4.41. Интегралы с бесконечными пределами от непрерывных функций. Необходимое и достаточное условие сходимости

Покажем, что для сходимости интеграла $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ необходимо и достаточно, чтобы для любого положительного числа ε существовало такое положительное число X, что $\left|\int\limits_{x'}^{x''} f(x)\,dx\right| < \varepsilon$ всякий раз, когда $x'' \geqslant x' \geqslant X$.

Условие это, очевидно, необходимо; для доказательства его достаточности предположим, что оно удовлетворяется; тогда, если $n \geqslant X - a$, где n — положительное целое число, и $S_n = \int\limits_a^{a+n} f(x)\,dx$, то мы имеем

$$|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon.$$

Отсюда, согласно § 2.22, вытекает, что S_n стремится к некоторому пределу S; далее, если $\xi > a + n$, то

$$\left|S - \int\limits_a^\xi f(x)\,dx\right| \leqslant \left|S - \int\limits_a^{a+n} f(x)\,dx\right| + \left|\int\limits_{a+n}^\xi f(x)\,dx\right| < 2\varepsilon,$$

и следовательно,

$$\lim_{\xi\to\infty} \int\limits_a^\xi f(x)\,dx = S.$$

Таким образом, условие и достаточно.

4.42. Равномерная сходимость интеграла с бесконечными пределами

Говорят, что интеграл $\int\limits_a^\infty f(x, \alpha)\,dx$ сходится равномерно относительно α в данной области значений α, если для произвольного положительного числа ε существует такое число X, не зависящее от α, что

$$\left|\int\limits_{x'}^\infty f(x, \alpha)\,dx\right| < \varepsilon$$

для всех значений α в рассматриваемой области и для всех значений $x' \geqslant X$. Читатель легко убедится, сравнивая §§ 2.22 и 3.31 с § 4.41, что для равномерной сходимости интеграла $\int\limits_a^\infty f(x, \alpha)\,dx$ в данной области значений α необходимо и достаточно, чтобы для любого положительного числа ε существовало такое число X, не зависящее от α, что

$$\left|\int\limits_{x'}^{x''} f(x, \alpha)\,dx\right| < \varepsilon$$

для всех значений α в рассматриваемой области, когда $x'' \geqslant x' \geqslant X$.

4.43. Признаки сходимости интегралов с бесконечными пределами

Существуют признаки сходимости интегралов с бесконечными пределами, аналогичные данным в гл. 2 для сходимости бесконечных рядов.

Нижеследующие признаки играют особенно важную роль.

(I) Абсолютно сходящиеся интегралы. Можно показать, что $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ заведомо будет сходиться, если $\int\limits_a^\infty |f(x)|\,dx$ сходится; о первом интеграле тогда говорят, что он абсолютно сходится. Доказательство подобно приведенному в § 2.32.

Пример. *Признак сравнения.* Если $|f(x)| \leqslant g(x)$ и $\int\limits_a^\infty g(x)\,dx$ сходится, то $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ будет абсолютно сходящимся.

[Примечание. Дирихле[1]) указал, что для сходимости $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ *не необходимо*, чтобы $f(x) \to 0$, когда $x \to \infty$. Это можно видеть из рассмотрения функции

$$f(x) = 0 \qquad (n \leqslant x \leqslant n + 1 - (n+1)^{-2}),$$
$$f(x) = (n+1)^4 (n+1-x)\{x - (n+1) + (n+1)^{-2}\}$$
$$(n + 1 - (n+1)^{-2} \leqslant x \leqslant n+1),$$

---

[1]) Пример, данный Дирихле, был $f(x) = \sin x^2$ (Dirichlet, Journal für Math, XVII, 60 (1837)).

где n принимает все целые значения. В самом деле, $\int\limits_0^{\xi} f(x)\,dx$ возрастает вместе с ξ и $\int\limits_n^{n+1} f(x)\,dx = \frac{1}{6}(n+1)^{-2}$, отсюда следует, что $\int\limits_0^{\infty} f(x)\,dx$ сходится. Но при $x = n+1-\frac{1}{2}(n+1)^{-2}$ имеем $f(x) = \frac{1}{4}$; следовательно, $f(x)$ не стремится к нулю.]

(II) Признак Маклорена — Коши[1]. Если $f(x) > 0$ и $f(x) \to 0$ монотонно, то $\int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходятся или расходятся одновременно.

Ибо

$$f(m) \geqslant \int\limits_m^{m+1} f(x)\,dx \geqslant f(m+1),$$

откуда

$$\sum_{m=1}^{n} f(m) \geqslant \int\limits_n^{n+1} f(x)\,dx \geqslant \sum_{m=2}^{n+1} f(m).$$

Первое неравенство показывает, что если ряд сходится, то возрастающая последовательность $\int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx$ сходится (§ 2.2), когда $n \to \infty$, принимая целые значения, а отсюда непосредственно следует, что $\int\limits_1^{x'} f(x)\,dx$ сходится, когда $x' \to \infty$; обратно, если интеграл расходится, то будет расходящимся и ряд.

Второе неравенство показывает, что если ряд расходится, то расходится и интеграл, а если интеграл сходится, то будет сходиться и ряд (§ 2.2).

(III) Признак Бертрана[2]. Если $f(x) = O(x^{\lambda-1})$, то $\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx$ сходится при $\lambda < 0$; если $f(x) = O\left(x^{-1}\{\lg x\}^{\lambda-1}\right)$, то $\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx$ сходится при $\lambda < 0$.

Эти результаты являются частными случаями признака сравнения, данного в (I).

---

[1]) Маклорен (Maclaurin, Fluxions, 1, стр. 289, 290) высказывает в словесной форме утверждение, по существу эквивалентное этому признаку. Вывод Коши дан в его сочинениях (Cauchy, Oeuvres (2), VII, 269).

[2]) Bertrand, Journal de Math., VII, стр. 38, 39 (1892).

(IV) Признак Шартье[1]) **для интегралов, содержащих периодические функции.** Если $f(x) \to 0$ монотонно, когда $x \to \infty$, и если $\left|\int_a^x \varphi(x)\,dx\right|$ ограничен при $x \to \infty$, то $\int_a^\infty f(x)\varphi(x)\,dx$ сходится.

В самом деле, пусть верхней границей для $\left|\int_a^x \varphi(x)\,dx\right|$ будет A; мы можем найти такое X, что $f(x) < \frac{\varepsilon}{2A}$ при $x \geqslant X$, и тогда по второй теореме о среднем значении при $x'' \geqslant x' \geqslant X$ имеем

$$\left|\int_{x'}^{x''} f(x)\varphi(x)\,dx\right| = \left|f(x')\int_{x'}^{\xi} \varphi(x)\,dx\right| =$$

$$= f(x')\left|\int_a^{\xi} \varphi(x)\,dx - \int_a^{x} \varphi(x)\,dx\right| \leqslant 2Af(x') < \varepsilon,$$

что и является условием сходимости.

Пример 1. $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ сходится.

Пример 2. $\int_0^\infty x^{-1}\sin(x^3 - ax)\,dx$ сходится.

4.431. Признаки равномерной сходимости интегралов с бесконечными пределами[2])

(I) Признак Валле-Пуссена[3]). Читатель легко установит, пользуясь рассуждением § 3.34, что интеграл $\int_a^\infty f(x, \alpha)\,dx$ сходится равномерно относительно α в некоторой области значений α, если при этих значениях $|f(x, \alpha)| < \mu(x)$, где $\mu(x)$ — не зависит от α и интеграл $\int_a^\infty \mu(x)\,dx$ сходится. [Ибо, выбирая X так, что

---

[1]) Chartier, Journal de Math., XVIII, 201—212 (1853). Замечательно, что этот признак для *условно* сходящихся интегралов был дан за несколько лет до точных определений абсолютной сходимости интеграла.

[2]) Результаты этого параграфа и § 4.44 принадлежат Валле-Пуссену (de la Vallée Poussin, Ann. de la Soc. Scientifique de Bruxelles, XVI, 150—180 (1892)).

[3]) Это название принадлежит Осгуду.

$\int\limits_{x'}^{x''} \mu(x)\,dx < \varepsilon$ при $x'' \geqslant x' \geqslant X$, мы имеем $\left|\int\limits_{x'}^{x''} f(x, \alpha)\,dx\right| < \varepsilon$, причем выбор X не зависит от α.]

Пример. $\int\limits_0^\infty x^{a-1}e^{-x}\,dx$ сходится равномерно на любом отрезке (A, B) значений a таком, что $1 \leqslant A \leqslant B$ [1]).

(II) Метод замены переменной. Мы позволим себе разъяснить этот метод на примере. Рассмотрим интеграл $\int\limits_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x}\,dx$, где α вещественно. Имеем

$$\int\limits_{x'}^{x''} \frac{\sin \alpha x}{x}\,dx = \int\limits_{\alpha x'}^{\alpha x''} \frac{\sin y}{y}\,dy.$$

Так как $\int\limits_0^\infty \frac{\sin y}{y}\,dy$ сходится, то мы можем найти такое Y, что

$$\left|\int\limits_{y'}^{y''} \frac{\sin y}{y}\,dy\right| < \varepsilon, \quad \text{когда } y'' \geqslant y' \geqslant Y.$$

Таким образом,

$$\left|\int\limits_{x'}^{x''} \frac{\sin \alpha x}{x}\,dx\right| < \varepsilon,$$

когда $|\alpha x'| \geqslant Y$; если $|\alpha| \geqslant \delta > 0$, то

$$\left|\int\limits_{x'}^{x''} \frac{\sin \alpha x}{x}\,dx\right| < \varepsilon,$$

когда $x'' \geqslant x' \geqslant X = \frac{Y}{\delta}$, и этот выбор X не зависит от α. Таким образом, сходимость будет равномерной, когда $\alpha \geqslant \delta > 0$ и когда $\alpha \leqslant -\delta < 0$.

Пример. $\int\limits_1^\infty \left\{\int\limits_0^\alpha \sin(\beta^2 x^3)\,d\beta\right\} dx$ равномерно сходится в любой области вещественных значений α.

(de la Vallée Poussin)

---

[1]) Ограничение $1 \leqslant A$ излишне и нужно только для того, чтобы интеграл не был несобственным в начале координат. (*Прим. ред.*)

[Полагаем $\beta^2 x^3 = z$ и пользуемся тем, что $\left|\int\limits_0^{\alpha^2 x^3} z^{-1/2} \sin z\, dz\right|$ не превосходит постоянной, не зависящей от α и x, так как $\int\limits_0^{\infty} z^{-1/2} \sin z\, dz$ сходится.]

(III) Метод интегрирования по частям. Если

$$\int f(x, \alpha)\, dx = \varphi(x, \alpha) + \int \chi(x, \alpha)\, dx$$

и если $\varphi(x, \alpha) \to 0$ равномерно относительно α при $x \to \infty$, а $\int\limits_0^{\infty} \chi(x, \alpha)\, dx$ сходится равномерно относительно α, то очевидно, что $\int\limits_0^{\infty} f(x, \alpha)\, dx$ сходится равномерно относительно α.

(IV) Метод разложения.

Пример.

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{\cos x \sin \alpha x}{x}\, dx = \frac{1}{2} \int\limits_0^{\infty} \frac{\sin(\alpha+1)x}{x}\, dx + \frac{1}{2} \int\limits_0^{\infty} \frac{\sin(\alpha-1)x}{x}\, dx;$$

оба последних интеграла будут равномерно сходящимися в любой замкнутой области вещественных значений α, не содержащей точек $\alpha = \pm 1$.

4.44. Теоремы, относящиеся к равномерно сходящимся интегралам с бесконечными пределами

(I) *Пусть* $\int\limits_a^{\infty} f(x, \alpha)\, dx$ *сходится равномерно, когда* α *лежит в области* S.

Если $f(x, \alpha)$ — *непрерывная функция обеих переменных, когда* $x \geqslant a$ *и* α *лежит в* S, *то* $\int\limits_a^{\infty} f(x, \alpha)\, dx$ *будет непрерывной функцией от* α[1]).

Действительно, для данного ε мы можем найти такое X, *не зависящее от* α, что $\left|\int\limits_{\xi}^{\infty} f(x, \alpha)\, dx\right| < \varepsilon$ при $\xi \geqslant X$.

---

[1]) Этот результат принадлежит Стоксу. Утверждение Стокса гласит, что интеграл будет непрерывной функцией от α, если он сходится «не бесконечно медленно».

Затем мы можем найти такое δ, *не зависящее от* x и α, что

$$|f(x, \alpha) - f(x, \alpha')| < \frac{\varepsilon}{X - a},$$

когда

$$|\alpha - \alpha'| < \delta.$$

А это значит, что для данного ε мы можем найти такое δ, не зависящее от α, что

$$\left|\int_a^\infty f(x, \alpha')\,dx - \int_a^\infty f(x, \alpha)\,dx\right| \leqslant \left|\int_a^X \{f(x, \alpha) - f(x, \alpha')\}\,dx\right| +$$

$$+ \left|\int_X^\infty f(x, \alpha')\,dx\right| + \left|\int_X^\infty f(x, \alpha)\,dx\right| < 3\varepsilon,$$

когда $|\alpha' - \alpha| < \delta$, что и является условием непрерывности.

(II) *Если* $f(x, \alpha)$ *удовлетворяет тем же самым условиям, что и в* (I), *и если область* S *содержит отрезок*

$$A \leqslant \alpha \leqslant B,$$

то

$$\int_A^B \left\{\int_a^\infty f(x, \alpha)\,dx\right\} d\alpha = \int_a^\infty \left\{\int_A^B f(x, \alpha)\,d\alpha\right\} dx.$$

В самом деле, согласно § 4.3

$$\int_A^B \left\{\int_a^\xi f(x, a)\,dx\right\} d\alpha = \int_a^\xi \left\{\int_A^B f(x, \alpha)\,d\alpha\right\} dx.$$

Поэтому

$$\left|\int_A^B \left\{\int_a^\infty f(x, \alpha)\,dx\right\} d\alpha - \int_a^\xi \left\{\int_A^B f(x, \alpha)\,d\alpha\right\} dx\right| =$$

$$= \left|\int_A^B \left\{\int_\xi^\infty f(x, \alpha)\,dx\right\} d\alpha\right| < \int_A^B \varepsilon\,d\alpha < \varepsilon(B - A)$$

для всех достаточно больших значений ξ.

