для которого имеет место равенство

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(a)\int_a^\xi f(x)\,dx.$$

Действительно, пользуясь обозначениями §§ 4.1—4.13, рассмотрим сумму

$$S = \sum_{s=1}^{p}(x_s - x_{s-1})\,f(x_{s-1})\,\varphi(x_{s-1}).$$

Положив

$$(x_s - x_{s-1})\,f(x_{s-1}) = a_{s-1}, \quad \varphi(x_{s-1}) = \varphi_{s-1}, \quad a_0 + a_1 + \ldots + a_s = b_s,$$

будем иметь

$$S = \sum_{s=1}^{p-1} b_{s-1}(\varphi_{s-1} - \varphi_s) + b_{p-1}\varphi_{p-1}.$$

Каждый член суммы увеличится, если вместо b_{s-1} написать $\overline{b}$, и уменьшится, если вместо b_{s-1} написать $\underline{b}$, где $\overline{b}$ и $\underline{b}$ — наибольшее и наименьшее из значений $b_0, b_1, \ldots, b_{p-1}$; следовательно, $\underline{b}\varphi_0 \leqslant S \leqslant \overline{b}\varphi_0$. Поэтому S лежит между наибольшей и наименьшей из сумм

$$\varphi(x_0)\sum_{s=1}^{m}(x_s - x_{s-1})\,f(x_{s-1}),$$

где $m = 1, 2, 3, \ldots, p$. Но при заданном ε мы можем найти такое δ, что при $x_s - x_{s-1} < \delta$

$$\left|\sum_{s=1}^{p}(x_s - x_{s-1})\,f(x_{s-1})\,\varphi(x_{s-1}) - \int_{x_0}^{x_p} f(x)\varphi(x)\,dx\right| < \varepsilon,$$

$$\left|\varphi(x_0)\sum_{s=1}^{m}(x_s - x_{s-1})\,f(x_{s-1}) - \varphi(x_0)\int_{x_0}^{x_m} f(x)\,dx\right| < \varepsilon,$$

откуда, написав a, b вместо x_0, x_p, мы найдем, что $\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx$ лежит между верхней и нижней границами выражений[1] $\varphi(a)\int_0^{\xi_1} f(x)\,dx \pm 2\varepsilon$, где ξ_1 может принимать все значения

[1]) Согласно примеру 6 § 4.13 интеграл $\int_a^{\xi_1} f(x)\,dx$ будет непрерывной функцией от ξ_1, так как $f(x)$ — ограниченная функция.

между a и b. Пусть U и L будут верхней и нижней границами выражения $\varphi(a)\int\limits_a^{\xi_1} f(x)\,dx$. Тогда

$$U+2\varepsilon \geqslant \int\limits_a^b f(x)\varphi(x)\,dx \geqslant L-2\varepsilon$$

для всех положительных как угодно малых значений ε; поэтому

$$U \geqslant \int\limits_a^b f(x)\varphi(x)\,dx \geqslant L.$$

Но так как $\varphi(a)\int\limits_a^{\xi_1} f(x)\,dx$, как функция ξ_1, принимает все значения между своими верхней и нижней границами, то найдется такое значение ξ переменной ξ_1, для которого эта функция равна $\int\limits_a^b f(x)\varphi(x)\,dx$. Это и доказывает вторую теорему о среднем значении.

Пример. Написав $\varphi(x)-\varphi(b)$ вместо $\varphi(x)$ в теореме о среднем значении в форме Бонне, доказать, что если $\varphi(x)$ — монотонная функция, то существует такое число ξ на отрезке (a, b), что

$$\int\limits_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(a)\int\limits_x^{\xi} f(x)\,dx + \varphi(b)\int\limits_{\xi}^b f(x)\,dx.$$

(Du Bois Reymond)

4.2. Дифференцирование интегралов, содержащих параметр

Равенство [1])

$$\frac{d}{d\alpha}\int\limits_a^b f(x, \alpha)\,dx = \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial \alpha}\,dx$$

будет справедливым, *если $f(x, \alpha)$ интегрируема в смысле Римана относительно x, а $f_\alpha\left(=\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right)$ — непрерывная функция обеих* [2]) *переменных x и α.*

---

[1]) Эта формула была дана Лейбницем без указания на ограничения, налагаемые на $f(x, \alpha)$.

[2]) $\varphi(x, y)$ называется непрерывной функцией обеих переменных, если при заданном ε мы можем найти такое δ, что $|\varphi(x', y')-\varphi(x, y)|<\varepsilon$ при $\{(x'-x)^2+(y'-y)^2\}^{1/2}<\delta$. Можно показать с помощью § 3.6, что если $\varphi(x, y)$ — непрерывная функция обеих переменных во всех точках замкну-

В самом деле,

$$\frac{d}{d\alpha}\int_a^b f(x, \alpha)\,dx = \lim_{h\to 0}\int_a^b \frac{f(x, \alpha+h)-f(x, \alpha)}{h}\,dx,$$

если этот предел существует. Так как по предположению f_α — непрерывная функция от α, то по первой теореме о среднем значении подинтегральное выражение во втором интеграле будет равно $f_\alpha(x, \alpha+\theta h)$, где $0 \leqslant \theta \leqslant 1$.

