вытекает, что для таких функций радиус сходимости ряда Тейлора будет бесконечным, а из результата данного параграфа ясно, что все целые функции (кроме полиномов) имеют существенно особые точки в бесконечности.

5.7. Многозначные функции

Рассмотренные в предыдущем изложении функции имели единственное значение (или предел) для каждого значения аргумента, кроме особых точек.

Но могут быть определены функции, имеющие более чем одно значение для каждого значения z; так, например, если $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, то функция $z^{\frac{1}{2}}$ имеет два значения:

$$r^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{1}{2}\theta + i\sin\frac{1}{2}\theta\right), \quad r^{\frac{1}{2}}\left\{\cos\frac{1}{2}(\theta+2\pi) + i\sin\frac{1}{2}(\theta+2\pi)\right\},$$

функция же $\operatorname{arctg} x$ (x вещественно) имеет неограниченное число значений, а именно значения $\operatorname{Arctg} x + n\pi$, где $-\frac{1}{2}\pi < \operatorname{Arctg} x < \frac{1}{2}\pi$ и n — любое целое число; другими примерами многозначных функций являются $\lg z$, $z^{-3/5}$, $\sin(z^{1/2})$.

Каждая из двух функций, представляемых выражением $z^{1/2}$, будет тем не менее аналитической всюду, за исключением точки $z = 0$, и мы можем применять к ним теоремы этой главы. Эти две функции называются «*ветвями* многозначной функции $z^{1/2}$»[1]).

Вообще говоря, имеются определенные точки, в которых совпадают две или более ветвей или в которых одна из ветвей имеет бесконечный предел; эти точки называются «точками ветвления». Так функция $z^{1/2}$ имеет точку ветвления в 0, и если мы рассмотрим изменение $z^{1/2}$, когда z описывает окружность против часовой стрелки вокруг 0, то мы увидим, что θ возрастает на 2π, z остается неизменным и *каждая ветвь функции переходит в другую ветвь*. Последнее представляет собой общую черту точек ветвления. Настоящая книга не стремится дать полное изложение свойств многозначных функций, так как нам всегда придется рассматривать частные ветви функций в областях, не содержащих точек ветвления. Таким образом, будет сравнительно нетрудно видеть, применима или неприменима теорема Коши.

Так, мы не можем применить теорему Коши к такой функции, как $z^{3/2}$, когда путем интегрирования является окружность, охватывающая начало координат; но можно применить ее к одной из ветвей функции $z^{3/2}$, когда

---

[1]) Эти рассуждения не вполне точны. Авторы не оговаривают, в какой области они рассматривают ветви. (*Прим. ред.*)

путь интегрирования подобен пути, показанному в § 6.24, ибо на всем контуре и внутри него функция имеет единственное определенное значение.

Пример. Доказать, что если различные значения a^z, соответствующие данному значению z, представлены точками на плоскости комплексного переменного, то эти точки будут вершинами равноугольной ломаной, вписанной в логарифмическую спираль; угол между касательной и радиусом-вектором спирали не зависит от a.

(Math. Trip., 1899)

Идея различных *ветвей* функции оказывает нам помощь в понимании такого парадокса, как нижеследующий.

Рассмотрим функцию

$$y = x^x,$$

для которой

$$\frac{dy}{dx} = x^x (1 + \lg x).$$

Когда x вещественно и отрицательно, $\frac{dy}{dx}$ не будет вещественной. Но если x отрицательно и имеет форму $\frac{p}{2q+1}$ (где p и q — положительные или отрицательные целые числа), то y будет вещественно.

Поэтому, если мы вычертим вещественную кривую

$$y = x^x,$$

то мы будем иметь для отрицательных значений x совокупность вещественных точек кривой, соответствующих рациональным значениям x с нечетным знаменателем. Тогда мы могли бы попробовать получить касательную как предел хорды, как если бы кривая была непрерывной, и таким образом, $\frac{dy}{dx}$, выведенная из наклона касательной к оси x, окажется вещественной. Возникает вопрос: почему обычный процесс дифференцирования дает невещественное значение для $\frac{dy}{dx}$? Объяснением служит то обстоятельство, что эти вещественные точки принадлежат не одной и той же ветви функции.

Действительно, имеем

$$y = e^{x \lg x + 2k\pi i x},$$

где k — любое целое число. Каждому значению k соответствует одна ветвь функции y. Теперь, чтобы получить вещественное значение, когда x отрицательно, мы должны взять надлежащее значение для k, и *это значение k будет изменяться, когда мы переходим от одной вещественной точки к другой*. Итак, вещественные точки не представляют значений y, принадлежащих одной и той же ветви функции $y = x^x$, и следовательно, мы не можем ожидать, что значение $\frac{dy}{dx}$, находимое для определенной ветви, дается тангенсом наклона к оси x прямой, соединяющей две произвольно близкие вещественные точки.

ЛИТЕРАТУРА

Э. Гурса, Курс математического анализа, гл. XIV, XVI, ОНТИ, 1936.
J. Hadamard, La série de Taylor et son prolongement analytique, Scientia (1901).
E. Lindelöf, Le Calcul des Résidus, Paris, 1905.

Ш. Ж. Валле-Пуссен, Курс анализа бесконечно малых, ГТТИ, 1933, гл. XI.
E. Borel, Leçons sur les fonctions entières, Paris, 1900.
G. N. Watson, Complex integration and Cauchy's theorem, Camb. Math. Tracts, № 15 (1914).

Примеры

1. Получить разложение

$$f(z)=f(a)+2\left\{\frac{z-a}{2}f'\left(\frac{z+a}{2}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{(z-a)^3}{2^3\cdot 3!}f'''\left(\frac{z+a}{2}\right)+\frac{(z-a)^5}{2^5\cdot 5!}f^{(5)}\left(\frac{z+a}{2}\right)+\ldots\right\}$$

и определить условия и область его применимости.

2. Получить при надлежащих условиях разложение

$$f(z)=f(a)+\frac{z-a}{m}\left[f'\left(a+\frac{z-a}{2m}\right)+f'\left(a+\frac{3(z-a)}{2m}\right)+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+f'\left(a+\frac{(2m-1)(z-a)}{2m}\right)\right]+$$
$$+\frac{2}{3!}\left(\frac{z-a}{2m}\right)^3\left[f'''\left(a+\frac{z-a}{2m}\right)+f'''\left(a+\frac{3(2-a)}{2m}\right)+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+f'''\left(a+\frac{(2m-1)(z-a)}{2m}\right)\right]+$$
$$+\frac{2}{5!}\left(\frac{z-a}{2m}\right)^5\left[f^{(5)}\left(a+\frac{z-a}{2m}\right)+f^{(5)}\left(a+\frac{3(z-a)}{2m}\right)+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+f^{(5)}\left(a+\frac{(2m-1)(z-a)}{2m}\right)\right]+\ldots$$

(Corey, Ann. of Math. (2), 1, 77, (1900)).

3. Показать, что для ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n+z^{-n}}$$

область сходимости состоит из двух отдельных областей, а именно внешней и внутренней области окружности радиуса единица, и что в каждой из них ряд представляет одну функцию и представляет ее вполне.

(Weierstrass, Berliner Monatsberichte, 731 (1880), Ges. Werke, II, 227, 1895)

4. Показать, что функция $\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$ стремится к бесконечности при $z\to\exp\left(\frac{2\pi ip}{m!}\right)$ вдоль радиуса, проведенного через эту точку; m — любое целое число, а p принимает значения $0, 1, 2, \ldots, (m!-1)$.

Вывести отсюда, что функция не может быть продолжена за единичную окружность.

(Lerch, Sitz. Bohm. Acad., 571—582 (1885—1886))

5. Показать, что если z^2-1 не является положительным вещественным числом, то

$$(1-z^2)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{2}\frac{3}{4}z^4+\ldots+\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots 2n}z^{2n}+$$
$$+\frac{3\cdot 5\ldots(2n+1)}{2\cdot 4\ldots 2n}(1-z^2)^{-\frac{1}{2}}\int_0^z t^{2n+1}(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}\,dt$$

(Jacobi и Scheibner)

6. Показать, что если $z-1$ не является положительным вещественным числом, то

$$(1-z)^{-m}=1+\frac{m}{1}z+\frac{m(m+1)}{2!}z^2+\ldots+\frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{n!}z^n+$$
$$+\frac{m(m+1)\ldots(m+n)}{n!}(1-z)^{-m}\int_0^z t^n(1-t)^{m-1}\,dt.$$

(Jacobi и Scheibner)

7. Показать, что если z и $1-z$ не яляются отрицательными вещественными числами, то

$$(1-z^2)^{-\frac{1}{2}}\int_0^z t^m(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}\,dt=$$
$$=\frac{z^{m+1}}{m+1}\left\{1+\frac{m+2}{m+3}z^2+\ldots+\frac{(m+2)\ldots(m+2n-2)}{(m+3)\ldots(m+2n-1)}z^{2n-2}\right\}+$$
$$+(1-z^2)^{-\frac{1}{2}}\frac{(m+2)(m+4)\ldots(m+2n)}{(m+1)(m+3)\ldots(m+2n-1)}\int_0^z t^{m+2n}(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}\,dt.$$

(Jacobi и Scheibner)

8. В разложении выражения $(a+a_1z+a_2z^2)^m$ по степеням z остаточный член после n членов обозначен через $R_n(z)$, так что

$$(a+a_1z+a_2z^2)^m=A_0+A_1z+A_2z^2+\ldots+A_{n-1}z^{n-1}+R_n(z);$$

требуется показать, что

$$R_n(z)=(a+a_1z+a_2z^2)^m\int_0^z\frac{naA_nt^{n-1}+(2m-n+1)a_2A_{n-1}t^n}{(a+a_1t+a_2t^2)^{m+1}}\,dt.$$

(Scheibner)

9. Пусть функция

$$(a_0+a_1z+a_2z^2)^{-m-1}\int_0^z(a_0+a_1t+a_2t^2)^m\,dt$$

разложена по возрастающим степеням z:

$$A_1z+A_2z^2+\ldots;$$

требуется показать, что остаточный член после $n-1$ членов будет

$$(a_0+a_1z+a_2z^2)^{-m-1}\int_0^z (a_0+a_1t+a_2t^2)^m \times$$
$$\times \{na_0A_n-(2m+n+1)\,a_2A_{n-1}t\}\,t^{n-1}\,dt.$$

(Scheibner [1])

10. Показать, что ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\{1+\lambda_n(z)\,e^z\}\,\frac{d^n\varphi(z)}{dz^n},$$

где

$$\lambda_n(z)=-1+z-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}-\ \ldots\ +(-)^n\frac{z^n}{n!}$$

и где $\varphi(z)$ — функция, аналитическая вблизи $z=0$, сходится вблизи точки $z=0$; показать также, что если сумму ряда обозначить через $f(z)$, то $f(z)$ будет удовлетворять дифференциальному уравнению

$$f'(z)=f(z)-\varphi(z).$$

(Pincherle, Rend. dei Lincei (5), V, 27 (1896))

11. Показать, что среднее арифметическое квадрата модуля значений ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_nz^n$ на окружности $|z|=r$, расположенной внутри его круга сходимости, равно сумме квадратов модулей отдельных членов.

(Gutzmer, Math. Ann., XXXII, 596—600 (1888))

12. Показать, что ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} e^{-2(am)^{1/2}}\,z^{m-1}$$

сходится при $|z|<1$ и что при $a>0$ функция, представляемая им, может быть также представлена при $|z|<1$ интегралам

$$\left(\frac{a}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\int_0^{\infty}\frac{e^{-\frac{a}{x}}}{e^x-z}\,\frac{dx}{x^{3/2}}$$

и что она не имеет особых точек, кроме точки $z=1$.

(Lerch, Monatshefte für Math und Phys. VIII)

13. Показать, что ряд

$$\frac{2}{\pi}(z+z^{-1})+$$
$$+\frac{2}{\pi}\sum\left\{\frac{z}{(1-2\nu-2\nu'zi)(2\nu+2\nu'zi)^2}+\frac{z^{-1}}{(1-2\nu-2\nu'z^{-1}i)(2\nu+2\nu'z^{-1}i)^2}\right\},$$

---

[1]) Результаты примеров 5, 6 и 7 являются частными случаями формул, содержащихся в диссертации Якоби (Berlin, 1825), опубликованной в его Ges. Werke, III, 1—44, 1881. Формулы Якоби были обобщены Шайбнером (Scheibner, Leipziger Berichte, XLV, 432—443 (1893)).

в котором суммирование распространяется на все целые значения ν, ν', кроме комбинации $\nu = 0$, $\nu' = 0$, абсолютно сходится для всех значений z, кроме чисто мнимых, и что его сумма будет равна $+1$ или -1 соответственно тому, будет ли вещественная часть z положительной или отрицательной.

(Weierstrass, Berliner Monatsberichte, 735 (1880))

14. Показать, что $\sin\left\{\left(z+\frac{1}{z}\right)\right\}$ может быть разложен в ряд вида

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \ldots,$$

в котором коэффициентом как при z^n, так и при z^{-n} будет

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin(2u\cos\theta)\cos n\theta\, d\theta.$$

15. Пусть

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^2}{n^2 z^2 + a^2};$$

показать, что $f(z)$ — конечная и непрерывная для вещественных значений z, но не может быть разложена в ряд Маклорена по возрастающим степеням z; объяснить эту кажущуюся аномалию.

[Относительно других случаев непригодности теоремы Маклорена см. посмертный мемуар Селлерье (Cellérier, Bull. des Sci. Math. (2), XIV, 145—599 (1890)); Lerch, Journal für Math., CIII, 126—138 (1888); Pringsheim, Math. Ann., XLII, 153—184 (1893), Du Bois Reymond, Münchener Sitzungsberichte, VI, 235 (1876).]

16. Если $f(z)$ — *непрерывная* однозначная функция от z в некоторой двумерной области и если

$$\int_C f(z)\, dz = 0$$

для всех замкнутых контуров C, лежащих внутри области, то $f(z)$ будет аналитической функцией от z всюду внутри области.

[Пусть a — любая точка области, и пусть

$$F(z) = \int_a^z f(z)\, dz.$$

Из условий следует, что $F(z)$ имеет единственную производную $f(z)$. Поэтому $F(z)$ будет аналитической (§ 5.1) и, таким образом (§ 5.22), ее производная $f(z)$ будет также аналитической. Это важное обращение теоремы Коши принадлежит Морера (Morera, Rendiconti del R. Ist. Lombardo (Milano), XXII, 191 (1889).]

ГЛАВА 6

ТЕОРИЯ ВЫЧЕТОВ И ПРИЛОЖЕНИЕ ЕЕ К ВЫЧИСЛЕНИЮ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

6.1. Вычеты

Если функция $f(z)$ имеет полюс порядка m при $z=a$, то, по определению полюса, вблизи точки $z=a$ она будет иметь разложение вида

$$f(z)=\frac{a_{-m}}{(z-a)^m}+\frac{a_{-m+1}}{(z-a)^{m-1}}+\ \ldots\ +\frac{a_{-1}}{z-a}+\varphi(z),$$

где $\varphi(z)$ — аналитическая функция вблизи a и в a.

Коэффициент a_{-1} в этом разложении называется *вычетом* функции $f(z)$ в полюсе a.