Но согласно §§ 2.1 и 4.41 это и есть условие того, что существует предел

$$\lim_{\xi \to \infty} \int_0^\xi \left\{\int_A^B f(x, \alpha)\,d\alpha\right\} dx$$

и что он равен

$$\int_A^B \left\{ \int_a^\infty f(x, \alpha)\, dx \right\} d\alpha.$$

Следствие. Соотношение $\frac{d}{d\alpha} \int_a^\infty \varphi(x, \alpha)\, dx = \int_a^\infty \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}\, dx$ справедливо, если интеграл справа равномерно сходится, если его подинтегральная функция есть непрерывная функция обеих переменных, когда $x \geqslant a$ и α лежит в области S, и если интеграл слева сходится.

Пусть A — точка области S, и пусть $\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = f(x, \alpha)$, так что согласно примеру 3 § 4.13

$$\int_A^\alpha f(x, \alpha)\, d\alpha = \varphi(x, \alpha) - \varphi(x, A).$$

Тогда интеграл $\int_a^\infty \left\{ \int_A^\alpha f(x, \alpha)\, d\alpha \right\} dx$ будет сходиться, а это значит, что интеграл $\int_a^\infty \{\varphi(x, \alpha) - \varphi(x, A)\}\, dx$ сходится; следовательно, поскольку $\int_a^\infty \varphi(x, \alpha)\, dx$ сходится, должен сходиться и $\int_a^\infty \varphi(x, A)\, dx$.

Далее,

$$\frac{d}{d\alpha}\left[\int_a^\infty \varphi(x, \alpha)\, dx\right] = \frac{d}{d\alpha}\left[\int_a^\infty \{\varphi(x, \alpha) - \varphi(x, A)\}\, dx\right] =$$

$$= \frac{d}{d\alpha}\left[\int_a^\infty \left\{\int_A^\alpha f(x, \alpha)\, d\alpha\right\} dx\right] = \frac{d}{d\alpha}\int_A^\alpha \left\{\int_a^\infty f(x, \alpha)\, dx\right\} d\alpha =$$

$$= \int_a^\infty f(x, \alpha)\, dx = \int_a^\infty \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}\, dx,$$

а это и есть требуемый результат. Законность изменения порядка интегрирования была обоснована только что, а законность дифференцирования интеграла $\int^\alpha$ по α основана на § 4.44 (I) и примере 3 § 4.13.

4.5 Несобственные интегралы. Главные значения

Если $|f(x)| \to \infty$ при $x \to a+0$ и если предел

$$\lim_{\delta \to +0} \int_{a+\delta}^{b} f(x)\,dx,$$

все же существует, то его обозначают обычным символом

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

и называют *несобственным интегралом.*

Если $|f(x)| \to \infty$, когда $x \to c$, где $a < c < b$, то сумма

$$\lim_{\delta \to +0} \int_{a}^{c-\delta} f(x)\,dx + \lim_{\delta' \to +0} \int_{c+\delta'}^{b} f(x)\,dx,$$

все же может существовать, в этом случае ее опять обозначают символом $\int_a^b f(x)\,dx$ и также называют несобственным интегралом. Может, однако, случиться, что ни один из этих пределов не существует, когда δ, $\delta' \to 0$ независимо друг от друга, но существует предел

$$\lim_{\delta \to +0} \left\{ \int_{a}^{c-\delta} f(x)\,dx + \int_{c+\delta}^{b} f(x)\,dx \right\};$$

этот предел называется тогда главным значением Коши интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ и обозначается для краткости символом $P\int_a^b f(x)\,dx$.

Для несобственных интегралов могут быть получены результаты, аналогичные разультатам §§ 4.4—4.44. Но для практики требуется главным образом (I) понятие абсолютной сходимости, (II) аналог признака сходимости Бертрана, (III) аналог признака равномерности сходимости Валле-Пуссена. Вывод их предоставляется читателю, как и рассмотрение интегралов, в которых подинтегральная функция имеет бесконечный предел более чем в одной точке области интегрирования[1]).

---

[1]) Подробное изложение несобственных интегралов дано в книгах Гобсона и Пирпонта (Pierpont, Functions of a real variable), к которым мы и отсылаем читателя. Связь между интегралами с бесконечными пределами и несобственными интегралами установлена Бромуичем (Bromwich, Infinite series, § 164).

Примеры. 1) $\int\limits_0^{\pi} x^{-1/2} \cos x\, dx$ — несобственный интеграл.

2) $\int\limits_0^1 x^{\lambda-1}(1-x)^{\mu-1}\, dx$ — несобственный интеграл при $0<\lambda<1$, $0<\mu<1$. Он не сходится для отрицательных значений λ_2 и μ.

3) $P\int\limits_0^2 \frac{x^{\alpha-1}}{1-x}\, dx$ — главное значение несобственного интеграла при $0<\alpha<1$.

4.51. Изменение порядка интегрирования в некоторых повторных интегралах

Общие условия законности изменения порядка интегрирования, когда подинтегральная функция не непрерывна, получить трудно. Следующий пример хорошо показывает затруднения, которые приходится преодолевать при изменении порядка интегрирования в повторных несобственных интегралах.

Пусть $f(x, y)$ — *непрерывная функция обеих переменных*, и пусть

$$0<\lambda\leqslant 1, \quad 0<\mu\leqslant 1, \quad 0<\nu\leqslant 1,$$

тогда

$$\int\limits_0^1 dx \left\{ \int\limits_0^{1-x} x^{\lambda-1} y^{\mu-1} (1-x-y)^{\nu-1} f(x, y)\, dy \right\} =$$

$$= \int\limits_0^1 dy \left\{ \int\limits_0^{1-y} x^{\lambda-1} y^{\mu-1} (1-x-y)^{\nu-1} f(x, y)\, dx \right\}.$$

Эта формула, впервые указанная Дирихле, играет важную роль в теории интегральных уравнений; исследование, которое мы здесь дадим, принадлежит Гурвицу [1]).

Пусть $x^{\lambda-1} y^{\mu-1} (1-x-y)^{\nu-1} f(x, y) = \varphi(x, y)$, и пусть M будет верхней границей модуля $|f(x, y)|$.

Пусть δ — любое положительное число, меньшее $\frac{1}{3}$.

Построим треугольник со сторонами

$$x=\delta, \quad y=\delta, \quad x+y=1-\delta;$$

во всех точках внутри и на контуре этого треугольника функция $\varphi(x, y)$ будет непрерывна, и отсюда, по следствию § 4.3,

$$\int\limits_\delta^{1-2\delta} dx \left\{ \int\limits_\delta^{1-x-\delta} \varphi(x, y)\, dy \right\} = \int\limits_\delta^{1-2\delta} dy \left\{ \int\limits_\delta^{1-y-\delta} \varphi(x, y)\, dx \right\}.$$

---

[1]) W. A. Hurwitz, Annals of Mathematics, IX, 183 (1908).

Далее,

$$\int_{\delta}^{1-2\delta} dx \left\{ \int_{0}^{1-x} \varphi(x, y)\, dy \right\} = \int_{\delta}^{1-2\delta} dx \left\{ \int_{\delta}^{1-x-\delta} \varphi(x, y)\, dy \right\} + \int_{\delta}^{1-2\delta} I_1\, dx + \int_{\delta}^{1-2\delta} I_2\, dx,$$

где

$$I_1 = \int_{0}^{\delta} \varphi(x, y)\, dy, \quad I_2 = \int_{1-x-\delta}^{1-x} \varphi(x, y)\, dy.$$

Но

$$|I_1| \leqslant \int_{0}^{\delta} M x^{\lambda-1} y^{\mu-1} (1-x-y)^{\nu-1}\, dy \leqslant M x^{\lambda-1} (1-x-\delta)^{\nu-1} \int_{0}^{\delta} y^{\mu-1}\, dy,$$

так как

$$(1-x-y)^{\nu-1} \leqslant (1-x-\delta)^{\nu-1}.$$

Поэтому положив $x = (1-\delta)\, x_1$, будем иметь [1])

$$\left| \int_{\delta}^{1-2\delta} I_1\, dx \right| \leqslant M\delta^{\mu}\mu^{-1} \int_{0}^{1-\delta} x^{\lambda-1} (1-x-\delta)^{\nu-1}\, dx \leqslant$$

$$\leqslant M\delta^{\mu}\mu^{-1} (1-\delta)^{\lambda+\nu-1} \int_{0}^{1} x_1^{\lambda-1} (1-x_1)^{\nu-1}\, dx_1 <$$

$$< M\delta^{\mu}\mu^{-1} (1-\delta)^{\lambda+\nu-1} B(\lambda, \nu) \to 0, \quad \text{когда} \quad \delta \to 0.$$

Подобным же образом можно убедиться в том, что $\int_{\delta}^{1-2\delta} I_2\, dx \to 0$ при $\delta \to 0$.

Отсюда [2])

$$\int_{0}^{1} dx \left\{ \int_{0}^{1-x} \varphi(x, y)\, dy \right\} = \lim_{\delta \to 0} \int_{\delta}^{1-2\delta} dx \left\{ \int_{0}^{1-x} \varphi(x, y)\, dy \right\} =$$

$$= \lim_{\delta \to 0} \int_{\delta}^{1-2\delta} dx \left\{ \int_{\delta}^{1-x-\delta} \varphi(x, y)\, dy \right\} = \lim_{\delta \to 0} \int_{\delta}^{1-2\delta} dy \left\{ \int_{\delta}^{1-y-\delta} \varphi(x, y)\, dx \right\}$$

---

[1]) $\int_{0}^{1} x_1^{\lambda-1} (1-x_1)^{\lambda-1}\, dx_1 = B(\lambda, \nu)$ существует, если $\lambda > 0$, $\nu > 0$ (§ 4.5, пример 2).

[2]) Этот повторный интеграл существует и даже абсолютно сходится, ибо

$$\int_{0}^{1-x} |x^{\lambda-1} y^{\mu-1} (1-x-y)^{\nu-1} f(x, y)\, dy| <$$

$$< M x^{\lambda-1} (1-x)^{\mu+\nu-1} \int_{0}^{1} s^{\mu-1} (1-s)^{\nu-1}\, ds,$$

по доказанному выше; точно таким же рассуждением убедимся, что последний интеграл равен

$$\int_0^1 dy \left\{ \int_0^{1-y} \varphi(x, y)\, dx \right\}.$$

Следовательно, предложенная теорема доказана [1]).

Следствие. Положив $\xi = a + (b-a)x$, $\eta = b - (b-a)y$, видим, что если функция $\varphi(\xi, \eta)$ непрерывна, то

$$\int_a^b d\xi \left\{ \int_\xi^b (\xi - a)^{\lambda-1} (b-\eta)^{\mu-1} (\eta-\xi)^{\nu-1} \varphi(\xi, \eta)\, d\eta \right\} =$$

$$= \int_a^b d\eta \left\{ \int_a^\eta (\xi - a)^{\lambda-1} (b-\eta)^{\mu-1} (\eta-\xi)^{\nu-1} \varphi(\xi, \eta)\, d\xi \right\}.$$

Это соотношение называется *формулой Дирихле.*

Примечание. Интегралы с бесконечными пределами и несобственные интегралы были введены Коши (Cauchy, Leçons sur le calc. inf., 1823), хотя идея интегралов с бесконечными пределами, кажется, существует со времени Маклорена (1742). Признак сходимости имеется у Шартье (1853). Стокс различал «существенно» (абсолютно) и «несущественно» сходящиеся интегралы, хотя он и не дал для них точного определения. Такое определение было дано Дирихле в 1854 и 1858 гг. (см. Dirichlet, Vorlesungen, 39, 1904). В первой половине XIX столетия несобственные интегралы привлекали больше внимания, чем интегралы с бесконечными пределами, по всей вероятности, потому, что не вполне сознавалось, что интеграл с бесконечными пределами в действительности является пределом интеграла.

где положено $y = (1-x)s$; интеграл же

$$\int_0^1 Mx^{\lambda-1}(1-x)^{\mu+\nu-1}\, dx \int_0^1 s^{\mu-1}(1-s)^{\nu-1}\, ds$$

существует. А поскольку этот интеграл существует, то его значение, равное $\lim\limits_{\delta, \varepsilon \to 0} \int_\delta^{1-\varepsilon}$, может быть обозначено $\lim\limits_{\delta \to 0} \int_\delta^{1-2\delta}$.

[1]) С появлением интеграла Лебега и связанного с ним *принципа Фубини* («сумма» положительных слагаемых не зависит от способа «суммирования») необходимость в подобных исследованиях отпала. Теорема сразу же следует из общих утверждений, см., например, И. П. Натансон, Теория функций вещественной переменной, Гостехиздат, 1957, стр. 379—387, и в частности, теорему 2 на стр. 387. (*Прим. ред.*)

4.6. Интегрирование комплексных функций[1])

Интегрирование по вещественной переменной x можно рассматривать как интегрирование вдоль специального пути (а именно по части вещественной оси) в плоскости комплексного переменного. Пусть $f(z)(=P+iQ)$ — функция комплексной переменной z, непрерывная вдоль простой кривой AB в плоскости комплексного переменного.

Пусть уравнения кривой будут

$$x=x(t), \qquad y=y(t) \qquad (a \leqslant t \leqslant b).$$

Пусть, далее,

$$x(a)+iy(a)=z_0, \quad x(b)+iy(b)=Z.$$

Если[2]) $x(t)$, $y(t)$ имеют непрерывные производные[3]), то мы *определяем* $\int\limits_{z_0}^{Z} f(z)\,dz$, взятый вдоль простой кривой AB, как

$$\int\limits_a^b (P+iQ)\left(\frac{dx}{dt}+i\frac{dy}{dt}\right)dt.$$

«Длина» кривой AB определяется интегралом

$$\int\limits_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt.$$

Она, очевидно, существует, если $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ непрерывны; таким образом, мы свели вопрос об интеграле в области комплексной переменной к рассмотрению четырех вещественных интегралов, а именно:

$$\int\limits_a^b P\frac{dx}{dt}\,dt, \quad \int\limits_a^b P\frac{dy}{dt}\,dt, \quad \int\limits_a^b Q\frac{dx}{dt}\,dt, \quad \int\limits_a^b Q\frac{dy}{dt}\,dt.$$

Согласно примеру 4 § 4.13 это определение согласуется с определением интеграла в том случае, когда AB является частью вещественной оси.

