Так как $\int\limits_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt$ сходится, то

$$\left|\int\limits_\beta^\infty \frac{\sin u}{u}\,du\right|$$

имеет верхнюю границу B [1]), не зависящую от β; отсюда ясно, что

$$\left|\int\limits_0^{\frac{\delta}{2}} \frac{\sin(2m+1)\theta}{\theta}\chi_1(\theta)\,d\theta\right| \leqslant 2B\chi_1\left(\frac{\delta}{2}\right) < 2B\varepsilon.$$

Поступая с третьим интегралом подобным же образом, видим, что мы можем сделать

$$\left|\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2m+1)\theta}{\sin\theta}\varphi(\theta)\,d\theta\right| < (4B+1)\varepsilon,$$

взяв m достаточно большим; *таким образом, мы доказали, что*

$$\lim_{m\to\infty}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2m+1)\theta}{\sin\theta}\varphi(\theta)\,d\theta = 0.$$

Но мы уже видели, что это является достаточным условием для того, чтобы предел суммы $S_m(x)$ был равен $\frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\}$; поэтому сходимость ряда Фурье при условиях, изложенных в § 9.42, установлена.

Примечание. Читателю следует заметить, что в обоих доказательствах сходимости ряда Фурье требуется *вторая* теорема о среднем значении, а для доказательства суммируемости ряда достаточно *первой* теоремы о среднем значении. Следует также отметить, что, в то время как при доказательстве суммируемости в какой-либо точке x накладываются ограничения на $f(t)$ во всей области $(-\pi, \pi)$, необходимым дополнительным ограничением для обеспечения сходимости ряда является только ограничение поведения функции в непосредственном соседстве с точкой x. Факт зависимости сходимости только от поведения функции в непосредственном

---

[1]) Читателю будет интересно доказать, что

$$B = \int\limits_0^\infty \frac{\sin u}{u}\,du = \frac{\pi}{2}.$$

соседстве с x (при условии, что функция имеет абсолютно сходящийся интеграл) был замечен Риманом и подчеркнут Лебегом (Lebesgue, Séries trigonomètriques, 60).

Условие [1]), что x есть внутренняя точка интервала, в котором $f(t)$ имеет ограниченную вариацию, является, очевидно, только достаточным для сходимости ряда Фурье, и оно может быть заменено любым условием, при котором

$$\lim_{m\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2m+1)\theta}{\sin\theta}\varphi(\theta)\,d\theta=0.$$

Условие Жордана тем не менее является естественным видоизменением условия Дирихле, состоящего в том, что функция $f(t)$ имеет конечное число максимумов и минимумов; оно не увеличивает трудности доказательства.

Другое условие принадлежит Дини (Dini, Sopra le serie di Fourier, Pisa, 1880); оно состоит в том, что интеграл $\int_0^a \Phi(\theta)\,d\theta$, где

$$\Phi(\theta)=\frac{f(x+2\theta)+f(x-2\theta)-f(x+0)-f(x-0)}{\theta},$$

должен сходиться абсолютно при каком-нибудь положительном значении a.

[Если это условие выполнено, то для данного ε мы можем найти такое δ, что

$$\int_0^{\frac{\delta}{2}}|\Phi(\theta)|\,d\theta<\varepsilon,$$

а тогда

$$\left|\int_0^{\frac{\delta}{2}}\sin(2m+1)\theta\,\frac{\theta}{\sin\theta}\Phi(\theta)\,d\theta\right|<\frac{1}{2}\pi\varepsilon;$$

утверждение, что

$$\left|\int_{\frac{\delta}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2m+1)\theta}{\sin\theta}\Phi(\theta)\,d\theta\right|<\varepsilon,$$

для достаточно больших значений m вытекает при этом из леммы Римана — Лебега.]

Более ограничительное условие, чем условие Дини, принадлежит Липшицу (Lipschitz, Journal für Math., LXIII, 296 (1864)), а именно: $|\varphi(\theta)|<C\theta^k$, где C и k положительны и не зависят от θ. Относительно других условий, принадлежащих Лебегу и Валле-Пуссену, см. книгу последнего «Курс анализа бесконечно малых», т. II, стр. 134—138. Следует отметить,

---

[1]) Принадлежащее Жордану (Jordan, Comptes Rendus, XCII, 228 (1881)).

что условие Жордана отличается по характеру от условия Дини; условие Дини есть условие того, чтобы ряд сходился в некоторой *точке* интервала $(-\pi, \pi)$, а условие Жордана есть условие того, чтобы ряд сходился в некотором *интервале*.

9.44. Равномерная сходимость рядов Фурье

Пусть $f(t)$ удовлетворяет указанным в § 9.42 условиям, и пусть она будет *непрерывной* (в дополнение к ограниченности вариации) в интервале (a, b). *Тогда ряд Фурье, соответствующий функции $f(t)$, сходится равномерно к сумме $f(x)$ во всех точках x, для которых $a+\delta \leqslant x \leqslant b-\delta$, где δ — любое положительное число.*

Пусть $h(t)$ — вспомогательная функция, равная $f(t)$ при $a \leqslant t \leqslant b$ и нулю для остальных значений t на отрезке $(-\pi, \pi)$, и пусть α_n, β_n обозначают коэффициенты Фурье функции $h(t)$. Далее, пусть $S_m^{(2)}(x)$ обозначает сумму первых $m+1$ членов ряда Фурье, соответствующего функции $h(t)$. Тогда по следствию 2 § 9.4 ряд

$$\frac{1}{2}\alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx)$$

будет *равномерно суммируем* на всем отрезке $(a+\delta, b-\delta)$; а так как

$$|\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx| \leqslant (\alpha_n^2 + \beta_n^2)^{\frac{1}{2}},$$

где правая часть не зависит от x и, согласно § 9.41 (II), будет $O(1/n)$, то по следствию § 8.5 ряд

$$\frac{1}{2}\alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx)$$

сходится равномерно к сумме $h(x)$, равной $f(x)$.

Теперь, как в § 9.42,

$$S_m(x) - S_m^{(2)}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\frac{b-x}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2m+1)\theta}{\sin\theta} f(x+2\theta)\, d\theta +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_{\frac{x-a}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2m+1)\theta}{\sin\theta} f(x-2\theta)\, d\theta.$$

Как в § 9.41, возьмем произвольное положительное число ε и затем заключим точки, в которых $f(t)$ будет не ограничена, в такие интервалы $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_p$, что

$$\sum_{r=1}^{p} \int_{\delta_r} |f(t)|\, dt < \varepsilon.$$

Если K — верхняя граница $|f(t)|$ вне этих интервалов, то мы имеем, как в § 9.41,

$$\left| S_m(x) - S_m^{(2)}(x) \right| < \left(\frac{2nK}{2m+1} + 2\varepsilon \right) \operatorname{cosec} \delta,$$

где выбор n зависит только от a и b и от вида функции $f(t)$. Отсюда видно, что мы можем сделать $\left| S_m(x) - S_m^{(2)}(x) \right|$ произвольно малым, выбирая m *независимо* от x, так что $S_m(x) - S_m^{(2)}(x)$ стремится к нулю равномерно. Поскольку $S_m^{(2)}(x) \to f(x)$ равномерно, ясно, что и $S_m(x) \to f(x)$ также равномерно, а это и есть результат, который требовалось доказать.

Примечание. Следует отметить, что нельзя сделать общего утверждения относительно равномерной или абсолютной сходимости рядов Фурье. Так, например, ряд в примере 1 § 9.11 сходится равномерно, за исключением окрестностей точек $x = (2n+1)\pi$, но сходится абсолютно только при $x = n\pi$, в то время как ряд в примере 2 § 9.11 сходится равномерно и абсолютно для всех вещественных значений x.

Пример 1. Пусть $\varphi(\theta)$ удовлетворяет надлежащим условиям на отрезке $(0, \pi)$; показать, что

$$\lim_{m\to\infty} \int_0^{\pi} \frac{\sin(2m+1)\theta}{\sin\theta} \varphi(\theta)\, d\theta = \lim_{m\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2m+1)\theta}{\sin\theta} \varphi(\theta)\, d\theta +$$

$$+ \lim_{m\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2m+1)\theta}{\sin\theta} \varphi(\pi-\theta)\, d\theta = \frac{1}{2}\pi \{\varphi(+0) + \varphi(\pi-0)\}.$$

Пример 2. Доказать, что при $a > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} \frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin\theta} e^{-a\theta}\, d\theta = \frac{1}{2}\pi \operatorname{cth} \frac{a\pi}{2}.$$

(Math. Trip., 1894)

[Показать, что

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin\theta} e^{-a\theta}\, d\theta = \lim_{m\to\infty} \int_0^{m\pi} \frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin\theta} e^{-a\theta}\, d\theta =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \int_0^{\pi} \frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin\theta} \left\{ e^{-a\theta} + e^{-a(\theta+\pi)} + \ldots + e^{-a(\theta+m\pi)} \right\} d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin\theta} \frac{e^{-a\theta}\, d\theta}{1 - e^{-a\pi}},$$

и воспользоваться примером 1.]

Пример 3. Рассмотреть равномерную сходимость рядов Фурье при помощи интегралов Дирихле — Бонне, не пользуясь теорией суммируемости.

