если вещественная часть выражения $z+n-r-n$ положительна, т. е. если $\operatorname{Re} z > r$; далее,

$$|R_n| \leqslant \frac{1}{|(z+1)(z+2)\ldots(z+n)|} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{1-\varepsilon} |(1-\xi)^{z+n} F^{(n+1)}(\xi)|\, d\xi <$$

$$< \frac{M_1 e (n+2)^r n!}{|(z+1)(z+2)\ldots(z+n)| \operatorname{Re}(z-r)} <$$

$$< \frac{M_1 e (n+2)^r n!}{(r+1+\delta)(r+2+\delta)\ldots(r+n+\delta)\delta},$$

где

$$\delta = \operatorname{Re}(z-r).$$

Далее, $\prod_{m=1}^{n} \left\{ \left(1+\frac{r+\delta}{m}\right) e^{-\frac{r+\delta}{m}} \right\}$ стремится к пределу (§ 2.71), когда $n \to \infty$, и следовательно, $|R_n| \to 0$, если

$$(n+2)^r \exp\left\{ -(r+\delta) \sum_1^n \frac{1}{m} \right\}$$

стремится к нулю; но

$$\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m} > \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} = \lg(n+1)$$

по § 4.43 (II) и $(n+2)^r (n+1)^{-r-\delta} \to 0$ при $\delta > 0$; поэтому $R_n \to 0$, когда $n \to \infty$, и следовательно, при $\operatorname{Re} z > r$ мы имеем сходящееся разложение

$$f(z) = b_0 + \frac{b_1}{z+1} + \frac{b_2}{(z+1)(z+2)} + \ldots + \frac{b_n}{(z+1)(z+2)\ldots(z+n)} + \ldots$$

Пример 1. Получить то же самое разложение, воспользовавшись формулами

$$\frac{1}{(z+1)(z+2)\ldots(z+n+1)} = \frac{1}{n!} \int_0^1 u^n (1-u)^z\, du,$$

$$\int_C \frac{f(t)\, dt}{z-t} = \int_C dt \int_0^1 f(t)(1-u)^{z-t-1}\, du.$$

Пример 2. Получить разложение

$$\lg\left(1+\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z} - \frac{a_1}{z(z+1)} - \frac{a_2}{z(z+1)(z+2)} - \ldots,$$

где

$$a_n = \int_0^1 t(1-t)(2-t)\ldots(n-1-t)\, dt,$$

и рассмотреть область, в которой оно будет сходиться.

(Schlömilch).

ЛИТЕРАТУРА

Э. Гурса, Курс математического анализа, ОНТИ, 1936.
E. Borel, Leçons sur les séries divergentes, Paris, 1901.
T. J. I'a Bromwich [1]), Theory of infinite series, гл. VIII, X, XI, 1908.
O. Schlömilch, Compendium der höheren Analysis, II, Dresden, 1874.

Примеры

1. Пусть $y - x - \varphi(y) = 0$, где $\varphi(y)$ — данная функция от y; получить разложение

$$f(y) = f(x) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \{\varphi(x)\}^m \left(\frac{1}{1-\varphi'(x)} \frac{d}{dx}\right)^m f(x),$$

где f обозначает любую аналитическую функцию своего аргумента, и рассмотреть область его сходимости.

(Levi-Cività, Rend. dei Lincei, (5), XVI, 3, 1907.)

2. Получить (по формуле Дарбу или другим путем) разложение

$$f(z) - f(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(z-a)^n}{n!\,(1-r)^n} \{f^{(n)}(z) - r^n f^{(n)}(a)\};$$

найти остаточный член после n членов и рассмотреть сходимость ряда.

3. Показать, что

$$f(x+h) - f(x) =$$

$$= \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m-1} \frac{1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2m-1)}{(m!)^2} \frac{h^m}{2^m} \{f^{(m)}(x+h) - (-1)^m f^{(m)}(x)\} +$$

$$+ (-1)^n h^{n+1} \int_0^1 \gamma_n(t) f^{(n+1)}(x+ht)\,dt,$$

где

$$\gamma_n(x) = \frac{x^{n+\frac{1}{2}}(1-x)^{n+\frac{1}{2}}}{(n!)^2} \frac{d^n}{dx^n} \left\{x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}\right\} =$$

$$= \frac{1}{\pi n!} \int_0^1 (x-z)^n z^{-\frac{1}{2}} (1-z)^{-\frac{1}{2}}\,dz,$$

и показать, что $\gamma_n(x)$ представляет собой коэффициент при $n!\,t^n$ в разложении выражения $\{(1-tx)(1+t-tx)\}^{-\frac{1}{2}}$ по возрастающим степеням t.

---

[1]) Бромуич получает разложения элементарными способами, т. е. не применяя теоремы Коши.

4. Полагая в формуле Дарбу

$$\varphi(x+1)=\frac{1}{n!}\left[\frac{d^n}{du^n}\left\{\frac{(1-r)\,e^{xu}}{1-re^{-u}}\right\}\right]_{u=0},$$

показать, что

$$f(x+h)-f(x)=-\sum_{m=1}^{n}a_m\frac{h^m}{m!}\left\{f^{(m)}(x+h)-\frac{1}{r}f^{(m)}(x)\right\}+$$
$$+(-1)^n h^{n+1}\int_0^1\varphi(t)\,f^{(n+1)}(x+ht)\,dt,$$

где

$$\frac{1-r}{1-re^{-u}}=1-a_1\frac{u}{1!}+a_2\frac{u^2}{2!}-a_3\frac{u^3}{3!}+\ldots$$

5. Показать, что

$$f(z)-f(a)=$$
$$=\sum_{m=1}^{n}(-1)^{m-1}\frac{2B_m(2^{2n}-1)(z-a)^{2m-1}}{2m!}\left\{f^{(2m-1)}(a)+f^{(2m-1)}(z)\right\}+$$
$$+\frac{(z-a)^{2n+1}}{2n!}\int_0^1\psi_{2n}(t)\,f^{(2n+1)}\{a+t(z-a)\}\,dt,$$

где

$$\psi_n(t)=\frac{2}{n+1}\left[\frac{d^{n+1}}{du^{n+1}}\left(\frac{ue^{tu}}{e^u+1}\right)\right]_{u=0}.$$

6. Доказать, что

$$f(z_2)-f(z_1)=C_1(z_2-z_1)f'(z_2)+C_2(z_2-z_1)^2f''(z_1)-$$
$$-C_3(z_2-z_1)^3f'''(z_2)-C_4(z_2-z_1)^4f^{(\mathrm{IV})}(z_1)+\ldots$$
$$\ldots+(-1)^n(z_2-z_1)^{n+1}\int_0^1\left\{\frac{d^n}{du^n}(e^{tu}\operatorname{sech}u)\right\}_{u=0}f^{(n+1)}(z_1+tz_2-tz_1)\,dt.$$

Знаки плюс и минус в ряде повторяются каждый раз дважды; последний член перед интегралом есть член с $(z_2-z_1)^n$; C_n — коэффициент при z^n в разложении $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{z}{2}\right)$ по возрастающим степеням z.

(Trinity, 1899)

7. Пусть x_1 и x_2 — целые числа, а $\varphi(z)$ — функция, аналитическая и ограниченная для всех значений z, для которых $x_1\leqslant\operatorname{Re}z\leqslant x_2$; показать, взяв интеграл

$$\int\frac{\varphi(z)\,dz}{e^{\pm 2\pi i z}-1}$$

по вырезанным прямоугольникам, имеющим вершины в точках $x_1, x_2, x_2 \pm \infty i$, $x_1 \pm \infty i$, что

$$\frac{1}{2}\varphi(x_1)+\varphi(x_1+1)+\varphi(x_1+2)+\ldots+\varphi(x_2-1)+\frac{1}{2}\varphi(x_2)=$$

$$=\int_{x_1}^{x_2}\varphi(z)\,dz+\frac{1}{i}\int_0^\infty\frac{\varphi(x_2+iy)-\varphi(x_1+iy)-\varphi(x_2-iy)+\varphi(x_1-iy)}{e^{2\pi y}-1}\,dy.$$

Отсюда, применяя формулу

$$4n\int_0^\infty\frac{y^{2n-1}}{e^{2\pi y}-1}\,dy=B_n,$$

где $B_1, B_2, \ldots$ — числа Бернулли, показать, что

$$\varphi(1)+\varphi(2)+\ldots+\varphi(n)=C+\frac{1}{2}\varphi(n)+\int^n\varphi(z)\,dz+$$

$$+\sum_{r=1}^\infty\frac{(-1)^{r-1}B_r}{2r!}\varphi^{(2r-1)}(n)$$

(где C — постоянная, не зависящая от n) при условии, что последний ряд сходится.

(Эта важная формула принадлежит Плана (Plana, Mem. della R. Accad. di Torino, XXV, 403—418 (1820); доказательство при помощи контурного интегрирования было опубликовано Кронекером (Kronecker, Journal für Math., CV, 345—348 (1889)). Относительно подробной истории см. книгу Линделёфа (Lindelöf, Le calcul des résidus). Некоторые приложения формулы даны в гл. 12.)

8. Получить разложение

$$u=\frac{x}{2}+\sum_{n=2}^\infty(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\ldots(2n-3)}{n!}\frac{x^n}{2^n}$$

для одного из корней уравнения $x=2u+u^2$ и показать, что оно будет сходиться до тех пор, пока $|x|<1$.

9. Пусть $S_{2(n+1)}^{(m)}$ обозначает сумму всех произведений чисел

$$2^2,\ 4^2,\ 6^2,\ldots,\ (2n)^2,$$

взятых по m; показать, что

$$\frac{\cos z}{z}=\frac{1}{\sin z}+\sum_{n=0}^\infty\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+2)!}\left\{\frac{2^{2(n+1)}}{2n+3}-S_{2(n+1)}^{(1)}\frac{2^{2n}}{2n+1}+\cdots\right.$$

$$\left.\ldots+(-1)^nS_{2(n+1)}^{(n)}\frac{2^2}{3}\right\}\sin^{2n+1}z.$$

(Teixeira)

10. Пусть функция $f(z)$ аналитическая внутри того из овалов, уравнение которых есть $|\sin z|=C$ (где $C\leqslant 1$), который охватывает начало

координат; показать, что $f(z)$ для всех точек z внутри этого овала может быть разложена в ряд

$$f(z)=f(0)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(2n)}(0)+S_{2n}^{(1)}f^{(2n-2)}(0)+\ldots+S_{2n}^{(n-1)}f''(0)}{2n!}\sin^{2n}z+$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(2n+1)}(0)+S_{2n+1}^{(1)}f^{(2n-1)}(0)+\ldots+S_{2n+1}^{(n)}f'(0)}{(2n+1)!}\sin^{2n+1}z,$$

где $S_{2n}^{(m)}$ — сумма всех произведений чисел

$$2^2,\ 4^2,\ 6^2,\ldots,\ (2n-2)^2,$$

взятых по m, а $S_{2n+1}^{(m)}$ обозначает сумму всех произведений чисел

$$1^2,\ 3^2,\ 5^2,\ldots,\ (2n-1)^2,$$

взятых по m.

(Teixeira)

11. Показать, что два ряда

$$2z+\frac{2z^3}{3^2}+\frac{2z^5}{5^2}+\ldots$$

и

$$\frac{2z}{1-z^2}-\frac{2}{1\cdot 3^2}\left(\frac{2z}{1-z^2}\right)^3+\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5^2}\left(\frac{2z}{1-z^2}\right)^5-\ldots$$

представляют одну и ту же функцию в некоторой области плоскости z и могут быть преобразованы один в другой при помощи теоремы Бюрмана.

(Kapteyn, Nieuw Archief (2), III, 225 (1897))

12. Пусть функция $f(z)$ периодическая с периодом 2π и аналитическая во всех точках в бесконечной полосе плоскости, заключенной между двумя ветвями кривой $|\sin z|=C$ (где $C>1$); показать, что во всех точках полосы такая функция может быть разложена в бесконечный ряд вида

$$f(z)=A_0+A_1\sin z+\ldots+A_n\sin^n z+\ldots$$
$$\ldots+\cos z\,(B_1+B_2\sin z+\ldots+B_n\sin^{n-1}z+\ldots),$$

и найти коэффициенты A_n и B_n.

13. Пусть φ и f связаны уравнением

$$\varphi(x)+\lambda f(x)=0,$$

один из корней которого равен a; показать, что

$$F(x)=F-\frac{\lambda}{1}\frac{1}{\varphi'}fF'+$$
$$+\frac{\lambda^2}{1!\,2!}\frac{1}{\varphi'^3}\begin{vmatrix}\varphi' & f^2F'\\ \varphi'' & (f^2F')'\end{vmatrix}-\frac{\lambda^3}{1!\,2!\,3!}\frac{1}{\varphi'^6}\begin{vmatrix}\varphi' & (\varphi^2)' & (f^3F')\\ \varphi'' & (\varphi^2)'' & (f^3F')'\\ \varphi''' & (\varphi^2)''' & (f^3F')''\end{vmatrix}+\ldots,$$

где общий член равен $(-1)^m\dfrac{\lambda^m}{1!\cdot 2!\ldots m!\,(\varphi')^{\frac{1}{2}m(m+1)}}$, умноженному на определитель, в котором элементы первой строки суть φ', $(\varphi^2)'$, $(\varphi^3)'$, ..., $(\varphi^{m-1})'$, (f^mF'), а каждая следующая строка есть производная предыдущей относительно a; F, f, F', ... обозначают $F(a)$, $f(a)$, $F'(a)$, ...