Рассмотрим интеграл $\int\limits_{\alpha} f(z)\,dz$, где путем интегрирования является окружность[1]), центр которой есть точка a, а радиус ρ настолько мал, что $\varphi(z)$ будет аналитической внутри и на самой окружности.

Мы имеем

$$\int\limits_{\alpha} f(z)\,dz=\sum_{r=1}^{m} a_{-r}\int\limits_{\alpha}\frac{dz}{(z-a)^r}+\int\limits_{\alpha}\varphi(z)\,dz.$$

Но $\int\limits_{\alpha}\varphi(z)\,dz=0$ согласно § 5.2, и (положив $z-a=\rho e^{i\theta}$) мы имеем, если $r\neq 1$,

$$\int\limits_{\alpha}\frac{dz}{(z-a)^r}=\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{\rho e^{i\theta}i\,d\theta}{\rho^r e^{ri\theta}}=$$

$$=\rho^{-r+1}\int\limits_{0}^{2\pi}e^{(1-r)\,i\theta}i\,d\theta=\rho^{-r+1}\left[\frac{e^{(1-r)\,i\theta}}{1-r}\right]_0^{2\pi}=0.$$

---

[1]) Существование такой окружности вытекает из определения полюса как изолированной особой точки.

Если же $r=1$, то

$$\int_{\alpha} \frac{dz}{z-a} = \int_{0}^{2\pi} i\,d\theta = 2\pi i.$$

Отсюда окончательно

$$\int_{\alpha} f(z)\,dz = 2\pi i a_{-1}.$$

Пусть теперь C — какой-либо контур, содержащий внутри себя некоторое число полюсов a, b, c, ... функции $f(z)$ с вычетами a_{-1}, b_{-1}, c_{-1}, ... соответственно; предположим, что $f(z)$ будет аналитической в остальных точках внутри C и на нем самом.

Окружим точки a, b, c, ... окружностями α, β, γ, ... настолько малыми, что особыми точками в каждой из них будут только их центры; тогда функция $f(z)$ будет аналитической в замкнутой области, ограниченной контурами C, α, β, γ, ...

Отсюда по следствию 3 § 5.2

$$\int_{C} f(z)\,dz = \int_{\alpha} f(z)\,dz + \int_{\beta} f(z)\,dz + \ldots = 2\pi i a_{-1} + 2\pi i b_{-1} + \ldots$$

Таким образом, получаем *теорему о вычетах*, а именно: *если $f(z)$ — аналитическая на контуре C и внутри него, за исключением некоторого числа полюсов внутри контура, то*

$$\int_{C} f(z)\,dz = 2\pi i \sum R,$$

где $\sum R$ обозначает сумму вычетов функции $f(z)$ в полюсах, лежащих внутри контура C.

Эта теорема является обобщением теоремы § 5. 21.

Примечание Если a — *простой* полюс функции $f(z)$, то вычет в этом полюсе равен $\lim\limits_{z\to a}\{(z-a)f(z)\}$.

6.2. Вычисление определенных интегралов

Применим теперь результат § 6.1 к вычислению различных классов определенных интегралов. Методы, которые следует применять в том или ином частном случае, большей частью ясны из следующих типичных примеров.

6.21. Вычисление интегралов некоторых периодических функций, взятых между пределами 0 и 2π

Интеграл типа

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\,d\theta,$$

где подинтегральная функция является рациональной функцией от $\cos\theta$ и $\sin\theta$, конечной в области интеграции, можно вычислить, положив $e^{i\theta}=z$. Так как

$$\cos\theta=\frac{1}{2}(z+z^{-1}), \quad \sin\theta=\frac{1}{2i}(z-z^{-1}),$$

то интеграл принимает вид $\int\limits_C S(z)\,dz$, где $S(z)$ будет рациональной функцией от z, конечной на пути интегрирования C, где C — окружность радиуса единица с центром в начале.

Поэтому согласно § 6.1 *интеграл равен $2\pi i$, умноженному на сумму вычетов функции $S(z)$ в тех из ее полюсов, которые лежат внутри этой окружности.*

Пример 1. Если $0<p<1$, то

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1-2p\cos\theta+p^2}=\int\limits_C\frac{dz}{i(1-pz)(z-p)}.$$

Единственным полюсом подинтегральной функции внутри окружности является простой полюс в p; соответствующий вычет равен

$$\lim_{z\to p}\frac{z-p}{i(1-pz)(z-p)}=\frac{2\pi}{i(1-p^2)}.$$

Отсюда

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1-2p\cos\theta+p^2}=\frac{2\pi}{1-p^2}.$$

Пример 2. Если $0<p<1$, то

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2 3\theta}{1-2p\cos 2\theta+p^2}\,d\theta=$$

$$=\int\limits_C\frac{dz}{iz}\left(\frac{1}{2}z^3+\frac{1}{2}z^{-3}\right)^2\frac{1}{(1-pz^2)(1-pz^{-2})}=2\pi\sum R,$$

где $\sum R$ обозначает сумму вычетов функции $\dfrac{(z^6+1)^2}{4z^5(1-pz^2)(z^2-p)}$ в ее полюсах, лежащих внутри C; эти полюсы будут 0, $-p^{1/2}$, $p^{1/2}$, а вычеты

в них равны соответственно $-\frac{1+p^2+p^4}{4p^3}$, $\frac{(p^3+1)^2}{8p^3(1-p^2)}$, $\frac{(p^3+1)^2}{8p^3(1-p^2)}$; поэтому интеграл равен

$$\frac{\pi(1-p+p^2)}{1-p}.$$

Пример 3. Если a — положительное целое число, то

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cos(n\theta-\sin\theta)\,d\theta=\frac{2\pi}{n!},\quad \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\sin(n\theta-\sin\theta)\,d\theta=0.$$

Пример 4. Если $a>b>0$, то

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(a+b\cos\theta)^2}=\frac{2\pi a}{(a^2-b^2)^{3/2}},\quad \int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(a+b\cos^2\theta)^2}=\frac{\pi(2a+b)}{a^{3/2}(a+b)^{3/2}}.$$

6.22. Вычисление определенных интегралов, взятых между пределами $-\infty$ и $+\infty$

Вычислим теперь $\int_{-\infty}^{+\infty} Q(x)\,dx$, где $Q(z)$ — функция, (I) аналитическая, когда мнимая часть z положительна или нуль (всюду, за исключением конечного числа полюсов), (II) не имеющая полюсов на вещественной оси и (III) такая, что при $|z|\to\infty$ $zQ(z)\to 0$ равномерно для всех значений $\arg z$, которые удовлетворяют неравенству $0\leqslant\arg z\leqslant\pi$; для вещественных z, сверх того, (IV) предполагается, что $xQ(x)\to 0$ при $x\to\pm\infty$ таким образом[1]), что оба интеграла $\int_0^{\infty} Q(x)\,dx$ и $\int_{-\infty}^{0} Q(x)\,dx$ будут сходящимися.

При заданном ε мы можем взять такое ρ_0 (не зависящее от $\arg z$), что $|zQ(z)|<\frac{\varepsilon}{\pi}$, когда $|z|>\rho_0$ и $0\leqslant\arg z\leqslant\pi$. Рассмотрим $\int_C Q(z)\,dz$, взятый по контуру C, состоящему из части вещественной оси, соединяющей точки $\pm\rho$ (где $\rho>\rho_0$), и полуокружности Γ радиуса ρ с центром в начале координат, лежащей над вещественной осью.

Тогда согласно § 6.1

$$\int_C Q(z)\,dz=2\pi i\sum R,$$

[1]) Условие $xQ(x)\to 0$ само по себе недостаточно для обеспечения сходимости $\int^{\infty} Q(x)\,dx$; рассмотреть пример $Q(x)=(x\lg x)^{-1}$.

где $\sum R$ обозначает сумму вычетов функции $Q(z)$ в ее полюсах, лежащих выше вещественной оси[1]).

Поэтому

$$\left| \int_{-\rho}^{\rho} Q(x)\,dx - 2\pi i \sum R \right| = \left| \int_{\Gamma} Q(z)\,dz \right|.$$

Положив в этом последнем интеграле $z = \rho e^{i\theta}$, имеем согласно оценке § 4.62

$$\left| \int_{\Gamma} Q(z)\,dz \right| = \left| \int_{0}^{\pi} Q(\rho e^{i\theta})\,\rho e^{i\theta}\, i\,d\theta \right| < \int_{0}^{\pi} \frac{\varepsilon}{\pi}\,d\theta = \varepsilon.$$

Отсюда получаем $\lim\limits_{\rho\to\infty} \int_{-\rho}^{\rho} Q(x)\,dx = 2\pi i \sum R.$

Но значение интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} Q(x)\,dx$ равно $\lim\limits_{\rho,\,\sigma\to\infty} \int_{-\rho}^{\sigma} Q(x)\,dx$; поскольку существуют оба предела $\lim\limits_{\sigma\to\infty} \int_{0}^{\sigma} Q(x)\,dx$ и $\lim\limits_{\rho\to\infty} \int_{-\rho}^{0} Q(x)\,dx$, этот двойной предел совпадает с $\lim\limits_{\rho\to\infty} \int_{-\rho}^{\rho} Q(x)\,dx$.

Таким образом, мы доказали, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Q(x)\,dx = 2\pi i \sum R.$$

Эта теорема особенно полезна в специальном случае, когда $Q(x)$ — рациональная функция.

[Примечание. Если даже условие (IV) не удовлетворяется, то мы все же имеем

$$\int_{0}^{\infty} \{Q(x) + Q(-x)\}\,dx = \lim_{\rho\to\infty} \int_{-\rho}^{\rho} Q(x)\,dx = 2\pi i \sum R.]$$

Пример 1. Единственным полюсом функции $(z^2+1)^{-3}$ в верхней полуплоскости является полюс в точке $z = i$ с вычетом в нем $-\frac{3}{16}\,i$.

---

[1]) $Q(z)$ не имеет полюсов над вещественной осью вне контура.

Поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{3}{8}\pi.$$

Пример 2. Пусть $a > 0$, $b > 0$; показать, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4\,dx}{(a+bx^2)^4} = \frac{\pi}{16a^{3/2}b^{5/2}}.$$

Пример 3. Рассматривая интеграл $\int e^{-\lambda z^2}\,dz$ по прямоугольному контуру, вершины которого лежат в точках $-R$, R, $R+\alpha i$, $-R+\alpha i$, показать, заставляя $R\to\infty$, что если $\lambda > 0$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2}\cos(2\lambda\alpha x)\,dx = e^{-\lambda\alpha^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2}\,dx = 2\lambda^{-\frac{1}{2}}e^{-\lambda\alpha^2}\int_{0}^{\infty} e^{-x^2}\,dx.$$

6.221. Некоторые интегралы с бесконечными пределами, содержащие синусы и косинусы

Если $Q(z)$ удовлетворяет условием (I), (II) и (III) § 6.22 и $m > 0$, то $Q(z)\,e^{miz}$ также удовлетворяет этим условиям.

Отсюда вытекает, что $\int_0^{\infty} \{Q(x)\,e^{mix} + Q(-x)\,e^{-mix}\}\,dx$ равен $2\pi i\sum R'$, где $\sum R'$ — сумма вычетов функции $Q(z)\,e^{miz}$ в ее полюсах, лежащих в верхней полуплоскости. Следовательно,

(I) если $Q(x)$ — четная функция, т. е. если $Q(-x) = Q(x)$, то

$$\int_0^{\infty} Q(x)\cos mx\,dx = \pi i\sum R';$$

(II) если $Q(x)$ — нечетная функция, то

$$\int_0^{\infty} Q(x)\sin mx\,dx = \pi\sum R'.$$

6.222. Лемма Жордана [1])

Результаты § 6.221 верны, если $Q(z)$ подчиняется менее ограничительному условию, именно: $Q(z)\to 0$ равномерно при $0 \leqslant \arg z \leqslant \pi$, когда $|z|\to\infty$, вместо условия, что $zQ(z)\to 0$ равномерно.

Для доказательства этого нам необходима теорема, известная под названием леммы Жордана:

---

[1]) Jordan, Cours d'analyse, II, 285—286, 1894.

Если $Q(z) \to 0$ *равномерно относительно* $\arg z$, *когда* $z \to \infty$ *в области* $0 \leqslant \arg z \leqslant \pi$, *и если* $Q(z)$ — *аналитическая*[1]), *когда* $|z| > c$ (c — *постоянная*) *и* $0 \leqslant \arg z \leqslant \pi$, *то*

$$\lim_{\rho \to \infty} \left(\int_{\Gamma} e^{miz} Q(z)\, dz \right) = 0,$$

где Γ — *полуокружность радиуса* ρ, *лежащая над вещественной осью, с центром в начале координат,* m — *вещественное положительное число.*

По данному ε выберем такое ρ_0, что $|Q(z)| < \frac{\varepsilon}{\pi}$, если $|z| > \rho_0$ и $0 \leqslant \arg z \leqslant \pi$; тогда при $\rho > \rho_0$ имеем

$$\left| \int_{\Gamma} e^{miz} Q(z)\, dz \right| = \left| \int_0^{\pi} e^{mi(\rho \cos\theta + i\rho \sin\theta)} Q(\rho e^{i\theta}) \rho e^{i\theta} i\, d\theta \right|.$$

Но $|e^{mi\rho \cos\theta}| = 1$, и таким образом,

$$\left| \int_{\Gamma} e^{miz} Q(z)\, dz \right| < \int_0^{\pi} \frac{\varepsilon}{\pi} \rho e^{-m\rho \sin\theta}\, d\theta = 2 \frac{\varepsilon}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \rho e^{-m\rho \sin\theta}\, d\theta.$$

Далее, $\sin\theta \geqslant \frac{2}{\pi}\theta$, когда $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{1}{2}\pi$[2]), и следовательно,

$$\left| \int_{\Gamma} e^{miz} Q(z)\, dz \right| < 2 \frac{\varepsilon}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \rho e^{-\frac{2m\rho\theta}{\pi}}\, d\theta = 2 \frac{\varepsilon}{\pi} \frac{\pi}{2m} \left[-e^{-\frac{2m\rho\theta}{\pi}} \right]_0^{\frac{1}{2}\pi} < \frac{\varepsilon}{m}.$$

Отсюда

$$\lim_{\rho \to \infty} \int_{\Gamma} e^{miz} Q(z)\, dz = 0.$$

Этот результат и есть лемма Жордана.

Далее,

$$\int_0^{\rho} \{ e^{mix} Q(x) + e^{-mix} Q(-x) \}\, dx = 2\pi i \sum R' - \int_{\Gamma} e^{miz} Q(z)\, dz,$$

---

[1]) Для самой леммы это условие излишне, оно нужно только для ее применения. (*Прим. ред.*)

[2]) Это неравенство становится очевидным, если вычертить графики кривых $y = \sin x$, $y = 2x/\pi$; его можно доказать, показав, что $(\sin\theta)/\theta$ уменьшается, когда θ возрастает от 0 до $\pi/2$.

и, заставляя $\rho \to \infty$, мы видим сразу, что

$$\int_0^\infty \{e^{mix}Q(x) + e^{-mix}Q(-x)\}\,dx = 2\pi i \sum R'$$

— результат, соответствующий результату § 6.221.