9.5. Теорема Гурвица — Ляпунова [1]) о коэффициентах Фурье

Пусть $f(x)$ ограничена в интервале $(-\pi, \pi)$, и пусть $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$ существует, так что существуют коэффициенты Фурье a_n, b_n функции $f(x)$. Тогда ряд

$$\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$$

сходится и его сумма равна [2])

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\{f(x)\}^2\,dx.$$

Покажем сначала, используя обозначения § 9.4, что

$$\lim_{m\to\infty}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left\{f(x)-\frac{1}{m}\sum_{n=0}^{m-1}S_n(x)\right\}^2 dx=0.$$

Разделим отрезок $(-\pi, \pi)$ на $4r$ частей, каждая длиной δ; пусть U_p и L_p — верхняя и нижняя границы $f(x)$ на отрезке

$$\{(2p-1)\delta-\pi,\ (2p+3)\delta-\pi\},$$

а верхняя граница $|f(x)|$ на отрезке $(-\pi, \pi)$ равна K. Тогда по следствию 1 § 9.4

$$\left|f(x)-\frac{1}{m}\sum_{n=0}^{m-1}S_n(x)\right|<U_p-L_p+\frac{2K}{m\sin^2\frac{\delta}{2}}<2K\left(1+\frac{1}{m\sin^2\frac{\delta}{2}}\right),$$

когда x лежит между $2p\delta-\pi$ и $(2p+2)\delta-\pi$.

Следовательно, по первой теореме о среднем значении

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left\{f(x)-\frac{1}{m}\sum_{n=0}^{m-1}S_n(x)\right\}^2 dx<$$

$$<2K\left\{1+\frac{1}{m\sin^2\frac{\delta}{2}}\right\}\left\{2\delta\sum_{p=0}^{2r-1}(U_p-L_p)+\frac{8Kr\delta}{m\sin^2\frac{\delta}{2}}\right\}.$$

---

[1]) Math. Ann., LVII, 429 (1903). Ляпунов открыл теорему в 1896 г. и опубликовал ее в Известиях математического о-ва Харьковского университета. См. Comptes Rendus, CXXXVI, 1024 (1898).

[2]) Этот интеграл существует согласно примеру 1 § 4.12. Доказательство теоремы, данное Валле-Пуссеном, налагает на функцию $f(x)$ единственное ограничение, что должны существовать несобственные интегралы функций $f(x)$ и $\{f(x)\}^2$ по отрезку $(-\pi, \pi)$. См. его «Курс анализа бесконечно малых», т. II, стр. 153—154.

Так как $f(x)$ интегрируема в смысле Римана (§ 4.12), то оба выражения

$$4\delta \sum_{p=0}^{r-1} (U_{2p} - L_{2p}) \quad \text{и} \quad 4\delta \sum_{p=0}^{r-1} (U_{2p+1} - L_{2p+1})$$

можно сделать произвольно малыми, если взять r достаточно большим. Выбрав такое r (и тем самым выбрав δ), мы можем затем выбрать m_1 столь большим, что $\dfrac{r}{m_1 \sin^2(\delta/2)}$ будет произвольно малым. Иначе говоря, мы можем сделать выражение справа в последнем неравенстве произвольно малым, давая m любое значение, большее, чем выбранное значение m_1. Отсюда следует, что выражение в левой части неравенства будет стремиться к нулю при $m \to \infty$.

Но очевидно, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left\{ f(x) - \frac{1}{m} \sum_{n=0}^{m-1} S_n(x) \right\}^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ f(x) - \sum_{n=0}^{m-1} \frac{m-n}{m} A_n(x) \right\}^2 dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ f(x) - \sum_{n=0}^{m-1} A_n(x) + \sum_{n=0}^{m-1} \frac{n}{m} A_n(x) \right\}^2 dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ f(x) - \sum_{n=0}^{m-1} A_n(x) \right\}^2 dx + \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \sum_{n=0}^{m-1} \frac{n}{m} A_n(x) \right\}^2 dx +$$

$$+ 2 \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ f(x) - \sum_{n=0}^{m-1} A_n(x) \right\} \left\{ \sum_{n=0}^{m-1} A_n(x) \right\} dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ f(x) - \sum_{n=0}^{m-1} A_n(x) \right\}^2 dx + \frac{\pi}{m^2} \sum_{n=0}^{m-1} n^2 (a_n^2 + b_n^2),$$

так как

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) A_r(x)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \sum_{n=0}^{m-1} A_n(x) \right\} A_r(x)\, dx$$

при $r = 0, 1, 2, \ldots, m-1$.

Интеграл слева стремится к нулю, и по доказанному он равен сумме двух положительных выражений; следовательно, каждое из этих выражений стремится к нулю; таким образом,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left\{ f(x) - \sum_{n=0}^{m-1} A_n(x) \right\}^2 dx \to 0.$$

Но здесь выражение слева равно

$$\int_{-\pi}^{\pi} \{f(x)\}^2 dx - 2 \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ f(x) - \sum_{n=0}^{m-1} A_n(x) \right\} \left\{ \sum_{n=0}^{m-1} A_n(x) \right\} dx -$$

$$- \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \sum_{n=0}^{m-1} A_n(x) \right\}^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} \{f(x)\}^2 dx - \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \sum_{n=0}^{m-1} A_n(x) \right\}^2 dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \{f(x)\}^2 dx - \pi \left\{ \frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{n=1}^{m-1} (a_n^2 + b_n^2) \right\},$$

так что при $m \to \infty$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \{f(x)\}^2 dx - \pi \left\{ \frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{n=1}^{m-1} (a_n^2 + b_n^2) \right\} \to 0.$$

Таким образом, теорема доказана.

Следствие. Теорема Парсеваля [1]).

Пусть функции $f(x)$, $F(x)$ удовлетворяют условиям, наложенным на $f(x)$ в начале этого параграфа, и пусть A_n, B_n — коэффициенты Фурье функции $F(x)$, тогда почленным вычитанием следующих двух равенств, которые записаны в виде одного равенства:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \{f(x) \pm F(x)\}^2 dx =$$

$$= \pi \left[\frac{1}{2} (a_0 \pm A_0)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \{(a_n \pm A_n)^2 + (b_n \pm B_n)^2\} \right],$$

получаем

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) F(x) dx = \pi \left\{ \frac{1}{2} a_0 A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n A_n + b_n B_n) \right\}.$$

9.6. Риманова теория тригонометрических рядов

Теория Дирихле для рядов Фурье посвящена рядам, которые представляют заданные функции. Важный шаг вперед в этой теории был сделан Риманом, который рассмотрел свойства функций, опре-

---

[1]) Parseval, Mém. par. divers savants, 1, 639—648 (1805). Парсеваль, конечно, предполагал возможность почленного интегрирования тригонометрических рядов.

деляемых рядами типа [1])

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

где предполагается, что

$$\lim_{n\to\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=0.$$

Предварительно мы дадим предложения, ведущие к теореме Римана [2]), состоящей в том, что если два тригонометрических ряда сходятся и равны во всех точках отрезка $(-\pi, \pi)$ с возможным исключением конечного числа точек, то соответствующие коэффициенты обоих рядов будут равны.

9.61. Ассоциированная функция Римана

Обозначим сумму ряда

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n(x)$$

во всякой точке, где он сходится, через $f(x)$. Пусть, далее,

$$F(x)=\frac{1}{2}A_0x^2-\sum_{n=1}^{\infty}n^{-2}A_n(x).$$

Тогда, если ряд, определяющий $f(x)$, сходится во всех точках какого-либо интервала, то ряд, определяющий $F(x)$, сходится для всех вещественных значений x.

Чтобы это доказать, нам нужна будет следующая лемма, принадлежащая Кантору:

Лемма Кантора [3]). *Если $\lim\limits_{n\to\infty}A_n(x)=0$ для всех значений x на некотором отрезке $a\leqslant x\leqslant b$, то $a_n\to 0$, $b_n\to 0$.*

Возьмем две точки x, $x+\delta$ этого отрезка. Тогда для заданного ε мы можем найти такое n_0 [4]), что при $n>n_0$

$$|a_n\cos nx+b_n\sin nx|<\varepsilon,\quad |a_n\cos n(x+\delta)+b_n\sin n(x+\delta)|<\varepsilon.$$

---

[1]) В § 9.6 — 9.632 буквы a_n, b_n не обязательно обозначают коэффициенты Фурье.

[2]) Данное доказательство принадлежит Г. Кантору (G. Cantor, Journal für Math., LXXII, 130—142 (1870)).

[3]) Риман, по-видимому, считал этот результат очевидным. Данное здесь доказательство является видоизменением доказательства Кантора (Cantor, Math. Ann., IV, 139—143 (1871) и Journal für Math. LXXII, 130—138 (1870)).

[4]) Значение n_0 зависит от x и δ.

Поэтому

$$|\cos n\delta\,(a_n \cos nx + b_n \sin nx) + \sin n\delta\,(-a_n \sin nx + b_n \cos nx)| < \varepsilon.$$

Но так как

$$|\cos n\delta\,(a_n \cos nx + b_n \sin nx)| < \varepsilon,$$

то

$$|\sin n\delta\,(-a_n \sin nx + b_n \cos nx)| < 2\varepsilon;$$

с другой стороны, очевидно, что

$$|\sin n\delta\,(a_n \cos nx + b_n \sin nx)| < 2\varepsilon.$$

Возводя в квадрат последние два неравенства и складывая, получим

$$(a_n^2 + b_n^2)^{\frac{1}{2}}\,|\sin n\delta| < 2\varepsilon\sqrt{2}.$$

Теперь предположим, что a_n, b_n не стремятся к единственному пределу 0; покажем, что это предположение приводит к противоречию. Действительно, по этому предположению существует *некоторое* положительное число ε_0 такое, что найдется бесконечная возрастающая последовательность n_1, n_2, ... значений n, для которых $(a_n^2 + b_n^2)^{1/2} > 4\varepsilon_0$.