(Wronski, Philosophie de la Technie, Section II, 381. Относительно доказательств теоремы см. Cayley, Quarterly Journal, XII (1873); Transon, Nouv. Ann. de Math., XIII (1874) и C. Lagrange, Brux. Mém. Couronnés, 4°, XLVII, № 2 (1886).)

14. Пусть функция $W(a, b, x)$ определяется рядом

$$W(a, b, x) = x + \frac{a-b}{2!}x^2 + \frac{(a-b)(a-2b)}{3!}x^3 + \ldots,$$

сходящимся при $|x| < \frac{1}{|b|}$; показать, что

$$\frac{d}{dx}W(a, b, x) = 1 + (a-b)\,W(a-b, b, x);$$

кроме того, доказать, что если $y = W(a, b, x)$, то $x = W(b, a, y)$.

Примерами таких функций являются:

$$W(1, 0, x) = e^x - 1,$$
$$W(0, 1, x) = \lg(1+x),$$
$$W(a, 1, x) = \frac{(1+x)^a - 1}{a}.$$

(Ježek)

15. Доказать, что

$$\frac{1}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n} = \frac{1}{a_0} + \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!\, a_0^{n+1}} G_n,$$

где

$$G_n = \begin{vmatrix} 2a_1 & a_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 4a_2 & 3a_1 & 2a_0 & 0 & \ldots & 0 \\ 6a_3 & 5a_2 & 4a_1 & 3a_0 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (2n-2)\,a_{n-1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & (n-1)\,a_0 \\ na_n & (n-1)\,a_{n-1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_1 \end{vmatrix},$$

и получить подобное же выражение для

$$\left\{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

(Mangeot, Ann. de l'École norm. sup. (3), XIV)

16. Показать, что

$$\frac{1}{\sum\limits_{n=0}^{n} a_r x^r} = -\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r+1}\frac{\partial S_{r+1}}{\partial a_1} x^r,$$

где S_r — сумма r-х степеней обратных величин корней уравнения

$$\sum_{r=0}^{n} a_r x^r = 0.$$

(Gambioli, Bologna Memorie, 1892)

17. Пусть $f_n(z)$ обозначает n-ю производную функции $f(z)$, и пусть $f_{-n}(z)$ обозначает тот из n кратных интегралов функции $f(z)$, который имеет нуль n-го порядка в $z=0$; требуется показать, что если ряд $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} f_n(z)\, g_{-n}(x)$ сходится, то он представляет функцию от $z+x$; если область сходимости включает начало координат в плоскости x, то ряд равен

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_{-n}(z+x)\, g_n(0).$$

Из этого результата, положив $g(z)=1$, получить ряд Тейлора.

(Guichard)

18. Показать, что если x не является целым числом, то

$$\sum_{m=-\nu}^{\nu} \sum_{n=-\nu}^{\nu} \frac{2x+m+n}{(x+m)^2\,(x+n)^2} \to 0,$$

когда $\nu \to \infty$, предполагая, что все члены, для которых $m=n$, исключаются из суммирования.

(Math. Trip., 1895)

19. Вычислить предел суммы

$$\sum_{n=-q}^{p} \left(\frac{1}{(-1)^n x - a - n} + \frac{1}{n} \right),$$

где значение $n=0$ исключается, а p, q — положительные целые числа, которые нужно безгранично увеличивать.

(Math. Trip., 1896)

20. Пусть $F(x) = e^{\int\limits_0^x x\pi \operatorname{ctg}(x\pi)\, dx}$; показать, что

$$F(x) = e^{\frac{x}{2}} \frac{\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^{x+\frac{1}{2}\frac{x^2}{n}} \right\}}{\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-x+\frac{1}{2}\frac{x^2}{n}} \right\}}$$

и что функция, определенная таким образом, удовлетворяет соотношениям

$$F(-x) = \frac{1}{F(x)}, \quad F(x)\cdot F(1-x) = 2\sin x\pi.$$

Далее, полагая

$$\psi(z) = z + \frac{z^2}{2^2} + \frac{z^3}{3^2} + \ldots = -\int_0^z \lg(1-t)\,\frac{dt}{t},$$

показать, что

$$F(x) = e^{\frac{1}{2}\pi i x^2 - \frac{1}{2\pi i}\psi(1-e^{-2\pi i x})}$$

при

$$|1-e^{-2\pi i x}| < 1.$$

(Trinity, 1898)

21. Показать, что

$$\left[1+\left(\frac{k}{x}\right)^n\right]\left[1+\left(\frac{k}{2\pi-x}\right)^n\right]\left[1+\left(\frac{k}{2\pi+x}\right)^n\right]\times$$
$$\times\left[1+\left(\frac{k}{4\pi-x}\right)^n\right]\left[1+\left(\frac{k}{4\pi+x}\right)^n\right]\ldots=$$
$$=\frac{\prod\limits_{g=1}^{\leqslant\frac{1}{2}n}\left\{1-2e^{-\alpha_g}\cos(x+\beta_g)+e^{-2\alpha_g}\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{1-2e^{-\alpha_g}\cos(x-\beta_g)+e^{-2\alpha_g}\right\}^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}n}(1-\cos x)^{\frac{1}{2}n}e^{-k\cos\frac{\pi}{n}}},$$

где

$$\alpha_g=k\sin\frac{2g-1}{n}\pi,\quad \beta_g=k\cos\frac{2g-1}{n}\pi,\qquad 0<x<2\pi.$$

(Mildner)

22. Пусть $|x|<1$ и a не является целым положительным числом; показать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n-a}=\frac{2\pi i x^a}{1-e^{2a\pi i}}+\frac{x}{1-e^{2a\pi i}}\int\limits_C\frac{t^{a-1}-x^{a-1}}{t-x}\,dt,$$

где C — контур в плоскости t, окружающий точки 0, x.

(Lerch, Časopis, XXI, 65—68 (1892))

23. Пусть $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$, ... — любые многочлены от z, $F(z)$ — любая интегрируемая функция и $\psi_1(z)$, $\psi_2(z)$, ... — многочлены, определяемые формулами

$$\int\limits_a^b F(x)\frac{\varphi_1(z)-\varphi_1(x)}{z-x}\,dx=\psi_1(z),$$

$$\int\limits_a^b F(x)\varphi_1(x)\frac{\varphi_2(z)-\varphi_2(x)}{z-x}\,dx=\psi_2(z),$$

$$\int\limits_a^b F(x)\varphi_1(x)\varphi_2(x)\ldots\varphi_{m-1}(x)\frac{\varphi_m(z)-\varphi_m(x)}{z-x}\,dx=\psi_m(z);$$

показать, что

$$\int\limits_a^b\frac{F(x)\,dx}{z-x}=\frac{\psi_1(z)}{\varphi_1(z)}+\frac{\psi_2(z)}{\varphi_1(z)\varphi_2(z)}+\frac{\psi_3(z)}{\varphi_1(z)\varphi_2(z)\varphi_3(z)}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{\psi_m(z)}{\varphi_1(z)\varphi_2(z)\ldots\varphi_m(z)}+$$
$$+\frac{1}{\varphi_1(z)\varphi_2(z)\ldots\varphi_m(z)}\int\limits_a^b F(x)\varphi_1(x)\varphi_2(x)\ldots\varphi_m(x)\frac{dx}{z-x}.$$

24. Система функций $p_0(z)$, $p_1(z)$, $p_2(z)$, ... определяется формулами

$$p_0(z) = 1, \quad p_{n+1}(z) = (z^2 + a_n z + b_n)\, p_n(z),$$

где a_n и b_n — данные функции от n, которые стремятся соответственно к пределам 0 и -1, когда $n \to \infty$.

Показать, что областью сходимости ряда вида $\sum e_n p_n(z)$, где e_1, e_2, ... не зависят от z, будет овал Кассини с фокусами $+1$, -1.

Показать, что всякая функция $f(z)$, аналитическая внутри овала и на его контуре, для внутренних точек овала может быть разложена в ряд

$$f(z) = \sum \left(c_n + z c_n'\right) p_n(z),$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int (a_n + z)\, q_n(z) f(z)\, dz, \quad c_n' = \frac{1}{2\pi i} \int q_n(z) f(z)\, dz,$$

причем интегралы берутся по границе области, а функции $q_n(z)$ определяются формулами

$$q_0(z) = \frac{1}{z^2 + a_0 z + b_0}, \quad q_{n+1}(z) = \frac{1}{z^2 + a_{n+1} z + b_{n+1}}\, q_n(z).$$

(Pincherle, Rend. dei Lincei (4), V, 8 (1889))

25. Пусть C — контур, окружающий точку a, и пусть функции $\varphi(z)$ и $f(z)$ аналитические, когда z лежит на C или внутри него. Пусть t будет настолько мало, что

$$|t\varphi(z)| < |z - a|,$$

когда z лежит на контуре C.

Разложением интеграла

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) \frac{1 - t\varphi'(z)}{z - a - t\varphi(z)}\, dz$$

по возрастающим степеням t показать, что он равен

$$f(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{da^{n-1}} \left[f'(a) \{\varphi(a)\}^n\right].$$

Отсюда, применяя результаты §§ 6.3, 6.31, получить теорему Лагранжа.

ГЛАВА 8

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ И СУММИРУЕМЫЕ РЯДЫ

8.1. Простой пример асимптотического разложения

Рассмотрим функцию $f(x)=\int\limits_x^\infty t^{-1}e^{x-t}\,dt$, где x — вещественная и положительная величина и интеграл взят по вещественной оси.

Повторным интегрированием по частям получим

$$f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{2!}{x^3}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}+(-1)^n n!\int\limits_x^\infty \frac{e^{x-t}}{t^{n+1}}\,dt.$$

В связи с функцией $f(x)$ мы рассмотрим выражение

$$u_{n-1}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$$

и будем писать

$$\sum_{m=0}^{n} u_m=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{2!}{x^3}-\ldots+\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}=S_n(x).$$

Тогда мы имеем

$$\left|\frac{u_m}{u_{m-1}}\right|=mx^{-1}\to\infty \quad \text{при} \quad m\to\infty.$$

Ряд $\sum u_m$ *будет поэтому расходящимся для всех значений* x. Тем не менее этот ряд может быть применен для вычисления $f(x)$, что можно видеть из следующего.

Возьмем определенное значение для числа n и вычислим значение S_n.

Мы имеем

$$f(x)-S_n(x)=(-1)^{n+1}(n+1)!\int\limits_x^\infty \frac{e^{x-t}\,dt}{t^{n+2}},$$

отсюда, поскольку $e^{x-t} \leqslant 1$,

$$|f(x) - S_n(x)| = (n+1)! \int_x^\infty \frac{e^{x-t}\,dt}{t^{n+2}} < (n+1)! \int_x^\infty \frac{dt}{t^{n+2}} = \frac{n!}{x^{n+1}}.$$

Для значений x, достаточно больших, правая часть этого неравенства будет весьма мала. Так, для $x \geqslant 2n$ будем иметь

$$|f(x) - S_n(x)| < \frac{1}{2^{n+1}n^2},$$

которое для больших значений n будет весьма мало. Поэтому получается, что *значение функции $f(x)$ может быть вычислено с большой точностью для больших значений x, если взять сумму надлежащего числа членов ряда $\sum u_m$.*

Беря даже довольно малые значения x и n, получим

$$S_5(10) = 0{,}09152, \quad \text{причем} \quad 0 < f(10) - S_5(10) < 0{,}00012.$$

В силу этого обстоятельства говорят, что ряд является *асимптотическим разложением* функции $f(x)$. Точное определение асимптотического разложения мы сейчас дадим.

8.2. Определение асимптотического разложения

Будем говорить, что расходящийся ряд

$$A_0 + \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \ldots + \frac{A_n}{z^n} + \ldots,$$

сумму первых $n+1$ членов которого обозначим через $S_n(z)$, представляет собой *асимптотическое разложение* функции $f(z)$ в данной области значений $\arg z$, если выражение $R_n(z) = z^n\{f(z) - S_n(z)\}$ удовлетворяет условию

$$\lim_{|z| \to \infty} R_n(z) = 0 \qquad (n \text{ фиксировано}),$$

даже если

$$\lim_{n \to \infty} |R_n(z)| = \infty \qquad (z \text{ фиксировано}).$$

В этом случае мы можем сделать

$$|z^n\{f(z) - S_n(z)\}| < \varepsilon,$$

где ε — произвольно малая величина, взяв $|z|$ достаточно большим.

То обстоятельство, что данный ряд есть асимптотическое разложение функции $f(z)$, обозначается так:

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^{-n}.$$

Определение, данное только что, принадлежит Пуанкаре [1]). Однако частные случаи асимптотических разложений были открыты и применялись в XVIII столетии Стирлингом, Маклореном и Эйлером. Асимптотические разложения играют большую роль в теории линейных дифференциальных уравнений и в небесной механике; некоторые приложения будут даны в дальнейших главах настоящей книги.

Рассмотренный в § 8.1 пример, очевидно, удовлетворяет только что данному определению, ибо, если x положительно, то

$$|x^n\{f(x)-S_n(x)\}|<n!\,x^{-1}\to 0, \quad \text{когда} \quad x\to\infty.$$

Для простоты изложения мы будем рассматривать в этой главе большинство асимптотических разложений только при положительных значениях аргумента. Для комплексных значений аргумента рассуждения нуждаются лишь в некоторых дополнениях.

8.21. Другой пример асимптотического разложения

В качестве второго примера рассмотрим функцию $f(x)$, представляемую рядом

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c^k}{x+k},$$

где $x>0$ и $0<c<1$.