Пример 1. Показать, что при $a > 0$

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2 + a^2}\,dx = \frac{\pi}{2a}\,e^{-a}.$$

Пример 2. Показать, что при $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$

$$\int_0^\infty \frac{\cos 2ax - \cos 2bx}{x^2}\,dx = \pi(b - a).$$

(Взять контур, состоящий из большой полуокружности радиуса ρ, малой полуокружности радиуса δ, обе с центром в начале координат, и из отрезков вещественной оси, соединяющих их концы; затем перейти к пределу, заставляя $\rho \to \infty$, $\delta \to 0$.)

Пример 3. Показать, что при $b > 0$, $m \geqslant 0$

$$\int_0^\infty \frac{3x^2 - a^2}{(x^2 + b^2)^2}\cos mx\,dx = \frac{\pi e^{-mb}}{4b^3}\{3b^2 - a^2 - mb(3b^2 + a^2)\}.$$

Пример 4. Показать, что при $k > 0$, $a > 0$

$$\int_0^\infty \frac{x \sin ax}{x^2 + k^2}\,dx = \frac{1}{2}\pi e^{-ka}.$$

Пример 5. Показать, что при $m \geqslant 0$, $a > 0$

$$\int_0^\infty \frac{\sin mx}{x(x^2 + a^2)^2}\,dx = \frac{\pi}{2a^4} - \frac{\pi e^{-ma}}{4a^3}\left(m + \frac{2}{a}\right).$$

(Взять контур, как в примере 2.)

Пример 6. Показать, что если вещественная часть z положительна, то

$$\int_0^\infty (e^{-t} - e^{-tz})\frac{dt}{t} = \lg z.$$

[Мы имеем

$$\int_0^\infty (e^{-t}-e^{-tz})\frac{dt}{t}=\lim_{\delta\to 0,\,\rho\to\infty}\left\{\int_\delta^\rho \frac{e^{-t}}{t}\,dt-\int_\delta^\rho \frac{e^{-tz}}{t}\,dt\right\}=$$

$$=\lim_{\delta\to 0,\,\rho\to\infty}\left\{\int_\delta^\rho \frac{e^{-t}}{t}\,dt-\int_{\delta z}^{\rho z} \frac{e^{-u}}{u}\,du\right\}=$$

$$=\lim_{\delta\to 0,\,\rho\to\infty}\left\{\int_\delta^{\delta z} \frac{e^{-t}}{t}\,dt-\int_\rho^{\rho z} \frac{e^{-t}}{t}\,dt\right\},$$

так как $t^{-1}e^{-1}$ — аналитическая внутри четырехугольника с вершинами δ, δz, ρz, ρ.

Далее, $\int_\rho^{\rho z} t^{-1}e^{-t}\,dt\to 0$ при $\rho\to\infty$, когда $\operatorname{Re} z>0$, а

$$\int_\delta^{\delta z} t^{-1}e^{-t}\,dt=\lg z-\int_\delta^{\delta z} t^{-1}(1-e^{-t})\,dt\to\lg z,$$

так как $t^{-1}(1-e^{-t})\to 1$ при $t\to 0$.]

6.23. Главные значения интегралов

В §§ 6.22, 6.221, 6.222 было предположено, что функция $Q(x)$ не имеет полюсов на вещественной оси; если функция имеет конечное число *простых* полюсов на вещественной оси, то мы можем получить теоремы, соответствующие уже полученным, с тем, однако, отличием, что теперь под интегралами понимаются их главные значения (§ 4.5), а $\sum R$ заменяется на $\sum R+\frac{1}{2}\sum R_0$, где $\sum R_0$ — сумма вычетов в полюсах на вещественной оси. Чтобы получить этот результат, мы должны вместо прежнего контура взять за контур ту же полуокружность радиуса ρ, отрезки вещественной оси, соединяющие точки

$$-\rho,\quad a-\delta_1;\quad a+\delta_1,\quad b-\delta_2;\quad b+\delta_2,\quad c-\delta_3;\ \ldots,$$

и малые полуокружности над вещественной осью радиусов $\delta_1, \delta_2, \ldots$ и с центрами в $a, b, c, \ldots$, где $a, b, c, \ldots$ — полюсы функции $Q(z)$ на вещественной оси, и затем заставить $\delta_1, \delta_2, \ldots\to 0$. Обозначим малые полуокружности через $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$; тогда вместо соотношения

$$\int_{-\rho}^{\rho} Q(z)\,dz+\int_\Gamma Q(z)\,dz=2\pi i\sum R$$

будем иметь

$$P\int_{-\rho}^{\rho} Q(z)\,dz+\sum_n \lim_{\delta_n\to 0}\int_{\gamma_n} Q(z)\,dz+\int_\Gamma Q(z)\,dz=2\pi i\sum R.$$

Пусть a' — вычет функции $Q(z)$ в a; тогда, положив $z = a + \delta_1 e^{i\theta}$ на γ_1, мы получим

$$\int_{\gamma_1} Q(z)\,dz = \int_{\pi}^{0} Q(a + \delta_1 e^{i\theta})\,\delta_1 e^{i\theta}\,i\,d\theta.$$

Но $Q(a + \delta_1 e^{i\theta})\,\delta_1 e^{i\theta} \to a'$ равномерно, когда $\delta_1 \to 0$; поэтому

$$\lim_{\delta_1 \to 0} \int_{\gamma_1} Q(z)\,dz = -\pi i a'$$

и, таким образом,

$$P\int_{-\rho}^{\rho} Q(z)\,dz + \int_{\Gamma} Q(z)\,dz = 2\pi i \sum R + \pi i \sum R_0,$$

а отсюда, применяя рассуждения § 6.22, получим

$$P\int_{-\infty}^{\infty} Q(x)\,dx = 2\pi i\left(\sum R + \frac{1}{2}\sum R_0\right).$$

Легко убедиться, что теоремы §§ 6.221, 6.222 имеют совершенно такие же обобщения.

Метод, примененный выше и заключающийся в выделении дуг малых окружностей, называется методом *вырезания* контура.

6.24. Вычисление интегралов вида $\int_0^\infty x^{a-1}Q(x)\,dx$

Пусть $Q(x)$ — рациональная функция от x, не имеющая полюсов на положительной части вещественной оси, и $x^a Q(x) \to 0$ при $x \to 0$ и при $x \to \infty$.

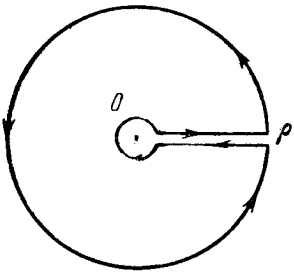

Рис. 1.

Рассмотрим интеграл $\int (-z)^{a-1}Q(z)\,dz$, взятый по контуру C, показанному на рис. 1 и состоящему из дуг окружностей радиусов ρ, δ и прямых линий, соединяющих их концы; $(-z)^{a-1}$ понимается как

$$\exp\{(a-1)\lg(-z)\},$$

где

$$\lg(-z) = \lg|z| + i\arg(-z),$$

а

$$-\pi \leqslant \arg(-z) \leqslant \pi;$$

при этих условиях подинтегральная функция будет однозначной и аналитической на контуре и внутри него, если не считать полюсов функции $Q(z)$.

Отсюда, если через $\sum r$ обозначим сумму вычетов выражения $(-z)^{a-1}Q(z)$ во всех его полюсах, то

$$\int_C (-z)^{a-1}Q(z)\,dz = 2\pi i \sum r.$$

На малой окружности положим $-z = \delta e^{i\theta}$; тогда интеграл по ней будет равен $-\int_{\pi}^{-\pi} (-z)^a Q(z)\, i\, d\theta$ и будет стремиться к нулю при $\delta \to 0$.

На большой окружности положим $-z = \rho e^{i\theta}$, интеграл по ней будет равен $-\int_{-\pi}^{\pi} (-z)^a Q(z)\, i\, d\theta$ и будет стремиться к нулю при $\rho \to \infty$.

На одной из прямых положим $-z = xe^{\pi i}$, а на другой $-z = xe^{-\pi i}$; тогда $(-z)^{a-1}$ станет равной $x^{a-1}e^{\pm(a-1)\pi i}$.

Отсюда

$$\lim_{\delta\to 0,\ \rho\to\infty} \int_\delta^\rho \{x^{a-1}e^{-(a-1)\pi i}Q(x) - x^{a-1}e^{(a-1)\pi i}Q(x)\}\,dx = 2\pi i \sum r,$$

а потому

$$\int_0^\infty x^{a-1}Q(x)\,dx = \pi \operatorname{cosec} a\pi \sum r.$$

Следствие. Если $Q(x)$ имеет некоторое число простых полюсов на положительной части вещественной оси, то вырезанием контура можно показать, что

$$P\int_0^\infty x^{a-1}Q(x)\,dx = \pi \operatorname{cosec} a\pi \sum r - \pi \operatorname{ctg} a\pi \sum r',$$

где $\sum r'$ — сумма вычетов функции $z^{a-1}Q(z)$ в этих полюсах.

Пример 1. Если $0 < a < 1$, то

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx = \pi \operatorname{cosec} a\pi, \quad P\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1-x}\,dx = \pi \operatorname{ctg} a\pi.$$

Пример 2. Если $0 < z < 1$ и $-\pi < \alpha < \pi$, то

$$\int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{t+e^{i\alpha}}\,dt = \frac{\pi e^{i(z-1)\alpha}}{\sin \pi z}.$$

(Minding)

Пример 3. Показать, что при $-1 < z < 3$

$$\int_0^\infty \frac{x^z}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{\pi(1-z)}{4\cos\frac{1}{2}\pi z}.$$

Пример 4. Показать, что при $-1 < p < 1$ и $-\pi < \lambda < \pi$

$$\int_0^\infty \frac{x^{-p}\,dx}{1+2x\cos\lambda+x^2} = \frac{\pi}{\sin p\pi}\,\frac{\sin p\lambda}{\sin\lambda}.$$

(Euler)

6.3. Интегралы Коши

Рассмотрим класс контурных интегралов, которые нередко полезны при аналитических исследованиях.

Пусть C — контур в плоскости z, а $f(z)$ — функция, аналитическая внутри и на самом контуре C. Пусть $\varphi(z)$ — другая функция, аналитическая внутри и на самом контуре, за исключением конечного числа полюсов; пусть $a_1, a_2, \ldots$ — нули функции $\varphi(z)$, лежащие внутри C [1]), $r_1, r_2, \ldots$ — их кратности; пусть, далее, $b_1, b_2, \ldots$ — полюсы этой функции внутри C, а $s_1, s_2, \ldots$ — их порядки.

Тогда по основной теореме о вычетах $\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\,dz$ будет равен сумме вычетов функции $\frac{f(z)\varphi'(z)}{\varphi(z)}$ в ее полюсах, лежащих внутри C.

Но $\frac{f(z)\varphi'(z)}{\varphi(z)}$ может иметь особые точки только в полюсах и в нулях функции $\varphi(z)$. Вблизи одного из нулей, например a_1, мы имеем

$$\varphi(z) = A(z-a_1)^{r_1} + B(z-a_1)^{r_1+1} + \ldots$$

Поэтому

$$\varphi'(z) = Ar_1(z-a_1)^{r_1-1} + B(r_1+1)(z-a_1)^{r_1} + \ldots$$

и

$$f(z) = f(a_1) + (z-a_1)f'(a_1) + \ldots,$$

следовательно, функция $\frac{f(z)\varphi'(z)}{\varphi(z)} - \frac{r_1 f(a_1)}{z-a_1}$ будет аналитической в точке a_1, и значит вычет функции $\frac{f(z)\varphi'(z)}{\varphi(z)}$ в этой точке будет равен $r_1 f(a_1)$.

Подобным же образом вычет при $z = b_1$ равен $-s_1 f(b_1)$, ибо вблизи $z = b_1$ мы имеем

$$\varphi(z) = C(z-b_1)^{-s_1} + D(z-b_1)^{-s_1+1} + \ldots,$$
$$f(z) = f(b_1) + (z-b_1)f'(b_1) + \ldots,$$

и таким образом, функция $\frac{f(z)\varphi'(z)}{\varphi(z)} + \frac{s_1 f(b_1)}{z-b_1}$ будет аналитической в точке b_1.

---

[1]) $\varphi(z)$ не должна иметь ни нулей, ни полюсов на C.

Отсюда

$$\frac{1}{2\pi i}\int_0 f(z)\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\,dz=\sum r_1 f(a_1)-\sum s_1 f(b_1),$$

причем суммирование распространяется на все нули и полюсы функции $\varphi(z)$.

6.31. Число корней уравнения, содержащихся внутри контура

Результат предыдущего параграфа сразу может быть применен к нахождению числа корней уравнения $\varphi(z)=0$, лежащих внутри контура C.

Ибо, положив $f(z)=1$ в предыдущем результате, мы получим, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\,dz$$

равно избытку числа нулей над числом полюсов функции $\varphi(z)$, содержащихся внутри C, считая каждый полюс и нуль соответственно их кратности.

Пример 1. Показать, что полином $\varphi(z)$ степени m имеет m корней.

Пусть

$$\varphi(z)=a_0z^m+a_1z^{m-1}+\ldots+a_m \qquad (a_0\neq 0).$$

Тогда

$$\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}=\frac{ma_0z^{m-1}+\ldots+a_{m-1}}{a_0z^m+\ldots+a_m}.$$

Следовательно, для больших значений $|z|$

$$\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}=\frac{m}{z}+O\left(\frac{1}{z^2}\right).$$

Таким образом, если C — окружность радиуса ρ с центром в начале координат, мы получим

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}dz=\frac{m}{2\pi i}\int_C\frac{dz}{z}+\frac{1}{2\pi i}\int_C O\left(\frac{1}{z^2}\right)dz=m+\frac{1}{2\pi i}\int_C O\left(\frac{1}{z^2}\right)dz.$$

Но, как в § 6.22,

$$\int_C O\left(\frac{1}{z^2}\right)dz\to 0$$

при $\rho\to\infty$, и, поскольку $\varphi(z)$ не имеет полюсов внутри C, общее число нулей функции $\varphi(x)$ равно

$$\lim_{\rho\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\,dz=m.$$

Пример 2. Если во всех точках контура C справедливо неравенство

$$|a_kz^k|>|a_0+a_1z+\ldots+a_{k-1}z^{k-1}+a_{k+1}z^{k+1}+\ldots+a_mz^m|,$$

то контур содержит k корней уравнения

$$a_mz^m+a_{m-1}z^{m-1}+\ldots+a_1z+a_0=0.$$

Действительно, обозначим

$$f(z) = a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \ldots + a_1 z + a_0,$$

тогда

$$f(z) = a_k z^k \left(1 + \frac{a_m z^m + \ldots + a_{k+1} z^{k+1} + a_{k-1} z^{k-1} + \ldots + a_0}{a_k z^k}\right) = \\ = a_k z^k (1 + U),$$

где $|U| \leqslant a < 1$ на контуре и a не зависит от z [1]).