---

[1]) Теорию интегрирования комплексных функций, основанную на иной системе понятий и не заключающую так много предположений относительно кривой AB, можно найти у Ватсона (Watson, Complex integration and Cauchy's theorem).

[2]) Такое предположение будет делаться во всем последующем изложении.

[3]) См. § 4.13, пример 4.

Примеры. $\int\limits_{z_0}^{Z} f(z)\,dz = -\int\limits_{Z}^{z_0} f(z)\,dz$, где путь интегрирования один и тот же (но проходится в противоположных направлениях);

$$\int\limits_{z_0}^{Z} dz = Z - z_0; \quad \int\limits_{z_0}^{Z} z\,dz = \int\limits_{a}^{b} \left\{ x\frac{dx}{dt} - y\frac{dy}{dt} + i\left(x\frac{dy}{dt} + y\frac{dx}{dt}\right)\right\} dt =$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 + ixy\right]_{t=a}^{t=b} = \frac{1}{2}\left(Z^2 - z_0^2\right).$$

4.61. Основная теорема для интегралов в комплексной области

Из результатов § 4.13 легко вывести следующую теорему.

Пусть взята бесконечная последовательность точек на простой кривой z_0Z; первые n из них, расположенные в порядке величины параметра, обозначим через $z_1^{(n)}, z_2^{(n)}, \ldots, z_n^{(n)}$ $\left(z_0^{(n)} = z_0,\ z_{n+1}^{(n)} = Z\right)$, а соответствующие значения параметра — через $t_1^{(n)}, t_2^{(n)}, \ldots, t_n^{(n)}$; пусть последовательность такова, что при любом данном числе $\delta > 0$ мы можем найти такое N, что при $n > N$ будем иметь $t_{r+1}^{(n)} - t_r^{(n)} < \delta$ для $r = 0, 1, 2, \ldots, n$; пусть $\zeta_r^{(n)}$ — любая точка, параметр которой лежит между $t_r^{(n)}$, $t_{r+1}^{(n)}$; тогда выражение

$$\left|\sum_{r=0}^{n}\left(z_{r+1}^{(n)} - z_r^{(n)}\right) f\left(\zeta_r^{(n)}\right) - \int\limits_{z_0}^{Z} f(z)\,dz\right|$$

можно сделать произвольно малым, взяв n достаточно большим.

4.62. Верхняя граница модуля интеграла в комплексной области

Пусть M — верхняя граница непрерывной функции $|f(z)|$. Тогда

$$\left|\int\limits_{z_0}^{Z} f(z)\,dz\right| \leqslant \int\limits_{a}^{b} |f(z)| \left|\left(\frac{dx}{dt} + i\frac{dy}{dt}\right)\right| dt \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{a}^{b} M\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} dt \leqslant Ml,$$

где l — длина кривой z_0Z.

Иными словами, $\left|\int\limits_{z_0}^{Z} f(z)\,dz\right|$ не может превосходить Ml.

4.7. Интегрирование бесконечных рядов

Покажем теперь, что если $S(z)=u_1(z)+u_2(z)+\ldots$ — равномерно сходящийся ряд непрерывных функций для значений z, содержащихся в некоторой области, то ряд

$$\int_C u_1(z)\,dz+\int_C u_2(z)\,dz+\ldots$$

(где все интегралы берутся вдоль некоторого пути C в этой области) будет сходиться и его суммой будет

$$\int_C S(z)\,dz.$$

В самом деле, положив

$$S(z)=u_1(z)+u_2(z)+\ldots+u_n(z)+R_n(z),$$

будем иметь

$$\int_C S(z)\,dz=\int_C u_1(z)\,dz+\ldots+\int_C u_n(z)\,dz+\int_C R_n(z)\,dz.$$

Так как данный ряд равномерно сходится, то каждому положительному числу ε соответствует такое число r, *не зависящее от* z, что при $n\geqslant r$ имеем $|R_n(z)|<\varepsilon$ для всех значений z в рассматриваемой области.

Поэтому, если l — длина пути интегрирования, то мы имеем (§ 4.62)

$$\left|\int_C R_n(z)\,dz\right|<\varepsilon l,$$

т. е. модуль разности между

$$\int_C S(z)\,dz \quad \text{и} \quad \sum_{m=1}^{n}\int_C u_m(z)\,dz,$$

можно сделать меньше, чем любое положительное число, давая n достаточно большое значение. Это доказывает, что ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\int_C u_m(z)\,dz$ сходится и что его сумма равна

$$\int_C S(z)\,dz.$$

Следствие. Как и в следствии § 4.44, можно показать, что[1])

$$\frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{\infty} u_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dz} u_n(z),$$

если ряд справа сходится равномерно и ряд слева сходится.

Пример 1. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x\{n(n+1)\sin^2 x^2 - 1\}\cos x^2}{\{1+n^2\sin^2 x^2\}\{1+(n+1)^2\sin^2 x^2\}},$$

в котором x вещественно.

Здесь n-й член равен

$$\frac{2xn\cos x^2}{1+n^2\sin^2 x^2} - \frac{2x(n+1)\cos x^2}{1+(n+1)^2\sin^2 x^2},$$

и следовательно, сумма n первых членов равна

$$\frac{2x\cos x^2}{1+\sin^2 x^2} - \frac{2x(n+1)\cos x^2}{1+(n+1)^2\sin^2 x^2}.$$

Отсюда следует, что ряд абсолютно сходится для всех вещественных значений x, исключая $\pm\sqrt{m\pi}$, где $m = 1, 2, \ldots$; но

$$R_n(x) = \frac{2x(n+1)\cos x^2}{1+(n+1)^2\sin^2 x^2},$$

и если n — какое-нибудь целое число, то при $x = (n+1)^{-1}$ пределом $R_n(x)$ при $n \to \infty$ будет 2. Поэтому, вблизи $x = 0$, ряд сходится неравномерно. Его сумма равна

$$\frac{2x\cos x^2}{1+\sin^2 x^2}.$$

Интеграл же этой суммы от 0 до x равен $\operatorname{arctg}\{\sin x^2\}$. С другой стороны, сумма интегралов от 0 до x первых n членов ряда равна

$$\operatorname{arctg}\{\sin x^2\} - \operatorname{arctg}\{(n+1)\sin x^2\}$$

и при $n \to \infty$ она стремится к $\operatorname{arctg}\{\sin x^2\} - \frac{1}{2}\pi$. Поэтому интеграл суммы ряда отличается от суммы ряда интегралов его членов на $\frac{1}{2}\pi$.

Пример 2. Рассмотреть подобным же образом ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2e^n x\{1-n(e-1)+e^{n+1}x^2\}}{n(n+1)(1+e^n x^2)(1+e^{n+1}x^2)}$$

для вещественных значений x.

---

[1]) $\frac{df(z)}{dz}$ означает $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$, где $h \to 0$ вдоль определенной простой кривой; это определение будет слегка видоизменено в § 5.12 для случая, когда $f(z)$ — *аналитическая* функция.

Пример 3. Рассмотреть ряд

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots,$$

где

$$u_1 = ze^{-z^2}, \quad u_n = nze^{-nz^2} - (n-1)\, ze^{-(n-1)z^2}$$

для вещественных значений z.

Сумма первых n членов равна nze^{-nz^2}, так что сумма бесконечного ряда равна 0 для всех вещественных значений z. Так как члены u_n вещественны и при достаточно большом n имеют одинаковые знаки, то сходимость будет абсолютной.

В ряде

$$\int_0^z u_1\, dz + \int_0^z u_2\, dz + \ldots$$

сумма n первых членов равна $\frac{1}{2}(1 - e^{-nz^2})$ и стремится к пределу $\frac{1}{2}$ при стремлении n к бесконечности. Эта сумма не равна интегралу от 0 до z суммы ряда $\sum u_n$. Это несовпадение объясняется неравномерной сходимостью вблизи $z = 0$. В самом деле, остаточный член ряда $u_1 + u_2 + \ldots$ равен $-nze^{-nz^2}$; если взять $z = n^{-1}$, он будет равняться $-e^{-1/n}$, то есть не будет произвольно малым числом, поэтому ряд не будет равномерно сходиться вблизи $z = 0$.

Пример 4. Сравнить значения

$$\int_0^z \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} u_n \right\} dz \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^z u_n\, dz,$$

где

$$u_n = \frac{2n^2 z}{(1 + n^2 z^2) \lg (n+1)} - \frac{2(n+1)^2 z}{\{1 + (n+1)^2 z^2\} \lg (n+2)}.$$

(Trinity, 1903)

ЛИТЕРАТУРА

G. F. B. Riemann, Ges. Math. Werke, 239—241.
P. G. Lejeune-Dirichlet, Vorlesungen (Braunschweig, 1904).
F. G. Meyer, Bestimmte Integrale (Leipzig, 1871).
Э. Гурса, Курс математического анализа, гл. IV, XIV, ОНТИ, 1936.
Ш. Ж. Валле-Пуссен, Курс анализа бесконечно малых, гл. VI, ГТТИ, 1933.
E. W. Hobson, Functions of a real variable, гл. V, 1907.
T. J. I'a Bromwich, Theory of infinite series, приложение III, 1908.

Примеры

1. Показать, что интегралы

$$\int_0^{\infty} \sin(x^2)\, dx, \quad \int_0^{\infty} \cos(x^2)\, dx, \quad \int_0^{\infty} x \exp(-x^6 \sin^2 x)\, dx$$

сходятся.

(Dirichlet и Du Bois Reymond)

2. Если a вещественно, то интеграл

$$\int_0^\infty \frac{\cos(ax)}{1+x^2}\,dx$$

есть непрерывная функция от параметра a.

(Stokes)

3. Рассмотреть вопрос о равномерной сходимости интеграла

$$\int_0^\infty x\sin(x^3-ax)\,dx.$$

$$\left[3\int x\sin(x^3-ax)\,dx = -\left(\frac{1}{x}+\frac{a}{3x^3}\right)\cos(x^3-ax) - \right.$$
$$\left. -\int\left(\frac{1}{x^2}+\frac{a}{x^4}\right)\cos(x^3-ax)\,dx + \frac{1}{3}a^2\int\frac{\sin(x^3-ax)}{x^3}\,dx.\right]$$

(De la Vallée Poussin)

4. Показать, что интеграл $\int_0^\infty \exp[-e^{i\alpha}(x^3-nx)]\,dx$ равномерно сходится в интервале $\left(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right)$ значений α.

(Stokes)

5. Рассмотреть вопрос о сходимости интеграла $\int_0^\infty \frac{x^\mu\,dx}{1+x^\nu|\sin x|^p}$, когда ν, μ, p положительны.

(Hardy, Messenger, XXXI, 177 (1902))

6. Исследовать сходимость интегралов

$$\int_0^\infty\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}e^{-x}+\frac{1}{1-e^x}\right)\frac{dx}{x}, \qquad \int_0^\infty\frac{\sin(x+x^2)\,dx}{x^n}.$$

(Math. Trip., 1914)

7. Показать, что интеграл $\int_\pi^\infty \frac{dx}{x^2(\sin x)^{2/3}}$ существует.

8. Показать, что интеграл $\int_a^\infty x^{-n}e^{\sin x}\sin 2x\,dx$ сходится при $a>0, n>0$.

9. Пусть ряд $g(z)=\sum_{\nu=0}^\infty (c_\nu - c_{\nu+1})\sin(2\nu+1)\pi z$ (в котором $c_0=0$) сходится равномерно в некотором интервале; показать, что $g(z)\frac{\pi}{\sin\pi z}$ будет производной ряда $f(z)=\sum_{\nu=1}^\infty \frac{c_\nu}{\nu}\sin 2\nu\pi z$.

(Lerch, Ann. de l'Èc. norm. sup.) (3), XII, 351 (1895)

10. Показать, что интегралы

$$\int^{\infty}\int^{\infty}\cdots\int^{\infty}\frac{dx_1\,dx_2\ldots dx_n}{(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)^{\alpha}}$$

и

$$\int^{\infty}\int^{\infty}\cdots\int^{\infty}\frac{dx_1\,dx_2\ldots dx_n}{x_1^{\alpha}+x_2^{\beta}+\ldots+x_n^{\lambda}}$$

сходятся, когда соответственно

$$\alpha>\frac{1}{2}n \quad \text{и} \quad \alpha^{-1}+\beta^{-1}+\ldots+\lambda^{-1}<1.$$

(Math. Trip., 1904)

11. Пусть $f(x, y)$ — непрерывная функция обеих переменных x и y в области $a\leqslant x\leqslant b$, $a\leqslant y\leqslant b$, если не считать разрывов «первого рода» в точках конечного числа кривых с непрерывно вращающимися касательными, каждая из которых пересекает любую прямую, параллельную координатным осям, конечное число раз; тогда $\int_a^b f(x, y)\,dx$ будет непрерывной функцией от y.

[Рассмотреть $\int_a^{a_1-\delta_1}+\int_{a_1+\varepsilon_1}^{a_2-\delta_2}+\ldots+\int_{a_n+\varepsilon_n}^{b}\{f(x, y+h)-f(x, y)\}\,dx$

где числа $\delta_1, \delta_2, \ldots, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ выбраны так, что они исключают разрывы функции $f(x, y+h)$ из области интегрирования; $a_1, a_2, \ldots$ — разрывы функции $f(x, y)$.]

(Bocher)

ГЛАВА 5

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ, ТЕОРЕМЫ ТЕЙЛОРА, ЛОРАНА И ЛИУВИЛЛЯ

5.1. Свойства элементарных функций

Предполагается, что читатель знаком с термином *элементарная функция*, употребляемым (в учебниках по алгебре, тригонометрии и дифференциальному исчислению) для обозначения определенных аналитических выражений[1]), зависящих от переменной z. Сюда входят функции, образуемые посредством действий элементарной алгебры, а также показательные, логарифмические и тригонометрические функции; примерами подобных выражений служат

$$z^2,\ e^z,\ \lg z,\ \arcsin z^{3/2}.$$

Комбинации таких элементарных функций анализа обладают некоторым общим им всем замечательным свойством, которое мы теперь и исследуем.