Отношение k-го члена этого ряда к $(k-1)$-му будет меньше c, и следовательно, ряд будет сходящимся для всех положительных значений x. Ограничимся положительными значениями x. Мы имеем при $x>k$

$$\frac{1}{x+k}=\frac{1}{x}-\frac{k}{x^2}+\frac{k^2}{x^3}-\frac{k^3}{x^4}+\frac{k^4}{x^5}-\ldots$$

Если бы мы имели право [2]) разложить каждую дробь $\frac{1}{x+k}$ таким образом и расположить затем ряд для $f(x)$ по убывающим степеням x, то формально мы получили бы ряд

$$\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\ldots+\frac{A_n}{x^n}+\ldots,$$

где

$$A_n=(-1)^{n-1}\sum_{k=1}^{\infty}k^{n-1}c^k.$$

Но это действие незаконно, и действительно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}A_nx^{-n}$ расходится. Тем не менее мы можем показать, что он представляет собой асимптотическое разложение функции $f(x)$.

---

[1]) Poincaré, Acta Mathematica, VIII, 295—344 (1886).

[2]) Мы не имеем права поступить таким образом потому, что $k>x$ для всех членов ряда, начиная с некоторого места.

Положим

$$S_n(x) = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \ldots + \frac{A_n}{x^{n+1}}.$$

Тогда

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{c^k}{x} - \frac{kc^k}{x^2} + \frac{k^2c^k}{x^3} - \ldots + \frac{(-1)^n k^n c^k}{x^{n+1}} \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ 1 - \left(-\frac{k}{x} \right)^{n+1} \right\} \frac{c^k}{x+k},$$

так что

$$|f(x) - S_n(x)| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{k}{x} \right)^{n+1} \frac{c^k}{x+k} \right| < x^{-n-2} \sum_{k=1}^{\infty} k^{n+1} c^k.$$

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{n+1} c^k$ сходится для любого данного значения n; пусть его сумма равна C_n. Тогда

$$|f(x) - S_n(x)| < C_n x^{-n-2}$$

и, следовательно,

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} A_n x^{-n}.$$

Пример. Пусть $f(x) = \int\limits_x^{\infty} e^{x^2-t^2}\,dt$, где x положительно и путем интегрирования служит вещественная ось; доказать, что

$$f(x) \sim \frac{1}{2x} - \frac{1}{2^2x^3} + \frac{1\cdot 3}{2^3x^5} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^4x^7} + \ldots$$

[Стокс в 1857 г. показал, что

$$\int_0^x e^{x^2-t^2}\,dt \sim \pm \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{x^2} - \left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{2^2x^3} + \frac{1\cdot 3}{2^3x^5} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^4x^7} + \ldots \right);$$

верхний или нижний знак берется соответственно тому, будет ли

$$-\frac{1}{2}\pi < \arg x < \frac{1}{2}\pi \quad \text{или} \quad \frac{1}{2}\pi < \arg x < \frac{3}{2}\pi.]$$

8.3. Умножение асимптотических разложений

Покажем теперь, что два асимптотических разложения, годных для одной и той же области значений $\arg z$, могут быть перемножены таким же образом, как и обыкновенные ряды, причем результатом этого умножения является новое асимптотическое разложение.

Пусть

$$f(z) \sim \sum_{m=0}^{\infty} A_m z^{-m}, \quad \varphi(z) \sim \sum_{m=0}^{\infty} B_m z^{-m},$$

и пусть $S_n(z)$ и $T_n(z)$ будут суммы их первых $n+1$ членов, так что при фиксированном n

$$f(z) - S_n(z) = o(z^{-n}), \quad \varphi(z) - T_n(z) = o(z^{-n})\,^{1)}.$$

Тогда, если

$$C_m = A_0 B_m + A_1 B_{m-1} + \ldots + A_m B_0,$$

то, очевидно,

$$S_n(z)\, T_n(z) = \sum_{m=0}^{n} C_m z^{-m} + o(z^{-n}).$$

Но

$$f(z)\varphi(z) = \{S_n(z) + o(z^{-n})\}\,\{T_n(z) + o(z^{-n})\} =$$
$$= S_n(z)\, T_n(z) + o(z^{-n}) = \sum_{m=0}^{n} C_m z^{-m} + o(z^{-n}).$$

Этот результат верен для *любого* фиксированного значения n, и мы видим, что

$$f(z)\varphi(z) \sim \sum_{m=0}^{\infty} C_m z^{-m}.$$

8.31. Интегрирование асимптотических разложений

Покажем теперь, что можно интегрировать асимптотическое разложение почленно и что полученный в результате ряд будет асимптотическим разложением интеграла функции, представляемой первоначальным рядом.

Пусть

$$f(x) \sim \sum_{m=2}^{\infty} A_m x^{-m},$$

положим

$$S_n(x) = \sum_{m=2}^{n} A_m x^{-m}.$$

Тогда при заданном положительном числе ε мы можем найти такое x_0, что

$$|f(x) - S_n(x)| < \varepsilon x^{-n}, \quad \text{когда } x > x_0,$$

---

[1]) См. § 2.11; мы употребляем символ $o(z^{-n})$ для обозначения *любой* функции $\psi(z)$ такой, что $z^n\psi(z) \to 0$, когда $|z| \to \infty$.

и поэтому

$$\left|\int_x^\infty f(x)\,dx - \int_x^\infty S_n(x)\,dx\right| \leqslant \int_x^\infty |f(x) - S_n(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{(n-1)\,x^{n-1}}.$$

Но

$$\int_x^\infty S_n(x)\,dx = \frac{A_2}{x} + \frac{A_3}{2x^2} + \ldots + \frac{A_n}{(n-1)\,x^{n-1}},$$

и поэтому

$$\int_x^\infty f(x)\,dx \sim \sum_{m=2}^\infty \frac{A_m}{(m-1)\,x^{m-1}}.$$

С другой стороны, дифференцировать асимптотическое разложение, вообще говоря, недопустимо [1]), что можно видеть из рассмотрения $e^{-x}\sin(e^x)$.

8.32. Единственность асимптотического разложения

Естественно возникает вопрос: может ли данный ряд представлять асимптотическое разложение нескольких различных функций? Ответ на это будет утвердительный. Чтобы показать это, заметим сначала, что существуют функции $L(x)$, которые асимптотически представляются рядом, все члены которого нули, т. е. такие функции, что $\lim\limits_{x\to\infty} x^n L(x) = 0$ для любого фиксированного значения n. Функция e^{-x} будет такой функцией для положительных x. Асимптотическое разложение некоторой функции $J(x)$ будет поэтому асимптотическим разложением и функции $J(x) + L(x)$ [2]).

С другой стороны, функция не может быть представлена более чем одним определенным асимптотическим разложением в данной области значений z, ибо если

$$f(z) \sim \sum_{m=0}^\infty A_m z^{-m}, \quad f(z) \sim \sum_{m=0}^\infty B_m z^{-m},$$

то

$$\lim_{z\to\infty} z^n\left(A_0 + \frac{A_1}{z} + \ldots + \frac{A_n}{z^n} - B_0 - \frac{B_1}{z} - \ldots - \frac{B_n}{z^n}\right) = 0,$$

что возможно только при $A_0 = B_0$, $A_1 = B_1$, ...

Важные примеры асимптотических разложений будут рассмотрены ниже в связи с гамма-функцией (гл. 12) и функциями Бесселя (гл. 17).

---

[1]) В статье Ritt, Bull. American Math. Soc., XXIV, 225—227 (1918) приведена теорема относительно дифференцирования асимптотических разложений, представляющих аналитические функции.

[2]) Доказано, что когда коэффициенты в разложении удовлетворяют определенным неравенствам, то существует только одна *аналитическая* функция с таким асимптотическим разложением. См. Phil. Trans. 213, A, 279—313 (1911).

8.4. Методы «суммирования» рядов

Мы видели, что можно получить разложение вида

$$f(x)=\sum_{m=0}^{n} A_m x^{-m}+R_n(x),$$

где $R_n(x)\to\infty$ при $n\to\infty$ и ряд $\sum\limits_{m=0}^{\infty} A_m x^{-m}$ не сходится.

Установим теперь, какой вообще смысл можно придать понятию «сумма» в случае расходящегося ряда. Иными словами, мы собираемся сформулировать определенные правила, согласно которым по заданным числам a_0, a_1, a_2, ... может быть получено число S такое, что $S=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, если ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ сходится; при этом число S может существовать и в том случае, когда рассматриваемый ряд расходится.

8.41. Метод суммирования Бореля[1])

Мы видели (§ 7.81), что формула

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n=\int_0^{\infty} e^{-t}\varphi(tz)\,dt,$$

где

$$\varphi(tz)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n t^n z^n}{n!},$$

имеет место внутри круга сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Если интеграл существует в точках z вне этого круга, то мы будем считать этот интеграл «суммой по Борелю» ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

---

[1]) Borel, Leçons sur les séries divergentes, 97—115, 1901.

Так, например, при $\operatorname{Re} z < 1$ «суммой по Борелю» для ряда $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ будет

$$\int_0^{\infty} e^{-t} e^{tz}\, dt = (1-z)^{-1}.$$

Если существует «сумма Бореля», то мы говорим, что ряд «суммируем (B)».

8.42. Метод суммирования Эйлера[1])

К методу суммирования, по существу принадлежащему Эйлеру, приводит теорема § 3.71; «сумма» ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ может быть определена как

$$\lim_{x \to 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

если этот предел существует.

Так, «сумма» ряда $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ равна

$$\lim_{x \to 1-0} (1 - x + x^2 - \ldots) = \lim_{x \to 1-0} (1+x)^{-1} = \frac{1}{2}.$$

8.43. Метод суммирования Чезаро[2])

Пусть $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$; тогда, если существует предел

$$S = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n}(s_1 + s_2 + \ldots + s_n),$$

то мы говорим, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ «*суммируем* $(C\ 1)$» и что его $(C\ 1)$-сумма равна S. Необходимо установить «условие совместности»[3]), а именно, что

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

если этот ряд сходится.

Для получения требуемого результата положим

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m = s, \quad \sum_{m=1}^{n} s_m = nS_n;$$

---

[1]) Euler, Institut. Calc. Diff. (1755). См. «Введение» цитированной выше книги Бореля. (Этот метод чаще называют методом Абеля или методом Пуассона. — *Прим. ред.*)

[2]) Cesàro, Bulletin des Sciences Math. (2), XIV, 114.

[3]) См. конец § 8.4.

тогда мы должны доказать, что $S_n \to s$. При заданном ε мы можем выбрать такое n, что $\left|\sum_{m=n+1}^{n+p} a_m\right| < \varepsilon$ для всех значений p и, следовательно, $|s - s_n| \leqslant \varepsilon$.

Далее, если $\nu > n$, мы имеем

$$S_\nu = a_1 + a_2\left(1 - \frac{1}{\nu}\right) + \ldots + a_n\left(1 - \frac{n-1}{\nu}\right) + \\ + a_{n+1}\left(1 - \frac{n}{\nu}\right) + \ldots + a_\nu\left(1 - \frac{\nu-1}{\nu}\right).$$

Так как $1,\ 1-\nu^{-1},\ 1-2\nu^{-1}, \ldots$ есть положительная убывающая последовательность, то из неравенства Абеля (§ 2.301) следует, что

$$\left|a_{n+1}\left(1 - \frac{n}{\nu}\right) + a_{n+2}\left(1 - \frac{n+1}{\nu}\right) + \ldots + a_\nu\left(1 - \frac{\nu-1}{\nu}\right)\right| < \left(1 - \frac{n}{\nu}\right)\varepsilon.$$

Поэтому

$$\left|S_\nu - \left\{a_1 + a_2\left(1 - \frac{1}{\nu}\right) + \ldots + a_n\left(1 - \frac{n-1}{\nu}\right)\right\}\right| < \left(1 - \frac{n}{\nu}\right)\varepsilon.$$

Заставляя $\nu \to \infty$, мы видим, что если S — любая из предельных точек (§ 2.21) последовательности S_ν, то

$$\left|S - \sum_{m=1}^{n} a_m\right| \leqslant \varepsilon.$$

Поэтому, так как $|s - s_n| \leqslant \varepsilon$, мы имеем

$$|S - s| \leqslant 2\varepsilon.$$

Это неравенство верно для *любого* положительного значения ε, и мы заключаем, как в § 2.21, что $S = s$; отсюда следует, что S_ν имеет единственный предел s, а это и есть то утверждение, которое требовалось доказать.

Пример 1. Дать определение «равномерной суммируемости (C 1) для ряда с переменными членами».

Пример 2. Пусть $b_{n,\nu} \geqslant b_{n+1,\nu} \geqslant 0$, когда $n < \nu$, и пусть при n фиксированном $\lim\limits_{\nu\to\infty} b_{n,\nu} = 1$; тогда, если $\sum_{m=1}^{\infty} a_m = s$, то

$$\lim_{\nu\to\infty}\left\{\sum_{n=1}^{\nu} a_n b_{n,\nu}\right\} = s.$$

8.431. Общий метод суммирования Чезаро

Говорят, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ «суммируем $(C\ r)$», если существует $\lim_{\nu\to\infty} \sum_{n=0}^{\nu} a_n b_{n,\nu}$, где

$$b_{0,\nu}=1, \qquad b_{n,\nu}=\left\{\left(1+\frac{r}{\nu+1-n}\right)\left(1+\frac{r}{\nu+2-n}\right)\dots\left(1+\frac{r}{\nu-1}\right)\right\}^{-1}.$$

Из примера 2§8.43 следует, что «условие совместности» удовлетворено; в самом деле, можно доказать [1]), что если ряд суммируем $(C\ r')$, то он будет также суммируем $(C\ r)$, когда $r>r'$; условие совместности является частным случаем этого результата, когда $r'=0$.