Поэтому число корней функции $f(z)$, содержащихся в C, равно

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \left(\frac{k}{z} + \frac{1}{1+U} \frac{dU}{dz}\right) dz.$$

Но $\int\limits_C \frac{dz}{z} = 2\pi i$; далее, так как $|U| \leqslant a$, то мы можем разложить $(1+U)^{-1}$ в равномерно сходящийся ряд

$$1 - U + U^2 - U^3 + \ldots,$$

и таким образом,

$$\int\limits_C \frac{1}{1+U} \frac{dU}{dz}\, dz = \left[U - \frac{1}{2} U^2 + \frac{1}{3} U^3 - \ldots\right]_C = 0.$$

Поэтому число корней, содержащихся в C, равно k.

Пример 3. Найти, сколько корней уравнения

$$z^6 + 6z + 10 = 0$$

содержится в каждом квадранте комплексной плоскости.

(Clare, 1900)

6.4. Связь между нулями функции и нулями ее производной

Макдональд [2]) показал, что *если $f(z)$ — функция от z, аналитическая внутри простого замкнутого контура C, определяемого уравнением $|f(z)| = M$, где M — постоянная, то число нулей функции $f(z)$ в этой области превосходит число нулей производной $f'(z)$ в той же самой области на единицу.*

На C можем написать $f(z) = Me^{i\theta}$; тогда в точках контура C

$$f'(z) = Me^{i\theta} i \frac{d\theta}{dz}, \quad f''(z) = Me^{i\theta} \left\{ i \frac{d^2\theta}{dz^2} - \left(\frac{d\theta}{dz}\right)^2 \right\}.$$

---

[1]) $|U|$ — непрерывная функция от z на C, и таким образом, она *достигает* своей верхней границы (§ 3.62). Поэтому ее верхняя граница a должна быть меньше 1.

[2]) Macdonald, Proc. London Math. Soc., XXIX, 576—577 (1898).

Согласно § 6.31 избыток числа нулей функции $f(z)$ над числом нулей производной $f'(z)$ внутри C [1]) будет равен

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f''(z)}{f'(z)}\,dz=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \left(\frac{d^2\theta}{dz^2}\Big/\frac{d\theta}{dz}\right)dz.$$

Пусть s — дуга на C, измеряемая от определенной точки, и пусть ψ — угол касательной к C с осью Ox; тогда

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \left(\frac{d^2\theta}{dz^2}\Big/\frac{d\theta}{dz}\right)dz=-\frac{1}{2\pi i}\left[\lg\frac{d\theta}{dz}\right]_C=-\frac{1}{2\pi i}\left[\lg\frac{d\theta}{ds}-\lg\frac{dz}{ds}\right]_C.$$

Далее, $\lg\frac{d\theta}{ds}$ есть чисто вещественная величина, начальное и конечное значения которой совпадают, а $\lg\frac{dz}{ds}=i\psi$; поэтому избыток числа нулей функции $f(z)$ над числом нулей $f'(z)$ равен приращению $\frac{\psi}{2\pi}$ при обходе кривой C; вполне очевидно [2]), что если C — обыкновенная кривая, то ψ возрастает на 2π, когда точка касания касательной описывает кривую C, что и доказывает теорему.

Пример 1. Вывести из результата Макдональда теорему, что полином степени n имеет n нулей.

Пример 2. Показать, что если полином $f(z)$ имеет вещественные коэффициенты и если все нули его вещественны и различны, то между двумя последовательными нулями полинома $f(z)$ лежит один и только один нуль его производной $f'(z)$.

[Полиа указал, что этот результат не обязательно справедлив для функций, отличных от полиномов, что можно видеть на примере функции $(z^2-4)\exp(z^2/3)$.]

ЛИТЕРАТУРА

M. C. Jordan, Cours d'analyse, II, гл. VI, Paris, 1894.
Э. Гурса, Курс математического анализа, гл. XIV, ОНТИ, 1936.
E. Lindelöf, Le Calcul des résidus, гл. II, Paris, 1905.

Примеры

1. Пусть $\varphi(z)$ равна нулю при $z=0$, вещественна при z вещественном и аналитична в круге $|z|\leqslant 1$, и пусть $f(x, y)$ — коэффициент при i

---

[1]) $f'(z)$ не может равняться нулю на C, если C не имеет ни кратной, ни какой-либо другой особой точки, ибо если $f=\varphi+i\psi$, где φ и ψ вещественны, то в силу $i\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}$ очевидно, что при $f'(z)=0$ в какой-либо точке $\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial\psi}{\partial y}$ все равняются нулю, а это и является достаточным условием для особой точки на

$$\varphi^2+\psi^2=M^2.$$

[2]) Относительно точного доказательства см. Proc. London Math. Soc. (2), XV, 227—242 (1916).

в $\varphi(x+iy)$; показать, что при $-1<x<1$

$$\int_0^{2\pi} \frac{x\sin\theta}{1-2x\cos\theta+x^2} f(\cos\theta, \sin\theta)\, d\theta = \pi\varphi(x).$$

(Trinity, 1898)

2. Интегрируя $\frac{e^{\pm aiz}}{e^{2\pi z}-1}$ по контуру прямоугольника с вершинами 0, R, $R+i$, i (причем прямоугольник вырезан при 0 и i) и заставляя $R\to\infty$, показать, что

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{e^{2\pi x}-1}\, dx = \frac{1}{4}\,\frac{e^a+1}{e^a-1} - \frac{1}{2a}.$$

(Legendre)

3. Интегрируя по контуру § 6.24 функцию $\lg(-z)\,Q(z)$, где $Q(z)$ — такая рациональная функция, что $zQ(z)\to 0$, когда $|z|\to 0$ и когда $|z|\to\infty$, показать, что если $Q(z)$ не имеет полюсов на положительной части вещественной оси, то $\int_0^{\infty} Q(x)dx$ равен минус сумме вычетов функции $\lg(-z)Q(z)$ в полюсах функции $Q(z)$; здесь мнимая часть выражения $\lg(-z)$ берется между $\pm\pi$.

4. Показать, что при $a>0$, $b>0$

$$\int_0^{\infty} e^{a\cos bx} \sin(a\sin bx)\,\frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\pi(e^a-1).$$

5. Показать, что

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{a\sin 2x}{1-2a\cos 2x+a^2}\, x\, dx = \begin{cases} \frac{1}{4}\pi\lg(1+a) & \text{при} \quad -1<a<1, \\ \frac{1}{4}\pi\lg(1+a^{-1}) & \text{при} \quad a^2>1. \end{cases}$$

(Cauchy)

6. Показать, что

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin\varphi_1 x}{x}\,\frac{\sin\varphi_2 x}{x}\cdots\frac{\sin\varphi_n x}{x}\cos a_1 x\ldots\cos a_m x\,\frac{\sin ax}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}\varphi_1\varphi_2\ldots\varphi_n,$$

где $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, a_1, a_2, \ldots, a_m$ — вещественные, a — положительная величина и

$$a > |\varphi_1| + |\varphi_2| + \ldots + |\varphi_n| + |a_1| + \ldots + |a_m|.$$

(Strömer, Acta Math., XIX)

7. Если точка z описывает окружность C с центром a и если $f(z)$ — аналитическая на C и внутри нее, за исключением некоторого числа полюсов внутри C, то точка $u=f(z)$ опишет замкнутую кривую γ в плоскости u. Показать, что если каждому элементу кривой γ приписывается масса, пропорциональная соответствующему элементу окружности C, то центром тя-

жести γ будет точка r, где r — сумма вычетов функции $\frac{f(z)}{z-a}$ в ее полюсах, лежащих внутри C.

(Amigues, Nouv. Ann. de Math., (3), XII, стр. 142—148 (1893))

8. Показать, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+b^2)(x^2+a^2)^2} = \frac{\pi(2a+b)}{2a^3b(a+b)^2}.$$

9. Показать, что

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(a+bx^2)^n} = \frac{\pi}{2^n b^{1/2}} \frac{1\cdot 3\ldots(2n-3)}{1\cdot 2\ldots(n-1)} \frac{1}{a^{n-\frac{1}{2}}}.$$

10. Пусть $F_n(z) = \prod_{m=1}^{n-1} \prod_{p=1}^{n-1} (1 - z^{mp})$; показать, что ряд

$$f(z) = -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{F_n(zn^{-1})}{(z^n n^{-n} - 1)\, n^{n-1}}$$

будет аналитической функцией при значениях z, не равных ни одному из корней уравнений $z^n = n^n$, и что сумма вычетов функции $f(z)$ в полюсах, лежащих в кольце между двумя окружностями с центрами в начале координат и радиусами, из которых один мал, а другой заключается между n и $n+1$, будет равна числу простых чисел, меньших $n+1$.

(Laurent, Nouv. Ann. de Math. (3), XVIII, 234—241 (1899))

11. Пусть A и B представляют на комплексной плоскости два данных корня (вещественных или комплексных) уравнения $f(z) = 0$ степени n с вещественными или комплексными коэффициентами; показать, что имеется по крайней мере один корень уравнения $f'(z) = 0$ внутри окружности, центром которой служит середина отрезка AB и радиус которой равен $\frac{1}{2} AB \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}$.

(Grace, Proc. Camb. Phil. Soc., XI)

12. Показать, что при $0 < \nu < 1$

$$\frac{e^{2\pi i \nu x}}{1 - e^{2\pi i x}} = \frac{1}{2\pi i} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \frac{e^{2k\nu\pi i}}{k-x}.$$

[Рассмотреть $\int \frac{e^{(2\nu-1)z\pi i}}{\sin \pi z} \frac{dz}{z-x}$, взятый по окружности радиуса $n+\frac{1}{2}$, и перейти к пределу, устремив $n \to \infty$.]

(Kronecker, Journal für Math., CV)

13. Показать, что при $m > 0$

$$\int_0^\infty \frac{\sin^n mt}{t^n}\,dt = \frac{\pi m^{n-1}}{2^n (n-1)!}\left\{ n^{n-1} - \frac{n}{1}(n-2)^{n-1} + \right.$$
$$\left. + \frac{n(n-1)}{2!}(n-4)^{n-1} - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}(n-6)^{n-1} + \ldots \right\}.$$

Исследовать разрыв интеграла при $m = 0$.

14. Пусть $A + B + C + \ldots = 0$ и $a, b, c, \ldots$ — положительные величины; показать, что

$$\int_0^\infty \frac{A\cos ax + B\cos bx + \ldots + K\cos kx}{x}\,dx =$$
$$= -A\lg a - B\lg b - \ldots - K\lg k.$$

(Wolstenholme)

15. Рассматривая $\int \frac{e^{x(k+ti)}}{k+ti}\,dt$, взятый по прямоугольнику, вырезанному в начале координат, показать, что при $k > 0$

$$i \lim_{\rho\to\infty} \int_{-\rho}^{\rho} \frac{e^{x(k+ti)}}{k+ti}\,dt = \pi i + \lim_{\rho\to\infty} P \int_{-\rho}^{\rho} \frac{e^{xti}}{t}\,dt,$$

и вывести отсюда, пользуясь контуром примера 2 § 6.222 или его отражением относительно вещественной оси (смотря по тому, будет ли $x \geqslant 0$ или $x < 0$), что

$$\lim_{\rho\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\rho}^{\rho} \frac{e^{x(k+ti)}}{k+ti}\,dt = 2,\ 1 \text{ или } 0,$$

смотря по тому, будет ли $x > 0$, $x = 0$ или $x < 0$. [Этот интеграл известен под названием *разрывного множителя Коши*.]

16. Показать, что при $0 < a < 2$, $b > 0$, $r > 0$

$$\int_0^\infty x^{a-1} \sin\left(\frac{1}{2}a\pi - bx\right) \frac{r\,dx}{x^2 + r^2} = \frac{1}{2}\pi r^{a-1} e^{-br}.$$

17. Пусть $t > 0$, и пусть $\sum_{n=-}^{\infty} e^{-n^2\pi t} = \psi(t)$.

Рассматривая интеграл $\int \frac{e^{-z^2\pi t}}{e^{2\pi i z} - 1}\,dz$, взятый по прямоугольнику с вершинами в точках $\pm\left(N + \frac{1}{2}\right) \pm i$, где N — целое число, и заставляя $N \to \infty$, показать, что

$$\psi(t) = \int_{-\infty-i}^{\infty-i} \frac{e^{-z^2\pi t}}{e^{2\pi i z} - 1}\,dz - \int_{-\infty+i}^{\infty+i} \frac{e^{-z^2\pi t}}{e^{2\pi i z} - 1}\,dz.$$

Разложением подинтегральных функций соответственно по степеням $e^{-2\pi iz}$, $e^{2\pi iz}$ и почленным интегрированием вывести, пользуясь примером 3 § 6.22, что

$$\psi(t) = \frac{1}{(\pi t)^{1/2}} \psi\left(\frac{1}{t}\right) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx.$$

Отсюда, положив $t = 1$, показать, что $\psi(t) = t^{-1/2}\psi\left(\frac{1}{t}\right)$.

Этот результат принадлежит Пуассону (Poisson, Journal de l'Ecole polytechnique, XII, тетрадь XIX, 420 (1823)); см. также Jacobi, Journal für Math., XXXVI, 109 (1898), Ges. Werke, II, 188, 1882).

18. Показать, что при $t > 0$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2\pi t - 2n\pi a t} = t^{-\frac{1}{2}} e^{\pi a^2 t} \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2\pi}{t}} \cos 2n\pi a \right\}$$

(Poisson, Mém. de l'Acad. des Sci., VI, 592 (1827); Jacobi, Journal für Math., III, 403—404 (1828), Ges. Werke, I, 264—265, 1881 и Landsberg, Journal für Math., CXI, 234—253 (1893), см. также § 21.51).

ГЛАВА 7

РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ В БЕСКОНЕЧНЫЕ РЯДЫ

7.1. Формула Дарбу[1])

Пусть $f(z)$ — аналитическая во всех точках отрезка, соединяющего a с z, и $\varphi(t)$ — произвольный полином степени n от t.

Тогда при $0 \leqslant t \leqslant 1$ дифференцированием получаем

$$\frac{d}{dt}\sum_{m=1}^{n}(-1)^m(z-a)^m\varphi^{(n-m)}(t)f^{(m)}[a+t(z-a)] =$$
$$= -(z-a)\varphi^{(n)}(t)f'[a+t(z-a)] +$$
$$+(-1)^n(z-a)^{n+1}\varphi(t)f^{(n+1)}[a+t(z-a)].$$

Замечая, что $\varphi^{(n)}(t)$ — постоянная, равная $\varphi^{(n)}(0)$, и интегрируя по t от 0 до 1, получим

$$\varphi^{(n)}(0)\{f(z)-f(a)\} =$$
$$= \sum_{m=1}^{n}(-1)^{m-1}(z-a)^m\{\varphi^{(n-m)}(1)f^{(m)}(z)-\varphi^{(n-m)}(0)f^{(m)}(a)\} +$$
$$+(-1)^n(z-a)^{n+1}\int_0^1\varphi(t)f^{(n+1)}[a+t(z-a)]\,dt,$$

что и представляет собой искомую формулу.

Ряд Тейлора можно получить как частный случай этой формулы, положив в ней $\varphi(t) = (t-1)^n$ и заставляя $n \to \infty$.