Возьмем для примера функцию e^z. Положим

$$e^z = f(z).$$

Тогда, если z — фиксированная точка и z' — какая-нибудь другая точка, то мы имеем

$$\frac{f(z')-f(z)}{z'-z} = \frac{e^{z'}-e^z}{z'-z} = e^z\frac{e^{z'-z}-1}{z'-z} =$$
$$= e^z\left\{1+\frac{z'-z}{2!}+\frac{(z'-z)^2}{3!}+\ldots\right\},$$

и так как ряд в скобках равномерно сходится для всех значений z', то заключаем (§ 3.7), что при $z'\to z$ отношение

$$\frac{f(z')-f(z)}{z'-z}$$

стремится к пределу e^z равномерно для всех значений $\arg(z'-z)$.

[1]) Следует отметить, что смысл этого термина не тот, который придан термину функция (§ 3.1) в этой книге. Так, например, $x-iy$ и $|z|$, являясь *функциями* $z\,(=x+iy)$ в смысле § 3.1, не будут элементарными функциями рассматриваемого типа.

Это показывает, что *предел*

$$\frac{f(z')-f(z)}{z'-z}$$

в этом случае не зависит от пути, по которому точка z' стремится к совпадению с z.

Оказывается, что этим свойством обладают многие хорошо известные элементарные функции; а именно, если $f(z)$ — одна из таких функций, а h — какое-нибудь комплексное число, то существует предельное значение выражения

$$\frac{1}{h}\{f(z+h)-f(z)\},$$

не зависящее от способа стремления h к нулю.

Читатель, однако, легко покажет, что если $f(z)=x-iy$, где $z=x+iy$, то $\lim\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$ *будет зависеть* от того, каким образом $h\to 0$.

5.11. Отступления от рассматриваемого свойства

Для каждой из элементарных функций тем не менее существуют определенные точки z, в которых это свойство перестает иметь место. Например, оно не имеет места для функции $\frac{1}{z-a}$ в точке $z=a$, так как

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\frac{1}{z-a+h}-\frac{1}{z-a}\right\}$$

не существует при $z=a$. Подобным же образом это свойство не имеет места для функций $\lg z$ и $z^{1/2}$ в точке $z=0$.

Эти исключительные точки называются *особыми точками* или *особенностями* рассматриваемой функции $f(z)$; в остальных точках функция $f(z)$ будет, как говорят, *аналитической функцией*. Для функции $|z|$ указанное свойство не имеет места *ни в одной точке*.

5.12. Определение аналитической функции комплексного переменного по Коши [1])

Свойство, рассмотренное в § 5.1, принимается за основу для определения *аналитической функции*; это определение может быть сформулировано следующим образом.

Пусть дана двумерная область в плоскости z, и пусть u — функция от z, определенная однозначно во всех точках области. Пусть

---

[1]) См. мемуар, упомянутый в § 5.2.

z и $z+\delta z$ — значения переменной z в двух точках, а u, $u+\delta u$ — соответствующие значения u. Тогда, если в любой точке z рассматриваемой области $\frac{\delta u}{\delta z}$ стремится к определенному пределу, когда $\delta x \to 0$, $\delta y \to 0$ независимо друг от друга ($\delta z = \delta x + i\delta y$), то говорят, что u есть функция от z, *моногенная* или *аналитическая* [1]) в этой точке. Если функция будет аналитической и однозначной во всех точках области, то мы говорим, что функция *аналитична во всей области* [2]).

Мы будем часто употреблять слово «функция» для обозначения аналитической функции, так как функции, изучаемые в этой книге, почти исключительно будут аналитическими.

В предыдущем определении функция u была задана лишь в некоторой области плоскости z. Как мы увидим из дальнейшего, функция u, вообще говоря, может быть определена также для значений z, не входящих в эту область, и (как и в уже рассмотренном случае элементарных функций) может иметь *особенности* в определенных точках вне области, в которых основное свойство перестает иметь место.

Дадим теперь определение аналитической функциональной зависимости в более строгой форме.

Пусть $f(z)$ — аналитическая в точке z, а ε — произвольное положительное число; тогда мы можем найти такие числа l и δ (δ зависит от ε), что

$$\left|\frac{f(z')-f(z)}{z'-z}-l\right|<\varepsilon$$

при $|z'-z|<\delta$.

Если $f(z)$ — аналитическая во всех точках z некоторой области, то l, очевидно, зависит от z, и мы пишем поэтому $l=f'(z)$.

Отсюда

$$f(z')=f(z)+(z'-z)f'(z)+v(z'-z),$$

где v — такая функция от z и z', что $|v|<\varepsilon$, когда $|z'-z|<\delta$.

Пример 1. Найти точки, в которых следующие функции не будут аналитическими:

(I) z^2,

(II) $\operatorname{cosec} z$ ($z=n\pi$, n — любое целое число),

(III) $\dfrac{z-1}{z^2-5z+6}$ $(z=2,\ 3)$,

(IV) $e^{\frac{1}{z}}$ $(z=0)$,

(V) $\{(z-1)z\}^{\frac{1}{3}}$ $(z=0,\ 1)$.

---

[1]) Иногда употребляются слова «регулярная» и «голоморфная». Борель делает различие между «моногенной» и «аналитической» функциями в случае функций с бесконечным числом особенностей. См. § 5.51.

[2]) См. следствие § 5.2, подстрочное примечание.

Пример 2. Пусть $z = x + iy$, $f(z) = u + iv$, где u, v, x, y вещественны и f — аналитическая функция; показать, что

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

(Riemann)

5.13. Приложение видоизмененной теоремы Гейне — Бореля

Пусть $f(z)$ — аналитическая во всех точках внутри некоторой области[1]); пусть, далее, в каждой точке z границы этой области существуют такие числа $f_1(z)$, δ (где δ зависит от z), что

$$|f(z') - f(z) - (z' - z) f_1(z)| < \varepsilon |z' - z|,$$

когда $|z' - z| < \delta$ и z' — точка, лежащая внутри области или на ее границе.

[Мы пишем $f_1(z)$ вместо $f'(z)$, так как производная может и не существовать, когда z' приближается к z извне области, так что $f_1(z)$ не обязательно будет единственной производной.]

Приведенное неравенство, очевидно, удовлетворяется также для всех точек z внутри области.

Применяя двумерный вариант теоремы § 3.6, увидим, что рассматриваемая область, взятая вместе с ее границей, может быть разделена на *конечное* число частей (квадратов со сторонами, параллельными осям координат, или частей таких квадратов) так, что внутри или на границе любой части найдется такая точка z_1, что неравенство

$$|f(z') - f(z_1) - (z' - z_1) f_1(z_1)| < \varepsilon |z' - z_1|$$

будет справедливо для всех точек z' внутри или на границе этой части.

5.2. Теорема Коши[2]) об интеграле по контуру

Простую замкнутую кривую C в плоскости переменной z часто называют *контуром*: если A, B, D — точки, взятые на дуге контура в направлении против часовой стрелки, и если $f(z)$ — однозначная непрерывная функция от z (не обязательно аналитическая) во всех

---

[1]) В оригинале „континуум", см. § 3.21. (*Прим. ред.*)

[2]) Cauchy, Mémoire sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires, 1825. Доказательство, данное здесь, принадлежит Гурса (Goursat, Trans. American Math. Soc., 1, 14 (1900)).

точках дуги [1]), то

$$\int\limits_{ABDA} f(z)\,dz \quad \text{или} \quad \int\limits_{C} f(z)\,dz,$$

взятый по контуру, начиная от точки A и кончая той же точкой A, называется *интегралом функции $f(z)$ по этому контуру*. Ясно, что значение интеграла, взятого по контуру, не изменится, если за исходную точку на контуре вместо A будет взята другая точка.

Докажем теперь теорему, принадлежащую Коши, которую можно сформулировать следующим образом. *Если $f(z)$ — функция от z, аналитическая во всех точках* [2]) *на контуре C и внутри него, то*

$$\int\limits_{C} f(z)\,dz = 0.$$

Разделим область, ограниченную C, прямыми, параллельными вещественной и мнимой осям, как в § 5.13; тогда область, ограниченная C, разделится на некоторое число областей, границами которых, C_1, C_2, ..., C_M, будут периферии квадратов, и другие области, границами которых, D_1, D_2, ..., D_N, будут части периферий квадратов и части контура C. Рассмотрим

$$\sum_{n=1}^{M} \int\limits_{C_n} f(z)\,dz + \sum_{n=1}^{N} \int\limits_{D_n} f(z)\,dz,$$

где все пути интегрирования берутся против часовой стрелки.

В общей сумме каждая сторона любого квадрата, как путь интегрирования, встречается дважды, а интегралы берутся вдоль таких сторон в противоположных направлениях и, следовательно, взаимно сокращаются [3]). Единственными частями суммы, которые сохраняются, будут интегралы, взятые вдоль отдельных дуг, составляющих вместе контур C, причем каждая дуга описывается в том же самом напра-

---

[1]) Впрочем, достаточно, чтобы $f(z)$ была непрерывной, когда z изменяется только вдоль дуги.

[2]) Не необходимо, чтобы $f(z)$ была аналитической *на* C (достаточно, чтобы она была непрерывной на и внутри C), но если $f(z)$ не будет аналитической на C, то доказать теорему будет гораздо труднее. Данное доказательство предполагает просто, что $f'(z)$ *существует* во всех точках на и внутри C. Прежние доказательства основывались на бо́льших предположениях; так, доказательство Коши предполагало *непрерывность* $f'(z)$. Доказательство Римана основывается на эквивалентном предположении. Первое доказательство Гурса предполагало, что $f(z)$ *равномерно* дифференцируема на и внутри C.

[3]) См. пример § 4.6.

влении, как и в $\int\limits_C f(z)\,dz$; в сумме эти интегралы дают поэтому как раз $\int\limits_C f(z)\,dz$.

Рассмотрим теперь $\int\limits_{C_n} f(z)\,dz$. Используя обозначения § 5.12, имеем

$$\int\limits_{C_n} f(z)\,dz = \int\limits_{C_n} \{f(z_1)+(z-z_1)f'(z_1)+(z-z_1)v\}\,dz =$$

$$= \{f(z_1)-z_1f'(z_1)\}\int\limits_{C_n} dz + f'(z_1)\int\limits_{C_n} z\,dz + \int\limits_{C_n}(z-z_1)v\,dz.$$

Но

$$\int\limits_{C_n} dz = [z]_{C_n} = 0, \quad \int\limits_{C_n} z\,dz = \left[\frac{1}{2}z^2\right]_{C_n} = 0$$

согласно примеру § 4.6, так как концы C_n совпадают.

Обозначим теперь через l_n и A_n сторону и площадь C_n. Тогда, пользуясь оценкой § 4.62, найдем

$$\left|\int\limits_{C_n} f(z)\,dz\right| = \left|\int\limits_{C_n}(z-z_1)v\,dz\right| \leqslant \int\limits_{C_n}|(z-z_1)v\,dz| <$$

$$< \varepsilon l_n\sqrt{2}\int\limits_{C_n}|dz| = \varepsilon l_n\sqrt{2}\,4l_n = 4\varepsilon A_n\sqrt{2}.$$

Подобным же образом

$$\left|\int\limits_{D_n} f(z)\,dz\right| \leqslant \int\limits_{D_n}|(z-z_1)v\,dz| \leqslant 4\varepsilon(A_n'+l_n'\lambda_n)\sqrt{2},$$

где A_n' — площадь квадрата, частью которого является область, ограниченная D_n, l_n' — сторона этого квадрата и λ_n — длина части контура C, лежащей внутри этого квадрата. Отсюда, если λ — полная длина контура C, в то время как l — сторона квадрата, вмещающего все квадраты C_n и области D_n, будем иметь

$$\left|\int\limits_C f(z)\,dz\right| \leqslant \sum_{n=1}^{M}\left|\int\limits_{C_n} f(z)\,dz\right| + \sum_{n=1}^{N}\left|\int\limits_{D_n} f(z)\,dz\right| <$$

$$< 4\varepsilon\sqrt{2}\left\{\sum_{n=1}^{M}A_n + \sum_{n=1}^{N}A_n' + l\sum_{n=1}^{N}\lambda_n\right\} < 4\varepsilon\sqrt{2}(l^2+l\lambda).$$

Но ε — произвольно малая величина, а l, λ и $\int\limits_C f(z)\,dz$ *не зависят от* ε.

Поэтому из полученного неравенства следует, что единственное значение, которое может иметь $\int\limits_C f(z)\,dz$, будет нуль. Это и есть теорема Коши.

Следствие 1. Если имеются два пути z_0AZ и z_0BZ от z_0 к Z и если $f(z)$ — функция, аналитическая во всех точках этих кривых и во всей области, охватываемой этими путями, то интеграл $\int\limits_{z_0}^{Z} f(z)\,dz$ будет иметь одно и то же значение для путей интегрирования z_0AZ и z_0BZ. Это следует из того, что z_0AZBz_0 есть контур и интеграл, взятый по этому контуру (равный разности интегралов вдоль z_0AZ и z_0BZ), равен нулю. Таким образом, если $f(z)$ — аналитическая функция от z, то значение $\int\limits_{AB} f(z)\,dz$ не зависит в известной степени от выбора дуги AB, а зависит только от конечных точек A и B. Следует помнить, что *это верно только в том случае, когда $f(z)$ является аналитической функцией* в смысле § 5.12.

Следствие 2. Предположим, что даны такие две простые замкнутые кривые C_0 и C_1, что C_0 охватывает C_1, как это имеет, например, место, если C_0 и C_1 будут софокусными эллипсами.

Предположим, кроме того, что $f(z)$ будет функцией, аналитической[1]) во всех точках на C_0 и C_1 и во всей кольцеобразной области между C_0 и C_1. Тогда, построив сетку пересекающихся прямых в этой кольцеобразной области, можно показать точно таким же образом, как в только что доказанной теореме, что *интеграл*

$$\int f(z)\,dz,$$

взятый по всей границе кольцеобразной области, равен нулю; эта граница состоит из двух кривых C_0 и C_1, из которых одна описывается в направлении, обратном часовой стрелке, а другая — по часовой стрелке.