8.44. Метод суммирования Рисса [2])

Более общий метод «суммирования» ряда, чем предыдущий, состоит в суммировании при помощи предела

$$\lim_{\nu\to\infty} \sum_{n=1}^{\nu} \left(1-\frac{\lambda_n}{\lambda_\nu}\right)^r a_n,$$

где λ_n — любая вещественная функция n, стремящаяся к бесконечности вместе с n. Про ряд, для которого существует этот предел, говорят, что он будет «суммируем $(R\ r)$ с сумматорной функцией λ_n».

8.5. Теорема Харди [3])

Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *суммируем* $(C\ 1)$. *Тогда, если*

$$a_n=O\left(\frac{1}{n}\right),$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится* [4]).

Пусть $s_n=a_1+a_3+\dots+a_n$; тогда, поскольку ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ суммируем $(C\ 1)$, имеем

$$s_1+s_2+\dots+s_n=n\{s+o(1)\},$$

где s — $(C\ 1)$-сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

---

[1]) Bromwich, Infinite series, § 122.

[2]) Riesz, Comptes Rendus, CXLIX, 18—21 (1910).

[3]) Hardy, Proc. London Math. Soc. (2), VIII, 302—304 (1910). Доказательством, данным здесь, мы обязаны Литлвуду.

[4]) Теорема Харди относится к числу так называемых тауберовых теорем. Подробней об этом см. книгу Харди «Расходящиеся ряды», ИЛ, 1951. (*Прим. ред.*)

Положим

$$s_m - s = t_m \qquad (m = 1, 2, \ldots, n)$$

и

$$t_1 + t_2 + \ldots + t_n = \sigma_n.$$

При этих обозначениях достаточно показать, что если $|a_n| < Kn^{-1}$, где K не зависит от n, и если $\sigma_n = no(1)$, то $t_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Предположим сначала, что $a_1, a_2, \ldots$ вещественны. Тогда, если t_n не стремится к нулю, то существует такое положительное число h, что найдется бесконечное множество чисел t_n, которые удовлетворяют *или* (I) условию $t_n > h$, *или* (II) условию $t_n < -h$. Покажем,

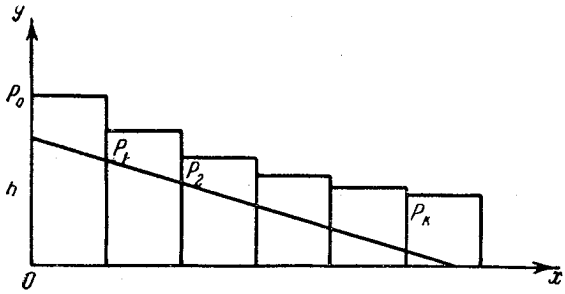

Рис. 3.

что и то и другое из этих предположений приводит к противоречию. Возьмем первое предположение[1]) и выберем n так, что $t_n > h$.

Мы имеем при $r = 0, 1, 2, \ldots$

$$|a_{n+r}| < \frac{K}{n}.$$

Отметим на чертеже точки P_r, координаты которых в декартовой системе координат будут (r, t_{n+r}). Так как $t_{n+r+1} - t_{n+r} = a_{n+r+1}$, то наклон отрезка P_rP_{r+1} будет меньше, чем $\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{K}{n}\right)$.

Поэтому точки $P_0, P_1, P_2, \ldots$ лежат выше линии $y = h - x \operatorname{tg}\theta$. Пусть P_k — последняя из точек $P_0, P_1, \ldots$, лежащая слева от $x = h \operatorname{ctg}\theta$, так что $k \leqslant h \operatorname{ctg}\theta$.

Начертим прямоугольники, как показано на рис. 3. Площадь этих прямоугольников превосходит площадь треугольника, ограниченного

---

[1]) Читатель легко увидит, что второе предположение также приводится к противоречию с помощью рассуждений, совершенно сходных с теми, которые мы употребим при разборе первого предположения.

прямой $y = h - x \operatorname{tg} \theta$ и осями координат; а это значит, что

$$\sigma_{n+k} - \sigma_{n-1} = t_n + t_{n+1} + \ldots + t_{n+k} > \frac{1}{2} h^2 \operatorname{ctg} \theta = \frac{1}{2} h^2 K^{-1} n.$$

Но

$$|\sigma_{n+k} - \sigma_{n-1}| \leqslant |\sigma_{n+k}| + |\sigma_{n-1}| = \\ = (n+k) \cdot o(1) + (n-1) \cdot o(1) = n \cdot o(1),$$

поскольку $k \leqslant hnK^{-1}$, а h и K не зависят от n.

Поэтому для некоторой последовательности значений n, стремящихся к бесконечности,

$$\frac{1}{2} h^2 K^{-1} n < n \cdot o(1),$$

что невозможно, так как $\frac{1}{2} h^2 K^{-1}$ *не есть* $o(1)$ *при* $n \to \infty$. Это противоречие получено в предположении, что $\overline{\lim}\, t_n \geqslant h > 0$; поэтому $\overline{\lim}\, t_n \leqslant 0$. Подобным же образом, взяв аналогичный случай, в котором $t_n \leqslant -h$, мы придем к заключению, что $\underline{\lim}\, t_n \geqslant 0$. Поэтому в силу неравенства $\overline{\lim}\, t_n \geqslant \underline{\lim}\, t_n$ мы имеем

$$\overline{\lim}\, t_n = \underline{\lim}\, t_n = 0,$$

и таким образом, $t_n \to 0$.

Иначе говоря, $s_n \to s$, то есть *ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится и сумма его равна* s.

Если бы a_n было комплексной величиной, то, рассматривая отдельно $\operatorname{Re} a_n$ и $\operatorname{Im} a_n$, мы нашли бы, что ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} a_n$ сходятся по только что доказанной теореме, а поэтому будет сходиться и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Читатель увидит в гл. 9, что этот результат играет большую роль в современной теории рядов Фурье.

Следствие. *Если* $a_n(\xi)$ — *такие функции от* ξ, *что ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(\xi)$ *равномерно суммируем* (C 1) *в некоторой области значений* ξ, *и если* $|a_n(\xi)| < Kn^{-1}$, *где* K *не зависит от* ξ, *то ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(\xi)$ *будет равномерно сходиться в той же области.*

Сохраним прежние обозначения; если $t_n(\xi)$ не стремится равномерно к нулю, то мы можем найти такое положительное число h, не зависящее

от n и ξ, что найдется бесконечная последовательность значений n таких, что $t_n(\xi_n) > h$ или $t_n(\xi_n) < -h$ для некоторой последовательности точек ξ_n из рассматриваемой области [1]); значение ξ_n зависит от рассматриваемого значения n.

Тогда, как и в первой теореме, мы найдем

$$\frac{1}{2} h^2 K^{-1} n < no(1)$$

для некоторой последовательности значений n, стремящихся к бесконечности. Противоречие, заключающееся в неравенстве [2]), показывает, что такого числа h не существует; следовательно, $t_n(\xi) \to 0$ равномерно.

ЛИТЕРАТУРА

H. Poincaré, Acta Mathematica, VIII, 295—344 (1886).
E. Borel, Leçons sur les séries divergentes, Paris, 1901.
T. J. I'a Bromwich, Theory of infinite series, гл. XI, 1908.
E. W. Barnes, Phil. Trans. of the Royal Society, 206A, 249—297 (1906).
G. H. Hardy и J. E. Littlewood [3]), Proc. London Math. Soc. (2), XI, 1—16 (1913).
G. N. Watson, Phil. Trans. of the Royal Society, 213A, 279—313 (1911).
S. Chapman [4]), Proc. London Math. Soc. (2), IX, 369—409 (1911).
Hj. Mellin, Congrès des math. à Helsingfors, 1—17 (1922).
Г. Харди, Расходящиеся ряды, ИЛ, 1951.
Н. Г. де Брёйн, Асимптотические методы в анализе, ИЛ, М., 1961.
А. Эрдейи, Асимптотические разложения, Физматгиз, М., 1962.

Примеры

1. Показать, что

$$\int_0^\infty \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\, dt \sim \frac{1}{x} - \frac{2!}{x^3} + \frac{4!}{x^5} - \ldots,$$

когда x вещественно и положительно.

2. Рассмотреть представление функции

$$f(x) = \int_{-\infty}^{0} \varphi(t)\, e^{tx}\, dt$$

(где x предполагается вещественным и положительным, а φ — функцией,

---

[1]) Предполагается, что $a_n(\xi)$ вещественно; распространение на комплексные переменные может быть сделано, как и в первой теореме. Если бы не существовало такого числа h, то $t_n(\xi)$ стремилось бы к нулю равномерно.

[2]) Необходимо отметить, что постоянные, входящие в неравенство, не зависят от ξ_n. Если бы K зависело от ξ_n, то K^{-1} было бы в действительности функцией от n и, может быть, было бы $o(1)$, как функция от n, и неравенство не привело бы к противоречию.

[3]) Эта работа содержит много ссылок на новые результаты.

[4]) На стр. 372 этого мемуара приведена библиография работ по суммируемым рядам.

подчиняющейся некоторым общим условиям) в виде ряда:

$$f(x)=\frac{\varphi(0)}{x}-\frac{\varphi'(0)}{x^2}+\frac{\varphi''(0)}{x^3}+\ldots$$

Показать, что в некоторых случаях (например, при $\varphi(t)=e^{at}$) этот ряд абсолютно сходится и представляет $f(x)$ для больших положительных значений x и что в некоторых других случаях он представляет собой асимптотическое разложение функции $f(x)$.

3. Показать, что

$$e^z z^{-a}\int_z^\infty e^{-x}x^{a-1}\,dx\sim\frac{1}{z}+\frac{a-1}{z^2}+\frac{(a-1)(a-2)}{z^3}+\ldots$$

для больших положительных значений z.

(Legendre, Exercices de Calc. Int., 340, (1811))

4. Показать, что если при $x>0$

$$f(x)=\int_0^\infty\left\{\lg u+\lg\left(\frac{1}{1-e^{-u}}\right)\right\}e^{-xu}\frac{du}{u},$$

то

$$f(x)\sim\frac{1}{2x}-\frac{B_1}{2^2x^2}+\frac{B_2}{4^2x^4}-\frac{B_3}{6^2x^6}+\ldots,$$

и, кроме того, показать, что $f(x)$ можно разложить в абсолютно сходящийся ряд вида

$$f(x)=\sum_{k=0}^\infty\frac{c_k}{(x+1)(x+2)\ldots(x+k)}.$$ (Schlömilch)

5. Показать, что ряд $1+0+0-1+0+1+0+0-1+\ldots$, в котором два нуля предшествуют -1, а один нуль предшествует $+1$, «суммируется» методом Чезаро к сумме $\frac{3}{5}$.

(Euler, Borel)

6. Показать, что ряд $1-2!+4!-\ldots$ несуммируем методом Бореля, а ряд $1+0-2!+0+4!+\ldots$ суммируем.

ГЛАВА 9

РЯДЫ ФУРЬЕ И ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ РЯДЫ

9.1. Определение ряда Фурье[1])

Ряды типа

$$\frac{1}{2}a_0+(a_1\cos x+b_1\sin x)+(a_2\cos 2x+b_2\sin 2x)+\ldots=$$
$$=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

где a_n, b_n не зависят от x, играют большую роль во многих исследованиях. Они называются *тригонометрическими рядами*. Если имеется функция $f(t)$ такая, что $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt$ существует как интеграл Римана или как несобственный интеграл, сходящийся абсолютно, и такая, что

$$\pi a_n=\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt,\quad \pi b_n=\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt,$$

то тригонометрический ряд называется *рядом Фурье*.

Тригонометрические ряды появились впервые в анализе в связи с исследованиями Даниила Бернулли о колебаниях струны. Даламбер ранее нашел решение уравнения колебаний струны $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ в виде $y=\frac{1}{2}\{f(x+at)+f(x-at)\}$, где $y=f(x)$ определяет начальную форму струны, с которой начинается переход от покоя к движению. Бернулли же показал, что формальным решением будет

$$y=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{n\pi at}{l},$$

---

[1]) Во всей этой главе (исключая § 9.11) предполагается, что все встречающиеся в ней числа *вещественные*.

если закрепленные концы струны имеют координаты $(0, 0)$ и $(l, 0)$, и утверждал, что это наиболее общее решение вопроса. Это показалось Даламберу и Эйлеру невозможным, поскольку таким рядом, имеющим период $2l$, казалось невозможным представить при $t=0$ такую функцию, как $cx(l-x)$ [1]). Между этими математиками возник спор, изложение которого приведено в книге Гобсона: Hobson, Functions of a Real Variable.

Фурье в своей «Теории теплоты» (Fourier, Théorie de la chaleur) исследовал большое число тригонометрических рядов и показал, что в большинстве частных случаев ряды Фурье *действительно сходятся к сумме* $f(x)$. Пуассон пытался дать общее доказательство этой теоремы (Poisson, Journal de l'École polytechnique, XII, 404—509 (1823)). Два доказательства были даны Коши (Cauchy, Mém. de l'Acad. R. des Sci., VI, 603—612 (1823), опубликовано в 1826 г., Oeuvres (1), II, 12—19, и Exercices de Math., II, 341—376, 1827, Oeuvres (2), VII, 393—430). Эти доказательства, основанные на теории интегрирования по контуру, относились скорее к частным классам функций, а одно из них несостоятельно. Второе доказательство было исследовано Харнаком (Harnack, Math. Ann., XXXII, 175—202 (1888)).

В 1829 г. Дирихле дал первое строгое доказательство [2]) того, что ряды Фурье, определяемые, как указано выше, действительно сходятся для довольно общего класса функций к сумме $f(x)$. Видоизменение этого доказательства было дано позже Бонне [3]).