Пример. Заменяя в формуле Дарбу n на $2n$ и беря $\varphi(t) = t^n(t-1)^n$, получить разложение (предполагая, что оно сходится)

$$f(z)-f(a) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(z-a)^n}{2^n n!}\{f^{(n)}(z)+(-1)^{n-1}f^{(n)}(a)\}$$

и найти выражение n-го остаточного члена.

---

[1]) Darboux, Journal de Math. (3), II, 271 (1876).

7.2. Числа и полиномы Бернулли

Функция $\frac{1}{2} z \operatorname{ctg} \frac{1}{2} z$ — аналитическая при $|z| < 2\pi$, и так как она четная, то может быть разложена в ряд Маклорена следующим образом:

$$\frac{1}{2} z \operatorname{ctg} \frac{1}{2} z = 1 - B_1 \frac{z^2}{2!} - B_2 \frac{z^4}{4!} - B_3 \frac{z^6}{6!} - \ldots$$

Коэффициент B_n называется n-м *числом Бернулли* [1]. Можно показать, что [2])

$$B_1 = \frac{1}{6}, \quad B_2 = \frac{1}{30}, \quad B_3 = \frac{1}{42}, \quad B_4 = \frac{1}{30}, \quad B_5 = \frac{5}{66}, \ \ldots$$

Эти числа могут быть выражены определенными интегралами. В самом деле, согласно примеру 2 гл. 6 (стр. 172)

$$\int_0^\infty \frac{\sin px\, dx}{e^{\pi x} - 1} = -\frac{1}{2p} + \frac{i}{2} \operatorname{ctg} ip =$$

$$= -\frac{1}{2p} + \frac{1}{2p} \left\{ 1 + B_1 \frac{(2p)^2}{2!} - B_2 \frac{(2p)^4}{4!} + \ldots \right\}.$$

Но поскольку интеграл

$$\int_0^\infty \frac{x^n \sin\left(px + \frac{1}{2} n\pi\right)}{e^{\pi x} - 1} dx$$

равномерно сходится (по признаку Валле-Пуссена) вблизи $p = 0$, то по следствию § 4.44 мы можем дифференцировать обе части этого соотношения любое число раз и затем положить $p = 0$; проделав это и положив $2t = x$, получим

$$B_n = 4n \int_0^\infty \frac{t^{2n-1}\, dt}{e^{2\pi t} - 1}.$$

Другое доказательство этой формулы, основанное на интегрировании по контуру, дано Карда (C a r d a, Monatshefte für Math. und Phys., V, 321—324 (1894)).

П р и м е р. Показать, что

$$B_n = \frac{2n}{\pi^{2n}(2^{2n} - 1)} \int_0^\infty \frac{x^{2n-1} dx}{\operatorname{sh} x} > 0.$$

---

[1]) Эти числа были введены Яковом Бернулли (Jakob Bernoulli) в его «Ars Conjectandi», стр. 97 (опубликовано после его смерти, 1713).

[2]) Таблицы первых шестидесяти двух чисел Бернулли даны Адамсом (A d a m s, Brit. Ass. Reports, 1877); первые девять значащих цифр первых 250 чисел Бернулли были потом опубликованы Глешером (G l a i s h e r, Trans. Camb. Phil. Soc., XII, 384—391 (1879)).

Рассмотрим теперь функцию $t\frac{e^{zt}-1}{e^t-1}$, которую можно разложить в ряд Маклорена по степеням t при $|t|<2\pi$.

Полином Бернулли[1]) *порядка* n определяется как коэффициент при $\frac{t^n}{n!}$ в этом разложении. Он обозначается через $\varphi_n(z)$, так что

$$t\frac{e^{zt}-1}{e^t-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n(z)\,t^n}{n!}.$$

Эти полиномы обладают многочисленными важными свойствами. Заменяя z на $z+1$ в предыдущем соотношении и вычитая первоначальное выражение из вновь полученного, найдем, что

$$te^{zt}=\sum_{n=1}^{\infty}\{\varphi_n(z+1)-\varphi_n(z)\}\frac{t^n}{n!}.$$

Сравнивая коэффициенты при t^n в обеих частях этого равенства, получим

$$nz^{n-1}=\varphi_n(z+1)-\varphi_n(z),$$

что представляет собой уравнение в конечных разностях, которому удовлетворяет функция $\varphi_n(z)$.

Явное выражение для полиномов Бернулли может быть получено следующим образом. Мы имеем

$$e^{zt}-1=zt+\frac{z^2t^2}{2!}+\frac{z^3t^3}{3!}+\ldots$$

и

$$\frac{t}{e^t-1}=\frac{t}{2i}\operatorname{ctg}\frac{t}{2i}-\frac{t}{2}=1-\frac{t}{2}+\frac{B_1t^2}{2!}-\frac{B_2t^4}{4!}+\ldots$$

Отсюда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n(z)\,t^n}{n!}=\left\{zt+\frac{z^2t^2}{2!}+\frac{z^3t^3}{3!}+\ldots\right\}\times$$
$$\times\left\{1-\frac{t}{2}+\frac{B_1t^2}{2!}-\frac{B_2t^4}{4!}+\ldots\right\}.$$

Сравнивая коэффициенты при t^n (§ 3.73), получим

$$\varphi_n(z)=z^n-\frac{1}{2}nz^{n-1}+C_n^2B_1z^{n-2}-C_n^4B_2z^{n-4}+C_n^6B_3z^{n-6}-\ldots;$$

последним будет член с z или с z^2, а C_n^2, C_n^4, ... — биномиальные коэффициенты; это выражение представляет собой ряд Маклорена для n-го полинома Бернулли.

---

[1]) Это название было дано Раабе (Raabe, Journal für Math., XLII, 348 (1851)). Подробный обзор свойств полиномов Бернулли дан Нёрлундом [Nörlund, Acta Math., XLIII, 121—196 (1920)].

Если z — целое число, то из уравнения в конечных разностях получается

$$\frac{\varphi_n(z)}{n} = 1^{n-1} + 2^{n-1} + \ldots + (z-1)^{n-1}.$$

Ряд Маклорена для выражения в правой части был дан Бернулли.

Пример. Показать, что при $n > 1$

$$\varphi_n(z) = (-1)^n \varphi_n(1-z).$$

7.21. Разложение Эйлера—Маклорена

В формуле Дарбу (§ 7.1) за $\varphi(t)$ примем $\varphi_n(t)$, где $\varphi_n(t)$ — n-й полином Бернулли.

Дифференцируя равенство

$$\varphi_n(t+1) - \varphi_n(t) = nt^{n-1}$$

$n-k$ раз, будем иметь

$$\varphi_n^{(n-k)}(t+1) - \varphi_n^{(n-k)}(t) = n(n-1)\ldots kt^{k-1}.$$

Положив $t=0$, получим $\varphi_n^{(n-k)}(1) = \varphi_n^{(n-k)}(0)$. Из ряда Маклорена для $\varphi_n(z)$ имеем при $k \geqslant 0$

$$\varphi_n^{(n-2k-1)}(0) = 0, \qquad \varphi_n^{(n-2k)}(0) = (-1)^{k-1}\frac{n!}{(2k)!}B_k,$$

$$\varphi_n^{(n-1)}(0) = -\frac{1}{2}n!, \qquad \varphi_n^{(n)}(0) = n!$$

Подставляя эти значения для $\varphi_n^{(n-k)}(0)$ и $\varphi_n^{(n-k)}(1)$ в формулу Дарбу, получим формулу Эйлера — Маклорена [1])

$$(z-a)f'(a) = f(z) - f(a) - \frac{z-a}{2}\{f'(z) - f'(a)\} +$$
$$+ \sum_{m=1}^{n-1} \frac{(-1)^{m-1}B_m(z-a)^{2m}}{(2m)!}\{f^{(2m)}(z) - f^{(2m)}(a)\} -$$
$$- \frac{(z-a)^{2n+1}}{(2n)!}\int_0^1 \varphi_{2n}(t) f^{(2n+1)}\{a + (z-a)t\}\,dt.$$

---

[1]) История формулы дается у Барнса (Barnes, Proc. London Math. Soc. (2), III, 253 (1905)). Она была открыта Эйлером (1732), но своевременно не была опубликована. Эйлер сообщил ее (9 июня 1736) Стирлингу, который ответил (16 апреля 1738), что она включает его собственную теорему (см. § 12.33) как частный случай, а также, что общая теорема открыта Маклореном; Эйлер в пространном ответе отказывается от приоритета. Теорема была опубликована Эйлером (Euler, Comm. Acad. Imp. Petrop., VI, 68—97 (1732), вышло из печати в 1738) и Маклореном в 1742 г. (Maclaurin, Treatise on fluxions, стр. 672). Информацией относительно корреспонденции между Эйлером и Стирлингом мы обязаны Туиди (C. Tweedie).

В некоторых случаях последний член стремится к нулю, когда $n \to \infty$, и мы можем, таким образом, получить бесконечный ряд для $f(z) - f(a)$.

Написав ω вместо $z - a$ и $F(x)$ вместо $f'(x)$, перепишем последнюю формулу в виде

$$\int_a^{a+\omega} F(x)\,dx = \frac{1}{2}\,\omega\,\{F(a) + F(a+\omega)\} +$$

$$+ \sum_{m=1}^{n-1} \frac{(-1)^m B_m \omega^{2m}}{(2m)!} \{F^{(2m-1)}(a+\omega) - F^{(2m-1)}(a)\} +$$

$$+ \frac{\omega^{2n+1}}{(2n)!} \int_0^1 \varphi_{2n}(t)\, F^{(2n)}(a+\omega t)\,dt\,.$$

Если напишем в этой формуле $a+\omega$, $a+2\omega$, $a+(r-1)\omega$ вместо a и сложим, то получим

$$\int^{a+r\omega} F(x)\,dx =$$

$$= \omega\left\{\frac{1}{2}\,F(a) + F(a+\omega) + F(a+2\omega) + \ldots + \frac{1}{2}\,F(a+r\omega)\right\} +$$

$$+ \sum_{m=1}^{n-1} \frac{(-1)^m B_m \omega^{2m}}{(2m)!} \{F^{(2m-1)}(a+r\omega) - F^{(2m-1)}(a)\} + R_n,$$

где

$$R_n = \frac{\omega^{2n+1}}{(2n)!} \int_0^1 \varphi_{2n}(t) \left\{\sum_{m=0}^{r-1} F^{(2n)}(a+m\omega+\omega t)\right\} dt.$$

Эта последняя формула весьма важна для численного вычисления определенных интегралов. Она годна в случае, когда $F(x)$ — аналитическая во всех точках отрезка, соединяющего a с $a+r\omega$.

Пример 1. Пусть $f(z)$ — нечетная функция от z; показать, что

$$zf'(z) = f(z) + \sum_{m=2}^{n} (-1)^m \frac{B_{m-1}(2z)^{2m-2}}{(2m-2)!} f^{(2m-2)}(z) -$$

$$- \frac{2^{2n} z^{2n+1}}{(2n)!} \int_0^1 \varphi_{2n}(t)\, f^{(2n+1)}(-z+2zt)\,dt.$$

Пример 2. Показать интегрированием по частям, что остаточный член после n членов разложения $\frac{1}{2} z \operatorname{ctg} \frac{1}{2} z$ может быть представлен в форме

$$\frac{(-1)^{n-1} z^{2n+1}}{(2n)! \sin z} \int_0^1 \varphi_{2n}(t) \cos zt \, dt.$$

(Math. Trip. 1904)

7.3. Теорема Бюрмана[1])

Рассмотрим теперь несколько теорем, цель которых — *разложение некоторой функции по степеням другой функции.*

Пусть $\varphi(z)$ — аналитическая функция от z в замкнутой области S; пусть, далее, a будет внутренней точкой этой области и

$$\varphi(a) = b.$$

Предположим также, что $\varphi'(a) \neq 0$. Тогда теорема Тейлора дает разложение

$$\varphi(z) - b = \varphi'(a)(z-a) + \frac{\varphi''(a)}{2!}(z-a)^2 + \ldots,$$

и если является законным обращение этого ряда, то мы получим ряд

$$z - a = \frac{1}{\varphi'(a)} \{\varphi(z) - b\} - \frac{1}{2} \frac{\varphi''(a)}{\{\varphi'(a)\}^3} \{\varphi(z) - b\}^2 + \ldots,$$

выражающий z как аналитическую функцию переменной $\{\varphi(z) - b\}$ для достаточно малых значений $|z - a|$. Если теперь $f(z)$ — аналитическая функция вблизи $z = a$, то отсюда следует, что $f(z)$ будет также аналитической функцией от $\{\varphi(z) - b\}$ при $|z - a|$ достаточно малом; таким образом, мы будем иметь разложение вида

$$f(z) = f(a) + a_1 \{\varphi(z) - b\} + \frac{a_2}{2!} \{\varphi(z) - b\}^2 + \frac{a_3}{3!} \{\varphi(z) - b\}^3 + \ldots$$

Коэффициенты этого разложения даются следующей теоремой, известной под названием *теоремы Бюрмана.*

Пусть $\psi(z)$ — функция от z, определяемая формулой

$$\psi(z) = \frac{z - a}{\varphi(z) - b},$$

тогда аналитическая функция $f(z)$ может быть представлена в определенной области значений z в виде

$$f(z) = f(a) + \sum_{m=1}^{n-1} \frac{\{\varphi(z) - b\}^m}{m!} \frac{d^{m-1}}{da^{m-1}} [f'(a) \{\psi(a)\}^m] + R_n,$$

---

[1]) Bürmann, Mémoires de l'Institut, II, 13 (1799). См. также Dixon, Proc. London Math. Soc., XXXIV, 151—153 (1902).

где

$$R_n = \frac{1}{2\pi i} \int_a^z \int_\gamma \left[\frac{\varphi(z)-b}{\varphi(t)-b}\right]^{n-1} \frac{f'(t)\,\varphi'(z)\,dt\,dz}{\varphi(t)-\varphi(z)}$$

и γ — *контур на плоскости* t, *содержащий внутри точки* a *и* z *и такой, что если* ζ *будет какой-либо точкой внутри него, то уравнение* $\varphi(t)=\varphi(\zeta)$ *не имеет иных корней ни на контуре, ни внутри него, кроме*[1]) *простого корня* $t=\zeta$.