Но для любого данного ε существует (поскольку непрерывность f_α равномерна[1]) относительно переменной x) такое *не зависящее* от x число δ, что

$$|f_\alpha(x, \alpha') - f_\alpha(x, \alpha)| < \frac{\varepsilon}{b-a},$$

если $|\alpha' - \alpha| < \delta$.

Взяв $|h| < \delta$, мы видим, что $|\theta h| < \delta$, и следовательно, *когда* $|h| < \delta$, всегда

$$\left|\int_a^b \frac{f(x, \alpha+h)-f(x, a)}{h}\,dx - \int_a^b f_\alpha(x, \alpha)\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^b |f_\alpha(x, a+\theta h) - f_\alpha(x, \alpha)|\,dx < \varepsilon.$$

Поэтому по определению предела функции (§ 3.2) предел

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b \frac{f(x, \alpha+h)-f(x, \alpha)}{h}\,dx$$

существует и равен

$$\int_a^b f_\alpha\,dx.$$

той ограниченной области, то она будет *равномерно* непрерывной во всей этой области (доказательство почти тождественно с данным в § 3.61). Следует заметить, что если $\varphi(x, y)$ — непрерывная функция *каждой* переменной, то из этого еще не следует, что она будет непрерывной функцией от обеих переменных; для примера возьмем

$$\varphi(x, y) = \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}, \quad \varphi(0, 0) = 1;$$

в точке (0, 0) это — непрерывная функция от x и от y, но не от обеих координат x и y.

[1]) Ясно, что достаточно было бы принять, что f_α интегрируема в смысле Римана и непрерывна как функция от α (причем непрерывность равномерна относительно x), вместо того, чтобы принимать, что f_α — непрерывная функция обеих переменных. Так именно поступает Гобсон (Hobson, Functions of a real variable, 599).

Пример 1. Пусть a, b не постоянные, а функции от α с непрерывными производными; показать, что

$$\frac{d}{d\alpha}\int_a^b f(x, \alpha)\,dx = f(b, \alpha)\frac{db}{d\alpha} - f(a, \alpha)\frac{da}{d\alpha} + \int_a^b \frac{\partial f}{\partial \alpha}\,dx.$$

Пример 2. Если $f(x, \alpha)$ — непрерывная функция обеих переменных, то $\int_a^b f(x, \alpha)\,dx$ будет непрерывной функцией от α.

4.3. Двойные и повторные интегралы

Пусть $f(x, y)$ будет функцией, непрерывной относительно обеих переменных x и y в области $a \leqslant x \leqslant b$, $\alpha \leqslant y \leqslant \beta$.

Из примера 2 § 4.2 ясно, что существуют оба интеграла

$$\int_a^b \left\{ \int_\alpha^\beta f(x, y)\,dy \right\} dx, \quad \int_\alpha^\beta \left\{ \int_a^b f(x, y)\,dx \right\} dy.$$

Последние называются *повторными интегралами*.

Ясно также, как в § 3.62, что $f(x, y)$, будучи непрерывной функцией обеих переменных, достигает верхней и нижней границ.

Будем теперь рассматривать совокупность значений x и y как точки внутри и на границе прямоугольника в декартовых координатах; разделим его на $n\nu$ прямоугольников прямыми, параллельными осям.

Пусть $U_{m,\mu}$, $L_{m,\mu}$ — верхняя и нижняя границы функции $f(x, y)$ в одном из этих меньших прямоугольников, площадь которого обозначим через $A_{m,\mu}$; положим

$$\sum_{m=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{\nu} U_{m,\mu}A_{m,\mu} = S_{n,\nu}, \qquad \sum_{m=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{\nu} L_{m,\mu}A_{m,\mu} = s_{n,\nu}.$$

Тогда $S_{n,\nu} > s_{n,\nu}$, и, как в § 4.11, мы можем найти числа $\underline{S}_{n,\nu}$, $\overline{s}_{n,\nu}$, которые будут соответственно нижней и верхней границами величин $S_{n,\nu}$ и $s_{n,\nu}$, причем $\underline{S}_{n,\nu}$, $\overline{s}_{n,\nu}$ зависят только от числа прямоугольников, но не от их формы и $\underline{S}_{n,\nu} \geqslant \overline{s}_{n,\nu}$.