Назовем область значений δ на вещественной оси отрезком I_1 длины L_1.

Пусть n_1' — наименьшее из целых чисел n_r, для которых $n_1' L_1 > 2\pi$; тогда $\sin n_1' y$ пройдет через все свои значения на отрезке I_1; назовем I_2 отрезок [1]), содержащийся в I_1, в котором $\sin n_1' y > \frac{1}{\sqrt{2}}$; его длина равна $\frac{\pi}{2n_1'} = L_2$. Пусть затем n_2' — наименьшее из целых чисел $n_r\,(> n_1')$, для которых $n_2' L_2 > 2\pi$, так что $\sin n_2' y$ проходит через все свои значения на отрезке I_2; назовем I_3 тот из отрезков, содержащихся в I_2, в котором $\sin n_2' y > \frac{1}{\sqrt{2}}$; его длина равна $\frac{\pi}{2n_2'} = L_3$. Мы получим, таким образом, последовательность убывающих отрезков I_1, I_2, ..., из которых каждый последующий содержится в предыдущем. Ясно из определения иррационального числа, что имеется точка α, содержащаяся во всех этих отрезках, и

$$\sin n\alpha \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{для } n = n_1',\ n_2',\ \ldots\ (n_{r+1}' > n_r').$$

Для этих значений n

$$(a_n^2 + b_n^2)^{\frac{1}{2}} \sin n\alpha > 2\varepsilon_0\sqrt{2}.$$

Но нами было показано, что по данным числам α и ε мы можем найти такое n_0, что при $n > n_0$

$$(a_n^2 + b_n^2)^{\frac{1}{2}}\,|\sin n\alpha| < 2\varepsilon\sqrt{2};$$

так как некоторые значения n_r' будут больше, чем n_0, то мы пришли к противоречию, ибо мы можем взять $\varepsilon < \varepsilon_0$; следовательно, $a_n \to 0$, $b_n \to 0$.

---

[1]) Если имеется больше чем один такой отрезок, то следует взять тот, который лежит слева.

Предполагая, что ряд, определяющий $f(x)$, сходится во всех точках некоторого отрезка вещественной оси, мы получаем, что $a_n \to 0$, $b_n \to 0$. Поэтому для всех вещественных значений x

$$|a_n \cos nx + b_n \sin nx| \leqslant \left(a_n^2 + b_n^2\right)^{\frac{1}{2}} \to 0,$$

а значит, согласно § 3.34, ряд

$$\frac{1}{2} A_0 x^2 - \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} A_n(x) = F(x)$$

сходится абсолютно и равномерно для всех вещественных значений x; следовательно, $F(x)$ представляет собой непрерывную функцию от x (§ 3.32).

9.62. Свойства ассоциированной функции Римана; первая лемма Римана

Теперь мы можем доказать первую лемму Римана:

Пусть

$$G(x, \alpha) = \frac{F(x+2\alpha) + F(x-2\alpha) - 2F(x)}{4\alpha^2},$$

тогда

$$\lim_{\alpha \to 0} G(x, \alpha) = f(x)$$

при условии, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} A_n(x)$ *сходится для рассматриваемого значения* x.

Так как ряды, определяющие $F(x)$, $F(x \pm 2\alpha)$, сходятся, то мы можем складывать их почленно и, замечая, что

$$\cos n(x+2\alpha) + \cos n(x-2\alpha) - 2\cos nx = -4\sin^2 n\alpha \cos nx,$$
$$\sin n(x+2\alpha) + \sin n(x-2\alpha) - 2\sin nx = -4\sin^2 n\alpha \sin nx,$$

найдем, что

$$G(x, \alpha) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right)^2 A_n(x).$$

Покажем теперь, что этот ряд сходится равномерно относительно α для всех значений α при условии, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n(x)$$

сходится. Требуемый результат является тогда непосредственным следствием § 3.32, ибо если

$$f_n(\alpha)=\left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right)^2 \quad (\alpha\neq 0) \quad \text{и} \quad f_n(0)=1,$$

то $f_n(\alpha)$ будет непрерывна для всех значений α и, таким образом, $G(x, \alpha)$ будет непрерывной функцией от α, так что согласно § 3.2

$$G(x, 0)=\lim_{\alpha\to 0} G(x, \alpha).$$

Чтобы доказать, что ряд, определяющий $G(x, \alpha)$, сходится равномерно, применим признак, данный в примере 2 § 3.35. Выражение, соответствующее $\omega_n(x)$, будет $f_n(\alpha)$, и ясно, что $|f_n(\alpha)|\leqslant 1$; поэтому достаточно показать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_{n+1}(\alpha)-f_n(\alpha)|<K,$$

где K не зависит от α.

В самом деле, пусть s — такое число, что $s|\alpha|<\pi<(s+1)|\alpha|$; когда $\alpha\neq 0$, мы имеем [1])

$$\sum_{n=1}^{s-1} |f_{n+1}(\alpha)-f_n(\alpha)|=\sum_{n=1}^{s-1}(f_n(\alpha)-f_{n+1}(\alpha))=\frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2}-\frac{\sin^2 s\alpha}{(s\alpha)^2}.$$

Далее,

$$\sum_{n=s+1}^{\infty} |f_{n+1}(\alpha)-f_n(\alpha)|=$$

$$=\sum_{n=s+1}^{\infty}\left|\left\{\frac{\sin^2 n\alpha}{\alpha^2}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\right\}+\frac{\sin^2 n\alpha-\sin^2(n+1)\alpha}{(n+1)^2\alpha^2}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{n=s+1}^{\infty}\frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)+\sum_{n=s+1}^{\infty}\frac{|\sin^2 n\alpha-\sin^2(n+1)\alpha|}{(n+1)^2\alpha^2}=$$

$$=\frac{1}{(s+1)^2\alpha^2}+\sum_{n=s+1}^{\infty}\frac{|\sin\alpha\sin(2n+1)\alpha|}{(n+1)^2\alpha^2}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{(s+1)^2\alpha^2}+\frac{|\sin\alpha|}{\alpha^2}\sum_{n=s+1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}<$$

$$<\frac{1}{\pi^2}+\frac{|\sin\alpha|}{\alpha^2}\int_s^{\infty}\frac{dx}{(x+1)^2}\leqslant\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{(s+1)|\alpha|}.$$

---

[1]) Так как $x^{-1}\sin x$ уменьшается при возрастании x от 0 до π.

Поэтому

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_{n+1}(\alpha) - f_n(\alpha)| < \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2} - \frac{\sin^2 s\alpha}{s^2\alpha^2} + \left(\frac{\sin^2 s\alpha}{s^2\alpha^2} + \frac{\sin^2 (s+1)\alpha}{(s+1)^2\alpha^2}\right) + \\ + \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{\pi} < 1 + \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi^2}.$$

Так как это выражение не зависит от α, то требуемый результат доказан [1]).

Следовательно, если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} A_n(x)$ сходится, то ряд, определяющий $G(x, \alpha)$, сходится равномерно относительно α для всех значений α и, как мы и утверждали выше,

$$\lim_{\alpha \to 0} G(x, \alpha) = G(x, 0) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(x) = f(x).$$

Пример. Пусть

$$H(x, \alpha, \beta) = \frac{F(x+\alpha+\beta) - F(x+\alpha-\beta) - F(x-\alpha+\beta) + F(x-\alpha-\beta)}{4\alpha\beta},$$

и пусть ряд $\sum_{n=0}^{\infty} A_n(x)$ сходится; доказать, что

$$H(x, \alpha, \beta) \to f(x),$$

когда $\alpha, \beta \to 0$ таким образом, что $\frac{\alpha}{\beta}$ и $\frac{\beta}{\alpha}$ остаются ограниченными.

(Riemann)

9.621. Вторая лемма Римана

Пусть в обозначениях §§ 9.6—9.62 коэффициенты $a_n, b_n \to 0$, тогда

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{F(x+2\alpha) + F(x-2\alpha) - 2F(x)}{4\alpha} = 0$$

для всех значений x.

Действительно,

$$\frac{1}{4\alpha}\{F(x+2\alpha) + F(x-2\alpha) - 2F(x)\} = A_0\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha}{n^2\alpha} A_n(x);$$

но, согласно примеру 3 § 9.11, при $\alpha > 0$ имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha}{n^2\alpha} = \frac{1}{2}(\pi - \alpha);$$

---

[1]) Это неравенство, очевидно, справедливо, когда $\alpha = 0$.

и таким образом, поскольку

$$A_0(x)\alpha+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n\alpha}{n^2\alpha}A_n(x)=A_0(x)\alpha+\frac{1}{2}(\pi-\alpha)A_1(x)+$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{2}(\pi-\alpha)-\sum_{m=1}^{n}\frac{\sin^2 m\alpha}{m^2\alpha}\right\}\{A_{n+1}(x)-A_n(x)\},$$

мы видим, согласно примеру 2 § 3.35, что этот ряд сходится равномерно относительно α для всех значений α, больших нуля или равных нулю [1]).

Но

$$\lim_{\alpha\to+0}\frac{1}{4\alpha}\{F(x+2\alpha)+F(x-2\alpha)-2F(x)\}=$$
$$=\lim_{\alpha\to+0}\left[A_0(x)\alpha+\frac{1}{2}(\pi-\alpha)A_1(x)+\sum_{n=1}^{\infty}g_n(\alpha)\{A_{n+1}(x)-A_n(x)\}\right],$$

и этот предел в силу теоремы по § 3.32 равен значению функции при $\alpha=0$; это значение равно нулю, так как $\lim\limits_{n\to\infty}A_n(x)=0$. По симметрии заключаем, что $\lim\limits_{\alpha\to+0}=\lim\limits_{\alpha\to-0}$.