Результат Дирихле состоит в следующем [4]): если $f(t)$ определена и ограничена в промежутке $(-\pi, \pi)$ и имеет только конечное число максимумов и минимумов и конечное число разрывов в этом промежутке, и если $f(t)$ определяется равенством

$$f(t+2\pi)=f(t)$$

вне области $(-\pi, \pi)$, то при

$$\pi a_n=\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt, \quad \pi b_n=\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt$$

ряд $\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ сходится к сумме

$$\frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\}.$$

Позже Риман и Кантор развили теорию тригонометрических рядов в общей форме, а в последнее время Гурвиц, Фейер и другие исследовали свойства рядов Фурье для случая, когда ряд не обязательно сходится. Так, Фейер доказал замечательную теорему о том, что ряд Фурье (даже если он и не сходится) будет «суммируем $(C\ 1)$» во всех точках, в которых существуют $f(x\pm 0)$, и его $(C\ 1)$-сумма равна $\frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\}$ при

---

[1]) Эта функция дает одну из простых начальных форм струны.

[2]) Dirichlet, Journal für Math., IV, 157—169 (1829).

[3]) Bonnet, Mémoires des Savants étrangers (Бельгийской академии), XXIII (1848—1850). Бонне применяет прямо вторую теорему о среднем, в то время как Дирихле при первоначальном доказательстве применяет приемы, в точности подобные тем, которыми доказывается теорема о среднем. См. § 9.4.

[4]) Условия, постулированные для $f(t)$, известны под названием *условий Дирихле*; мы увидим в §§ 9.2, 9.42, что они излишне ограничивают функцию.

условии, что интеграл $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt$ абсолютно сходится. Одно из исследований о сходимости рядов Фурье, которое мы дадим позже (§ 9.42), основано на этом выводе. Подробные сведения об исследованиях вплоть до Римана можно найти в книге Гобсона (Hobson, Functions of a real variable) и в курсе анализа бесконечно малых Валле-Пуссена.

9.11. Область, внутри которой тригонометрический ряд сходится

Рассмотрим ряд

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nz+b_n\sin nz),$$

где z может быть комплексным. Если мы обозначим e^{iz} через ζ, то ряд примет вид

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{2}(a_n-ib_n)\zeta^n+\frac{1}{2}(a_n+ib_n)\zeta^{-n}\right\}.$$

Этот ряд Лорана сходится, если только он вообще сходится, в некоторой области $a\leqslant|\zeta|\leqslant b$, где a, b — положительные постоянные.

Но если $z=x+iy$, то $|\zeta|=e^{-y}$, и таким образом, мы получаем в качестве области сходимости тригонометрического ряда полосу в плоскости z, определяемую неравенством

$$\lg a\leqslant -y\leqslant \lg b.$$

Практически наиболее важным случаем является случай, когда $a=b=1$, т. е. когда полоса состоит из прямой линии, именно вещественной оси.

Пример 1. Пусть

$$f(z)=\sin z-\frac{1}{2}\sin 2z+\frac{1}{3}\sin 3z-\frac{1}{4}\sin 4z+\ldots,$$

где $z=x+iy$.

Переписав это в виде

$$f(z)=-\frac{1}{2}i\left(e^{iz}-\frac{1}{2}e^{2iz}+\frac{1}{3}e^{3iz}-\ldots\right)+$$
$$+\frac{1}{2}i\left(e^{-iz}-\frac{1}{2}e^{-2iz}+\frac{1}{3}e^{-3iz}-\ldots\right),$$

мы замечаем, что первый ряд сходится[1]) только при $y\geqslant 0$, а второй только при $y\leqslant 0$.

Заменяя z на x (x вещественно), мы видим по теореме Абеля (§ 3.71), что

$$f(x)=\lim_{r\to 1}\left(r\sin x-\frac{1}{2}r^2\sin 2x+\frac{1}{3}r^3\sin 3x-\ldots\right)=$$
$$=\lim_{r\to 1}\left\{-\frac{1}{2}i\left(re^{ix}-\frac{1}{2}r^2e^{2ix}+\frac{1}{3}r^3e^{3ix}-\ldots\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}i\left(re^{-ix}-\frac{1}{2}r^2e^{-2ix}+\frac{1}{3}r^3e^{-3ix}-\ldots\right)\right\}.$$

---

[1]) Эти ряды *действительно сходятся* при $y=0$, см. § 2.31, пример 2.

Но это есть предел одного из значений выражения

$$-\frac{1}{2} i \lg (1 + re^{ix}) + \frac{1}{2} i \lg (1 + re^{-ix}),$$

а при $r \to 1$ (если $-\pi < x < \pi$) последнее стремится к $\frac{1}{2} x + k\pi$, где k — некоторое целое число.

Но ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \sin nx}{n}$ сходится равномерно (§ 3.35, пример 1) на отрезке $-\pi + \delta \leqslant x \leqslant \pi - \delta$, где δ — любая положительная постоянная и следовательно, представляет на этом отрезке непрерывную функцию.

Так как $\frac{1}{2} x$ непрерывна, то k имеет одно и то же значение, где бы ни лежало x на этом отрезке; положив $x = 0$, видим, что $k = 0$.

Поэтому $f(x) = \frac{1}{2} x$ *при* $-\pi < x < \pi$. Однако при $\pi < x < 3\pi$

$$f(x) = f(x - 2\pi) = \frac{1}{2}(x - 2\pi) = \frac{1}{2} x - \pi,$$

и вообще если

$$(2n - 1)\pi < x < (2n + 1)\pi,$$

то

$$f(x) = \frac{1}{2} x - n\pi.$$

Мы пришли, таким образом, к примеру, в котором $f(x)$ не представляется единым аналитическим выражением.

Следует заметить, что такое явление может наблюдаться только в том случае, когда полоса, в которой ряд Фурье сходится, сводится к прямой. Ибо если ширина полосы не нуль, то соответствующий ряд Лорана сходится в кольце ненулевой ширины и представляет аналитическую функцию от ζ в этом кольце; а так как ζ — аналитическая функция от z, то ряд Фурье представляет аналитическую функцию от z; таков, например, ряд

$$r \sin x - \frac{1}{2} r^2 \sin 2x + \frac{1}{3} r^3 \sin 3x - \ldots,$$

где $0 < r < 1$; его сумма равна $\operatorname{arctg} \frac{r \sin x}{1 + r \cos x}$, где arctg представляет угол, заключенный между $\pm \frac{1}{2}\pi$.

Пример 2. Если $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cos nx}{n^2} = \frac{1}{12}\pi^2 - \frac{1}{4} x^2.$$

Этот ряд сходится только когда x вещественно; согласно § 3.34 сходимость будет абсолютной и равномерной.

Так как

$$\frac{1}{2} x = \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \ldots \quad (-\pi + \delta \leqslant x \leqslant \pi - \delta,\ \delta > 0)$$

и этот ряд сходится равномерно, то мы можем проинтегрировать его почленно от 0 до x (§ 4.7), и следовательно,

$$\frac{1}{4}x^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(1-\cos nx)}{n^2}\qquad(-\pi+\delta\leqslant x\leqslant\pi-\delta).$$

Иначе говоря, если $-\pi+\delta\leqslant x\leqslant\pi-\delta$, то

$$C-\frac{1}{4}x^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cos nx}{n^2},$$

где C — постоянная, пока неопределенная.

Но так как ряд в правой части сходится равномерно на всем отрезке $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$, то его сумма будет непрерывной функцией от x на этом отрезке, и таким образом, переходя к пределу при $x\to\pm\pi$, мы видим, что последнее соотношение остается справедливым, когда $x=\pm\pi$.

Для определения C проинтегрируем каждую часть последнего соотношения (§ 4.7) в пределах $-\pi$, π; получим

$$2\pi C-\frac{1}{6}\pi^3=0.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{12}\pi^2-\frac{1}{4}x^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cos nx}{n^2}\qquad(-\pi\leqslant x\leqslant\pi).$$

Пример 3. Заменив x на $\pi-2x$ в примере 2, показать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 nx}{n^2}=\begin{cases}\frac{1}{2}x(\pi-x) & (0\leqslant x\leqslant\pi),\\ \frac{1}{2}\{\pi|x|-x^2\} & (-\pi\leqslant x\leqslant\pi).\end{cases}$$

9.12. Выражение коэффициентов через сумму тригонометрического ряда

Пусть тригонометрический ряд $\frac{1}{2}c_0+\sum_{n=1}^{\infty}(c_n\cos nx+d_n\sin nx)$ равномерно сходится на отрезке $(-\pi,\pi)$, и пусть его сумма равна $f(x)$. Пользуясь очевидными равенствами

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\,dx=\begin{cases}0 & (m\neq n),\\ \pi & (m=n\neq 0),\end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\,dx=\begin{cases}0 & (m\neq n),\\ \pi & (m=n\neq 0),\end{cases}\qquad\int_{-\pi}^{\pi}dx=2\pi,$$

мы найдем, умножая равенство

$$\frac{1}{2}c_0+\sum_{n=1}^{\infty}(c_n\cos nx+d_n\sin nx)=f(x)$$

на $\cos nx$ и на $\sin nx$[1]) и затем почленно интегрируя (§ 4.7), что[2])

$$\pi c_n=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx,\quad \pi d_n=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx.$$

Следствие. Тригонометрический ряд, равномерно сходящийся на отрезке $(-\pi, \pi)$, является рядом Фурье.

Примечание. Лебег дал доказательство (Lebesgue, Séries trigonométriques, 124) теоремы, сообщенной ему Фату: тригонометрический ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx}{\lg n}$, сходящийся для всех вещественных значений x (§ 2.31, пример 1), *не является* рядом Фурье.

9.2. Об условиях Дирихле и теореме Фурье

Теорему типа, указанного в § 9.1, о разложении функции вещественной переменной в тригонометрический ряд, обычно называют *теоремой* Фурье. Вследствие сложности и трудности строгого доказательства такой теоремы (даже в том случае, когда разлагаемая функция подчиняется излишне жестким ограничениям) мы откладываем это доказательство до §§ 9.42, 9.43. Тем не менее удобно привести здесь некоторые *достаточные* условия для разложения функции в тригонометрический ряд.

Пусть $f(t)$ определяется при $-\pi\leqslant t<\pi$ произвольно[3]), *а для всех остальных вещественных значений t равенством*

$$f(t+2\pi)=f(t),$$

так что $f(t)$ будет периодической функцией с периодом 2π. Пусть $f(t)$ такова, что интеграл $\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,dt$ существует; если этот интеграл является несобственным, то мы предположим, что он абсолютно сходится.

---

[1]) Умножение на эти множители не нарушает равномерной сходимости.

[2]) Эти формулы с пределами 0 и 2π даны Эйлером (Euler, Nova Acta Acad. Petrop., XI (1793)).

[3]) Это определение нередко ведет к тому, что $f(t)$ не представляется единым аналитическим выражением для всех вещественных значений t. Ср. § 9.11, пример 1.

Пусть a_n, b_n определяются равенствами[1])

$$\pi a_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt, \quad \pi b_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Тогда, если x — внутренняя точка какого-либо интервала (a, b), в котором $f(t)$ имеет ограниченную вариацию, то ряд

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

сходится и его сумма равна[2])

$$\frac{1}{2}\{f(x+0) + f(x-0)\}.$$

Если $f(t)$ непрерывна при $t = x$, то эта сумма равна $f(x)$.

Эта теорема считается известной в §§ 9.21—9.32; в этих параграфах мы рассматриваем теоремы о рядах Фурье, имеющие некоторое значение в приложениях. Следует отметить, что все функции, которые в прикладной математике приходится разлагать в ряды Фурье, удовлетворяют только что наложенным на $f(t)$ условиям, так что анализ, данный ниже в этой главе, устанавливает законность всех разложений в ряды Фурье, встречающихся в физических исследованиях.

Читатель видит, что сформулированная теорема подчиняет $f(t)$ менее сильным ограничениям по сравнению с условиями Дирихле, и это ослабление ограничений представляет значительную практическую важность. Например, такой простой ряд, как

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cos nx}{n},$$

является разложением функции $\lg\left|2\cos\frac{1}{2}x\right|$[3]), и эта функция не удовлетворяет условию ограниченности Дирихле при $\pm\pi$.

Принято называть ряд

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

---

[1]) Числа a_n, b_n называются *коэффициентами Фурье функции $f(t)$*, и символы a_n, b_n будут применяться в §§ 9.2—9.5 в этом смысле. Можно показать, что сходимость и абсолютная сходимость интегралов, определяющих коэффициенты Фурье, является следствием сходимости и абсолютной сходимости интеграла $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt$ (§§ 2.32, 4.5).

[2]) Пределы $f(x \pm 0)$ существуют согласно примеру 3 § 3.64.

[3]) Ср. пример 6 в конце главы (стр. 269).

рядом Фурье, соответствующим функции $f(t)$. Это название тем не менее никоим образом не подразумевает сходимости рассматриваемого ряда.

9.21. Представление функции рядом Фурье на произвольном отрезке

Рассмотрим функцию $f(x)$ с (абсолютно) сходящимся интегралом и с ограниченной вариацией на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$.

Положим

$$x = \frac{1}{2}(a+b) - \frac{1}{2}(a-b)\pi^{-1}x', \quad f(x) = F(x').$$

Тогда известно (§ 9.2), что

$$\frac{1}{2}\{F(x'+0)+F(x'-0)\} = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx' + b_n \sin nx'),$$

и таким образом,

$$\frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\} =$$

$$= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n \cos\frac{n\pi(2x-a-b)}{b-a} + b_n \sin\frac{n\pi(2x-a-b)}{b-a}\right\},$$

где в силу очевидного преобразования

$$\frac{1}{2}(b-a)a_n = \int_a^b f(x)\cos\frac{n\pi(2x-a-b)}{b-a}\,dx,$$

$$\frac{1}{2}(b-a)b_n = \int_a^b f(x)\sin\frac{n\pi(2x-a-b)}{b-a}\,dx.$$

9.22. Ряды косинусов и ряды синусов

Пусть $f(x)$ — функция, определенная на отрезке $(0, l)$, и пусть она имеет (абсолютно) сходящийся интеграл и ограниченную вариацию на этом отрезке.