Переходя к доказательству, имеем

$$f(z)-f(a)=\int_a^z f'(\zeta)\,d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_a^z\int_\gamma \frac{f'(t)\,\varphi'(\zeta)\,dt\,d\zeta}{\varphi(t)-\varphi(\zeta)}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_a^z\int_\gamma \frac{f'(t)\,\varphi'(\zeta)\,dt\,d\zeta}{\varphi(t)-b}\left[\sum_{m=0}^{n-2}\left\{\frac{\varphi(\zeta)-b}{\varphi(t)-b}\right\}^m+\right.$$

$$\left.+\frac{\{\varphi(\zeta)-b\}^{n-1}}{\{\varphi(t)-b\}^{n-2}\{\varphi(t)-\varphi(\zeta)\}}\right].$$

Но согласно § 4.3

$$\frac{1}{2\pi i}\int_a^z\int_\gamma\left[\frac{\varphi(\zeta)-b}{\varphi(t)-b}\right]^m\frac{f'(t)\,\varphi'(\zeta)\,dt\,d\zeta}{\varphi(t)-b}=$$

$$=\frac{\{\varphi(z)-b\}^{m+1}}{2\pi i\,(m+1)}\int_\gamma\frac{f'(t)\,dt}{\{\varphi(t)-b\}^{m+1}}=$$

$$=\frac{\{\varphi(z)-b\}^{m+1}}{2\pi i\,(m+1)}\int_\gamma\frac{f'(t)\,\{\psi(t)\}^{m+1}\,dt}{(t-a)^{m+1}}=$$

$$=\frac{\{\varphi(z)-b\}^{m+1}}{(m+1)!}\,\frac{d^m}{da^m}\left[f'(a)\,\{\psi(a)\}^{m+1}\right].$$

Поэтому, заменяя m на $m-1$, получим

$$f(z)=f(a)+\sum_{m=1}^{n-1}\frac{\{\varphi(z)-b\}^m}{m!}\,\frac{d^{m-1}}{da^{m-1}}\left[f'(a)\,\{\psi(a)\}^m\right]+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_a^z\int_\gamma\left[\frac{\varphi(\zeta)-b}{\varphi(t)-b}\right]^{n-1}\frac{f'(t)\,\varphi'(\zeta)\,dt\,d\zeta}{\varphi(t)-\varphi(\zeta)}.$$

---

[1]) Предполагается, что такой контур может быть выбран, если $|z-a|$ будет достаточно малым; см. § 7.31.

Если последний интеграл стремится к нулю, когда $n \to \infty$, то мы можем правую часть этого соотношения записать в виде бесконечного ряда.

Пример 1. Доказать, что

$$z = a + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} C_n (z-a)^n e^{n(z^2-a^2)}}{n!},$$

где

$$C_n = (2na)^{n-1} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1!}(2na)^{n-3} + \\ + \frac{n^2(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2!}(2na)^{n-5} - \ldots$$

Чтобы получить это разложение, положим в разложении Бюрмана

$$f(z) = z, \quad \varphi(z) - b = (z-a)e^{z^2-a^2}, \quad \psi(z) = e^{a^2-z^2};$$

тогда будем иметь

$$z = a + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}(z-a)^n e^{n(z^2-a^2)} \left\{ \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} e^{n(a^2-z^2)} \right\}_{z=a}$$

Но, положив $z=a+t$, получим $\left\{ \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} e^{n(a^2-z^2)} \right\}_{z=a} = \left\{ \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} e^{-n(2at+t^2)} \right\}_{t=0} =$

$= (n-1)! \times$ коэффициент при t^{n-1} в разложении функции $e^{-nt(2a+t)} =$

$= (n-1)! \times$ коэффициент при t^{n-1} в $\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r n^r t^r (2a+t)^r}{r!} =$

$$= (n-1)! \times \sum_{r=0}^{n-1} \frac{(-1)^r n^r (2a)^{2r-n+1}}{(n-1-r)!\,(2r-n+1)!}.$$

Наибольшим значением r, принимаемым в сумме, будет $r = n-1$. Располагая поэтому сумму по убывающим индексам r, начиная с $r = n-1$, получим

$$\left\{ \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} e^{n(a^2-z^2)} \right\}_{z=a} = \\ = (-1)^{n-1} \left\{ (2na)^{n-1} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1!}(2na)^{n-3} + \ldots \right\} = (-1)^{n-1} C_n,$$

что и дает требуемый результат.

Пример 2. Получить разложение

$$z^2 = \sin^2 z + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \sin^4 z + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{1}{3} \sin^6 z + \ldots$$

Пример 3. Пусть прямая p проходит через начало координат на плоскости z перпендикулярно к прямой, соединяющей начало координат с какой-либо точкой a. Показать, что если z — любая точка на плоскости z, лежащая с той же самой стороны от прямой p, что и a, то

$$\lg z = \lg a + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m+1} \left(\frac{z-a}{z+a} \right)^{2m+1}$$

7.31. Обобщение теоремы Бюрмана, данное Тейшейра

В предыдущем параграфе мы не исследовали подробно условия сходимости ряда Бюрмана по тем соображениям, что предполагали установить вскоре более общую теорему; это обобщение стоит в том же отношении к только что данной теореме, в каком теорема Лорана стоит к теореме Тейлора, а именно: в последнем параграфе мы занимались разложением функции только по *положительным* степеням другой функции, между тем как теперь мы рассмотрим разложение функции *по положительным и отрицательным* степеням другой функции.

Общая теорема принадлежит Тейшейра[1]), изложению которого мы и следуем в этом параграфе.

Предположим (I), что $f(z)$ — аналитическая функция от z в кольцеобразной области A, ограниченной наружной кривой C и внутренней кривой c; (II) что $\theta(z)$ — аналитическая функция внутри и на самом контуре C и имеет только один нуль внутри этого контура, причем этот нуль простой; (III) что x — данная точка внутри A; (IV) что для всех точек z на C мы имеем

$$|\theta(x)| < |\theta(z)|,$$

а для всех точек z на c имеем

$$|\theta(x)| > |\theta(z)|.$$

Уравнение

$$\theta(z) - \theta(x) = 0$$

имеет в этом случае единственный простой корень $z = x$ внутри C, как это видно из соотношения[2])

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{\theta'(z)\,dz}{\theta(z)-\theta(x)} = \frac{1}{2\pi i}\left[\int\limits_C \frac{\theta'(z)}{\theta(z)}\,dz + \theta(x)\int\limits_C \frac{\theta'(z)}{\{\theta(z)\}^2}\,dz + \ldots\right] = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{\theta'(z)\,dz}{\theta(z)},$$

в котором левая и правая части представляют соответственно число корней рассматриваемого уравнения (§ 6.31) и число корней уравнения $\theta(z) = 0$, содержащихся внутри C.

---

[1]) Teixeira, Journal für Math., CXXII, 97—123 (1900). См. также Bateman, Trans. Amer. Math. Soc., XXVIII, 346—356 (1926).

[2]) Разложение справедливо согласно § 4.7, ибо $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{\theta(x)}{\theta(z)}\right\}^n$ равномерно сходится, когда z лежит на C.

Теорема Коши дает поэтому

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\left[\int\limits_C \frac{f(z)\,\theta'(z)\,dz}{\theta(z)-\theta(x)}-\int\limits_c \frac{f(z)\,\theta'(z)\,dz}{\theta(z)-\theta(x)}\right].$$

Интегралы в этом выражении могут быть разложены, так же как в теореме Лорана, по степеням $\theta(x)$ по формулам

$$\int\limits_C \frac{f(z)\,\theta'(z)\,dz}{\theta(z)-\theta(x)}=\sum_{n=0}^{\infty}\{\theta(x)\}^n\int\limits_C \frac{f(z)\,\theta'(z)\,dz}{\{\theta(z)\}^{n+1}},$$

$$\int\limits_c \frac{f(z)\,\theta'(z)\,dz}{\theta(z)-\theta(x)}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\{\theta(x)\}^n}\int\limits_c f(z)\,\{\theta(z)\}^{n-1}\,\theta'(z)\,dz.$$

Таким образом, мы имеем формулу

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\{\theta(x)\}^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_n}{\{\theta(x)\}^n},$$

где

$$A_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(z)\,\theta'(z)\,dz}{\{\theta(z)\}^{n+1}},\quad B_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_c f(z)\,\{\theta(z)\}^{n-1}\,\theta'(z)\,dz.$$

Интегрированием по частям мы получаем при $n\neq 0$

$$A_n=\frac{1}{2\pi i n}\int\limits_C \frac{f'(z)}{\{\theta(z)^n\}}\,dz,\quad B_n=\frac{-1}{2\pi i n}\int\limits_c \{\theta(z)\}^n f'(z)\,dz.$$

Это и дает разложение функции $f(x)$ по положительным и отрицательным степеням $\theta(x)$, годное для всех точек x внутри кольцеобразной области A[1]).

Если нули и полюсы функций $f(z)$ и $\theta(z)$ внутри C известны, то A_n и B_n могут быть вычислены по методам § 5.22 или § 6.1.

Пример 1. Показать, что при $|x|<1$

$$x=\frac{1}{2}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)+\frac{1}{2\cdot 4}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^3+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^5+\ldots$$

Показать также, что при $|x|>1$ правая часть представляет x^{-1}.

Пример 2. Пусть $S_{2n}^{(m)}$ обозначает сумму всех произведений чисел $2^2, 4^2, 6^2, \ldots, (2n-2)^2$, взятых по m; показать, что

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{\sin z}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+2)!}\left\{\frac{1}{2n+3}-\frac{S_{2(n+1)}^{(1)}}{2n+1}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{(-1)^n S_{2(n+1)}^{(n)}}{3}\right\}(\sin z)^{2n+1}$$

---

[1]) Контур c в интеграле, определяющем B_n, можно заменить на C. (*Прим. ред.*)

и разложение справедливо для всех значений z, представляемых точками внутри того из овалов, представляемых уравнением $|\sin z| = 1$, который содержит точку $z = 0$.

(Teixeira)

7.32. Теорема Лагранжа

Предположим теперь, что функция $f(z)$ § 7.31 аналитическая во всех точках внутри C, и пусть $\theta(x) = (x - a)\theta_1(x)$. Тогда функция $\theta_1(x)$ будет аналитической и не равной нулю на самом контуре C и внутри него и можно обойтись без контура c. Поэтому формулы, дающие A_n и B_n, превращаются согласно § 5.22 и § 6.1 в

$$A_n = \frac{1}{2\pi i n} \int\limits_C \frac{f'(z)\,dz}{(z-a)^n \{\theta_1(z)\}^n} = \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{da^{n-1}} \left\{ \frac{f'(a)}{\theta_1^n(a)} \right\} (n \geqslant 1),$$

$$A_0 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(z)\,\theta'(z)}{\theta_1(z)} \frac{dz}{z-a} = f(a),$$

$$B_n = 0.$$

Теорема последнего параграфа принимает согласно этому следующую форму, если положить $\theta_1(z) = \dfrac{1}{\varphi(z)}$.

Пусть $f(z)$ и $\varphi(z)$ — функции от z, аналитические на контуре C, окружающем точку a, и внутри него, и пусть t таково, что для всех точек z на контуре C удовлетворяется неравенство

$$|t\varphi(z)| < |z - a|;$$

тогда уравнение

$$\zeta = a + t\varphi(\zeta),$$

рассматриваемое как уравнение относительно ζ, имеет один корень внутри контура C; далее, любая функция от ζ, аналитическая на и внутри C, может быть разложена в степенной ряд по t по формуле

$$f(\zeta) = f(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{da^{n-1}} [f'(a) \{\varphi(a)\}^n].$$

Этот результат был опубликован Лагранжем[1]) в 1770 г.

Пример 1. Внутри петли лемнискаты, окружающей a и определяемой равенством $|z(z-a)| = \dfrac{|a|^2}{4}$, уравнение

$$z - a - \frac{\alpha}{z} = 0$$

---

[1]) Lagrange, Mém. de l'Acad. de Berlin, XXIV; Oeuvres, II, 25.

при $|\alpha| < \frac{|a|^2}{4}$ будет иметь один корень ζ, разложение которого дается теоремой Лагранжа

$$\zeta = a + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{n!\,(n-1)!\,a^{2n-1}}\,\alpha^n.$$

Из элементарной теории квадратных уравнений мы знаем, что уравнение $z - a - \frac{\alpha}{z} = 0$ имеет два корня, а именно:

$$\frac{a}{2}\left\{1+\sqrt{1+\frac{4\alpha}{a^2}}\right\} \quad \text{и} \quad \frac{a}{2}\left\{1-\sqrt{1+\frac{4\alpha}{a^2}}\right\},$$

и наше разложение *представляет только первый из этих корней* [1]) — пример необходимости тщательного рассмотрения таких рядов.

Пример 2. Пусть y — тот из корней уравнения

$$y = 1 + zy^2,$$

который стремится к 1 при $z \to 0$; показать, что

$$y^n = 1 + nz + \frac{n(n+3)}{2!}z^2 + \frac{n(n+4)(n+5)}{3!}z^3 +$$
$$+ \frac{n(n+5)(n+6)(n+7)}{4!}z^4 + \frac{n(n+6)(n+7)(n+8)(n+9)}{5!}z^5 + \ldots,$$

пока $|z| < \frac{1}{4}$.

Пример 3. Пусть x — тот из корней уравнения

$$x = 1 + yx^a,$$

который стремится к 1, когда $y \to 0$; показать, что

$$\lg x = y + \frac{2a-1}{2}y^2 + \frac{(3a-1)(3a-2)}{2\cdot 3}y^3 + \ldots,$$

причем разложение справедливо при

$$|y| < |(a-1)^{a-1}a^{-a}|.$$

(McClintock)

7.4. Разложение функций некоторого класса на простейшие дроби [2])

Рассмотрим функцию $f(z)$, единственными особыми точками которой в конечной части плоскости являются простые полюсы a_1, a_2, a_3, ..., где $|a_1| \leqslant |a_2| \leqslant |a_3| \leqslant \ldots$; пусть b_1, b_2, b_3, ... — вычеты в этих полюсах. Допустим, что можно выбрать последовательность таких окружностей C_m (радиус окружности C_m обозначим R_m) с центром в O, не проходящих ни через один из полюсов, что $|f(z)|$ будет ограничен на C_m. [Как пример рассматриваемых функций можно

[1]) Второй будет вне данного контура.

[2]) Mittag-Leffler, Acta Soc. Scient. Fennicae, XI, 273—293 (1880). См. также Acta Math., IV, 1—79 (1884).

привести $\operatorname{cosec} z$, и в этом случае можно взять $R_m = \left(m + \frac{1}{2}\right)\pi$.] Предположим, далее, что $R_m \to \infty$, когда $m \to \infty$, и что верхняя граница[1]) функции $|f(z)|$ на C_m будет ограниченной, когда $m \to \infty$[2]), так что для всех точек на окружностях C_m $|f(z)| < M$, где M не зависит от m.

Если x не является полюсом функции $f(z)$, то единственными полюсами функции $\frac{f(z)}{z-x}$ будут полюсы функции $f(z)$ и точка $z = x$; тогда согласно § 6.1 будем иметь

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_m} \frac{f(z)}{z-x}\,dz = f(x) + \sum_r \frac{b_r}{a_r - x},$$

где суммирование распространяется на все полюсы, лежащие внутри C_m. Но

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_m} \frac{f(z)}{z-x}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_m} \frac{f(z)\,dz}{z} + \frac{x}{2\pi i}\int\limits_{C_m} \frac{f(z)}{z(z-x)}\,dz =$$

$$= f(0) + \sum_r \frac{b_r}{a_r} + \frac{x}{2\pi i}\int\limits_{C_m} \frac{f(z)\,dz}{z(z-x)},$$

если предположить, что функция $f(z)$ аналитическая в начале координат.

Далее, при $m \to \infty$ интеграл $\int\limits_{C_m} \frac{f(z)\,dz}{z(z-x)}$ будет $O\left(R_m^{-1}\right)$ и, таким образом, стремится к нулю, когда m стремится к бесконечности.