9.63. Теорема Римана [2]) о тригонометрических рядах

У двух тригонометрических рядов, сходящихся и равных во всех точках отрезка $(-\pi, \pi)$, *с возможным исключением конечного числа точек, соответствующие коэффициенты равны.*

Непосредственным выводом из этой теоремы будет то, что функция типа, рассмотренного в § 9.42, не может быть представлена на отрезке $(-\pi, \pi)$ никаким тригонометрическим рядом, кроме ряда Фурье. Это обстоятельство впервые было отмечено Дю Буа Реймоном.

Отметим, что можно найти и другие разложения, например вида

$$\alpha_0+\sum_{m=1}^{\infty}\left(\alpha_m\cos\frac{1}{2}mx+\beta_m\sin\frac{1}{2}mx\right),$$

---

[1]) Если мы определим $g_n(\alpha)$ равенствами

$$g_n(\alpha)=\frac{1}{2}(\pi-\alpha)-\sum_{m=1}^{n}\frac{\sin^2 m\alpha}{m^2\alpha}\quad(\alpha\neq 0)\quad\text{и}\quad g_n(0)=\frac{1}{2}\pi,$$

то при $\alpha\geqslant 0$ функция $g_n(\alpha)$ будет непрерывной и $g_{n+1}(\alpha)\leqslant g_n(\alpha)$.

[2]) Доказательство, приводимое нами, принадлежит Г. Кантору (G. Cantor, Journal für Math., LXXII, 139—142 (1870)).

представляющие $f(x)$ между $-\pi$ и π; действительно, положив $x=2\xi$, рассмотрим функцию $\varphi(\xi)$ такую, что $\varphi(\xi)=f(2\xi)$ при $-\frac{\pi}{2}<\xi<\frac{\pi}{2}$ и $\varphi(\xi)=g(\xi)$ при $-\pi<\xi<-\frac{\pi}{2}$ и при $\frac{\pi}{2}<\xi<\pi$, где $g(\xi)$ — какая-нибудь функция, удовлетворяющая условиям § 9.43. Тогда, если мы разложим $\varphi(\xi)$ в ряд Фурье вида

$$\alpha_0+\sum_{m=0}^{\infty}(\alpha_m\cos m\xi+\beta_m\cos m\xi),$$

то это разложение представит $f(x)$ при $-\pi<x<\pi$ и ясно, что, меняя функцию $g(\xi)$, можно получить неограниченное число таких разложений. Вопрос, рассматриваемый сейчас, состоит в том, существуют ли ряды, расположенные по синусам и косинусам *целочисленных* кратных x, которые отличаются от рядов Фурье и все же представляют $f(x)$ между $-\pi$ и π.

Допустим, что имеется два тригонометрических ряда, удовлетворяющих данным условиям, и пусть их разностью будет ряд

$$A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n(x)=f(x).$$

Тогда $f(x)=0$ во всех точках промежутка $(-\pi,\pi)$, за исключением конечного числа точек; пусть ξ_1, ξ_2 — две соседние из этих исключительных точек, и пусть $F(x)$ — ассоциированная функция Римана. Перейдем к доказательству леммы относительно значений $F(x)$ при $\xi_1<x<\xi_2$.

9.631. Лемма Шварца [1])

В промежутке $\xi_1<x<\xi_2$ функция $F(x)$ будет линейной функцией от x, если $f(x)=0$ в этом промежутке.

Действительно, функция

$$\varphi(x)=\theta\left[F(x)-F(\xi_1)-\frac{x-\xi_1}{\xi_2-\xi_1}\{F(\xi_2)-F(\xi_1)\}\right]-\frac{1}{2}h^2(x-\xi_1)(\xi_2-x),$$

где $\theta=1$ или -1, непрерывна на отрезке $\xi_1\leqslant x\leqslant\xi_2$ и $\varphi(\xi_1)=\varphi(\xi_2)=0$.

Если первый член в $\varphi(x)$ не равен тождественно нулю во всем промежутке [2]), то найдется некоторая точка $x=c$, в которой он будет отличен от нуля. Возьмем знак θ так, чтобы первый член был положителен в точке c, и затем выберем h столь малым, чтобы $\varphi(c)$ была все еще положительной.

Так как $\varphi(x)$ непрерывна, то она достигает своей верхней границы (§ 3.62), и эта верхняя граница будет положительной, так как $\varphi(c)>0$.

---

[1]) Цитируется Г. Кантором (G. Cantor, Journal für Math., LXXII (1870)).

[2]) Если он равен нулю во всем промежутке, то $F(x)$ будет линейной функцией от x.

Пусть $\varphi(x)$ достигает своей верхней границы в c_1, так что $c_1 \neq \xi_1$, $c_1 \neq \xi_2$. Тогда по первой лемме Римана

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\varphi(c_1+\alpha)+\varphi(c_1-\alpha)-2\varphi(c_1)}{\alpha^2} = h^2.$$

Но

$$\varphi(c_1+\alpha) \leqslant \varphi(c_1), \quad \varphi(c_1-\alpha) \leqslant \varphi(c_1),$$

так что этот предел должен быть отрицательным или нулем.

Таким образом, предполагая, что первый член в $\varphi(x)$ не равен тождественно нулю в промежутке (ξ_1, ξ_2), мы пришли к противоречию. Поэтому он тождественно равен нулю и, следовательно, $F(x)$ является линейной функцией от x в области $\xi_1 < x < \xi_2$. Лемма, таким образом, доказана.

9. 632. Доказательство теоремы Римана

Мы видим, что кривая $y = F(x)$ состоит из ряда отрезков, начала и концы которых соответствуют исключительным точкам, и так как ряд, определяющий $F(x)$, будучи равномерно сходящимся, является непрерывной функцией от x, то эти отрезки соединяются в одну непрерывную ломаную линию.

Но по второй лемме Римана, даже если ξ — исключительная точка, имеем

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{F(\xi+\alpha)+F(\xi-\alpha)-2F(\xi)}{\alpha} = 0.$$

Дробь, входящая в этот предел, представляет разность наклонов двух отрезков прямых, встречающихся в точке с абсциссой ξ; поэтому оба отрезка имеют одно направление, так что уравнение $y = F(x)$ представляет одну прямую линию. Если мы напишем $F(x) = cx + c'$, то отсюда следует, что c и c' имеют одни и те же значения для *всех* значений x. Таким образом,

$$\frac{1}{2} A_0 x^2 - cx - c' = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} A_n(x),$$

причем правая часть этого равенства периодическая с периодом 2π.

Поэтому левая часть равенства также должна быть периодической с периодом 2π. Отсюда

$$A_0 = 0, \quad c = 0$$

и

$$-c' = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} A_n(x).$$

Ряд в правой части этого равенства сходится равномерно, так что мы можем умножить его на $\cos nx$ или $\sin nx$ и проинтегрировать.

Это дает

$$\pi n^{-2} a_n = -c' \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\, dx = 0,$$

$$\pi n^{-2} b_n = -c' \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\, dx = 0.$$

Поэтому все коэффициенты здесь равны нулю и у двух тригонометрических рядов, разность которых равна $A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(x)$, соответствующие коэффициенты равны.

А это и есть результат, высказанный в § 9.63.

9.7. Представление функции интегралом Фурье[1])

Из § 9.43 следует, что если $f(x)$ — непрерывная функция, за исключением конечного числа разрывов, и если она имеет ограниченную вариацию в промежутке $(-\infty, \infty)$, то для всякой *внутренней* точки x отрезка $(-\alpha, \beta)$ имеем

$$\lim_{m\to\infty} \int_{-\alpha}^{\beta} \frac{\sin(2m+1)(t-x)}{t-x} f(t)\, dt =$$

$$= \lim_{\theta\to 0} \frac{1}{2} \pi\theta^{-1} \sin\theta \{f(x+2\theta) + f(x-2\theta)\}.$$

Пусть теперь λ — любое вещественное число; возьмем целое число m так, что $\lambda = 2m + 1 + 2\eta$, где $0 \leqslant \eta < 1$.

Тогда согласно § 9.41 (II)

$$\int_{-\alpha}^{\beta} \{\sin\lambda(t-x) - \sin(2m+1)(t-x)\}(t-x)^{-1} f(t)\, dt =$$

$$= \int_{-\alpha}^{\beta} 2\{\cos(2m+1+\eta)(t-x)\}\{\sin\eta(t-x)\}(t-x)^{-1} f(t)\, dt \to 0,$$

когда $m \to \infty$, так как функция $(t-x)^{-1} f(t) \sin\eta(t-x)$ имеет ограниченную вариацию. Следовательно, по доказанной в § 9.41 лемме Римана — Лебега ясно, что если интегралы

$$\int_0^{\infty} |f(t)|\, dt \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{0} |f(t)|\, dt$$

---

[1]) Fourier, La théorie analitique de la chaleur, гл. IX. О позднейшей работе по интегралам Фурье и о современной теории «преобразований Фурье» см. Titchmarsch, Proc. Camb. Phil. Soc., XXI, 462—473 (1923) и Proc. London Math. Soc. (2), XXIII, 279—289 (1924).