Следствие 3. Вообще, если на плоскости z дана какая-нибудь связная область, ограниченная любым числом простых замкнутых кривых $C_0, C_1, C_2, \ldots$, и если $f(z)$ — какая-нибудь функция от z, аналитическая и однозначная всюду в этой области, то *интеграл*

$$\int f(z)\,dz,$$

взятый по всей границе области, равен нулю; эта граница состоит из кривых $C_0, C_1, \ldots$, каждая из которых описывается в таком направле-

---

[1]) Выражение «аналитическая во всей области» предполагает однозначность (§ 5.12); это значит, что после того, как z опишет замкнутый путь, окружающий C_0, $f(z)$ примет начальное значение. О такой функции, как, например, $\lg z$, рассматриваемой в области $1 \leqslant |z| \leqslant 2$, говорят, что она «аналитическая во всех точках области».

нии, что область остается или всегда справа, или всегда слева от лица, идущего (в рассматриваемом направлении) по границе.

Распространение теоремы Коши $\left(\text{т. е. } \int f(z)\,dz = 0\right)$ на кривые, лежащие на конусе с вершиной в начале координат, было сделано Равю (Ravut, Nouv. Ann. de Math. (3), XVI, 365—367 (1897)); Морера (Morera, Rend. del. Ist. Lombardo, XXII, 191 (1889)) и Осгуд (Osgood, Bull. Amer. Math. Soc., II, 296—302 (1896)) показали, что свойство $\int_{\gamma} f(z)\,dz = 0$ может быть принято за свойство, определяющее аналитическую функцию. Остальные свойства выводятся отсюда как следствия (см. в конце главы пример 16).

Пример. Кольцеобразная область ограничена двумя окружностями $|z| = 1$ и $|z| = 2$ на плоскости z. Убедиться, что значение интеграла $\int \frac{dz}{z}$, взятого по границе области, равно нулю.

В самом деле, граница состоит из окружности $|z| = 1$, описываемой по направлению часовой стрелки, вместе с окружностью $|z| = 2$, описываемой в направлении против часовой стрелки. Таким образом, если для точек на первой окружности положим $z = e^{i\theta}$, а для точек на второй окружности $z = 2e^{i\varphi}$, то θ и φ будут вещественны и интеграл равняется

$$\int_0^{-2\pi} \frac{ie^{i\theta}\,d\theta}{e^{i\theta}} + \int_0^{2\pi} \frac{i2e^{i\varphi}\,d\varphi}{2e^{i\varphi}} = -2\pi i + 2\pi i = 0.$$

5.21. Выражение значения аналитической функции в точке через интеграл, взятый по контуру, окружающему эту точку

Пусть C — контур, внутри которого и на котором $f(z)$ есть аналитическая функция z.

Тогда, если a — какая-нибудь точка внутри контура, то

$$\frac{f(z)}{z-a}$$

будет функцией от z, аналитической во всех точках внутри контура C, кроме точки $z = a$. Далее, для данного ε можно найти такое δ, что

$$|f(z) - f(a) - (z-a)f'(a)| \leqslant \varepsilon |z-a|$$

при $|z-a| < \delta$; опишем около точки a как центра окружность γ радиуса $r < \delta$, причем r настолько мало, что γ лежит полностью внутри C.

Тогда в области между γ и C функция $f(z)/(z-a)$ будет аналитической, и таким образом, по следствию § 5.2 будем иметь

$$\int_C \frac{f(z)dz}{z-a} = \int_\gamma \frac{f(z)\,dz}{z-a},$$

где $\int_C$ и $\int_\gamma$ обозначают интегралы, взятые соответственно против часовой стрелки вдоль кривых C и γ.

Но так как $|z-a|<\delta$ на γ, то мы имеем

$$\int_\gamma \frac{f(z)\,dz}{z-a}=\int_\gamma \frac{f(a)+(z-a)f'(a)+v(z-a)}{z-a}\,dz,$$

где $|v|<\varepsilon$, и таким образом,

$$\int_C \frac{f(z)\,dz}{z-a}=f(a)\int_\gamma \frac{dz}{z-a}+f'(a)\int_\gamma dz+\int_\gamma v\,dz.$$

Далее, если z лежит на γ, то мы можем написать

$$z-a=re^{i\theta},$$

где r — радиус окружности γ, и следовательно,

$$\int_\gamma \frac{dz}{z-a}=\int_0^{2\pi}\frac{ire^{i\theta}\,d\theta}{re^{i\theta}}=i\int_0^{2\pi}d\theta=2\pi i$$

и

$$\int_\gamma dz=\int_0^{2\pi} ire^{i\theta}\,d\theta=0;$$

кроме того, согласно § 4.62,

$$\left|\int_\gamma v\,dz\right|\leqslant \varepsilon\,2\pi r.$$

Таким образом,

$$\left|\int_C \frac{f(z)\,dz}{z-a}-2\pi i f(a)\right|=\left|\int_\gamma v\,dz\right|\leqslant 2\pi r\varepsilon.$$

Но выражение в левой части не зависит от ε и, таким образом, должно быть равно нулю, так как ε произвольно, откуда следует, что

$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)\,dz}{z-a}.$$

Эта замечательная формула выражает значение функции $f(z)$ (*аналитической* на и внутри C) в любой точке a *внутри* контура C через интеграл, зависящий только от значений $f(z)$ в точках самого контура.

Следствие. Если $f(z)$ — аналитическая однозначная функция от z в кольцеобразной области, ограниченной кривыми C и C', и a — точка этой области, то

$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-a}\,dz-\frac{1}{2\pi i}\int_{C'} \frac{f(z)}{z-a}\,dz,$$

где C — внешний контур и оба интеграла берутся в направлении против часовой стрелки.

5.22. Производные аналитической функции $f(z)$

Функция $f'(z)$, представляющая собой предел выражения

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$$

при стремлении h к нулю, называется *производной* от функции $f(z)$. Покажем теперь, что $f'(z)$ *сама является аналитической функцией от z и, следовательно, сама имеет производную.*

В самом деле, если C — контур, окружающий точку a и расположенный целиком в области, в которой $f(z)$ аналитическая, то мы имеем

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{2\pi i h}\left\{\int_C\frac{f(z)\,dz}{z-a-h}-\int_C\frac{f(z)\,dz}{z-a}\right\}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)\,dz}{(z-a-h)(z-a)}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)\,dz}{(z-a)^2}+\lim_{h\to 0}\frac{h}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)\,dz}{(z-a)^2(z-a-h)}.$$

Функция $f(z)$ на C непрерывна и потому ограничена, и то же самое относится к функции $(z-a)^{-2}$; тогда как $|h|$ можно взять меньшим, чем нижняя граница выражения $\frac{1}{2}|z-a|$.

Поэтому выражение $\left|\frac{f(z)}{(z-a)^2(z-a-h)}\right|$ будет ограничено на C; пусть K — его верхняя граница. Тогда, если l — длина C, то

$$\left|\lim_{h\to 0}\frac{h}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)\,dz}{(z-a)^2(z-a-h)}\right|\leqslant\lim_{h\to 0}|h|(2\pi)^{-1}Kl=0$$

и, следовательно,

$$f'(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(z\,(dz)}{(z-a)^2};$$

эта формула выражает значение производной функции в точке через интеграл, взятый по контуру, окружающему эту точку.

Из этой формулы мы получаем, если точки a и $a+h$ лежат внутри C,

$$\frac{f'(a+h)-f'(a)}{h}=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)\,dz}{h}\left\{\frac{1}{(z-a-h)^2}-\frac{1}{(z-a)^2}\right\}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\,dz\,\frac{2\left(z-a-\frac{1}{2}h\right)}{(z-a-h)^2(z-a)^2}=\frac{2}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)\,dz}{(z-a)^3}+hA_h,$$

и легко видеть, что A_h будет ограниченной функцией при

$$|h| < \frac{1}{2}|z-a|.$$

Поэтому $\{f'(a+h)-f'(a)\}/h$ стремится к определенному пределу при $h \to 0$, а именно

$$\frac{2}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^3}.$$

Так как $f'(a)$ имеет единственную производную, то она будет аналитической функцией от a; ее производная, представляемая только что полученным выражением, обозначается через $f''(a)$ и называется *второй производной от* $f(a)$.

Подобным же образом можно показать, что $f''(a)$ будет аналитической функцией a, имеющей производную, равную

$$\frac{2\cdot 3}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^4};$$

последняя обозначается через $f'''(a)$ и называется *третьей производной от* $f(a)$. И вообще, существует n-я производная $f^{(n)}(a)$ от функции $f(a)$, которая выражается интегралом

$$\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}}$$

и также имеет производную вида

$$\frac{(n+1)!}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+2}}.$$

Читатель сообразит, что это легко доказать по индукции.

Таким образом, если функция имеет первую производную относительно *комплексной* переменной z во всех точках замкнутой двумерной области в плоскости z, то она имеет также и производные любого порядка во всех точках *внутри* области.

5.23. Неравенство Коши $f^{(n)}(a)$

Пусть $f(z)$ — аналитическая функция внутри и на окружности C с центром a и радиусом r. Пусть M — верхняя граница функции $f(z)$ на этой окружности. Тогда согласно оценке § 4.62

$$|f^{(n)}(a)| \leqslant \frac{n!}{2\pi}\int\limits_C \frac{M}{r^{n+1}}\,|dz| = \frac{Mn!}{r^n}.$$

Пример. Пусть $f(z)$ — аналитическая функция от $z = x + iy$ и $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$; показать, что $\nabla^2 \lg |f(z)| = 0$, а $\nabla^2 |f(z)| > 0$, если $f(z) \neq 0$ или $f'(z) \neq 0$.

(Trinity, 1910)

5.3. Аналитические функции, представляемые равномерно сходящимися рядами

Пусть ряд $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ обладает следующими свойствами: (I) он равномерно сходится на контуре C, (II) $f_n(z)$ — аналитическая функция на C и внутри него.

Тогда ряд $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ сходится и сумма его является аналитической функцией на контуре C и внутри него.

Пусть a — какая-либо точка внутри контура C; на контуре C положим $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) = \Phi(z)$.

Согласно § 4.7 [1])

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\Phi(z)}{z-a}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_C \left\{\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)\right\}\frac{dz}{z-a} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f_n(z)}{z-a}\,dz.$$

Но этот последний ряд в силу § 5.21 будет равен

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(a),$$

следовательно, рассматриваемый ряд будет сходиться во всех точках внутри C; обозначим его сумму внутри C (как прежде на C) через $\Phi(z)$. Эта функция будет аналитической, если она имеет единственную производную во всех точках внутри контура C.

Но если a и $a + h$ лежат внутри контура C, то

$$\frac{\Phi(a+h) - \Phi(a)}{h} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\Phi(z)\,dz}{(z-a)(z-a-h)},$$

---

[1]) Так как $|z-a|^{-1}$ ограничена, когда a фиксировано и z лежит на C, то равномерная сходимость ряда $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)/(z-a)$ следует из равномерной сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$.

а отсюда, как в § 5.22, следует, что предел $\lim\limits_{h\to 0}\left[\{\Phi(a+h)-\Phi(a)\}h^{-1}\right]$ существует и равен $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{\Phi(z)}{(z-a)^2}dz$, и поэтому $\Phi(z)$—аналитическая функция внутри C. Далее, преобразуя этот последний интеграл тем же самым способом, каким мы преобразовали первый, мы увидим, что $\Phi'(a)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n'(a)$, так что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(a)$ можно дифференцировать почленно.

Если ряд аналитических функций сходится только в точках незамкнутой кривой, то о сходимости ряда производных[1]) ничего нельзя утверждать.

Например, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}$ сходится равномерно для вещественных значений x (§ 3.34). Но ряд первых производных $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n}$ сходится неравномерно вблизи $x=(2m+1)\pi$ (m — любое целое число), а ряд вторых производных $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{-n}\cos nx$ не сходится вовсе.

Следствие. Из результата § 3.7 вытекает, что сумма степенного ряда будет аналитической функцией внутри его круга сходимости.

5.31. Аналитические функции, представляемые интегралами

Пусть $f(t, z)$ удовлетворяет следующим условиям: если t лежит на определенном пути интегрирования (a, b); а z — любая точка области S, то

(I) f и $\frac{\partial f}{\partial z}$ являются непрерывными функциями t;

(II) f является аналитической функцией z;

(III) непрерывность $\frac{\partial f}{\partial z}$ как функции от z является равномерной относительно t.

Тогда интеграл $\int\limits_a^b f(t, z)\,dt$ будет аналитической функцией от z, ибо согласно § 4.2 он имеет единственную производную $\int\limits_a^b \frac{\partial f(t, z)}{\partial z}dt$.

---

[1]) Этого можно было ожидать, так как главная теорема этого раздела относится к равномерной сходимости в *двумерной* области.

5.32. Аналитические функции, представляемые интегралами с бесконечными пределами

Из следствия § 4.44 (II) вытекает, что $\int\limits_a^\infty f(t, z)\,dt$ будет аналитической функцией от z во всех точках области S, если: (I) интеграл является сходящимся, (II) $f(t, z)$ является аналитической функцией от z, когда t лежит на пути интегрирования, а z — в S, (III) производная $\frac{\partial f(t, z)}{\partial z}$ является непрерывной функцией обеих переменных, (IV) интеграл $\int\limits_a^\infty \frac{\partial f(t, z)}{\partial z}\,dt$ сходится равномерно по всей области S.

Ибо если эти условия удовлетворены, то интеграл $\int\limits_a^\infty f(t, z)\,dt$ будет иметь единственную производную $\int\limits_a^\infty \frac{\partial f(t, z)}{\partial z}\,dt$.

Применим полученную теорему к весьма важному интегралу

$$\int\limits_0^\infty e^{-tz} f(t)\,dt,$$

где $f(t)$ — непрерывная функция, а $|f(t)| < Ke^{rt}$, где K, r не зависят от t. Из приведенных условий очевидно, что интеграл будет аналитической функцией от z, когда $\operatorname{Re} z \geqslant r_1 > r$.