Поэтому, заставляя $m \to \infty$, мы получим

$$0 = f(x) - f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\left\{\frac{1}{a_n - x} - \frac{1}{a_a}\right\} - \lim_{m\to\infty} \frac{x}{2\pi i}\int\limits_{C_m} \frac{f(z)\,dz}{z(z-x)},$$

т. е.

$$f(x) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\left\{\frac{1}{x - a_n} + \frac{1}{a_n}\right\},$$

что и представляет разложение функции $f(x)$ на простейшие дроби; суммирование распространяется на *все* полюсы функции $f(x)$.

---

[1]) Которая будет функцией от m.

[2]) Конечно, R_m не обязательно должно (а часто и совсем не должно) стремиться к бесконечности непрерывно; во взятом примере $R_m = \left(m + \frac{1}{2}\right)\pi$, где m принимает только целые значения.

Если $|a_n| < |a_{n+1}|$, то этот ряд будет равномерно сходиться во всем круге $|x| \leqslant a$, где a — любая постоянная (за исключением окрестностей точек a_n). В самом деле, если R_m — радиус окружности, охватывающей точки $a_1, \ldots, a_n$, то модуль остаточного члена ряда после первых n членов будет

$$\left| \frac{x}{2\pi i} \int\limits_{C_m} \frac{f(z)\,dz}{z(z-x)} \right| < \frac{Ma}{R_m - a}$$

по оценке § 4.62, и для заданного ε мы можем взять такое n, *не зависящее от* x, что $\dfrac{Ma}{R_m - a} < \varepsilon$.

Сходимость, очевидно, будет равномерной, даже если $|a_n| \leqslant |a_{n+1}|$, если члены ряда, соответствующие полюсам с одинаковыми модулями, будут сгруппированы.

Если вместо условия $|f(z)| < M$ мы имели бы условие $|z^{-p} f(z)| < M$, где M не зависит от m, когда z лежит на C_m, а p — положительное целое число, то мы разлагали бы интеграл $\int \dfrac{f(z)\,dz}{z-x}$, положив $\dfrac{1}{z-x} = \dfrac{1}{z} + \dfrac{x}{z^2} + \ldots + \dfrac{x^{p+1}}{z^{p+1}(z-x)}$, и получили бы подобное, но несколько более сложное разложение.

Пример 1. Доказать, что

$$\operatorname{cosec} z = \frac{1}{z} + \sum (-1)^n \left(\frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{n\pi} \right),$$

причем суммирование распространяется на все положительные и отрицательные значения n.

Чтобы получить эту формулу, положим $\operatorname{cosec} z - \dfrac{1}{z} = f(z)$. Особенности этой функции расположены в точках $z = n\pi$, где n — любое положительное или отрицательное целое число. Вычет функции $f(z)$ в особой точке $n\pi$ равен $(-1)^n$, и легко видеть, что $|f(z)|$ будет ограничен на окружностях $|z| = \left(n + \dfrac{1}{2}\right)\pi$, когда $n \to \infty$.

Применяя теперь общую формулу

$$f(z) = f(0) + \sum b_n \left[\frac{1}{z - a_n} + \frac{1}{a_n} \right],$$

где b_n — вычет в особой точке a_n, имеем

$$f(z) = f(0) + \sum (-1)^n \left\{ \frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{n\pi} \right\}.$$

Но

$$f(0) = \lim_{z \to 0} \frac{z - \sin z}{z \sin z} = 0.$$

Поэтому

$$\operatorname{cosec} z = \frac{1}{z} + \sum (-1)^n \left[\frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{n\pi} \right],$$

что и представляет собой требуемое разложение.

Пример 2. Пусть $0 < a < 1$, показать, что

$$\frac{e^{az}}{e^z - 1} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z \cos 2na\pi - 4n\pi \sin 2na\pi}{z^2 + 4n^2\pi^2}.$$

Пример 3. Доказать, что

$$\frac{1}{2\pi x^2 (\operatorname{ch} x - \cos x)} = \frac{1}{2\pi x^4} - \frac{1}{e^{\pi} - e^{-\pi}} \frac{1}{\pi^4 + \frac{1}{4} x^4} +$$

$$+ \frac{2}{e^{2\pi} - e^{-2\pi}} \frac{1}{(2\pi)^4 + \frac{1}{4} x^4} - \frac{3}{e^{3\pi} - e^{-3\pi}} \frac{1}{(3\pi)^4 + \frac{1}{4} x^4} + \ldots$$

Общий член в правой части будет

$$\frac{(-1)^r r}{(e^{r\pi} - e^{-r\pi}) \left\{ (r\pi)^4 + \frac{1}{4} x^4 \right\}},$$

что представляет собой вычет в каждой из четырех особых точек r, $-r$, ri, $-ri$ функции

$$\frac{\pi z}{\left(\pi^4 z^4 + \frac{1}{4} x^4\right) (e^{\pi z} - e^{-\pi z}) \sin \pi z}.$$

Эта функция, помимо точек r, $-r$, ri, $-ri$, имеет еще следующие пять особых точек:

$$0, \quad \frac{(\pm 1 \pm i) x}{2\pi}.$$

В точке $z = 0$ вычет равен $\frac{2}{\pi x^4}$; в каждой из четырех точек $z = \frac{(\pm 1 \pm i) x}{2\pi}$ вычет равен

$$\{2\pi x^2 (\cos x - \operatorname{ch} x)\}^{-1}.$$

Поэтому

$$4 \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^r r}{e^{r\pi} - e^{-r\pi}} \frac{1}{(r\pi)^4 + \frac{1}{4} x^4} + \frac{2}{\pi x^4} - \frac{2}{\pi x^2 (\operatorname{ch} x - \cos x)} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \lim_{n \to \infty} \int_C \frac{\pi z \, dz}{\left(\pi^4 z^4 + \frac{1}{4} x^4\right) (e^{\pi z} - e^{-\pi z}) \sin},$$

где C — окружность с центром в начале координат и радиусом $n + \frac{1}{2}$ (n — целое число).

Но в точках на C подинтегральная функция есть $O(|z|^{-3})$; поэтому предел интеграла по C равен нулю.

Отсюда и из последнего соотношения вытекает требуемый результат.

Пример 4. Доказать, что

$$\sec x = 4\pi \left(\frac{1}{\pi^2 - 4x^2} - \frac{3}{9\pi^2 - 4x^2} + \frac{5}{25\pi^2 - 4x^2} - \ldots \right).$$

Пример 5. Доказать, что

$$\operatorname{cosech} x = \frac{1}{x} - 2x\left(\frac{1}{\pi^2+x^2} - \frac{1}{4\pi^2+x^2} + \frac{1}{9\pi^2+x^2} - \ldots\right).$$

Пример 6. Доказать, что

$$\operatorname{sech} x = 4\pi\left(\frac{1}{\pi^2+4x^2} - \frac{3}{9\pi^2+4x^2} + \frac{5}{25\pi^2+4x^2} - \ldots\right).$$

Пример 7. Доказать, что

$$\operatorname{cth} x = \frac{1}{x} + 2x\left(\frac{1}{\pi^2+x^2} + \frac{1}{4\pi^2+x^2} + \frac{1}{9\pi^2+x^2} + \ldots\right).$$

Пример 8. Доказать, что

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(m^2+a^2)(n^2+b^2)} = \frac{\pi^2}{ab}\operatorname{cth}\pi a\operatorname{cth}\pi b.$$

(Math. Trip., 1899)

7.5. Разложение функций некоторого класса в бесконечные произведения

Теорема последнего параграфа может быть применена к разложению некоторого класса функций в бесконечные произведения.

Пусть $f(z)$ — функция, имеющая простые нули в точках a_1, a_2, a_3, ... [1]), где $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|$ бесконечен, и пусть $f(z)$ — аналитическая для всех значений z.

Тогда $f'(z)$ будет аналитической для всех значений z (§ 5.22) и, следовательно, $\frac{f'(z)}{f(z)}$ может иметь особенности только в точках a_1, a_2, a_3, ...

По теореме Тейлора

$$f(z) = (z-a_r)f'(a_r) + \frac{(z-a_r)^2}{2}f''(a_r) + \ldots$$

и

$$f'(z) = f'(a_r) + (z-a_r)f''(a_r) + \ldots$$

Отсюда непосредственно следует, что в каждой из точек a_r функция $\frac{f'(z)}{f(z)}$ имеет простой полюс с вычетом $+1$. Если мы можем найти последовательность окружностей C_m характера, описанного в § 7.4, так что $\frac{f'(z)}{f(z)}$ будет ограничена на C_m, когда $m\to\infty$, то из разложения, данного в § 7.4, следует

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{f'(0)}{f(0)} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{z-a_n} + \frac{1}{a_n}\right\}.$$

---

[1]) Причем это единственные нули функции $f(z)$ и $a_n \neq 0$.

Так как этот ряд будет равномерно сходиться при соответствующей группировке членов (§ 7.4), то мы можем его интегрировать почленно (§ 4.7). Проделав это и взяв показательную функцию от обеих частей равенства, получим

$$f(z)=ce^{\frac{f'(0)}{f(0)}z}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{\frac{z}{a_n}}\right\},$$

где c не зависит от z.

Положив $z=0$, мы видим, что $f(0)=c$, и таким образом, общая формула принимает вид

$$f(z)=f(0)\,e^{\frac{f'(0)}{f(0)}z}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{\frac{z}{a_n}}\right\}.$$

Эта формула дает разложение в бесконечное произведение любой функции $f(z)$, удовлетворяющей высказанным условиям.

Пример 1. Рассмотрим функцию $f(z)=\frac{\sin z}{z}$, имеющую простые нули в точках $r\pi$, где r — любое положительное или отрицательное целое число.

В этом случае мы имеем $f(0)=1$, $f'(0)=0$, и теорема непосредственно дает

$$\frac{\sin z}{z}=\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1-\frac{z}{n\pi}\right)e^{\frac{z}{n\pi}}\right\}\left\{\left(1+\frac{z}{n\pi}\right)e^{-\frac{z}{n\pi}}\right\},$$

ибо легко видеть, что условие, касающееся поведения функции $\frac{f'(z)}{f(z)}$ при $|z|\to\infty$, выполнено.

Пример 2. Доказать, что

$$\left\{1+\left(\frac{k}{x}\right)^2\right\}\left\{1+\left(\frac{k}{2x-\pi}\right)^2\right\}\left\{1+\left(\frac{k}{2\pi+x}\right)^2\right\}\times$$
$$\times\left\{1+\left(\frac{k}{4\pi-x}\right)^2\right\}\left\{1+\left(\frac{k}{4\pi+x}\right)^2\right\}\ldots=\frac{\operatorname{ch}k-\cos x}{1-\cos x}.$$

(Trinity, 1899)

7.6. Теорема Вейерштрасса о бесконечных произведениях [1])

Теорема § 7.5 является частным случаем более общей теоремы, в которой характер функции $f(z)$ при $|z|\to\infty$ не так сильно ограничен.

Пусть $f(z)$ — функция от z без существенно особых точек (кроме «бесконечно удаленной точки»); пусть нули и полюсы функции $f(z)$

[1]) Weierstrass, Berliner Abh., 11—60 (1876); Math Werke II, 77—124, 1895.

лежат в точках $a_1, a_2, a_3, \ldots$, где $0 < |a_1| \leqslant |a_2| \ldots$ Пусть нуль [1]) в a_n имеет (целый) порядок m_n.

Если число нулей и полюсов не ограничено, то необходимо, чтобы $|a_n| \to \infty$, когда $n \to \infty$, ибо если бы этого не было, то точки a_n имели бы предельную точку [2]), которая была бы существенно особой точкой функции $f(z)$.

Прежде всего покажем, что можно найти такие полиномы $g_n(z)$, что произведение

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left\{\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{g_n(z)}\right\}^{m_n}\right]$$

сходится для всех [3]) конечных значений z.

Пусть K — какая-нибудь постоянная, и пусть $|z| < K$; тогда, поскольку $|a_n| \to \infty$, мы можем найти такое N, что $|a_n| > 2K$ при $n > N$.

Первые N множителей произведения не влияют на его сходимость; рассмотрим какое-нибудь значение n, большее N, и пусть

$$g_n(z) = \frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{k_n - 1}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{k_n - 1}.$$

Тогда

$$\left| -\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\left(\frac{z}{a_n}\right)^m + g_n(z)\right| = \left|\sum_{m=k_n}^{\infty}\frac{1}{m}\left(\frac{z}{a_n}\right)^m\right| <$$

$$< \left|\frac{z}{a_n}\right|^{k_n}\sum_{m=0}^{\infty}\left|\frac{z}{a_n}\right|^m < 2\left|(Ka_n^{-1})^{k_n}\right|,$$

поскольку

$$|z_n a_n^{-1}| < \frac{1}{2}.$$

Отсюда

$$\left\{\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{g_n(z)}\right\}^{m_n} = e^{u_n(z)},$$

где

$$|u_n(z)| \leqslant 2\left|m_n(Ka_n^{-1})^{k_n}\right|.$$

Далее, m_n и a_n даны, но k_n находится в нашем распоряжении; так как $\left|Ka_n^{-1}\right| < \frac{1}{2}$, то в качестве k_n можно выбрать такое наи-

---

[1]) Мы рассматриваем здесь полюс как нуль отрицательного порядка.

[2]) На основании двумерного аналога теоремы § 2.21.

[3]) Предполагается, что z не будет ни одной из тех точек a_n, для которых m_n отрицательно.

меньшее число, что $2\left|m_n\left(Ka_n^{-1}\right)^{k_n}\right| < b_n$, где $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ — какой-либо сходящийся ряд[1]) с положительными членами.

Тогда

$$\prod_{n=N+1}^{\infty}\left[\left\{\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{g_n(z)}\right\}^{m_n}\right]=\prod_{n=N+1}^{\infty}e^{u_n(z)},$$

где $|u_n(z)| < b_n$, а потому, поскольку b_n не зависит от z, произведение будет абсолютно и равномерно сходиться, когда $|z| < K$, за исключением окрестностей точек a_n.

Пусть теперь

$$F(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left\{\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{g_n(z)}\right\}^{m_n}\right].$$

Положим $G_1(z)=\dfrac{f(z)}{F(z)}$, тогда $G_1(z)$ будет целой функцией (§ 5.64) от z, не имеющей нулей.

Отсюда следует, что функция $\dfrac{1}{G_1(z)}\dfrac{d}{dz}G_1(z)$ будет аналитической для всех конечных значений z, и следовательно, по теореме Тейлора эта функция может быть выражена рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nb_n z^{n-1}$, который сходится всюду; интегрируя, получим

$$G_1(z)=ce^{G(z)},$$

где $G(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n z^n$, а c — постоянная; этот ряд сходится всюду, и следовательно, $G(z)$ является целой функцией. Поэтому окончательно получим

$$f(z)=f(0)\,e^{G(z)}\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left\{\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{g_n(z)}\right\}^{m_n}\right],$$

где $G(z)$ — некоторая целая функция, такая, что $G(0)=0$.

Примечание. Произвольный элемент $G(z)$, встречающийся в этой формуле для $f(z)$, возникает благодаря отсутствию условий относительно поведения $f(z)$ при $|z|\to\infty$.

Следствие. Если $m_n=1$, то согласно § 2.36 достаточно взять $k_n=n$.

---

[1]) Например, мы можем взять $b_n=2^{-n}$.