сходятся, то[1])

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\lambda(t-x)}{t-x}f(t)\,dt=\frac{1}{2}\pi\{f(x+0)+f(x-0)\}$$

и, следовательно,

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_0^{\lambda}\cos u(t-x)\,du\right\}f(t)\,dt=\frac{1}{2}\pi\{f(x+0)+f(x-0)\}.$$

Чтобы получить формулу Фурье, мы должны изменить порядок интегрирования в этом повторном интеграле.

Для любого заданного значения λ и любого положительного значения ε существует такое число β, что

$$\int_{\beta}^{\infty}|f(t)|\,dt<\frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{\lambda};$$

положив $\cos u(t-x)f(t)=\varphi(t,\ u)$, мы имеем[2])

$$\left|\int_0^{\infty}\left\{\int_0^{\lambda}\varphi(t,\ u)\,du\right\}dt-\int_0^{\lambda}\left\{\int_0^{\infty}\varphi(t,\ u)\,dt\right\}du\right|=$$

$$=\left|\int_0^{\beta}\left\{\int_0^{\lambda}\varphi(t,\ u)\,du\right\}dt+\int_{\beta}^{\infty}\left\{\int_0^{\lambda}\varphi(t,\ u)\,du\right\}dt-\right.$$

$$\left.-\int_0^{\lambda}\left\{\int_0^{\beta}\varphi(t,\ u)\,dt\right\}du-\int_0^{\lambda}\left\{\int_{\beta}^{\infty}\varphi(t,\ u)\,dt\right\}du\right|=$$

$$=\left|\int_{\beta}^{\infty}\left\{\int_0^{\lambda}\varphi(t,\ u)\,du\right\}dt-\int_0^{\lambda}\left\{\int_{\beta}^{\infty}\varphi(t,\ u)\,dt\right\}du\right|<$$

$$<\int_{\beta}^{\infty}\left\{\int_0^{\lambda}|\varphi(t,\ u)|\,du\right\}dt+\int_0^{\lambda}\int_{\beta}^{\infty}|\varphi(t,\ u)|\,dt\,du<2\lambda\int_{\beta}^{\infty}|f(t)|\,dt<\varepsilon.$$

---

[1]) $\int_{-\infty}^{\infty}$ обозначает двойной предел $\lim\limits_{\rho\to\infty,\ \sigma\to\infty}\int_{-\rho}^{\sigma}$. Если этот предел существует, то он, конечно, будет равен $\lim\limits_{\rho\to\infty}\int_{-\rho}^{\rho}$.

[2]) Равенство $\int_0^{\beta}\int_0^{\lambda}=\int_0^{\lambda}\int_0^{\beta}$ легко обосновать по § 4.5, рассматривая промежутки, внутри которых $f(x)$ непрерывна.

Так как это справедливо для всех значений ε как угодно малых, то мы заключаем, что

$$\int_0^\infty \int_0^\lambda = \int_0^\lambda \int_0^\infty ;$$

подобным же образом

$$\int_{-\infty}^0 \int_0^\lambda = \int_0^\lambda \int_{-\infty}^0 .$$

Отсюда

$$\frac{1}{2}\pi \{f(x+0)+f(x-0)\} = \lim_{\lambda\to\infty} \int_0^\lambda \int_{-\infty}^\infty \cos u(t-x) f(t)\, dt\, du =$$

$$= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \cos u(t-x) f(t)\, dt\, du.$$

Этот результат известен под названием *интегральной формулы Фурье* [1]).

Пример. Проверить интегральную формулу Фурье непосредственно; (I) для функции

$$f(x) = (a^2+x^2)^{-\frac{1}{2}},$$

(II) для функции, определяемой равенствами

$$f(x) = 1 \quad (-1 < x < 1), \quad f(x) = 0 \qquad (|x| > 1).$$

(Rayleigh)

ЛИТЕРАТУРА

G. F. B. Riemann, Ges. math. Werke, 213—250.
E. W. Hobson, Functions of a real variable, гл. VII, 1907.
H. Lebesgue, Leçons sur les séries trigonométriques, Paris, 1906.
Ш. Ж. Валле-Пуссен, Курс анализа бесконечно малых, т. II. ГТТИ, 1933.
H. Burkhardt, Encyklopädie der Math. Wiss., II, 1 (7), Leipzig, 1914.
G. A. Carse u G. Shearer, A course in Fourier's analysis and periodogram analysis, Edinburgh Math. Tracts, № 4 (1915).
Н. К. Бари, Тригонометрические ряды, Физматгиз, 1961.
А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, ГОНТИ, 1939.
Ч. Э. Титчмарш, Введение в теорию интеграла Фурье, Гостехиздат, 1948.

---

[1]) Относительно доказательства справедливости формулы, когда $f(x)$ подчинена менее сильным ограничениям, см. Hobson, Functions of a real variable, §§ 492—493. Следует отметить, что хотя $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \int_{-\infty}^\infty \int_0^\lambda$ и существует, но повторный интеграл $\int_{-\infty}^\infty \left\{ \int_0^\infty \sin u(t-x)\, du \right\} f(t)\, dt$ не существует.

Примеры

1. Получить разложения:

$$\text{a)}\ \frac{1-r\cos z}{1-2r\cos z+r^2}=1+r\cos z+r^2\cos 2z+\ldots,$$

$$\text{b)}\ \frac{1}{2}\lg(1-2r\cos z+r^2)=-r\cos z-\frac{1}{2}r^2\cos 2z-\frac{1}{3}r^3\cos 3z-\ldots,$$

$$\text{c)}\ \operatorname{arctg}\frac{r\sin z}{1-r\cos z}=r\sin z+\frac{1}{2}r^2\sin 2z+\frac{1}{2}r^3\sin 3z+\ldots,$$

$$\text{d)}\ \operatorname{arctg}\frac{2r\sin z}{1-r^2}=r\sin z+\frac{1}{3}r^3\sin 3z+\frac{1}{5}r^5\sin 5z+\ldots$$

и показать, что при $|r|<1$ они сходятся для всех значений z в некоторых полосах, параллельных вещественной оси в плоскости z.

2. Разложить x^3 и x в ряд Фурье по синусам, годный при $-\pi<x<\pi$, и отсюда найти значение суммы ряда

$$\sin x-\frac{1}{2^3}\sin 2x+\frac{1}{3^3}\sin 3x-\frac{1}{4^3}\sin 4x+\ldots$$

для всех значений x.

(Jesus, 1902)

3. Показать, что функция от x, представленная рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx\sin^2 n\alpha}{n},$$

будет постоянной при $0<x<2\alpha$ и нулем при $2\alpha<x<\pi$; вычертить график функции.

(Pembroke, 1907)

4. Найти разложение функции $f(x)$, определяемой равенствами

$$f(x)=\sin x+\cos x\qquad\left(0<x\leqslant\frac{\pi}{2}\right),$$

$$f(x)=\sin x-\cos x\qquad\left(\frac{\pi}{2}\leqslant x<\pi\right),$$

в ряд по косинусам.

(Peterhouse, 1906)

5. Показать, что

$$\sin\pi x+\frac{\sin 3\pi x}{3}+\frac{\sin 5\pi x}{5}+\frac{\sin 7\pi x}{7}+\ldots=\frac{1}{4}\pi[x],$$

где $[x]$ обозначает $+1$ или -1 соответственно тому, будет ли ближайшее целое число, меньшее x, четным или нечетным, и нуль, если x — целое число.

(Trinity, 1895)

6. Показать, что разложения

$$\lg\left|2\cos\frac{1}{2}x\right|=\cos x-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{3}\cos 3x-\ldots$$

и

$$\lg\left|2\sin\frac{1}{2}x\right|=-\cos x-\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{1}{3}\cos 3x-\ldots$$

справедливы для всех вещественных значений x, кроме значений, кратных π.

7. Получить разложение

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \cos mx}{(m+1)(m+2)} = (\cos x + \cos 2x) \lg\left(2 \cos \frac{1}{2} x\right) + \\ + \frac{1}{2} x (\sin 2x + \sin x) - \cos x$$

и найти промежуток значений x, для которых оно применимо.

(Trinity, 1898)

8. Доказать, что при $0 < x < 2\pi$

$$\frac{\sin x}{a^2+1^2} + \frac{2 \sin 2x}{a^2+2^2} + \frac{3 \sin 3x}{a^2+3^2} + \ldots = \frac{\pi}{2} \frac{\operatorname{sh} a(\pi - x)}{\operatorname{sh} a\pi}.$$

(Trinity, 1895)

9. Показать, что для значений x между $-\pi$ и $+\pi$ имеют место следующие разложения:

$$\sin mx = \frac{2}{\pi} \sin m\pi \left(\frac{\sin x}{1^2 - m^2} - \frac{2 \sin 2x}{2^2 - m^2} + \frac{3 \sin 3x}{3^2 - m^2} - \ldots\right),$$

$$\cos mx = \frac{2}{\pi} \sin m\pi \left(\frac{1}{2m} + \frac{m \cos x}{1^2 - m^2} - \frac{m \cos 2x}{2^2 - m^2} + \frac{m \cos 3x}{3^2 - m^2} - \ldots\right),$$

$$\frac{e^{mx} + e^{-mx}}{e^{m\pi} - e^{-m\pi}} = \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{2m} - \frac{m \cos x}{1^2 + m^2} + \frac{m \cos 2x}{2^2 + m^2} - \frac{m \cos 3x}{3^2 + m^2} + \ldots\right).$$

10. Пусть x — вещественная переменная между 0 и 1 и n — нечетное число $\geqslant 3$. Показать, что

$$(-1)^s = \frac{1}{n} + \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \operatorname{tg} \frac{m\pi}{n} \cos 2m\pi x,$$

если x не кратно $\frac{1}{n}$, причем s — наибольшее целое число, содержащееся в nx, но что

$$0 = \frac{1}{n} + \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \operatorname{tg} \frac{m\pi}{n} \cos 2m\pi x,$$

если x — целое кратное $\frac{1}{n}$. (Berger)

11. Показать, что сумма ряда

$$\frac{1}{3} + 4\pi^{-1} \sum_{m=1}^{\infty} m^{-1} \sin \frac{2}{3} m\pi \cos 2m\pi x$$

равна 1 при $0 < x < \frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3} < x < 1$ и равна -1 при $\frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}$.