Определим $f(x)$ на отрезке $(0, -l)$ равенством

$$f(-x) = f(x).$$

Тогда

$$\frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\} = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right\},$$

где согласно § 9.21

$$la_n = \int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{n\pi t}{l}\,dt = 2\int_{0}^{l} f(t)\cos\frac{n\pi t}{l}\,dt,$$

$$lb_n = \int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{n\pi t}{l}\,dt = 0,$$

так что при $-l \leqslant x \leqslant l$

$$\frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\} = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi x}{l};$$

последнее выражение называется *рядом косинусов*. Если, однако, мы определим $f(x)$ на отрезке $(0, -l)$ равенством

$$f(-x) = -f(x),$$

то получим при $-l \leqslant x \leqslant l$

$$\frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\frac{n\pi x}{l},$$

где

$$lb_n = 2\int_{0}^{l} f(t)\sin\frac{n\pi t}{l}\,dt;$$

последний ряд называется *рядом синусов*.

Таким образом, ряды

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi x}{l}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\frac{n\pi x}{l},$$

где

$$\frac{1}{2}la_n = \int_{0}^{l} f(t)\cos\frac{n\pi t}{l}\,dt, \quad \frac{1}{2}lb_n = \int_{0}^{l} f(t)\sin\frac{n\pi t}{l}\,dt,$$

имеют одну и ту же сумму при $0 \leqslant x \leqslant l$; их суммы при $0 \geqslant x \geqslant -l$ будут равны по абсолютной величине, но противоположны по знаку.

Ряд косинусов был введен Клеро (Clairaut, Hist. de l'Acad. R. des Sci, 1754, опубликовано в 1759 г.) в мемуаре, датированном 8 июля 1757 г.; ряд синусов был получен Лагранжем между 1762 и 1765 гг. (Lagrange, Oeuvres, I, 553).

Пример 1. Разложить функцию $\frac{1}{2}(\pi - x)\sin x$ в ряд косинусов на отрезке $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

[Мы имеем по только что полученной формуле

$$\frac{1}{2}(\pi - x)\sin x = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

где

$$\frac{1}{2}\pi a_n = \int_0^{\pi} \frac{1}{2}(\pi - x)\sin x \cos nx\, dx.$$

Но при $n \neq 1$, интегрируя по частям, имеем

$$\int_0^{\pi} 2(\pi - x)\sin x \cos nx\, dx = \int_0^{\pi} (\pi - x)\{\sin(n+1)x - \sin(n-1)x\}\, dx$$

$$= \left[(x - \pi)\left\{\frac{\cos(n+1)x}{n+1} - \frac{\cos(n-1)x}{n-1}\right\}\right]_0^{\pi} -$$

$$- \int_0^{\pi} \left\{\frac{\cos(n+1)x}{n+1} - \frac{\cos(n-1)x}{n-1}\right\} dx =$$

$$= \pi\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1}\right) = \frac{-2\pi}{(n+1)(n-1)}$$

Если же $n = 1$, то

$$\int_0^{\pi} 2(\pi - x)\sin x \cos x\, dx = \frac{1}{2}\pi;$$

следовательно, искомое имеет вид

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cos x - \frac{1}{1\cdot 3}\cos 2x - \frac{1}{2\cdot 4}\cos 3x - \frac{1}{3\cdot 5}\cos 4x - \ldots$$

Следует отметить, что только для значений x между 0 и π сумма этого ряда оказывается равной $\frac{1}{2}(\pi - x)\sin x$. Если же, например, x лежит между 0 и $-\pi$, то сумма ряда равна $-\frac{1}{2}(\pi - x)\sin x$, а не $\frac{1}{2}(\pi - x)\sin x$; когда x лежит между π и 2π, сумма ряда снова оказывается равной $\frac{1}{2}(\pi - x)\sin x$, однако это чисто случайное совпадение, возникающее благодаря специальному виду данной функции и не имеющее места в общем случае.

Пример 2. Разложить $\frac{1}{8}\pi x(\pi - x)$ в ряд синусов на отрезке $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

$\left[\text{Этот ряд имеет вид } \sin x + \frac{\sin 3x}{3^2} + \frac{\sin 5x}{5^2} + \ldots\right]$

Пример 3. Показать, что при $0 \leqslant x \leqslant \pi$

$$\frac{1}{96}\pi(\pi-2x)(\pi^2+2\pi x-2x^2)=\cos x+\frac{\cos 3x}{3^4}+\frac{\cos 5x}{5^4}+\ldots$$

[Обозначая левую часть через $f(x)$, мы имеем, интегрируя по частям и замечая, что $f'(0)=f'(\pi)=0$,

$$\int_0^\pi f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{n}[f(x)\sin nx]_0^\pi-\frac{1}{n}\int_0^\pi f'(x)\sin nx\,dx=$$

$$=\frac{1}{n^2}[f'(x)\cos nx]_0^\pi-\frac{1}{n^2}\int_0^\pi f''(x)\cos nx\,dx=$$

$$=-\frac{1}{n^3}[f''(x)\sin nx]_0^\pi+\frac{1}{n^3}\int_0^\pi f'''(x)\sin nx\,dx=$$

$$=-\frac{1}{n^4}[f'''(x)\cos nx]_0^\pi=\frac{\pi}{4n^4}(1-\cos n\pi).\Big]$$

Пример 4. Показать, что для значений x между 0 и π функцию e^{sx} можно разложить в ряд косинусов

$$\frac{2s}{\pi}(e^{s\pi}-1)\left(\frac{1}{2s^2}+\frac{\cos 2x}{s^2+4}+\frac{\cos 4x}{s^2+16}+\ldots\right)-$$
$$-\frac{2s}{\pi}(e^{s\pi}+1)\left(\frac{\cos x}{s^2+1}+\frac{\cos 3x}{s^2+9}+\ldots\right)$$

и вычертить графики функции e^{sx} и суммы ряда.

Пример 5. Показать, что для значений x между 0 и π функцию $\frac{1}{8}\pi(\pi-2x)$ можно разложить в ряд косинусов

$$\cos x+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\ldots$$

и вычертить график функции $\frac{1}{8}\pi(\pi-2x)$ и суммы ряда.

9.3. Свойства коэффициентов ряда Фурье[1])

Предположим (как и во многих из рассмотренных примеров), что отрезок $(-\pi, \pi)$ может быть разделён на конечное число отрезков $(-\pi, k_1)$, (k_1, k_2), ..., (k_n, π), так что в каждом отрезке $f(x)$ и все ее производные суть непрерывные функции с ограниченной

[1]) Рассуждения этого параграфа и § 9.31 содержатся в большом мемуаре Стокса (Stockes, Camb. Phil. Trans., VIII, 533—583 (1849), Math. Papers, 1, 236—313).

вариацией, имеющие пределы справа и слева (§ 3.2) в концах этих отрезков [1]). Тогда

$$\pi a_m = \int_{-\pi}^{k_1} f(t)\cos mt\,dt + \int_{k_1}^{k_2} f(t)\cos mt\,dt + \ldots + \int_{k_n}^{\pi} f(t)\cos mt\,dt.$$

Интегрированием по частям получаем

$$\pi a_m = [m^{-1}f(t)\sin mt]_{-\pi}^{k_1} + [m^{-1}f(t)\sin mt]_{k_1}^{k_2} + \ldots$$

$$\ldots + [m^{-1}f(t)\sin mt]_{k_n}^{\pi} - m^{-1}\int_{-\pi}^{k_1} f'(t)\sin mt\,dt -$$

$$- m^{-1}\int_{k_1}^{k_2} f'(t)\sin mt\,dt - \ldots - m^{-1}\int_{k_n}^{\pi} f'(t)\sin mt\,dt,$$

так что

$$a_m = \frac{A_m}{m} - \frac{b'_m}{m},$$

где

$$\pi A_m = \sum_{r=1}^{n} \sin mk_r\,\{f(k_r - 0) - f(k_r + 0)\},$$

а b'_m — коэффициент Фурье функции $f'(x)$.

Подобным же образом

$$b_m = \frac{B_m}{m} + \frac{a'_m}{m},$$

где

$$\pi B_m = -\sum_{r=1}^{n} \cos mk_r\,\{f(k_r - 0) - f(k_r + 0)\} -$$

$$- \cos m\pi\,\{f(\pi - 0) - f(-\pi + 0)\},$$

а a'_m — коэффициент Фурье функции $f'(x)$.

Подобным же образом мы получаем

$$a'_m = \frac{A'_m}{m} - \frac{b''_m}{m}, \quad b'_m = \frac{B'_m}{m} + \frac{a''_m}{m},$$

где a''_m, b''_m — коэффициенты Фурье функции $f''(x)$ и

$$\pi A'_m = \sum_{r=1}^{n} \sin mk_r\,\{f'(k_r - 0) - f'(k_r + 0)\},$$

$$\pi B'_m = -\sum_{r=1}^{n} \cos mk_r\,\{f'(k_r - 0) - f'(k_r + 0)\} -$$

$$- \cos m\pi\,\{f'(\pi - 0) - f'(-\pi + 0)\}.$$

---

[1]) Непрерывная функция ограниченной вариации на отрезке обязательно имеет конечные пределы в концах отрезка. (*Прим. ред.*)

Поэтому

$$a_m = \frac{A_m}{m} - \frac{B'_m}{m^2} - \frac{a''_m}{m^2}, \quad b_m = \frac{B_m}{m} + \frac{A'_m}{m^2} - \frac{b''_m}{m^2}.$$

Далее, мы видим, что при $m \to \infty$

$$A'_m = O(1), \quad B'_m = O(1),$$

и так как подинтегральные функции, входящие в a''_m и b''_m, ограничены, то ясно, что

$$a''_m = O(1), \quad b''_m = O(1).$$

Поэтому, если $A_m = 0$, $B_m = 0$, то ряд Фурье для $f(x)$ сходится абсолютно и равномерно согласно § 3.34.

Необходимые и достаточные условия того, чтобы $A_m = B_m = 0$ для всех значений m, состоят в том, что

$$f(k_r - 0) = f(k_r + 0), \quad f(\pi - 0) = f(-\pi + 0),$$

иначе говоря, в том, что $f(x)$ непрерывна для *всех* значений x [1]).

9.31. Дифференцирование рядов Фурье

Почленно дифференцируя ряд

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos mx + b_m \sin mx),$$

получаем

$$\sum_{m=1}^{\infty} \{m b_m \cos mx - m a_m \sin mx\}.$$

В обозначениях § 9.3 это то же самое, что

$$\frac{1}{2} a'_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (a'_m \cos mx + b'_m \sin mx),$$

если только

$$A_m = B_m = 0 \quad \text{и} \quad \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\, dx = 0;$$

эти условия удовлетворяются, если $f(x)$ непрерывна для всех значений x.

---

[1]) Конечно, $f(x)$ также подчиняется условиям, указанным в начале параграфа.

Вследствие этого достаточными условиями законности почленного дифференцирования ряда Фурье являются следующие: чтобы $f(x)$ была непрерывной функцией для *всех* значений x, чтобы $f'(x)$ имела конечное число точек разрыва на отрезке $(-\pi, \pi)$ и чтобы обе функции имели ограниченную вариацию на всем отрезке.

9.32. Определение точек разрыва

Выражения для a_m и b_m, найденные в § 9.3, часто могут применяться на практике для определения точек, в которых сумма данного ряда Фурье оказывается разрывной. Так, пусть требуется определить точки, в которых сумма ряда

$$\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \ldots$$

имеет разрывы.

Предполагая, что данный ряд есть ряд Фурье (а не *общий* тригонометрический ряд), и замечая, что $a_m = 0$, $b_m = (2m)^{-1}(1 - \cos m\pi)$, мы получим из рассмотрения формул, найденных в § 9.3,

$$A_m = 0, \quad B_m = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos m\pi, \quad a'_m = b'_m = 0.$$

Отсюда, если $k_1, k_2, \ldots$ — точки, в которых аналитический характер суммы нарушается, то мы имеем

$$0 = \pi A_m = \sin mk_1 \{f(k_1 - 0) - f(k_1 + 0)\} + \\ + \sin mk_2 \{f(k_2 - 0) - f(k_2 + 0)\} + \ldots$$

Так как это равенство имеет место для всех значений m, то числа $k_1, k_2, \ldots$ должны быть кратны числу π, но имеется только одно кратное π внутри промежутка $-\pi < x < \pi$, а именно нуль. Таким образом, $k_1 = 0$, а $k_2, k_3, \ldots$ не существуют. Подставляя $k_1 = 0$ в равенство

$$B_m = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos m\pi,$$

получаем

$$\pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos m\pi\right) = -[\cos m\pi \{f(\pi - 0) - f(-\pi + 0)\} + f(-0) - f(+0)].$$

Так как это соотношение справедливо для всех значений m, то мы имеем

$$\frac{1}{2}\pi = f(+0) - f(-0),$$

$$\frac{1}{2}\pi = f(\pi - 0) - f(\pi + 0).$$

Это показывает, что если рассматриваемый ряд есть ряд Фурье, то $f(x)$

имеет разрывы в точках $n\pi$ (n — любое целое число), а так как $a'_m = b'_m = 0$, то мы можем ожидать[1]), что $f(x)$ будет постоянной в открытом промежутке $(-\pi, 0)$ и будет другой постоянной в открытом промежутке $(0, \pi)$.