[Условие (IV) удовлетворяется согласно признаку § 4.431 (I), так как интеграл $\int\limits_0^\infty te^{(r-r_1)t}\,dt$ сходится.]

5.4. Теорема Тейлора[1])

Рассмотрим функцию $f(z)$, аналитическую в окрестности точки $z = a$. Пусть C — окружность в плоскости z с центром в точке a, которая не содержит ни внутри, ни на самой себе особых точек функции $f(z)$, так что $f(z)$ — аналитическая во всех точках внутри и на окружности C. Пусть $z = a + h$ — какая-нибудь точка внутри окружности C.

---

[1]) Формальное разложение впервые было опубликовано доктором Бруком Тейлором (Brook Taylor, Methodus Incrementorum, 1715).

Тогда по формулам § 5.22 имеем

$$f(a+h)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(z)\,dz}{z-a-h}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C f(z)\left\{\frac{1}{z-a}+\frac{h}{(z-a)^2}+\ldots+\frac{h^n}{(z-a)^{n+1}}+\right.$$

$$\left.+\frac{h^{n+1}}{(z-a)^{n+1}(z-a-h)}\right\}dz=$$

$$=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+\ldots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a)+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(z)\,dz\cdot h^{n+1}}{(z-a)^{n+1}(z-a-h)}.$$

Но когда z лежит на C, выражение $\frac{f(z)}{z-a-h}$ будет непрерывной функцией и, стало быть, его модуль по следствию (II) § 3.61 не будет превосходить некоторого конечного числа M.

Поэтому в силу оценки § 4.62

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(z)\,dz h^{n+1}}{(z-a)^{n+1}(z-a-h)}\right|\leqslant\frac{M2\pi R}{2\pi}\left(\frac{|h|}{R}\right)^{n+1},$$

где R — радиус окружности C, так что $2\pi R$ есть длина пути интегрирования в последнем интеграле и $R=|z-a|$ для точек z на окружности C.

Выражение в правой части последнего неравенства стремится к нулю при $n\to\infty$. Имеем поэтому

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+\ldots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a)+\ldots,$$

что можно переписать в виде

$$f(z)=f(a)+(z-a)f'(a)+\frac{(z-a)^2}{2!}f''(a)+\ldots+\frac{(z-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\ldots$$

Этот результат известен как *теорема Тейлора*; доказательство, данное здесь, принадлежит Коши.

Из него вытекает, *что радиус сходимости степенного ряда не меньше радиуса наибольшего круга, не содержащего ближайшей особой точки функции, представляемой этим рядом.* А по следствию § 5.3 радиус сходимости *не больше чем радиус только что указанного круга.* Следовательно, радиус сходимости как раз такой, какой необходим для исключения из внутренности круга ближайшей к a особенности функции.

Введем некоторые термины, которыми будем часто пользоваться.

Если $f(a)=0$, то говорят, что $f(z)$ имеет *нуль* в точке $z=a$. Если в такой точке $f'(a)$ отлична от нуля, то говорят, что нуль

функции $f(a)$ *простой*; если же все производные $f'(a)$, $f''(a)$, ..., $f^{(n-1)}(a)$ будут нулями, так что разложение Тейлора функции $f(z)$ в точке $z=a$ начинается с члена $(z-a)^n$, то говорят, что *функция $f(z)$ имеет нуль n-го порядка в точке $z=a$.*

Пример 1. Найти функцию $f(z)$, аналитическую внутри и на окружности C, центр которой находится в начале координат и радиус которой равен единице, имеющую в точках окружности C значение

$$\frac{a-\cos\theta}{a^2-2a\cos\theta+1}+i\frac{\sin\theta}{a^2-2a\cos\theta+1}$$

(где $a>1$ и θ — аргумент z).

[Мы имеем

$$f^{(n)}(0)=\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_C\frac{f(z)\,dz}{z^{n+1}}=$$

$$=\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_0^{2\pi}e^{-ni\theta}i\,d\theta\,\frac{a-\cos\theta+i\sin\theta}{a^2-2a\cos\theta+1}=(\text{положив } z=e^{i\theta})$$

$$=\frac{n!}{2\pi}\int^{2\pi}\frac{e^{-ni\theta}\,d\theta}{a-e^{i\theta}}=\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_C\frac{dz}{z^{n+1}(a-z)}=\left[\frac{d^n}{dz^n}\frac{1}{a-z}\right]_{z=0}=\frac{n!}{a^{n+1}}.$$

Поэтому по теореме Маклорена [1])

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{a^{n+1}},$$

т. е. $f(z)=(a-z)^{-1}$ для всех точек внутри круга.

Этот пример возбуждает интересный вопрос о том, насколько целесообразно определять $f(z)$ как $(a-z)^{-1}$ в точках вне круга. Этот вопрос будет рассмотрен в § 5.51.]

Пример 2. Доказать, что среднее арифметическое всех значений $z^{-n}\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}a_\nu z^\nu$ для точек z на окружности $|z|=1$ равно a_n, если $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}a_\nu z^\nu$ является функцией, аналитической внутри и на границе круга $|z|\leqslant 1$.

$\Big[$Пусть $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}a_\nu z^\nu=f(z)$, так что $a_\nu=\dfrac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!}$. Тогда, полагая $z=e^{i\theta}$ и подразумевая под C окружность $|z|=1$, получим

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{f(z)\,d\theta}{z^n}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C\frac{f(z)\,dz}{z^{n+1}}=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=a_n.\Big]$$

---

[1]) Формула $f(z)=f(0)+zf'(0)+\dfrac{z^2}{2}f''(0)+\ldots$, получаемая из формулы Тейлора, если положить $a=0$, обычно называется *формулой Маклорена*; она была открыта Стирлингом (1717) и опубликована Маклореном (1742) в его «Fluxions».

Пример 3. Пусть $f(z) = z^r$; тогда $f(z+h)$ для всех значений r будет аналитической функцией h, когда $|h| < |z|$, так что $(z+h)^r = z^r + rz^{r-1}h + \frac{r(r-1)}{2} z^{r-2}h^2 + \ldots$, причем ряд будет сходиться, когда $|h| < |z|$. Это — биномиальная теорема.

Пример 4. Доказать, что если h — положительное постоянное число и функция $(1-2zh+h^2)^{-1/2}$ разложена в ряд

$$1 + hP_1(z) + h^2P_2(z) + h^3P_3(z) + \ldots \tag{A}$$

(где $P_n(z)$, как легко видеть, будет полиномом степени n от z), то этот ряд сходится во всех внутренних точках z внутри эллипса, фокусы которого находятся в точках $z=1$ и $z=-1$ и большая полуось которого равна $\frac{1}{2}(h+h^{-1})$.

Рассмотрим сначала этот ряд как функцию от h. Он будет степенным рядом по h и поэтому будет сходиться до тех пор, пока точка h лежит внутри некоторого круга в плоскости h. Центром этого круга является точка $h=0$, и его окружность проходит через ближайшую к $h=0$ особую точку функции $(1-2zh+h^2)^{-1/2}$.

Но

$$1-2zh+h^2 = \{h - z + (z^2-1)^{1/2}\}\{h - z - (z^2-1)^{1/2}\},$$

так что особыми точками функции $(1-2zh+h^2)^{-1/2}$ будут точки

$$h = z - (z^2-1)^{1/2} \quad \text{и} \quad h = z + (z^2-1)^{1/2}.$$

Эти особые точки являются точками ветвления (см. § 5.7).]

Таким образом, ряд (A) сходится до тех пор, пока $|h|$ будет меньше, чем оба выражения

$$|z - (z^2-1)^{1/2}| \quad \text{и} \quad |z + (z^2-1)^{1/2}|.$$

Построим на плоскости z эллипс, проходящий через точку z, с фокусами в точках ± 1. Пусть a — его большая полуось, а θ — эксцентрический угол точки z на нем.

Тогда

$$z = a\cos\theta + i(a^2-1)^{1/2}\sin\theta,$$

что дает

$$z \pm (z^2-1)^{1/2} = \{a \pm (a^2-1)^{1/2}\}(\cos\theta \mp i\sin\theta),$$

так что

$$|z \pm (z^2-1)^{1/2}| = a \pm (a^2-1)^{1/2}.$$

Таким образом, ряд (A) будет сходящимся до тех пор, пока $|h|$ будет меньше наименьшего из чисел $a + (a^2-1)^{1/2}$ и $a - (a^2-1)^{1/2}$, т. е. до тех пор, пока $|h|$ будет меньше, чем $a - (a^2-1)^{1/2}$. Но $h = a - (a^2-1)^{1/2}$, когда $a = \frac{1}{2}(h+h^{-1})$. Поэтому ряд (A) будет сходящимся до тех пор, пока z остается внутри эллипса, фокусы которого $+1$ и -1 и большая полуось которого равна $\frac{1}{2}(h+h^{-1})$.

5.41. Формы остаточного члена в ряде Тейлора

Пусть $f(x)$ — *вещественная* функция *вещественной* переменной, и пусть она имеет непрерывные производные первых n порядков, когда $a \leqslant x \leqslant a+h$.

При $0 \leqslant t \leqslant 1$ имеем

$$\frac{d}{dt}\left\{\sum_{m=1}^{n-1}\frac{h^m}{m!}(1-t)^m f^{(m)}(a+th)\right\}=$$

$$=\frac{h^n(1-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(a+th)-hf'(a+th).$$

Интегрируя это соотношение между пределами 0 и 1, получим

$$f(a+h)=f(a)+\sum_{m=1}^{n-1}\frac{h^m}{m!}f^{(m)}(a)+\int_0^1\frac{h^n(1-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(a+th)\,dt.$$

Обозначим

$$R_n=\frac{h^n}{(n-1)!}\int_0^1(1-t)^{n-1}f^{(n)}(a+th)\,dt,$$

и пусть p — целое положительное число $\leqslant n$.

Тогда

$$R_n=\frac{h^n}{(n-1)!}\int_0^1(1-t)^{p-1}(1-t)^{n-p}f^{(n)}(a+th)\,dt.$$

Пусть, далее, U, L — верхняя и нижняя границы выражения

$$(1-t)^{n-p}f^{(n)}(a+th).$$

Тогда

$$\int_0^1 L(1-t)^{p-1}dt<$$

$$<\int_0^1(1-t)^{p-1}(1-t)^{n-p}f^{(n)}(a+th)\,dt<\int_0^1 U(1-t)^{p-1}dt.$$

Так как $(1-t)^{n-p}f^{(n)}(a+th)$ — непрерывная функция, то она проходит через все значения между U и L, и следовательно, мы можем найти такое θ, что $0\leqslant\theta\leqslant 1$ и

$$\int_0^1(1-t)^{n-1}f^{(n)}(a+th)\,dt=p^{-1}(1-\theta)^{n-p}f^{(n)}(a+\theta h).$$

Таким образом,

$$R_n = \frac{h^n}{(n-1)!\,p}(1-\theta)^{n-p} f^{(n)}(a+\theta h).$$

Положив $p=n$, получим $R_n = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a+\theta h)$ — *остаточный член в форме Лагранжа*, а положив $p=1$, получим

$$R_n = \frac{h^n}{(n-1)!}(1-\theta)^{n-1} f^{(n)}(a+\theta h)$$

— *остаточный член в форме Коши.*

Взяв $n=1$ в этом результате, мы получаем

$$f(a+h) - f(a) = hf'(a+\theta h),$$

если $f'(x)$ непрерывна на отрезке $a \leqslant x \leqslant a+h$; этот результат известен под названием *первой теоремы о среднем значении* (см. также § 4.14). Дарбу указал в 1876 г. (Darboux, Journal de Math. (3), II, 291) форму остаточного члена в ряде Тейлора, которая применима к комплексным переменным и похожа на вышеприведенную форму, данную Лагранжем для случая вещественной переменной.

5.5. Процесс аналитического продолжения

Если вблизи точки P с аффиксом z_0 функция $f(z)$ аналитическая то, как мы видели, вблизи этой точки существует разложение $f(z)$ в ряд, расположенный по возрастающим положительным целым степеням $z-z_0$, причем коэффициенты этого разложения выражаются через последовательные производные функции $f(z)$ при $z=z_0$.

Пусть теперь A — особая точка функции $f(z)$, ближайшая к P. Тогда круг, внутри которого это разложение справедливо, имеет точку P центром и PA — радиусом.

Предположим, что нам известны только значения функции во всех точках окружности круга несколько меньшего, чем круг сходимости, и концентрического с ним и известно, что функция $f(z)$ аналитическая всюду внутри большего круга. Тогда предыдущие теоремы позволяют нам найти значения функции во всех точках меньшего круга и определить коэффициенты в разложении Тейлора по степеням $z-z_0$. Возникает вопрос: можно ли определить функцию в точках вне круга таким образом, чтобы функция была аналитической в области, большей внутренней области круга?

Другими словами, имея *степенной ряд, который сходится и представляет функцию только в точках внутри круга, определить с его помощью значения функции в точках вне круга.*

Для этой цели возьмем какую-нибудь точку P_1 внутри круга, но не на линии PA. Мы знаем значение функции и всех ее производных в P_1 и, таким образом, можем составить ряд Тейлора (для

той же самой функции) с P_1 как исходной точкой, который определит аналитическую функцию в некотором круге с центром в P_1. Этот круг простирается до ближайшей особой точки[1]), которая может быть, а может и не быть точкой A. Но в обоих случаях новый круг обычно будет[2]) лежать частично вне старого круга сходимости, и *в точках области, содержащихся в новом круге и не содержащихся в старом, новый ряд может быть применен для определения значений функции, хотя прежний ряд для этого неприменим.*

Подобным же образом мы можем взять любую другую точку P_2 в области, в которой значения функции теперь известны, и составить ряд Тейлора с P_2 как исходной точкой, ряд, который, вообще говоря, позволит нам определить функцию в других точках, в которых ее значения прежде не были известны, и т. д.

Этот процесс называется *аналитическим* продолжением[3]). При помощи этого процесса, исходя из представления функции каким-либо степенным рядом, мы можем найти любое число других степенных рядов, которые определяют значения функции в области, к любой точке которой можно подойти из P, не проходя через особые точки функции; совокупность[4]) всех степенных рядов, полученных таким образом, образует аналитическое выражение функции.