(Trinity, 1901)

12. Пусть

$$\frac{ae^{ax}}{e^a - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n V_n(x)}{n!};$$

показать, что при $-1 < x < 1$

$$\cos 2\pi x + \frac{\cos 4\pi x}{2^{2n}} + \frac{\cos 6\pi x}{3^{2n}} + \ldots = (-1)^{n-1} \frac{2^{2n-1}\pi^{2n}}{2n!} V_{2n}(x),$$

$$\sin 2\pi x + \frac{\sin 4\pi x}{2^{2n+1}} + \frac{\sin 6\pi x}{3^{2n+1}} + \ldots = (-1)^{n+1} \frac{2^{2n}\pi^{2n+1}}{2n+1!} V_{2n+1}(x).$$

(Math. Trip., 1896)

13. Пусть m — целое число; показать, что для всех вещественных значений x

$$\cos^{2m} x = 2\,\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2m-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2m}\left\{\frac{1}{2} + \frac{m}{m+1}\cos 2x + \right.$$

$$\left. + \frac{m(m-1)}{(m+1)(m+2)}\cos 4x + \frac{m(m-1)(m-2)}{(m+1)(m+2)(m+3)}\cos 6x + \ldots\right\},$$

$$|\cos^{2m-1} x| = \frac{4}{\pi}\,\frac{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2m-2)}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2m-1)}\left\{\frac{1}{2} + \frac{2m-1}{2m+1}\cos 2x + \right.$$

$$\left. + \frac{(2m-1)(2m-3)}{(2m+1)(2m+3)}\cos 4x + \ldots\right\}.$$

14. Точка движется по прямой со скоростью, которая вначале была u и которая получает постоянные приращения, равные u, через равные промежутки времени τ. Доказать, что скорость в момент t после начала движения будет

$$\frac{u}{2} + \frac{ut}{\tau} + \frac{u}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\sin\frac{2m\pi t}{\tau},$$

а пройденный путь

$$\frac{ut}{2\tau}(t+\tau) + \frac{u\tau}{12} - \frac{u\tau}{2\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}\cos\frac{2m\pi t}{\tau}.$$

(Trinity, 1894)

15. Пусть

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin(6n-3)x - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)x +$$

$$+ \frac{3\sqrt{3}}{\pi}\left\{\sin x - \frac{\sin 5x}{5^2} + \frac{\sin 7x}{7^2} - \frac{\sin 11x}{11^2} + \ldots\right\};$$

показать, что

$$f(+0) = f(\pi - 0) = -\frac{\pi}{4}$$

и

$$f\left(\frac{\pi}{3}+0\right) - f\left(\frac{\pi}{3}-0\right) = -\frac{\pi}{2},$$

$$f\left(\frac{2\pi}{3}+0\right) - f\left(\frac{2\pi}{3}-0\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Замечая, что последний ряд равен

$$\frac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{1}{3}(2n-1)\pi\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2},$$

вычертить график функции $f(x)$.

(Math. Trip., 1893)

16. Показать, что при $0<x<\pi$

$$f(x)=\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\cos x-\frac{1}{5}\cos 5x+\frac{1}{7}\cos 7x-\frac{1}{11}\cos 11x+\ldots\right)=$$
$$=\sin 2x+\frac{1}{2}\sin 4x+\frac{1}{4}\sin 8x+\frac{1}{5}\sin 10x+\ldots,$$

где

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{3}, & 0<x<\frac{\pi}{3},\\ 0, & \frac{\pi}{3}<x<\frac{2\pi}{3},\\ -\frac{\pi}{3}, & \frac{2\pi}{3}<x<\pi.\end{cases}$$

Найти сумму каждого ряда для $x=0,\ \frac{\pi}{3},\ \frac{2\pi}{3},\ \pi$ и для всех остальных значений x.

(Trinity, 1908)

17. Доказать, что геометрическое место точек, представляемое уравнением

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\sin nx\sin ny=0,$$

будет состоять из двух систем взаимно перпендикулярных прямых, делящих координатную плоскость на квадраты площади π^2.

(Math. Trip., 1895)

18. Показать, что уравнение

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\sin ny\cos nx}{n^3}=0$$

представляет прямые линии $y=\pm m\pi$ $(m=0, 1, 2, \ldots)$ вместе с дугами эллипсов, полуоси которых равны π и $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$; дуги расположены в квадратах площади $2\pi^2$. Вычертить график этого геометрического места.

(Trinity, 1903)

19. Показать, что если точка (x, y, z) лежит внутри октаэдра, ограниченного плоскостями $\pm x\pm y\pm z=\pi$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx\sin ny\sin nz}{n^3}=\frac{1}{2}xyz.$$

(Math. Trip., 1904)

20. Начерчены окружности радиуса a с центрами в вершинах, взятых через одну, правильного шестиугольника со стороной a. Показать, что уравнение трилистника, образованного внешними дугами окружностей, может быть написано в виде

$$\frac{\pi r}{6\sqrt{3}a} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 4}\cos 3\theta - \frac{1}{5\cdot 7}\cos 6\theta + \frac{1}{8\cdot 10}\cos 9\theta - \ldots,$$

если полярная ось берется таким образом, что она проходит через центр одной из окружностей.

(Pembroke, 1902)

21. Вычертить график, представляемый уравнением

$$\frac{r}{a} = 1 + \frac{2m}{\pi}\sin\frac{\pi}{m}\left\{\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos nm\theta}{1-(nm)^2}\right\},$$

где m — целое число. (Jesus, 1908)

22. Из каждой вершины правильного шестиугольника со стороной $2a$ как из центра проведены дуги окружностей радиуса $2a$, лежащие внутри шестиугольника. Показать, что уравнение фигуры, образованной этими шестью дугами, имеет вид

$$\frac{\pi r}{4a} = 6 - 3\sqrt{3} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\{(-1)^{n-1}6 + 3\sqrt{3}\}}{(6n-1)(6n+1)}\cos 6n\theta.$$

Начальный радиус-вектор делит пополам лепесток.

(Trinity, 1905)

23. Показать, что при $c > 0$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty} e^{-cx}\operatorname{ctg} x\sin(2n+1)x\,dx = \frac{1}{2}\pi\operatorname{th}\frac{1}{2}c\pi.$$

(Trinity, 1894)

24. Показать, что

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\pi\operatorname{cth} 1.$$

(King's, 1901)

25. Показать, что при $-1 < x < 1$ и a вещественном

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty}\frac{\sin(2n+1)\theta\sin(1+x)\theta}{\sin\theta}\frac{\theta}{a^2+\theta^2}d\theta = -\frac{1}{2}\pi\frac{\operatorname{sh} ax}{\operatorname{sh} a}.$$

(Math. Trip., 1905)

26. Предполагая возможность разложения $f(x)$ в равномерно сходящийся ряд вида $\sum_k A_k\sin kx$, где k — корень уравнения $k\cos ak + b\sin ak = 0$, а суммирование распространяется на все положительные корни этого уравнения, определить постоянные A_k.

(Math. Trip., 1898)

27. Пусть ряд

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

является рядом Фурье; показать, что если $f(x)$ удовлетворяет некоторым общим условиям, то

$$a_n=\frac{4}{\pi}P\int_0^{\infty}f(t)\cos nt\,\mathrm{tg}\frac{t}{2}\frac{dt}{t},\quad b_n=\frac{4}{\pi}\int_0^{\infty}f(t)\sin nt\,\mathrm{tg}\frac{t}{2}\frac{dt}{t}.$$

(Beau)

28. Пусть

$$S_n(x)=2\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r-1}\frac{\sin rx}{r};$$

доказать, что наибольший максимум суммы $S_n(x)$ в промежутке $(0, \pi)$ достигается при $x=\frac{n\pi}{n+1}$; доказать также, что при $n\to\infty$

$$S_n\left(\frac{n\pi}{n+1}\right)\to 2\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t}\,dt.$$

Показать, что, когда $n\to\infty$, форма кривой $y=S_n(x)$ в промежутке $(0, \pi)$ стремится приблизиться к форме линии, образованной отрезком $y=x\,(0\leqslant x\leqslant\pi)$ и отрезком $x=\pi\,(0\leqslant y\leqslant G)$, где

$$G=2\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t}\,dt.$$

[То обстоятельство, что $G=3{,}704\ldots>\pi$, называется *явлением Гиббса*; см. Gibbs, Nature, LXIX, 606 (1899). Явление это характерно для ряда Фурье в соседстве с точкой разрыва первого рода функции, представляемой рядом. Относительно полного разъяснения явления, открытого Уилбрэмом (Wilbraham, Camb. and Dublin Math. Journal, III, 198—201 (1848)), см. книгу Carslaw, Fourier's series and integrals, гл. IX, 1921.]