9.4. Теорема Фейера

Начнем теперь изложение теории рядов Фурье с доказательства следующей теоремы Фейера[2]) относительно суммируемости ряда Фурье, соответствующего произвольной функции $f(t)$.

Пусть $f(t)$ — функция вещественной переменной t, произвольно определенная при $-\pi \leqslant t < \pi$ и определяемая равенством

$$f(t+2\pi) = f(t)$$

для всех остальных вещественных значений t; пусть интеграл $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt$ существует и (если это несобственный интеграл) абсолютно сходится.

Тогда ряд Фурье, соответствующий функции $f(t)$, будет суммируем ($C\,1$)[3]) во всех точках x, в которых существуют пределы $f(x \pm 0)$.

Его ($C\,1$)-сумма равна $\frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\}$.

Пусть a_n, b_n ($n = 0, 1, 2, \ldots$) — коэффициенты Фурье (§ 9.2) функции $f(t)$, и пусть

$$\frac{1}{2}a_0 = A_0, \quad a_n \cos nx + b_n \sin nx = A_n(x), \quad \sum_{n=0}^{m} A_n(x) = S_m(x).$$

Тогда мы должны доказать, что

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m}\{A_0 + S_1(x) + S_2(x) + \ldots + S_{m-1}(x)\} = \\ = \frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\}$$

при условии, что пределы в правой части существуют.

---

[1]) Это так и есть:

$$f(x) = -\frac{1}{4}\pi \quad \text{при} \quad -\pi < x < 0,$$

$$f(x) = \frac{1}{4}\pi \quad \text{при} \quad 0 < x < \pi.$$

[2]) Fejér, Math. Ann., LVIII, 51—69 (1904).

[3]) См. § 8.43.

Если мы подставим вместо коэффициентов Фурье их выражения в виде интегралов (§ 9.2), то легко убедимся[1]), что

$$A_0+\sum_{n=1}^{m-1} S_n(x)=$$

$$=mA_0+(m-1)A_1(x)+(m-2)A_2(x)+\ldots+A_{m-1}(x)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\frac{1}{2}m+(m-1)\cos(x-t)-(m-2)\cos 2(x-t)+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\cos(m-1)\right\}f(t)\,dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2\frac{1}{2}m(x-t)}{\sin^2\frac{1}{2}(x-t)}f(t)\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi+x}^{\pi+x}\frac{\sin^2\frac{1}{2}m(x-t)}{\sin^2\frac{1}{2}(x-t)}f(t)\,dt;$$

последнее преобразование следует из периодичности подинтегрального выражения.

Если теперь разобьем путь интегрирования на две равные части и на первой из них заменим t на $x-2\theta$, а на второй t на $x+2\theta$, то получим

$$A_0+\sum_{n=1}^{m-1} S_n(x)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 m\theta}{\sin^2\theta}f(x+2\theta)\,d\theta+\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 m\theta}{\sin^2\theta}f(x-2\theta)\,d\theta.$$

Следовательно, достаточно будет доказать, что при $m\to\infty$

$$\frac{1}{m}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 m\theta}{\sin^2\theta}f(x+2\theta)\,d\theta\to\frac{1}{2}\pi f(x+0),$$

$$\frac{1}{m}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 m\theta}{\sin^2\theta}f(x-2\theta)\,d\theta\to\frac{1}{2}\pi f(x-0).$$

---

[1]) Очевидно, что если мы напишем λ вместо $e^{i(x-t)}$ в сумме $m+2(m-1)\cos(x-t)+\ldots$, то получим

$$m+(m-1)(\lambda+\lambda^{-1})+(m-2)(\lambda^2+\lambda^{-2})+\ldots+(\lambda^{m-1}+\lambda^{1-m})=$$

$$=(1-\lambda)^{-1}\{\lambda^{1-m}+\lambda^{2-m}+\ldots+\lambda^{-1}+1-\lambda-\lambda^2-\ldots-\lambda^m\}=$$

$$=(1-\lambda)^{-2}\{\lambda^{1-m}-2\lambda+\lambda^{m+1}\}=\frac{\left(\lambda^{\frac{1}{2}m}-\lambda^{-\frac{1}{2}m}\right)^2}{\left(\lambda^{\frac{1}{2}}-\lambda^{-\frac{1}{2}}\right)^2}.$$

Если мы проинтегрируем равенство

$$\frac{\sin^2 m\theta}{2\sin^2\theta}=\frac{1}{2}m+(m-1)\cos 2\theta+\ldots+\cos 2(m-1)\theta,$$

то найдем, что

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 m\theta}{\sin^2\theta}\,d\theta=\frac{1}{2}\pi m,$$

и таким образом, нам требуется доказать, что

$$\frac{1}{m}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 m\theta}{\sin^2\theta}\varphi(\theta)\,d\theta\to 0 \quad \text{при} \quad m\to\infty,$$

где $\varphi(\theta)$ представляет поочередно каждую из двух функций

$$f(x+2\theta)-f(x+0),\quad f(x-2\theta)-f(x-0).$$

Далее, для произвольного положительного числа ε мы можем выбрать такое δ, что[1])

$$|\varphi(\theta)|<\varepsilon,$$

когда $0<\theta\leqslant\frac{1}{2}\delta$. Этот выбор δ, очевидно, не зависит от m. Тогда

$$\left|\frac{1}{m}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 m\theta}{\sin^2\theta}\varphi(\theta)\,d\theta\right|\leqslant\frac{1}{m}\int_0^{\frac{\delta}{2}}\frac{\sin^2 m\theta}{\sin^2\theta}|\varphi(\theta)|\,d\theta+$$

$$+\frac{1}{m}\int_{\frac{\delta}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 m\theta}{\sin^2\theta}|\varphi(\theta)|\,d\theta<$$

$$<\frac{\varepsilon}{m}\int_0^{\frac{\delta}{2}}\frac{\sin^2 m\theta}{\sin^2\theta}\,d\theta+\frac{1}{m\sin^2\frac{1}{2}\delta}\int_{\frac{1}{2}\delta}^{\frac{\pi}{2}}|\varphi\theta|\,d\theta\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{m}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 m\theta}{\sin^2\theta}\,d\theta+\frac{1}{m\sin^2\frac{1}{2}\delta}\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\varphi(\theta)|\,d\theta=$$

$$=\frac{1}{2}\pi\varepsilon+\frac{1}{m\sin^2\frac{1}{2}\delta}\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\varphi(\theta)|\,d\theta.$$

---

[1]) В предположении, что существует $f(x\pm 0)$.

Но из сходимости интеграла

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\, dt$$

вытекает сходимость интеграла

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} |\varphi(\theta)|\, d\theta,$$

и таким образом, когда ε (а следовательно, и δ) задано, мы можем сделать

$$\frac{1}{2}\pi\varepsilon m \sin^2\frac{1}{2}\delta > \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} |\varphi(\theta)|\, d\theta,$$

взяв m достаточно большим. Отсюда вытекает, что при достаточно больших m мы будем иметь

$$\left| \frac{1}{m} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 m\theta}{\sin^2\theta} \varphi(\theta)\, d\theta \right| < \pi\varepsilon,$$

где ε — произвольное положительное число; следовательно, по определению предела

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 m\theta}{\sin^2\theta} \varphi(\theta)\, d\theta = 0,$$

и таким образом, теорема Фейера доказана.

Следствие 1. Пусть U и L — верхняя и нижняя границы $f(t)$ в некотором интервале (a, b), величина которого не превосходит 2π, и пусть

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\, dt = \pi A.$$

Тогда, если $a+\eta \leqslant x \leqslant b-\eta$, где η — положительное число, то мы имеем

$$U-\frac{1}{m}\left\{A_0+\sum_{n=1}^{m-1} S_n(x)\right\}=$$

$$=\frac{1}{2m\pi}\left\{\int_{-\pi+x}^{x-\eta}+\int_{x-\eta}^{x+\eta}+\int_{x+\eta}^{\pi+x}\right\}\frac{\sin^2\frac{1}{2}m(x-t)}{\sin^2\frac{1}{2}(x-t)}\{U-f(t)\}\,dt=$$

$$=\frac{1}{2m\pi}\left\{\int_{-\pi+x}^{x-\eta}+\int_{x+\eta}^{\pi+x}\right\}\frac{\sin^2\frac{1}{2}m(x-t)}{\sin^2\frac{1}{2}(x-t)}\{U-f(t)\}\,dt\geqslant$$

$$\geqslant-\frac{1}{2m\pi}\left\{\int_{-\pi+x}^{x-\eta}+\int_{x+\eta}^{\pi+x}\right\}\frac{|U|+|f(t)|}{\sin^2\frac{1}{2}\eta}\,dt,$$

так что

$$\frac{1}{m}\left\{A_0+\sum_{n=1}^{m-1} S_n(x)\right\}\leqslant U+\frac{|U|+\frac{1}{2}A}{m\sin^2\frac{1}{2}\eta}.$$

Подобным же образом

$$\frac{1}{m}\left\{A_0+\sum_{n=1}^{m-1} S_n(x)\right\}\geqslant L-\frac{|L|+\frac{1}{2}A}{m\sin^2\frac{1}{2}\eta}.$$

Следствие 2. Пусть $f(t)$ непрерывна на отрезке $a\leqslant t\leqslant b$. Так как непрерывность влечет за собой равномерную непрерывность (§ 3.61), то выбор δ соответственно какому-либо значению x в (a, b) будет независим от x и верхняя граница выражений $|f(x\pm 0)|$, т. е. $|f(x)|$, будет также независима от x, так что

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\varphi(\theta)|\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|f(x\pm 2\theta)-f(x\pm 0)|\,d\theta\leqslant\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|\,dt+\frac{1}{2}\pi|f(x\pm 0)|,$$

и верхняя граница последнего выражения будет независима от x. Отсюда — выбор величины m, при котором

$$\left|\frac{1}{m}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 m\theta}{\sin^2\theta}\varphi(\theta)\,d\theta\right|<\pi\varepsilon,$$

будет независим от x, и *следовательно*, $\frac{1}{m}\left\{A_0+\sum_{n=1}^{m-1} S_n(x)\right\}$ *стремится к пределу* $f(x)$ *при* $m\to\infty$ *равномерно на всем отрезке* $a\leqslant x\leqslant b$.

9.41. Леммы Римана — Лебега

Чтобы иметь возможность применить теорему Харди (§ 8.5) для вывода сходимости ряда Фурье из теоремы Фейера, мы нуждаемся в следующих двух леммах:

(I) *Пусть* $\int_a^b \psi(\theta)\,d\theta$ *существует и (если это несобственный интеграл) абсолютно сходится. Тогда при* $\lambda \to \infty$

$$\int_a^b \psi(\theta)\sin\lambda\theta\,d\theta \quad \textit{будет } o(1).$$

(II) *Если, далее,* $\psi(\theta)$ *имеет ограниченную вариацию на отрезке* (a, b), *то при* $\lambda \to \infty$

$$\int_a^b \psi(\theta)\sin\lambda\theta\,d\theta \quad \textit{будет } O\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Первый из этих результатов был высказан Гамильтоном [1]) и Риманом [2]) для ограниченных функций. Справедливость леммы (II), кажется, была хорошо известна раньше, чем была осознана ее важность; она является обобщением результата, установленного Дирксеном [3]) и Стоксом (см. § 9.3) для функций с непрерывной производной.

Читателю следует отметить, что рассуждения этого параграфа сохраняют силу и в том случае, если синусы заменить всюду косинусами.

(I) Удобно доказать [4]) эту лемму сначала для случая функции $\psi(\theta)$, ограниченной на отрезке (a, b). В этом случае пусть K — верхняя граница $|\psi(\theta)|$, а ε — произвольное положительное число. Разделим отрезок (a, b) на n частей точками $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ и составим суммы S_n, s_n, соответствующие функции $\psi(\theta)$, по способу § 4.1. Возьмем n настолько большим, чтобы $S_n - s_n < \varepsilon$; это возможно, так как $\psi(\theta)$ — интегрируемая функция.

На отрезке (x_{r-1}, x_r) положим

$$\psi(\theta) = \psi_r(x_{r-1}) + \omega_r(\theta),$$

так что

$$|\omega_r(\theta)| \leqslant U_r - L_r,$$

---

[1]) W. R. Hamilton, Trans. Dublin Acad., XIX, 287 (1834).

[2]) Riemann, Ges. math. Werke, 241. Относительно исследования Лебега см. его книгу «Séries trigonométriques», гл. III, 1906.

[3]) Dirksen, Journal für Math., IV, 172 (1829).

[4]) Этим доказательством мы обязаны Харди; оно кажется более изящным, чем доказательства, данные другими авторами, например Валле-Пуссеном в его «Курсе анализа бесконечно малых», т. II.

где U_r и L_r — верхняя и нижняя границы функции $\psi(\theta)$ на отрезке (x_{r-1}, x_r).

Тогда ясно, что

$$\left|\int_a^b \psi(\theta)\sin\lambda\theta\,d\theta\right| = \left|\sum_{r=1}^n \psi_r(x_{r-1})\int_{x_{r-1}}^{x_r}\sin\lambda\theta\,d\theta + \right.$$

$$\left. + \sum_{r=1}^n \int_{x_{r-1}}^{x_r} \omega_r(\theta)\sin\lambda\theta\,d\theta\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{r=1}^n |\psi_r(x_{r-1})|\left|\int_{x_{r-1}}^{x_r}\sin\lambda\theta\,d\theta\right| + \sum_{r=1}^n \int_{x_{r-1}}^{x_r} |\omega_r(\theta)|\,d\theta \leqslant$$

$$\leqslant nK\frac{2}{\lambda} + (S_n - s_n) < \frac{2nK}{\lambda} + \varepsilon.$$

Взяв λ достаточно большим (n остается фиксированным, после того как ε выбрано), последнее выражение можно сделать меньше, чем 2ε, так что

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b \psi(\theta)\sin\lambda\theta\,d\theta = 0,$$

что и требовалось доказать.