7.7. Разложение периодических функций некоторого класса в ряд по котангенсам

Пусть $f(z)$ — периодическая функция от z, аналитическая всюду, кроме некоторого числа простых полюсов; пусть ради удобства π — период функции $f(z)$, так что

$$f(z)=f(z+\pi).$$

Положим $z=x+iy$, и пусть $f(z)\to l$ при $y\to+\infty$ равномерно относительно x, когда $0\leqslant x\leqslant\pi$; подобным же образом пусть $f(z)\to l'$ равномерно, когда $y\to-\infty$.

Пусть полюсами функции $f(z)$ в полосе $0<x\leqslant\pi$ являются точки $a_1, a_2, \ldots, a_n$ с вычетами в них $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

Пусть, далее, $ABCD$ — прямоугольник с вершинами [1])

$$-i\rho', \quad \pi-i\rho', \quad \pi+i\rho \quad \text{и} \quad i\rho.$$

Рассмотрим интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int f(t)\operatorname{ctg}(t-z)\,dt,$$

взятый по контуру этого прямоугольника; вычет подинтегральной функции в a_r равен $c_r\operatorname{ctg}(a_r-z)$, а вычет в z равен $f(z)$. Интегралы по DA и BC взаимно уничтожаются благодаря периодичности подинтегральной функции; когда $\rho'\to\infty$, подинтегральная функция на AB стремится равномерно к $l'i$, в то время как при $\rho\to\infty$ подинтегральная функция на CD стремится равномерно к $-li$; поэтому

$$\frac{1}{2}(l'+l)=f(z)+\sum_{r=1}^{n}c_r\operatorname{ctg}(a_r-z).$$

А это значит, что мы имеем разложение

$$f(z)=\frac{1}{2}(l'+l)+\sum_{r=1}^{n}c_r\operatorname{ctg}(z-a_r).$$

Пример 1. $\operatorname{ctg}(x-a_1)\operatorname{ctg}(x-a_2)\ldots\operatorname{ctg}(x-a_n)=$

$$=\sum_{r=1}^{n}\operatorname{ctg}(a_r-a_1)\ldots{}^*\ldots\operatorname{ctg}(a_r-a_n)\operatorname{ctg}(x-a_r)+(-1)^{\frac{1}{2}n}$$

или

$$=\sum_{r=1}^{n}\operatorname{ctg}(a_r-a_1)\ldots{}^*\ldots\operatorname{ctg}(a_r-a_n)\operatorname{ctg}(x-a_r),$$

---

[1]) Если какой-либо из полюсов лежит на прямой $x=\pi$, то перенесем прямоугольник несколько вправо: ρ, ρ' берем настолько большими, чтобы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ лежали внутри прямоугольника.

смотря по тому, будет ли n четным или нечетным, знак * указывает, что множитель $\operatorname{ctg}(a_r - a_r)$ опущен.

Пример 2. Доказать, что

$$\frac{\sin(x-b_1)\sin(x-b_2)\ldots\sin(x-b_n)}{\sin(x-a_1)\sin(x-a_2)\ldots\sin(x-a_n)} =$$

$$= \frac{\sin(a_1-b_1)\ldots\sin(a_1-b_n)}{\sin(a_1-a_2)\ldots\sin(a_1-a_n)}\operatorname{ctg}(x-a_1) +$$

$$+ \frac{\sin(a_2-b_1)\ldots\sin(a_2-b_n)}{\sin(a_2-a_1)\ldots\sin(a_2-a_n)}\operatorname{ctg}(x-a_2) + \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \cos(a_1+a_2+\ldots+a_n-b_1-b_2-\ldots-b_n).$$

7.8. Теорема Бореля [1])

Пусть $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ — аналитическая функция при $|z| \leqslant r$, так что по неравенству § 5.23 $|a_n r^n| < M$, где M не зависит от n. Отсюда, если $\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n z^n}{n!}$, то $\varphi(z)$ будет целой функцией и

$$|\varphi(z)| < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M|z^n|}{r^n n!} = Me^{\frac{|z|}{r}}$$

и подобным же образом $|\varphi^{(n)}(z)| < \frac{Me^{\frac{|z|}{r}}}{r^n}$.

Рассмотрим $f_1(z) = \int_0^{\infty} e^{-t}\varphi(zt)\,dt$; этот интеграл согласно условиям § 5.32 будет аналитической функцией от z, когда $|z| < r$.

Далее, интегрируя по частям, получим

$$f_1(z) = [-e^{-t}\varphi(zt)]_0^{\infty} + z\int_0^{\infty} e^{-t}\varphi'(zt)\,dt =$$

$$= \sum_{m=0}^{n} z^m [-e^{-t}\varphi^{(m)}(zt)]_0^{\infty} + z^{n+1}\int_0^{\infty} e^{-t}\varphi^{(n+1)}(zt)\,dt.$$

Но

$$\lim_{t\to 0} e^{-t}\varphi^{(m)}(zt) = a_m, \text{ и при } |z| < r \quad \lim_{t\to\infty} e^{-t}\varphi^{(m)}(zt) = 0.$$

---

[1]) Borel, Leçons sur les séries divergentes, 94, 1901. См. также цитированные там мемуары. См. также Харди, Расходящиеся ряды, ИЛ, 1951. (*Прим. ред.*)

Поэтому

$$f_1(z) = \sum_{m=0}^{n} a_m z^m + R_n,$$

где

$$R_n| < |z^{n+1}| \int_0^\infty e^{-t} M e^{\frac{|zt|}{r}} r^{-n-1} dt = |zr^{-1}|^{n+1} M \{1 - |z| r^{-1}\}^{-1} \to 0,$$

когда $n \to \infty$.

Следовательно, при $|z| < r$

$$f_1(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m = f(z),$$

и таким образом,

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-t} \varphi(zt)\, dt,$$

где $\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n z^n}{n!}$; функция $\varphi(z)$ называется *функцией, ассоциированной по Борелю с* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

Если $S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ и $\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n z^n}{n!}$ и если мы можем установить соотношение $S = \int_0^\infty e^{-t} \varphi(t)\, dt$, то говорят (§ 8.41), что ряд S «*суммируем* (B)», следовательно, доказанная теорема показывает, что ряд Тейлора, представляющий аналитическую функцию, будет суммируем (B).

7.81. Интеграл Бореля и аналитическое продолжение

Докажем теперь теорему Бореля, состоящую в том, что интеграл Бореля представляет аналитическую функцию в более широкой области, чем внутренняя область окружности $|z| = r$.

Эта расширенная область получается следующим образом: возьмем особые точки $a, b, c, \ldots$ функции $f(z)$ и проведем через каждую из них прямую, перпендикулярную к прямой, соединяющей эту особую точку с началом координат. Проведенные таким образом прямые разделят плоскость на области, из которых одна будет многоугольником, содержащим внутри начало координат.

Тогда интеграл Бореля представит аналитическую функцию (которая по § 5.5 и § 7.8 будет, очевидно, определяться функцией $f(z)$ и ее продолжением) *всюду внутри этого многоугольника.* Читатель должен заметить, что это — первая настоящая формула, полученная для аналитического продолжения функции, если не считать тривиальной формулы в примере § 5.5.

Действительно, возьмем какую-нибудь точку P (рис. 2) с аффиксом ζ внутри рассматриваемого многоугольника; тогда окружность, построенная на OP как на диаметре, не будет содержать особых точек ни на себе самой, ни внутри [1]; следовательно, мы можем построить немного большую концентрическую окружность C [2]), не имеющую ни одной особой точки ни внутри, ни на себе самой. Тогда в силу § 5.4

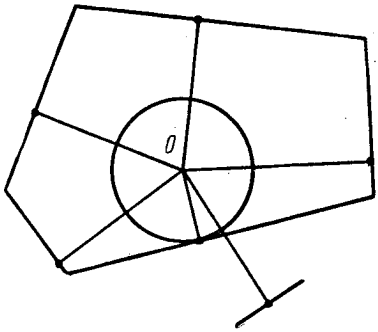

Рис. 2.

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz$$

и, таким образом,

$$\varphi(\zeta t) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\zeta^n t^n}{n!}\int\limits_C \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz.$$

Но ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\zeta^n t^n f(z)}{n!\,z^{n+1}}$ будет равномерно сходящимся (§ 3.34) на C, так как $f(z)$ ограничена, а $|z| \geqslant \delta > 0$, где δ не зависит от z; поэтому согласно § 4.7

$$\varphi(\zeta t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C z^{-1} f(z)\exp(\zeta t z^{-1})\,dz.$$

Таким образом, при t положительном $|\varphi(\zeta t)| < F(\zeta)\,e^{\lambda t}$, где $F(\zeta)$ ограничена в любой замкнутой области, лежащей полностью *внутри* многоугольника [3]), и независима от t; λ будет наибольшим значением вещественной части $\frac{\zeta}{z}$ на C.

Если мы проведем окружность, описываемую точкой $\frac{z}{\zeta}$, то увидим, что вещественная часть выражения $\frac{\zeta}{z}$ будет наибольшей, когда z лежит на конце диаметра, проходящего через ζ вблизи точки ζ, и таким образом, значение λ равно $|\zeta|\{|\zeta| + \delta\}^{-1} < 1$.

Подобным же образом мы можем получить неравенство для $\varphi'(\zeta t)$, а отсюда согласно условиям § 5.32 найдем, что функция $\int\limits_0^{\infty} e^{-t}\varphi(\zeta t)\,dt$ — аналитическая и, очевидно, однозначная функция от ζ.

А это и есть результат, сформулированный выше.

---

[1]) Читатель увидит это из чертежа; ибо, если бы существовала такая особая точка, то соответствующая ей прямая прошла бы между O и P или через P, т. е. P была бы расположена вне многоугольника или на его границе.

[2]) Разность радиусов окружностей обозначим через δ.

[3]) Окружность C зависит от ζ и от выбора δ; число δ можно выбрать непрерывно зависящим от ζ так, что $F(\zeta) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_C \left|\frac{f(z)}{z}\right| |dz|$ будет непрерывна в многоугольнике. (*Прим. ред.*)

7.82. Разложение в ряд обратных факториалов

Один из способов разложения функций, который, после применения Николем [1]) и Стирлингом [2]) в XVIII столетии, был систематически исследован Шлёмильхом [3]) в 1863 г., заключается в разложении в ряд обратных факториалов.

Чтобы получить такое разложение функции, аналитической при $|z| > r$, допустим, что $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}$, и воспользуемся формулой

$$f(z) = \int_0^{\infty} z e^{-tz} \varphi(t)\, dt \text{ [4])},$$

где $\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n t^n}{n!}$; эта формула может быть получена аналогично формуле в § 7.8. Видоизменим ее, положив $e^{-t} = 1 - \xi$, $\varphi(t) = F(\xi)$; тогда $f(z) = \int_0^1 z(1-\xi)^{z-1} F(\xi)\, d\xi$.

Если $t = u + iv$ и t заключено в полосе $-\pi < v < \pi$, то t будет однозначной функцией от ξ, а $F(\xi)$ — аналитической функцией от ξ; при этом ξ ограничено неравенством $-\pi < \arg(1-\xi) < \pi$.

Далее, внутренняя область окружности $|\xi| = 1$ соответствует внутренней области кривой, определяемой равенством

$$t = -\lg\left(2\cos\frac{1}{2}\theta\right) - \frac{1}{2} i\theta$$

(мы полагаем $\xi = \exp\{i(\theta + \pi)\}$); внутри же этой кривой

$$|t| - \operatorname{Re} t \leqslant [\{\operatorname{Re} t\}^2 + \pi^2]^{\frac{1}{2}} - \operatorname{Re} t \to 0,$$

когда $\operatorname{Re} t \to \infty$.

Отсюда следует, что при $|\xi| \leqslant 1$ $|F(\xi)| < Me^{r|t|} < M_1 |e^{rt}|$, где M_1 не зависит от t; таким образом, $F(\xi) < M_1 |(1-\xi)^{-r}|$.

---

[1]) Nicole, Mém. de l'Acad. des Sci., Paris (1717); см. Tweedie, Proc. Edin. Math. Soc., XXXVI (1918).

[2]) Stirling, Methodus Differentialis, London, 1730.

[3]) Schlömilch, Compendium der höheren Analysis. Более современные исследования принадлежат Клёйверу (Kluyver), Нильсену (Hielsen) и Пинкерле (Pincherle). См. Comptes Rendus, CXXXIII (1901); CXXXIV (1902); Annales de l'École norm. sup. (3), XIX, XXII, XXIII; Rendiconti dei Lincei (5), XI (1902) и Palermo Rendiconti, XXXIV (1912). Свойства функций, определяемых рядами обратных факториалов, изучены в весьма важной работе Нёрлунда (Nörlund), Acta Math., XXXVII, 327—387 (1914).

[4]) Этот интеграл сходится при $\operatorname{Re} z > r$. (*Прим. ред.*)

Предположим теперь, что $0 \leqslant \xi < 1$, тогда по неравенству § 5.23

$$|F^{(n)}(\xi)| < M_2 n! \rho^{-n},$$

где M_2 — верхняя граница $|F(z)|$ на окружности с центром ξ и радиусом $\rho < 1 - \xi$.

Положив $\rho = \frac{n}{n+1}(1-\xi)$ и замечая, что[1] $(1+n^{-1})^n < e$, мы найдем

$$|F^{(n)}(\xi)| < M_1 \left[1 - \left\{\xi + \frac{n}{n+1}(1-\xi)\right\}\right]^{-r} n! \left\{\frac{n(1-\xi)}{n+1}\right\}^{-n} <$$

$$< M_1 e (n+1)^r n! (1-\xi)^{-r-n}.$$

Вспоминая, что, согласно § 4.5, $\int\limits_0^1$ обозначает $\lim\limits_{\varepsilon \to +0} \int\limits_0^{1-\varepsilon}$, и повторно интегрируя по частям, будем иметь

$$f(z) = \lim_{\varepsilon \to +0} \left\{ [-(1-\xi)^z F(\xi)]_0^{1-\varepsilon} + \int\limits_0^{1-\varepsilon} (1-\xi)^z F'(\xi)\, d\xi \right\} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ [-(1-\xi)^z F(\xi)]_0^{1-\varepsilon} + \frac{1}{z+1}[-(1-\xi)^{z+1} F'(\xi)]_0^{1-\varepsilon} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{z+1} \int\limits_0^{1-\varepsilon} (1-\xi)^{z+1} F''(\xi)\, d\xi \right\} = \ldots$$

$$\ldots = b_0 + \frac{b_1}{z+1} + \frac{b_2}{(z+1)(z+2)} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{b_n}{(z+1)(z+2)\ldots(z+n)} + R_n,$$

где

$$b_n = \lim_{\varepsilon \to 0} [-(1-\xi)^{z+n} F^{(n)}(\xi)]_0^{1-\xi} = F^{(n)}(0),$$

---

[1]) Функция $(1+x^{-1})^x$ возрастает вместе с x, ибо $\frac{1}{1-y} > e^y$, когда $y < 1$, и, следовательно, $\lg\left(\frac{1}{1-y}\right) > y$; отсюда, положив $y^{-1} = 1 + x$, получим

$$\frac{d}{dx} x \lg(1+x^{-1}) = \lg(1+x^{-1}) - \frac{1}{1+x} > 0.$$