Найдем затем соответственно нижнюю и верхнюю границы S и s величин $\underline{S}_{n,\nu}$, $\overline{s}_{n,\nu}$ как функций от n и ν; имеем, как в § 4.11,

$$S_{n,\nu} \geqslant S \geqslant s \geqslant s_{n,\nu}.$$

Благодаря равномерной непрерывности функций $f(x, y)$ мы можем при данном ε найти такое δ, что

$$U_{m,\mu} - L_{m,\mu} < \varepsilon$$

(для всех значений m и μ), когда стороны всех малых прямоугольников меньше δ, зависящего только от вида функции $f(x, y)$ и от ε.

Тогда

$$S_{n,\nu} - s_{n,\nu} < \varepsilon(b-a)(\beta-\alpha)$$

и, следовательно,

$$S - s < \varepsilon(b-a)(\beta-\alpha).$$

Но S и s *не зависят* от ε, и следовательно, $S = s$.

Общее значение для S и s называется *двойным интегралом* функции $f(x, y)$ и обозначается символом

$$\int_a^b \int_\alpha^\beta f(x, y)\,dx\,dy.$$

Легко показать, что повторные интегралы и двойной интеграл будут равны, когда $f(x, y)$ — непрерывная функция обеих переменных.

Действительно, пусть Υ_m, Λ_m — верхняя и нижняя границы интеграла

$$\int_\alpha^\beta f(x, y)\,dy,$$

когда x изменяется между x_{m-1} и x_m.

Тогда

$$\sum_{m=1}^{n} \Upsilon_m (x_m - x_{m-1}) \geqslant \int_a^b \left\{ \int_\alpha^\beta f(x, y)\,dy \right\} dx \geqslant \sum_{m=1}^{n} \Lambda_m (x_m - x_{m-1}).$$

Но [1])

$$\sum_{\mu=1}^{\nu} U_{m,\mu}(y_\mu - y_{\mu-1}) \geqslant \Upsilon_m \geqslant \Lambda_m \geqslant \sum_{\mu=1}^{\nu} L_{m,\mu}(y_\mu - y_{\mu-1}).$$

Умножая эти последние неравенства на $x_m - x_{m-1}$, суммируя и принимая во внимание предыдущие неравенства, получим

$$\sum_{m=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{\nu} U_{m,\mu} A_{m,\mu} \geqslant \int_a^b \left\{ \int_\alpha^\beta f(x, y)\,dy \right\} dx \geqslant \sum_{m=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{\nu} L_{m,\mu} A_{m,\mu}$$

и, переходя к пределу,

$$S \geqslant \int_a^b \left\{ \int_\alpha^\beta f(x, y)\,dy \right\} dx \geqslant s.$$

Но

$$S = s = \int_a^b \int_\alpha^\beta f(x, y)\,dx\,dy,$$

---

[1]) Верхняя граница функции $f(x, y)$ в прямоугольнике $A_{m,\mu}$ будет не меньше, чем верхняя граница функции $f(x, y)$ на той части прямой $x = \xi$, которая лежит в этом прямоугольнике.

так что один из повторных интегралов равен двойному интегралу. Подобным же образом доказывается и равенство другого повторного интеграла двойному интегралу.

Следствие. Если $f(x, y)$ — непрерывная функция обеих переменных, то

$$\int_0^1 dx \left\{ \int_0^{1-x} f(x, y)\, dy \right\} = \int_0^1 dy \left\{ \int_0^{1-y} f(x, y)\, dx \right\}.$$

4.4. Интегралы с бесконечными пределами

Если существует предел

$$\lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\, dx,$$

то мы обозначаем его символом $\int_a^\infty f(x)\, dx$ и называем *интегралом с бесконечным пределом* (infinite integral[1]).

Примеры.

1) $$\int_a^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \to \infty} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = \frac{1}{a} \qquad (a > 0).$$

2) $$\int_0^\infty \frac{x\, dx}{(x^2 + a^2)^2} = \lim_{b \to \infty} \left(-\frac{1}{2(b^2 + a^2)^2} + \frac{1}{2a^2} \right) = \frac{1}{2a^2}.$$

3) Интегрированием по частям показать, что

$$\int_0^\infty t^n e^{-t}\, dt = n! \qquad \text{(Euler.)}$$

Подобным же образом мы определяем интеграл $\int_{-\infty}^b f(x)\, dx$ как предел $\lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)\, dx$, если таковой существует, а интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$ определяется как сумма $\int_{-\infty}^a f(x)\, dx + \int_a^\infty f(x)\, dx$. В этом последнем определении выбор величины a безразличен.

---

[1]) Это название, принадлежащее Харди (Hardy, Proc. London Math. Soc., XXXIV, 16 (1902)), подчеркивает аналогию между интегралами с бесконечными пределами и бесконечными рядами (infinite series).