В случае, когда $\psi(\theta)$ не ограничена, если она имеет абсолютно сходящийся интеграл, то, согласно § 4.5, мы можем заключить точки, в которых эта функция не ограничена, в конечное[1]) число интервалов $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_p$, так что

$$\sum_{r=1}^p \int_{\delta_r} |\psi(\theta)|\,d\theta < \varepsilon.$$

Пусть K обозначает верхнюю границу $|\psi(\theta)|$ для значений θ вне этих интервалов, и пусть $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{p+1}$ обозначают части отрезка (a, b), остающиеся после удаления интервалов $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_p$; тогда мы можем доказать, как и раньше, что

$$\left|\int_a^b \psi(\theta)\sin\lambda\theta\,d\theta\right| = \left|\sum_{r=1}^{p+1}\int_{\gamma_r}\psi(\theta)\sin\lambda\theta\,d\theta + \sum_{r=1}^p\int_{\delta_r}\psi(\theta)\sin\lambda\theta\,d\theta\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\sum_{r=1}^{p+1}\int_{\gamma_r}\psi(\theta)\sin\lambda\theta\,d\theta\right| + \sum_{r=1}^p\int_{\delta_r}|\psi(\theta)\sin\lambda\theta|\,d\theta < \frac{2nK}{\lambda} + 2\varepsilon.$$

---

[1]) *Конечность* числа интервалов содержится в определении несобственного интеграла § 4.5.

Так как выбор ε фиксирует n и K, то последнее выражение можно сделать меньше, чем 3ε, если взять λ достаточно большим. Иначе говоря, даже если $\psi(\theta)$ не ограничена,

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b \psi(\theta)\sin\lambda\theta\,d\theta=0,$$

если только (несобственный) интеграл от $\psi(\theta)$ абсолютно сходится.

Первая лемма, таким образом, доказана полностью.

(II) Если $\psi(\theta)$ имеет ограниченную вариацию на отрезке (a, b), то, принимая во внимание пример 2 § 3.64, мы можем написать

$$\psi(\theta)=\chi_1(\theta)-\chi_2(\theta),$$

где $\chi_1(\theta)$, $\chi_2(\theta)$ — положительные неубывающие ограниченные функции.

Тогда по второй теореме о среднем значении (§ 4.14) существует такое число ξ, что $a\leqslant\xi\leqslant b$ и

$$\left|\int_a^b \chi_1(\theta)\sin\lambda\theta\,d\theta\right|=\left|\chi_1(b)\int_\xi^b \sin\lambda\theta\,d\theta\right|\leqslant\frac{2\chi_1(b)}{\lambda}.$$

Если мы проделаем то же самое с $\chi_2(\theta)$, то получим

$$\left|\int_a^b \psi(\theta)\sin\lambda\theta\,d\theta\right|\leqslant\left|\int_a^b \chi_1(\theta)\sin\lambda\theta\,d\theta\right|+\left|\int_a^b \chi_2(\theta)\sin\lambda\theta\,d\theta\right|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{2\{\chi_1(b)+\chi_2(b)\}}{\lambda}=O\left(\frac{1}{\lambda}\right),$$

и таким образом, вторая лемма доказана.

Следствие. Если $f(t)$ такова, что интеграл $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt$ абсолютно сходится, то коэффициенты Фурье a_n, b_n функции $f(t)$ будут $o(1)$, когда $n\to\infty$; если, далее, $f(t)$ имеет ограниченную вариацию на отрезке $(-\pi, \pi)$, коэффициенты Фурье будут $O\left(\frac{1}{n}\right)$.

[Конечно, эти результаты сами по себе недостаточны для обеспечения сходимости ряда Фурье, соответствующего функции $f(t)$, ибо ряд, члены которого имеют порядок членов гармонического ряда (§ 2.3), не обязательно будет сходящимся.]

9.42. Доказательство теоремы Фурье

Докажем теперь теорему, высказанную в § 9.2, а именно:

Пусть $f(t)$ — функция, произвольная при $-\pi\leqslant t<\pi$ и определяемая равенством $f(t+2\pi)=f(t)$ для всех остальных

вещественных значений t; пусть $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt$ существует и (если это несобственный интеграл) абсолютно сходится.

Пусть a_n, b_n определяются равенствами

$$\pi a_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt, \quad \pi b_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt.$$

Тогда, если x — внутренняя точка какого-либо отрезка (a, b), на котором $f(t)$ имеет ограниченную вариацию, то ряд

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

сходится на этом отрезке и его сумма равна

$$\frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\}.$$

Удобно дать два доказательства: одно, относящееся к функциям, для которых можно принять за отрезок (a, b) весь отрезок $(-\pi+x, \pi+x)$, а другое, относящееся к функциям, для которых этого сделать нельзя.

(I) Если за отрезок (a, b) можно принять отрезок $(-\pi+x, \pi+x)$, то из § 9.41 (II) следует, что $a_n\cos nx + b_n\sin nx$ будет $O\left(\frac{1}{n}\right)$ при $n\to\infty$. По теореме Фейера (§ 9.4) рассматриваемый ряд суммируем $(C\,1)$ и его $(C\,1)$-сумма равна $\frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\}$ [1]. Поэтому по теореме Харди (§ 8.5) рассматриваемый ряд будет сходиться и его сумма будет равна (по § 8.43) $\frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\}$.

(II) Если же невозможно принять за отрезок (a, b) весь отрезок $(-\pi+x, \pi+x)$, то по условию можно найти такое положительное число δ, меньшее π, что $f(t)$ будет иметь ограниченную вариацию на отрезке $(x-\delta, x+\delta)$. Введем вспомогательную функцию $g(t)$, равную $f(t)$, когда $x-\delta\leqslant t\leqslant x+\delta$, и равную нулю в остальной части отрезка $(-\pi+x, \pi+x)$, причем $g(t+2\pi)=g(t)$ для всех вещественных значений t.

Тогда $g(t)$ будет удовлетворять условиям, наложенным на функции, рассмотренные в (I), а именно: она имеет абсолютно сходящийся интеграл и ограниченную вариацию на отрезке $(-\pi+x, \pi+x)$; таким образом, если $a_n^{(1)}$, $b_n^{(1)}$ — коэффициенты Фурье функции $g(t)$,

---

[1]) Пределы $f(x\pm 0)$ существуют согласно примеру 3 § 3.64.

то результат, полученный в (I), показывает, что ряд Фурье, соответствующий функции $g(t)$, а именно

$$\frac{1}{2}a_0^{(1)}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^{(1)}\cos nx+b_n^{(1)}\sin nx\right),$$

сходится к сумме

$$\frac{1}{2}\{g(x+0)+g(x-0)\},$$

которая равна

$$\frac{1}{2}\{f(x+0\}+f(x-0)\}.$$

Пусть теперь $S_m(x)$ и $S_m^{(1)}(x)$ обозначают суммы $m+1$ первых членов рядов Фурье, соответствующих функциям $f(t)$ и $g(t)$. Тогда легко видеть, что

$$S_m(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\frac{1}{2}+\cos(x-t)+\cos 2(x-t)+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\cos m(x-t)\right\}f(t)\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)(x-t)}{\sin\frac{1}{2}(x-t)}f(t)\,dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi+x}^{\pi+x}\frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)(x-t)}{\sin\frac{1}{2}(x-t)}f(t)\,dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2m+1)\theta}{\sin\theta}f(x+2\theta)\,d\theta+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2m+1)\theta}{\sin\theta}f(x-2\theta)\,d\theta$$

аналогично § 9.4.

Подобным же образом

$$S_m^{(1)}(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2m+1)\theta}{\sin\theta}g(x+2\theta)\,d\theta+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2m+1)\theta}{\sin\theta}g(x-2\theta)\,d\theta,$$

и следовательно, пользуясь определением функции $g(t)$, имеем

$$S_m(x) - S_m^{(1)}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\delta}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(2m+1)\theta \frac{f(x+2\theta)}{\sin\theta} d\theta +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\delta}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(2m+1)\theta \frac{f(x-2\theta)}{\sin\theta} d\theta.$$

Так как $\operatorname{cosec}\theta$ является непрерывной функцией на отрезке

$$\left(\frac{\delta}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

то отсюда следует, что $f(x \pm 2\theta)\operatorname{cosec}\theta$ будут интегрируемыми функциями с абсолютно сходящимися интегралами; следовательно, по лемме Римана — Лебега [§ 9.41 (I)] *оба интеграла справа в последнем равенстве стремятся к нулю, когда* $m \to \infty$.

Иначе говоря,

$$\lim_{m\to\infty} \{S_m(x) - S_m^{(1)}(x)\} = 0.$$

Отсюда в силу

$$\lim_{m\to\infty} S_m^{(1)}(x) = \frac{1}{2}\{(x+0) + f(x-0)\}$$

следует, что

$$\lim_{m\to\infty} S_m(x) = \frac{1}{2}\{f(x+0) + f(x-0)\}.$$

Итак, мы доказали, что ряд Фурье, соответствующий функции $f(t)$, *а именно ряд* $\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, *сходится и его сумма равна*

$$\frac{1}{2}\{f(x+0) + f(x-0)\}.$$

9.43. Доказательство Дирихле — Бонне теоремы Фурье

Представляет некоторый интерес доказать теорему § 9.42 непосредственно, не прибегая к теории суммирования. Соответственно этому мы дадим теперь доказательство, имеющее тот же общий характер, что и доказательства, принадлежащие Дирихле и Бонне.

Как обычно, обозначим сумму первых $m+1$ членов ряда Фурье через $S_m(x)$; тогда согласно § 9.42 имеем

$$S_m(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2m+1)\theta}{\sin\theta}f(x+2\theta)\,d\theta+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2m+1)\theta}{\sin\theta}f(x-2\theta)\,d\theta.$$

Но, интегрируя равенство

$$\frac{\sin(2m+1)\theta}{\sin\theta}=1+2\cos 2\theta+2\cos 4\theta+\ldots+2\cos 2m\theta,$$

имеем

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2m+1)\theta}{\sin\theta}\,d\theta=\frac{\pi}{2},$$

так что

$$S_m(x)-\frac{1}{2}f\{(x+0)+f(x-0)\}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2m+1)\theta}{\sin\theta}\{f(x+2\theta)-f(x+0)\}\,d\theta+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2m+1)\theta}{\sin\theta}\{f(x-2\theta)-f(x-0)\}\,d\theta.$$

Для доказательства равенства

$$\lim_{m\to\infty}S_m(x)=\frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\}$$

достаточно показать, что

$$\lim_{m\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2m+1)\theta}{\sin\theta}\varphi(\theta)\,d\theta=0,$$

где за $\varphi(\theta)$ поочередно принимается одна из функций

$$f(x+2\theta)-f(x+0),\quad f(x-2\theta)-f(x-0).$$

Но, согласно примеру 4 § 3.64, $\theta\varphi(\theta)\operatorname{cosec}\theta$ является функцией с ограниченной вариацией на некотором отрезке, у которого одной из концевых точек будет $\theta=0$ [1]); поэтому можно написать

$$\theta\varphi(\theta)\operatorname{cosec}\theta=\chi_1(\theta)-\chi_2(\theta),$$

где $\chi_1(\theta)$, $\chi_2(\theta)$ — такие ограниченные положительные неубывающие функции от θ, что

$$\chi_1(+0)=\chi_2(+0)=0.$$

Поэтому для данного произвольного положительного числа ε мы можем выбрать такое положительное число δ, что

$$0\leqslant\chi_1(\theta)<\varepsilon,\quad 0\leqslant\chi_2(\theta)<\varepsilon,$$

когда

$$0<\theta\leqslant\frac{\delta}{2}.$$

Выведем теперь неравенства, которым удовлетворяют три интеграла справа в очевидном равенстве

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2m+1)\theta}{\sin\theta}\varphi(\theta)\,d\theta=\int_{\frac{\delta}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin(2m+1)\theta\,\frac{\varphi(\theta)}{\sin\theta}\,d\theta+$$

$$+\int_0^{\frac{\delta}{2}}\frac{\sin(2m+1)\theta}{\theta}\chi_1(\theta)\,d\theta-\int_0^{\frac{\delta}{2}}\frac{\sin(2m+1)\theta}{\theta}\chi_2(\theta)\,d\theta.$$

Модуль первого интеграла может быть сделан меньше, чем ε, если взять m достаточно большим; это следует из § 9.41 (I), так как интеграл от $\varphi(\theta)\operatorname{cosec}\theta$ по отрезку $\left(\frac{\delta}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ абсолютно сходится. Далее, по второй теореме о среднем значении имеется такое число ξ между 0 и δ, что

$$\left|\int_0^{\frac{\delta}{2}}\frac{\sin(2m+1)\theta}{\theta}\chi_1(\theta)\,d\theta\right|=$$

$$=\left|\chi_1\left(\frac{\delta}{2}\right)\int_{\frac{\xi}{2}}^{\frac{\delta}{2}}\frac{\sin(2m+1)\theta}{\theta}\,d\theta\right|=\chi_1\left(\frac{\delta}{2}\right)\left|\int_{\left(m+\frac{1}{2}\right)\xi}^{\left(m+\frac{1}{2}\right)\delta}\frac{\sin u}{u}\,du\right|.$$

---

[1]) Другой концевой точкой будет $\theta=(b-x)/2$ или $\theta=(x-a)/2$ соответственно тому, будет ли $\varphi(\theta)$ представлять первую или вторую из рассматриваемых функций.