Весьма важно знать, дает ли продолжение по двум различным путям PBQ, $PB'Q$ один и тот же окончательный степенной ряд; легко следующим путем убедиться, что так будет в том случае, когда функция не имеет особой точки внутри замкнутой кривой $PBQB'P$. Пусть функция первоначально задана степенным рядом S, сходящимся в круге C с центром в точке P, и пусть P_1 — какая-либо точка на PBQ, лежащая внутри круга C. Построим аналитическое продолжение функции — степенной ряд S_1, сходящийся в круге C_1 с центром в точке P_1. Пусть, наконец, P_1' — какая-либо точка, лежащая внутри обоих кругов и внутри кривой $PBQB'P$, и S_1' — степенной ряд с центром в P_1', являющийся продолжением ряда S. Тогда, если P_1' взята достаточно близко к P_1, будет иметь место равенство $S_1 \equiv S_1'$[5]) в некоторой области, содержащей P_1, а потому S_1 будет аналитическим продолжением ряда S_1', ибо если T_1 есть продолжение ряда S_1', то мы имеем $T_1 \equiv S_1$ в области, содержащей P_1, и таким образом (§ 3.73), соответствующие коэффициенты S_1 и T_1 одни и те же. Повторением такого действия достаточное число раз мы деформируем путь PBQ в путь $PB'Q$, если внутри $PBQB'P$ нет особых

---

[1]) Функции, определяемой новым рядом.

[2]) Слово «обычно» относится к случаям, с которыми читатель может столкнуться при изучении сравнительно элементарных вопросов.

[3]) По-французски prolongement, по-немецки Fortsetzung, по-английски continuation.

[4]) Такая совокупность степенных рядов была для различных функций получена Хиллом чисто алгебраическим путем (Hill, Proc. London Math. Soc., XXXV, 388—416 (1903)).

[5]) Так как каждый равен S.

точек. Читатель убедится, сделав чертеж, что весь процесс можно выполнить в конечное число шагов.

Пример. Ряд

$$\frac{1}{a}+\frac{z}{a^2}+\frac{z^2}{a^3}+\frac{z^3}{a^4}+\ldots$$

представляет функцию

$$f(z)=\frac{1}{a-z}$$

только для точек z внутри круга $|z|\leqslant|a|$.

Но существует много других степенных рядов, представляющих ту же функцию,

$$\frac{1}{a-b}+\frac{z-b}{(a-b)^2}+\frac{(z-b)^2}{(a-b)^3}+\frac{(z-b)^3}{(a-b)^4}+\ldots;$$

если $\frac{b}{a}$ не равно вещественному положительному числу, то такой ряд будет сходиться в точках внутри круга, который находится частично внутри и частично вне $|z|\leqslant|a|$; эти ряды представляют рассматриваемую функцию в точках вне круга $|z|\leqslant|a|$.

5.501. О функциях, к которым не может быть применен процесс аналитического продолжения

Выполнить процесс аналитического продолжения оказывается не всегда возможным. Возьмем в качестве примера функцию $f(z)$, определяемую степенным рядом

$$f(z)=1+z^2+z^4+z^8+\ldots+z^{2^n}+\ldots,$$

который, очевидно, сходится внутри круга с радиусом единица и центром в начале координат.

Ясно, что $f(z)\to+\infty$ при $z\to1-0$, точка $+1$ будет поэтому особой точкой функции $f(z)$.

Но

$$f(z)=z^2+f(z^2),$$

и если $z^2\to1-0$, то $f(z^2)\to\infty$, а стало быть, $f(z)\to\infty$; поэтому точки, для которых $z^2=1$, будут особыми точками функции $f(z)$ и значит точка $z=-1$ также будет особой точкой функции $f(z)$.

Аналогично, поскольку

$$f(z)=z^2+z^4+f(z^4),$$

мы видим, что если $z^4=1$, то точка z будет особой; вообще любой корень любого из уравнений

$$z^2=1,\quad z^4=1,\quad z^8=1,\quad z^{16}=1,\ldots$$

будет особой точкой функции $f(z)$. Но все эти точки лежат на окружности $|z|=1$, и на любой дуге этой окружности, как угодно малой, их имеется неограниченное число. Попытка выполнить процесс аналитического продолжения оказывается тщетной вследствие существования этой сплошной линии особенностей, через которую невозможно пройти.

В этом случае функция $f(z)$ *совсем не может быть продолжена до точек* z, расположенных вне окружности $|z|=1$, такая функция называется *непродолжимой функцией*, а про окружность говорят, что она является *естественной границей функции*.

5.51. Тождественность двух функций

Два ряда

$$1+z+z^2+z^3+\ldots$$

и

$$-1+(z-2)-(z-2)^2+(z-2)^3-(z-2)^4+\ldots$$

не сходятся одновременно ни для какого значения z и являются различными разложениями.

Тем не менее мы обычно говорим, что они представляют *одну и ту же функцию*, на основании того факта, что они оба могут быть представлены одним и тем же рациональным выражением $\frac{1}{1-z}$.

Здесь возникает вопрос о *тождественности* двух функций. Когда можно сказать, что два *различных* разложения представляют *одну и ту же функцию*?

Мы могли бы определить функцию (следуя Вейерштрассу) по методу предыдущего параграфа как совокупность, состоящую из некоторого степенного ряда и всех других степенных рядов, которые могут быть получены из него процессом аналитического продолжения. Два различных аналитических выражения определят тогда одну и ту же функцию, если они представляют собой степенные ряды, получаемые один из другого продолжением.

Так как функция, аналитическая (в смысле Коши, § 5.12) в окрестности некоторой точки и в самой этой точке, может быть разложена в ряд Тейлора и так как сходящийся степенный ряд имеет единственную производную (§ 5.3), то заключаем, что определение Вейерштрасса эквивалентно на самом деле определению Коши.

Важно отметить, что *предел последовательности аналитических функций может представлять различные аналитические функции в различных частях плоскости*. Это можно видеть, например, из рассмотрения ряда

$$\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(z-\frac{1}{z}\right)\left(\frac{1}{1+z^n}-\frac{1}{1+z^{n-1}}\right).$$

Сумма первых $n+1$ членов этого ряда равна

$$\frac{1}{z}+\left(z-\frac{1}{z}\right)\frac{1}{1+z^n}.$$

Ряд поэтому будет сходящимся для всех значений z (кроме нуля), не лежащих на окружности $|z|=1$. Но при $n\to\infty$ $|z^n|\to 0$ или $|z^n|\to\infty$, смотря по тому, будет ли $|z|$ больше или меньше единицы; отсюда мы видим, что сумма бесконечного ряда равна z, когда $|z|<1$, и равна $\frac{1}{z}$, когда $|z|>1$. *Этот ряд представляет, таким образом, одну функцию в точках внутри окруж-*

ности $|z|=1$ *и совсем иную функцию в точках вне той же самой окружности.* Читатель увидит из § 5.3, что этот результат связан с неравномерной сходимостью ряда вблизи $|z|=1$.

Борель[1]) показал, что если область C и совокупность точек S таковы, что точки совокупности S будут произвольно близки к каждой точке области C, то может оказаться возможным определить функцию, имеющую единственную производную (т. е. моногенную) во всех точках C, не принадлежащих к S, но функция не будет аналитической в C в смысле Вейерштрасса.

Подобной функцией является

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{n}\frac{\exp(-\exp n^4)}{z-(p+qi)/n}.$$

5.6. Теорема Лорана

Весьма важная теорема была опубликована в 1843 г. Лораном[2]); она относится к разложениям функций, к которым теорема Тейлора неприменима.

Пусть C и C' — две концентрические окружности с центром в a, из которых C' внутренняя, и пусть $f(z)$ — аналитическая функция[3]) во всех точках на C и C' и в кольце между C и C'. Пусть $a+h$ — какая-нибудь точка в этом кольце. Тогда мы имеем по следствию § 5.21

$$f(a+h)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)}{z-a-h}\,dz-\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}\frac{f(z)}{z-a-h}\,dz,$$

где предполагается, что интегралы взяты в положительном направлении (против часовой стрелки) по соответствующим окружностям.

Это соотношение может быть записано в виде

$$f(a+h)=\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\left\{\frac{1}{z-a}+\frac{h}{(z-a)^2}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{h^n}{(z-a)^{n+1}}+\frac{h^{n+1}}{(z-a)^{n+1}(z-a-h)}\right\}dz+$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}f(z)\left\{\frac{1}{h}+\frac{z-a}{h^2}+\ldots+\frac{(z-a)^n}{h^{n+1}}-\frac{(z-a)^{n+1}}{h^{n+1}(z-a-h)}\right\}dz.$$

---

[1]) Borel, Proc. Math. Congress, Cambridge 1, 137—138 (1912); Leçons sur les fonctions monogènes, 1917. Функции не будут строго моногенными в смысле § 5.1, так как в цитируемом примере при рассмотрении $\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$ нужно предполагать, что $\operatorname{Re}(z+h)$ и $\operatorname{Im}(z+h)$ не будут одновременно рациональными дробями.

[2]) Laurent, Comptes Rendus, XVII, 348—349 (1843). Теорема содержится в сочинении, написанном Вейерштрассом в 1841 г., но не опубликованном, вероятно, до 1894 г. (Weierstrass, Werke, I, 51—66).

[3]) См. подстрочное примечание к следствию 2 § 5.2.

Мы найдем, как при доказательстве теоремы Тейлора, что интегралы

$$\int_C \frac{f(z)\,h^{n+1}\,dz}{(z-a)^{n+1}(z-a-h)} \quad \text{и} \quad \int_{C'} \frac{f(z)\,(z-a)^{n+1}\,dz}{(z-a-h)\,h^{n+1}}$$

стремятся к нулю при $n \to \infty$, и таким образом, мы имеем

$$f(a+h) = a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + \ldots + \frac{b_1}{h} + \frac{b_2}{h^2} + \ldots,$$

где [1])

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}} \quad \text{и} \quad b_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C'} (z-a)^{n-1} f(z)\,dz.$$

Этот результат и есть *теорема Лорана*; изменяя обозначения, ее можно выразить в следующей форме: *если функция $f(z)$ — аналитическая на концентрических окружностях C и C' с центром a и в кольце между ними, то в любой точке z этого кольца функция $f(z)$ может быть разложена в ряд*

$$f(z) = a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \ldots + \frac{b_1}{z-a} + \frac{b_2}{(z-a)^2} + \ldots,$$

где

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)\,dt}{(t-a)^{n+1}} \quad \text{и} \quad b_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C'} (t-a)^{n-1} f(t)\,dt.$$

Важный случай теоремы Лорана получается, когда внутри внутренней окружности C' имеется только одна особая точка, а именно центр a. В этом случае окружность C' можно взять как угодно малой и, таким образом, разложение Лорана будет справедливо для всех точек внутри окружности C, исключая центр a.

Пример 1. Доказать, что

$$e^{\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)} = J_0(x) + zJ_1(x) + z^2 J_2(x) + \ldots + z^n J_n(x) + \ldots$$
$$\ldots - \frac{1}{z}J_1(x) + \frac{1}{z^2}J_2(x) - \ldots + \frac{(-)^n}{z^n}J_n(x) + \ldots,$$

где

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(n\theta - x\sin\theta)\,d\theta.$$

---

[1]) Мы не можем писать $a_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$, как в теореме Тейлора, так как $f(z)$ не обязательно будет аналитической внутри C'.

[В самом деле, рассматриваемая функция от z будет аналитической в любой области, не содержащей точку $z=0$; следовательно, по теореме Лорана

$$e^{\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)}=a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots+\frac{b_1}{z}+\frac{b_2}{z^2}+\ldots,$$

где

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C e^{\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)}\frac{dz}{z^{n+1}} \quad \text{и} \quad b_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C'} e^{\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)}z^{n-1}\,dz$$

и где C и C' — любые окружности с центром в начале координат. Приняв за C окружность радиуса единица и положив $z=e^{i\theta}$, получим

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{2\pi} e^{ix\sin\theta}e^{-ni\theta}i\,d\theta=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\cos(n\theta-x\sin\theta)\,d\theta,$$

так как $\int\limits_0^{2\pi}\sin(n\theta-x\sin\theta)\,d\theta$ равен нулю, как это можно видеть, сделав подстановку $\theta=2\pi-\varphi$. Таким образом, $a_n=J_n(x)$, а $b_n=(-1)^n a_n$, так как разлагаемая функция не изменится, если заменить в ней z на $-z^{-1}$; таким образом, $b_n=(-1)^n J_n(x)$, чем доказательство заканчивается.]

Пример 2. Показать, что в кольце $|a|<|z|<|b|$ функция

$$\left\{\frac{bz}{(z-a)(b-z)}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

может быть разложена в ряд

$$S_0+\sum_{n=1}^{\infty}S_n\left(\frac{a^n}{z^n}+\frac{z^n}{b^n}\right),$$

где

$$S_n=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1\cdot3\ldots(2l-1)\cdot1\cdot3\ldots(2l+2n-1)}{2^{2l+n}l!(l+n)!}\left(\frac{a}{b}\right)^l.$$

Функция является однозначной и аналитической в этом кольце (см. § 5.7), ибо точки ветвления 0, a нейтрализуют друг друга, и таким образом, по теореме Лорана коэффициент при z^n в требуемом разложении равен

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C\frac{dz}{z^{n+1}}\left\{\frac{bz}{(z-a)(b-z)}\right\}^{\frac{1}{2}},$$

где C — окружность $|z|=r$, $|a|<r<|b|$. Положив $z=re^{i\theta}$, преобразуем этот интеграл в

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}e^{-ni\theta}r^{-n}\left(1-\frac{r}{b}e^{i\theta}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{a}{r}e^{-i\theta}\right)^{-\frac{1}{2}}d\theta$$

или

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ni\theta}r^{-n}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1\cdot 3\ldots(2k-1)}{2^k k!}\frac{r^k e^{ki\theta}}{b^k}\right\}\times$$

$$\times\left\{\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1\cdot 3\ldots(2l-1)}{2^l l!}\frac{a^l e^{-li\theta}}{r^l}\right\}d\theta.$$

Ряды здесь сходятся абсолютно и равномерно относительно θ.