ГЛАВА 10

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

10.1. Линейные дифференциальные уравнения[1]). Обыкновенные и особые точки

В некоторых из дальнейших глав этой книги мы займемся исследованием обширных и важных классов функций, удовлетворяющих линейным дифференциальным уравнениям второго порядка. Поэтому желательно установить некоторые общие результаты, касающиеся решений таких дифференциальных уравнений.

За каноническую форму линейного дифференциального уравнения второго порядка примем

$$\frac{d^2u}{dz^2}+p(z)\frac{du}{dz}+q(z)\,u=0 \tag{A}$$

и будем предполагать, что имеется некоторая область S, в которой как $p(z)$, так и $q(z)$ будут аналитическими функциями, за исключением конечного числа полюсов.

Всякую точку области S, в которой $p(z)$, $q(z)$ обе аналитические, будем называть *обыкновенной точкой* уравнения; остальные точки области S будем называть *особыми точками*.

10.2. Решение[2]) дифференциального уравнения в окрестности обыкновенной точки

Пусть b — обыкновенная точка дифференциального уравнения и S_b — область, образованная кругом радиуса r_b с центром в b

---

[1]) Изложение в этой главе главным образом теоретическое; оно состоит большей частью из теорем существования. Предполагается, что читатель имеет некоторое знакомство с практическими методами решения дифференциальных уравнений; эти методы даны в работах, специально посвященных этому предмету, как, например, Forsyth, A treatise on differential equations, 1914.

[2]) Этот способ применим только к уравнениям второго порядка. Относительно способа, применимого к уравнениям любого порядка, см. Forsyth, Theory of differential equations, IV, гл. 1, 1902.

вместе с окружностью; радиус круга таков, что каждая точка S_b является точкой S и обыкновенной точкой уравнения.

Пусть z — переменная точка области S_b. Положим в уравнении (A)

$$u = v \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_b^z p(\zeta)\,d\zeta\right\},$$

получим уравнение

$$\frac{d^2v}{dz^2} + J(z)\,v = 0, \tag{B}$$

где

$$J(z) = q(z) - \frac{1}{2}\frac{dp(z)}{dz} - \frac{1}{4}\{p(z)\}^2.$$

Легко видеть (§ 5.22), что обыкновенная точка уравнения (A) будет также обыкновенной точкой уравнения (B).

Рассмотрим теперь последовательность функций $v_n(z)$, аналитических в S_b, определяемых равенствами

$$v_0(z) = a_0 + a_1(z-b),$$

$$v_n(z) = \int_b^z (\zeta - z)\,J(\zeta)\,v_{n-1}(\zeta)\,d\zeta \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

где a_0, a_1 — произвольные постоянные.

Пусть M, μ — верхние границы $|J(z)|$ и $|v_0(z)|$ в области S_b. *Тогда во всех точках этой области*

$$|v_n(z)| \leqslant \frac{\mu M^n |z-b|^{2n}}{n!}.$$

Это неравенство справедливо при $n = 0$; если оно справедливо при $n = 0,\ 1,\ \ldots,\ m-1$, то, принимая за путь интегрирования отрезок прямой линии, получим

$$v_m(z)| = \left|\int_b^z (\zeta - z)\,J(\zeta)\,v_{m-1}(\zeta)\,d\zeta\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(m-1)!}\int_b^z |\zeta - z|\,|J(\zeta)|\,\mu M^{m-1}|\zeta - b|^{2m-2}\,|d\zeta| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(m-1)!}\mu M^m |z-b| \int_0^{|z-b|} t^{2m-2}\,dt < \frac{1}{m!}\mu M^m |z-b|^{2m},$$

поэтому по индукции неравенство имеет место для всех значений n.

Далее, так как

$$|v_n(z)| \leqslant \frac{\mu M^n r_b^{2n}}{n!},$$

когда z лежит в S_b и ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu M^n r_b^{2n}}{n!}$$

сходится, то заключаем (§ 3.34), что

$$v(z) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(z)$$

есть ряд аналитических функций, равномерно сходящийся в S_b; но по определению $v_n(z)$

$$\frac{d}{dz} v_n(z) = -\int_b^z J(\zeta) v_{n-1}(\zeta)\, d\zeta \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

$$\frac{d^2}{dz^2} v_n(z) = -J(z) v_{n-1}(z),$$

отсюда получаем (§ 5.3), что

$$\frac{d^2 v(z)}{dz^2} = \frac{d^2 v_0(z)}{dz^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^2 v_n(z)}{dz^2} = -J(z) v(z).$$

Поэтому $v(z)$ будет аналитической в S_b функцией от z, удовлетворяющей дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 v(z)}{dz^2} + J(z) v(z) = 0,$$

и из формулы, полученной для $\frac{d}{dz} v_n(z)$, ясно, что

$$v(b) = a_0, \quad v'(b) = \left\{ \frac{d}{dz} v(z) \right\}_{z=b} = a_1.$$

где a_0, a_1 — произвольные постоянные.

10.21. Единственность решения

Если бы имелось два аналитических решения уравнения для v, скажем $v_1(z)$ и $v_2(z)$, таких, что $v_1(b) = v_2(b) = a_0$, $v_1'(b) = v_2'(b) = a_1$, то тогда, положив $w(z) = v_1(z) - v_2(z)$, мы имели бы

$$\frac{d^2 w(z)}{dz^2} + J(z) w(z) = 0.$$

Дифференцируя это уравнение $n-2$ раза и полагая $z = b$, получим

$$w^{(n)}(b) + J(b) w^{(n-2)}(b) + C_{n-2}^1 J'(b) w^{(n-3)}(b) + \ldots$$
$$\ldots + J^{(n-2)}(b) w(b) = 0.$$

Полагая последовательно $n = 2, 3, 4, \ldots$, мы видим, что все производные функции $w(z)$ равняются нулю при $z = b$, и таким образом, по теореме Тейлора $w(z) \equiv 0$; иначе говоря, два решения $v_1(z)$, $v_2(z)$ тождественны.

Положив

$$u(z) = v(z) \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_b^z p(\zeta)\,d\zeta\right\},$$

мы легко убеждаемся в том, что $u(z)$ будет единственным аналитическим решением уравнения (A) таким, что

$$u(b) = A_0, \quad u'(b) = A_1, \quad \text{где} \quad A_0 = a_0, \quad A_1 = a_1 - \frac{1}{2}p(b)\,a_0.$$

Теперь, когда мы знаем, что решение уравнения (A) существует, что оно будет аналитическим в S_b и таким, что $u(b)$ и $u'(b)$ имеют произвольные значения A_0, A_1, простейший способ получения этого решения в виде ряда Тейлора состоит в том, что мы полагаем

$$u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (z-b)^n,$$

затем подставляем этот ряд в дифференциальное уравнение и приравниваем нулю коэффициенты при последовательных степенях $z - b$ (§ 3.73), а затем последовательно выражаем A_2, A_3, ..., через A_0, A_1.

Примечание. Для выполнения этого процесса подстановки на практике гораздо проще иметь уравнение «освобожденным от дробей», чем иметь его в канонической форме (A) § 10.1. Поэтому в приведенных ниже примерах 1, 2 следует пользоваться уравнениями в той форме, в какой они даны, т. е. *не нужно* делить на $1 - z^2$, $(z-2)(z-3)$. То же самое замечание относится и к примерам §§ 10.3, 10.32.

Из общей теории аналитического продолжения (§ 5.5) вытекает, что полученное решение будет аналитическим во всех точках области S, за исключением особых точек дифференциального уравнения. Тем не менее решение *не будет* вообще «аналитическим по всей области S» (§ 5.2, сноска к следствию 2), за исключением особых точек, так как оно может не быть однозначным, т. е. оно может не вернуться к исходному значению, если z опишет контур, окружающий одну или несколько особых точек уравнения.

[Свойство, что решение линейного дифференциального уравнения будет аналитическим во всех точках, за исключением особых точек коэффициентов уравнения, является общим для линейных уравнений всех порядков.]

Про два частных решения уравнения второго порядка, отношение которых не постоянно, говорят, что они образуют *фундаментальную систему решений*.

Пример 1. Показать, что уравнение

$$(1-z^2)u''-2zu'+\frac{3}{4}u=0$$

имеет фундаментальную систему решений

$$u_1=1-\frac{3}{8}z^2-\frac{21}{128}z^4-\ldots,$$

$$u_2=z+\frac{5}{24}z^3+\frac{15}{128}z^5+\ldots$$

Определить общий коэффициент в каждом ряде и показать, что радиус сходимости каждого ряда равен 1.

Пример 2. Рассмотреть уравнение

$$(z-2)(z-3)u''-(2z-5)u'+2u=0$$

подобным же образом, как и в примере 1.

10.3. Правильные точки дифференциального уравнения

Предположим, что в некоторой точке c области S функции $p(z)$ и $q(z)$ (или хотя бы одна из них) имеют полюсы, причем такого порядка, что $(z-c)p(z)$ и $(z-c)^2q(z)$ будут аналитическими в c. Такая точка называется *правильной точкой*[1]) дифференциального уравнения. Все другие полюсы функции $p(z)$ или $q(z)$, не обладающие указанным выше свойством, называются *неправильными точками*. Основание для различения станет ясным из изложения этого параграфа.

Если c — правильная точка, то уравнение можно переписать в виде[2])

$$(z-c)^2\frac{d^2u}{dz^2}+(z-c)P(z-c)\frac{du}{dz}+Q(z-c)u=0,$$

где $P(z-c)$, $Q(z-c)$ будут аналитическими в точке c; отсюда по теореме Тейлора

$$P(z-c)=p_0+p_1(z-c)+p_2(z-c)^2+\ldots,$$

$$Q(z-c)=q_0+q_1(z-c)+q_2(z-c)^2+\ldots,$$

где $p_0, p_1, \ldots, q_0, q_1, \ldots$ — постоянные, и эти ряды сходятся в области S_c, образованной кругом радиуса r (с центром в c), где r настолько мало, что c будет единственной особой точкой уравнения, лежащей в S_c.