Единственные члены, дающие интегралы, отличные от нуля, будут те, для которых $k=l+n$.

Таким образом, коэффициент при z^n равен

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1\cdot 3\ldots(2l-1)}{2^l l!}\frac{1\cdot 3\ldots(2l+2n-1)}{2^{l+n}(l+n)!}\frac{a^l}{b^{l+n}}=\frac{S_n}{b^n}.$$

Подобным же образом можно доказать, что коэффициент при $\frac{1}{z^n}$ равен $S_n a^n$.

Пример 3. Показать, что

$$e^{uz+\frac{v}{z}}=a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots+\frac{b_1}{z}+\frac{b_2}{z^2}+\ldots,$$

где

$$a_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{(u+v)\cos\theta}\cos\{(u-v)\sin\theta-n\theta\}\,d\theta$$

и

$$b_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{(u+v)\cos\theta}\cos\{(v-u)\sin\theta-n\theta\}\,d\theta.$$

5.61. Природа особенностей однозначных функций

Рассмотрим сначала функцию $f(z)$, аналитическую в некоторой замкнутой области S всюду, кроме одной точки a внутри области.

Пусть можно определить такую функцию $\varphi(z)$, что:

(I) φ аналитическая в области S,

(II) при $z\neq a$

$$f(z)=\varphi(z)+\frac{B_1}{z-a}+\frac{B_2}{(z-a)^2}+\ldots+\frac{B_n}{(z-a)^n}.$$

Тогда говорят, что $f(z)$ имеет *полюс порядка n в точке a*, а сумму $\frac{B_1}{z-a}+\frac{B_2}{(z-a)^2}+\ldots+\frac{B_n}{(z-a)^n}$ называют *главной частью функции $f(z)$ вблизи a*. По определению особых точек (§ 5.12) полюс является особой точкой. Если $n=1$, то такая особая точка называется *простым полюсом*.

Особая точка однозначной функции, не являющаяся полюсом, называется *существенно особой точкой*.

Если существенно особая точка a изолированная (т. е. если можно найти область, для которой a будет внутренней точкой и в которой не будет содержаться других особых точек, кроме a), то можно найти разложение Лорана по возрастающим и убывающим степеням $z-a$, справедливое при $\Delta > |z-a| > \delta$, где Δ зависит от других особых точек функции, а δ — произвольно малая величина. Таким образом, *главная часть* функции вблизи изолированной существенно особой точки представляет собой бесконечный ряд.

Следует отметить, что полюс по определению является изолированной особой точкой, так что все неизолированные особые точки (например, предельная точка последовательности полюсов) будут существенно особыми точками.

Не существует, вообще говоря, разложения функции, которое было бы справедливо вблизи неизолированной особой точки, наподобие того как разложение Лорана справедливо вблизи изолированной особой точки.

Следствие. Если $f(z)$ имеет полюс порядка n в точке a и

$$\psi(z) = (z-a)^n f(z) \quad (z \neq a), \qquad \psi(a) = \lim_{z \to a} (z-a)^n f(z),$$

то $\psi(z)$ будет аналитической в этой точке.

Пример 1. Вблизи изолированной особой точки функция не ограничена.

[Доказать, что если функция ограничена вблизи $z=a$, то коэффициенты при всех отрицательных степенях $z-a$ равны нулю.]

Пример 2. Найти особые точки функции $e^{\frac{c}{z-a}} \Big/ \left\{ e^{\frac{z}{a}} - 1 \right\}$.

При $z=0$ числитель аналитичен и не равен 0, а знаменатель имеет простой нуль. Следовательно, функция имеет простой полюс в $z=0$.

Подобным же образом имеется простой полюс в каждой из точек $2n\pi ia$ ($n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$); для других значений знаменатель будет аналитическим и не будет равняться нулю.

При $z=a$ числитель имеет изолированную особую точку, так что теорема Лорана применима, а коэффициенты в разложении Лорана могут быть найдены делением степенных рядов:

$$\frac{1 + \frac{c}{z-a} + \frac{c^2}{2!(z-a)^2} + \ldots}{e\left(1 + \frac{z-a}{a} + \ldots\right) - 1},$$

что дает разложение, содержащее все положительные и отрицательные степени $z-a$. Таким образом, при $z=a$ имеется существенно особая точка.

Пример 3. Показать, что функция, определяемая рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nz^{n-1}\{(1+n^{-1})^n - 1\}}{(z^n - 1)\{z^n - (1+n^{-1})^n\}},$$

имеет простые полюсы в точках $z = (1+n^{-1})e^{2ki\pi/n}$ ($k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$; $n = 1, 2, 3, \ldots$)

(Math. Trip., 1899)

5.62. «Бесконечно удаленная точка»

Поведение функции $f(z)$ при $|z| \to \infty$ можно рассматривать таким же образом, как ее поведение в случае, когда z стремится к конечному пределу.

Если мы положим $z = \frac{1}{z'}$, так что большие значения z будут представлены малыми значениями z' в плоскости z', то между z и z' будет взаимно однозначное соответствие, лишь бы только ни z, ни z' не было нулем; чтобы сделать соответствие полным, иногда удобно говорить, что когда z' попадает в начало координат, z становится бесконечно удаленной точкой. Но читателю следует особенно отметить, что в этом случае *z не будет* определенной точкой и всякое предложение, к ней относящееся, в действительности является предложением, относящимся к точке $z' = 0$.

Пусть $f(z) = \varphi(z')$. Тогда $\varphi(z')$ не определена *при* $z' = 0$, но ее поведение *вблизи* $z' = 0$ определяется ее разложением (Тейлора или Лорана) по степеням z', и мы определяем $\varphi(0)$ как $\lim\limits_{z' \to 0} \varphi(z')$, если этот предел существует. Например, функция $\varphi(z')$ может иметь нуль порядка m в точке $z' = 0$; в этом случае разложение Тейлора функции $\varphi(z')$ будет иметь вид

$$Az'^m + Bz'^{m+1} + Cz'^{m+2} + \ldots,$$

и таким образом, разложение функции $f(z)$, справедливое для достаточно больших значений $|z|$, будет иметь вид

$$f(z) = \frac{A}{z^m} + \frac{B}{z^{m+1}} + \frac{C}{z^{m+2}} + \ldots$$

В этом случае говорят, что $f(z)$ имеет *нуль порядка m «в бесконечности»*.

Далее, функция $\varphi(z')$ может иметь полюс порядка m в точке $z' = 0$; в этом случае

$$\varphi(z') = \frac{A}{z'^m} + \frac{B}{z'^{m-1}} + \frac{C}{z'^{m-2}} + \ldots + \frac{L}{z'} + M + Nz' + Pz'^2 + \ldots,$$

и таким образом, для достаточно больших значений $|z|$ функция $f(z)$ может быть разложена в ряд

$$f(z) = Az^m + Bz^{m-1} + Cz^{m-2} + \ldots + Lz + M + \frac{N}{z} + \frac{P}{z^2} + \ldots$$

В этом случае говорят, что $f(z)$ имеет *полюс порядка m «в бесконечности»*.

Подобным же образом говорят, что $f(z)$ *имеет существенно особую точку в бесконечности*, если $\varphi(z')$ имеет существенную

особенность в точке $z'=0$. Так функция e^z имеет существенно особую точку в бесконечности, поскольку функция $e^{\frac{1}{z'}}$, или

$$1+\frac{1}{z'}+\frac{1}{2!z'^2}+\frac{1}{3!z'^3}+\ldots,$$

имеет существенную особенность при $z'=0$.

Пример. Исследовать функцию, представленную рядом

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\,\frac{1}{1+a^{2n}z^2}\qquad (a>1).$$

Функция, представляемая этим рядом, имеет особые точки $z=\frac{i}{a^n}$ и $z=-\frac{i}{a^n}$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$, так как в каждой из этих точек знаменатель одного из членов ряда будет равен нулю. Эти особые точки лежат на мнимой оси и имеют $z=0$ предельной точкой; таким образом, для этой функции нельзя составить ни разложения Тейлора, ни разложения Лорана, справедливого в какой-либо области, для которой начало координат будет внутренней точкой.

Для значений z, отличных от этих особых точек, ряд будет абсолютно сходящимся, так как предел отношения $(n+1)$-го члена к n-му равен

$$\lim_{n\to\infty}(n+1)^{-1}a^{-2}=0.$$

Рассматриваемая функция является четной функцией от z (т. е. она не меняется при изменении знака z), она стремится к нулю при $|z|\to\infty$ и будет аналитической вне и на окружности C радиуса большего, чем единица, с центром в начале. Таким образом, для точек вне этой окружности она может быть разложен в ряд

$$\frac{b_2}{z^2}+\frac{b_4}{z^4}+\frac{b_6}{z^6}+\ldots,$$

где по теореме Лорана

$$b_{2k}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C z^{2k-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\,\frac{a^{-2n}}{a^{-2n}+z^2}\,dz.$$

Но

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^{-2n}z^{2k-1}}{n!\,(a^{-2n}+z^2)}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{z^{2k-3}a^{-2n}}{n!}(-1)^m a^{-2nm}z^{-2m}.$$

Этот двойной ряд абсолютно сходится при $|z|>1$, и если члены его расположить по степеням z, то он будет равномерно сходящимся.

Так как коэффициент при z^{-1} равен

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}a^{-2kn}}{n!}$$

и единственный член, который дает не равный нулю интеграл, есть член с z^{-1}, то мы имеем

$$b_{2k} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}a^{-2kn}}{n!}\,\frac{dz}{z} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{n!\,a^{2kn}} = (-1)^{k-1}e^{a^{\frac{1}{2k}}}.$$

Поэтому при $|z| > 1$ функция может быть разложена в ряд

$$\frac{e^{a^{\frac{1}{a^2}}}}{z^2} - \frac{e^{a^{\frac{1}{a^4}}}}{z^4} + \frac{e^{a^{\frac{1}{a^6}}}}{z^6} - \ldots$$

Функция имеет нуль второго порядка в бесконечности, так как разложение начинается с члена z^{-2}.

5.63. Теорема Лиувилля[1])

Пусть $f(z)$ — *аналитическая функция для всех значений* z, *и пусть* $|f(z)| < K$ *при всех значениях* z, *где* K — *постоянная* (*так что* $|f(z)|$ *будет ограниченным, когда* $|z| \to \infty$). *Тогда* $f(z)$ *есть постоянная.*

Пусть z, z' — любые две точки и C — такой контур, что z, z' лежат внутри него. Тогда по формуле § 5.21

$$f(z') - f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \left\{\frac{1}{\zeta - z'} - \frac{1}{\zeta - z}\right\} f(\zeta)\,d\zeta;$$

примем за контур C окружность с центром в z и радиусом $\rho \geqslant 2|z' - z|$; на C положим $\zeta = z + \rho e^{i\theta}$; так как $|\zeta - z'| \geqslant \frac{1}{2}\rho$, когда ζ лежит на C, то по оценке § 4.62 находим, что

$$|f(z') - f(z)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_C \frac{z' - z}{(\zeta - z')(\zeta - z)} f(\zeta)\,d\zeta\right| <$$

$$< \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{|z' - z|}{\frac{1}{2}\rho} K\,d\theta = 2|z' - z|\,K\rho^{-1}.$$

Заставим $\rho \to \infty$, сохраняя z и z' неподвижными; тогда ясно, что $f(z') - f(z) = 0$, а это значит, что $f(z)$ есть постоянная.

Как будет видно из ближайшего параграфа и части II этой книги (главы XX, XXI и XXII), теорема Лиувилля позволяет дать краткие и простые доказательства некоторых из важнейших результатов анализа.

---

[1]) Этой теореме, принадлежащей в действительности Коши (Cauchy, Comptes Rendus, XIX, 1377—1378 (1844)), название было дано Борхардтом (Borchardt, Journal für Math., LXXXVIII, 277—310 (1880)), который слышал ее на лекциях Лиувилля в 1847.

5.64. Функции без существенно особых точек

Покажем теперь, *что единственными однозначными функциями, не имеющими никаких особых точек, кроме полюсов, во всей плоскости (включая ∞) являются рациональные функции.*

Пусть $f(z)$ — такая функция; пусть $c_1, c_2, \ldots, c_k$ — ее особые точки в конечной части плоскости, и пусть главная часть (§ 5.61) ее разложения в полюсе c_r имеет вид,

$$\frac{a_{r,1}}{z-c_r}+\frac{a_{r,2}}{(z-c_r)^2}+\ldots+\frac{a_{r,n_r}}{(z-c_r)^{n_r}}.$$

Пусть, наконец, главная часть ее разложения в полюсе в бесконечности имеет вид

$$a_1z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n;$$

если полюса в бесконечности нет, то все коэффициенты в этом разложении равны нулю.

Тогда функция

$$f(z)-\sum_{r=1}^{k}\left\{\frac{a_{r,1}}{z-c_r}+\frac{a_{r,2}}{(z-c_r)^2}+\ldots+\frac{a_{r,n_r}}{(z-c_r)^{n_r}}\right\}-$$
$$-a_1z-a_2z^2-\ldots-a_nz^n,$$

очевидно, не имеет особенностей ни в точках $c_1, c_2, \ldots, c_k$, ни в бесконечности; она будет поэтому аналитической всюду и ограниченной, когда $|z|\to\infty$, и, таким образом, по теореме Лиувилля равна постоянной, а это значит, что

$$f(z)=C+a_1z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n+$$
$$+\sum_{r=1}^{k}\left\{\frac{a_{r,1}}{z-c_r}+\frac{a_{r,2}}{(z-c_r)^2}+\ldots+\frac{a_{r,n_r}}{(z-c_r)^{n_r}}\right\},$$

где C — постоянная; $f(z)$ будет, таким образом, рациональной функцией, и теорема доказана.

Из теоремы Лиувилля и следствия (II) § 3.61 очевидно, что функция, аналитическая всюду (включая ∞), будет просто постоянной. Функции, которые являются аналитическими всюду, *исключая* ∞, имеют большое значение; они называются *целыми функциями*[1]). Примерами таких функций служат e^z, $\sin z$, e^{e^z}. Из результатов § 5.4

---

[1]) По-французски fonction entière, по-немецки ganze Funktion, по-английски integral function.