---

[1]) Название «правильная точка» (regular point) принадлежит Томé (Thomé, Journal für Math., LXXV, 266 (1873)). Фукс раньше употреблял термин «точка определенности» (point of determinateness).

[2]) Фробениус называет это нормальной формой уравнения.

Предположим, что *формальное* решение уравнения имеет вид

$$u=(z-c)^{\alpha}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(z-c)^n\right],$$

где α, a_1, a_2, ... — постоянные, подлежащие определению. Подстановкой в дифференциальное уравнение (предполагая, что почленное дифференцирование и умножение рядов допустимо) получаем

$$(z-c)^{\alpha}\left[\alpha(\alpha-1)+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(\alpha+n)(\alpha+n-1)(z-c)^n\right]+$$
$$+(z-c)^{\alpha}P(z-c)\left[\alpha+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(\alpha+n)(z-c)^n\right]+$$
$$+(z-c)^{\alpha}Q(z-c)\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(z-c)^n\right]=0.$$

Далее, подстановкой рядов вместо $P(z-c)$, $Q(z-c)$, умножением и приравниванием нулю коэффициентов последовательных степеней $z-c$ получаем следующую последовательность уравнений:

$$\alpha^2+(p_0-1)\alpha+q_0=0,$$
$$a_1\{(\alpha+1)^2+(p_0-1)(\alpha+1)+q_0\}+\alpha p_1+q_1=0,$$
$$a_2\{(\alpha+2)^2+(p_0-1)(\alpha+2)+q_0\}+a_1\{(\alpha+1)p_1+q_1\}+\alpha p_2+q_2=0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_n\{(\alpha+n)^2+(p_0-1)(\alpha+n)+q_0\}+$$
$$+\sum_{m=1}^{n-1}a_{n-m}\{(\alpha+n-m)p_m+q_m\}+\alpha p_n+q_n=0.$$

Первое из этих уравнений, называемое *определяющим* (indicial) *уравнением*[1]), дает два значения α (которые могут оказаться и равными). Читатель легко убедится, что если бы c была *неправильной* точкой, то определяющее уравнение имело бы (самое большее) первую степень; он оценит теперь различие между правильными и неправильными особыми точками.

Пусть $\alpha=\rho_1$, $\alpha=\rho_2$ — корни[2]) определяющего уравнения

$$F(\alpha)\equiv\alpha^2+(p_0-1)\alpha+q_0=0;$$

тогда при выбранном α последующие уравнения однозначно определяют по порядку a_1, a_2, ..., если только $F(\alpha+n)$ не равняется нулю при $n=1, 2, 3, \ldots$; иначе говоря, если $\alpha=\rho_1$, то ρ_2 не должно

---

[1]) Название indicial принадлежит Кэли (Cayley, Quarterly Journal, XXI, 326 (1886)).

[2]) Корни ρ_1, ρ_2 определяющего уравнения мы будем называть *показателями* дифференциального уравнения в точке c.

быть одним из чисел ρ_1+1, ρ_1+2, ..., и если $\alpha=\rho_2$, то ρ_1 не должно быть одним из чисел ρ_2+1, ρ_2+2, ...

Таким образом, если разность показателей не равна нулю или целому числу, то всегда можно получить два различных ряда, формально удовлетворяющих уравнению.

Пример. Показать, что если m не равно нулю или целому числу, то уравнение

$$u''+\left(\frac{\frac{1}{4}-m^2}{z^2}-\frac{1}{4}\right)u=0$$

формально удовлетворяется двумя рядами, первые члены которых будут

$$z^{\frac{1}{2}+m}\left\{1+\frac{z^2}{16(1+m)}+\ldots\right\},\quad z^{\frac{1}{2}-m}\left\{1+\frac{z^2}{16(1-m)}+\ldots\right\};$$

определить коэффициенты общего члена в каждом ряде и показать, что ряды сходятся для всех значений z.

10.31. Сходимость разложения из § 10.3

Если показатели ρ_1, ρ_2 не равны, то пусть ρ_1 будет тот из показателей, вещественная часть которого не меньше вещественной части другого, и пусть $\rho_1-\rho_2=s$; имеем

$$F(\rho_1+n)=n(s+n).$$

По оценке § 5.23 мы можем найти такое положительное число M, что $|p_n|<Mr^{-n}$, $|q_n|<Mr^{-n}$, $|\rho_1 p_n+q_n|<Mr^{-n}$, где M не зависит от n; удобно взять $M\geqslant 1$.

Взяв $\alpha=\rho_1$, видим, что

$$|a_1|=\frac{|\rho_1 p_1+q_1|}{|F(\rho_1+1)|}<\frac{M}{r|s+1|}<\frac{M}{r},$$

так как $|s+1|\geqslant 1$.

Если мы теперь предположим, что $|a_n|<M^n r^{-n}$, когда $n=1, 2, \ldots, m-1$, то получим

$$|a_m|=\left|\frac{\sum\limits_{t=1}^{m-1} a_{m-t}\{(\rho_1+m-t)p_t+q_t\}+\rho_1 p_m+q_m}{F(\rho_1+m)}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\sum\limits_{t=1}^{m-1}|a_{m-t}||\rho_1 p_t+q_t|+|\rho_1 p_m+q_m|+\sum\limits_{t=1}^{m-1}(m-t)|a_{m-t}||p_t|}{m|s+m|}<$$

$$<\frac{mM^m r^{-m}+\left\{\sum\limits_{t=1}^{m-1}(m-t)\right\}M^m r^{-m}}{m^2|1+sm^{-1}|}.$$

Так как $|1+sm^{-1}| \geqslant 1$, ибо $\operatorname{Re} s$ неотрицательна, то мы получим

$$|a_m| < \frac{m+1}{2m} M^m r^{-m} < M^m r^{-m},$$

и таким образом, по индукции $|a_n| < M^n r^{-n}$ для всех значений n.

Если значения коэффициентов, соответствующие показателю ρ_2, будут $a_1', a_2', \ldots$, то мы получим подобной же индукцией

$$|a_n'| < M^n \varkappa^n r^{-n},$$

где $\varkappa$ — верхняя граница выражений

$$|1-s|^{-1}, \quad \left|1-\frac{1}{2}s\right|^{-1}, \quad \left|1-\frac{1}{3}s\right|^{-1}, \quad \ldots;$$

эта граница существует, когда s не есть положительное целое число.

Таким образом, мы сначала получили два формальных ряда

$$w_1(z) = (z-c)^{\rho_1}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-c)^n\right],$$

$$w_2(z) = (z-c)^{\rho_2}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty} a_n' (z-c)^n\right].$$

Но первый ряд будет равномерно сходящимся рядом аналитических функций, когда $|z-c| < rM^{-1}$, второй, — когда $|z-c| < rM^{-1}\varkappa^{-1}$, лишь бы только в каждом случае $\arg(z-c)$ был ограничен таким образом, чтобы ряды представляли однозначные функции; следовательно, формальная подстановка этих рядов в левую часть дифференциального уравнения оправдана, и каждый из этих рядов представляет решение уравнения; при этом все время предполагается, что $\rho_1 - \rho_2$ не будет положительным целым числом или нулем [1]).

Итак, мы получили основную систему решений, годных в окрестности правильной особой точки, если $\rho_1 - \rho_2$ не есть целое число или нуль. По теории аналитического продолжения мы видим, что если все особые точки уравнения, лежащие в S, будут правильными, то каждое из двух решений фундаментальной системы будет аналитическим во всех точках, за исключением особых точек уравнения, которые будут точками ветвления решения.

---

[1]) Если $\rho_1 - \rho_2$ — положительное целое число, то значение $\varkappa$ не существует; если $\rho_1 = \rho_2$, то оба решения одинаковы.

10.32. Нахождение второго решения в случае, когда разность показателей будет целым числом или нулем

В том случае, когда $\rho_1 - \rho_2 = s$ — положительное целое число или нуль, решение $w_2(z)$, найденное в § 10.31, может потерять смысл[1]) или совпасть с $w_1(z)$.

Если мы положим $u = w_1(z)\zeta$, то уравнение, определяющее ζ, будет

$$(z-c)^2 \frac{d^2\zeta}{dz^2} + \left\{ 2(z-c)^2 \frac{w_1'(z)}{w_1(z)} + (z-c)P(z-c) \right\} \frac{d\zeta}{dz} = 0;$$

общее решение этого уравнения имеет вид

$$\zeta = A + B \int^z \frac{1}{\{w_1(z)\}^2} \exp\left\{ -\int^z \frac{P(z-c)}{z-c} dz \right\} dz =$$

$$= A + B \int^z \frac{(z-c)^{-p_0}}{\{w_1(z)\}^2} \exp\left\{ -p_1(z-c) - \frac{1}{2} p_2 (z-c)^2 - \ldots \right\} dz =$$

$$= A + B \int^z (z-c)^{-p_0 - 2\rho_1} g(z)\, dz,$$

где A, B — произвольные постоянные, а $g(z)$ — аналитическая функция внутри всякого круга, центр которого лежит в c и который не содержит ни особых точек функции $P(z-c)$, ни особых точек или нулей функции $(z-c)^{-\rho_1} w_1(z)$; кроме того, $g(c) = 1$.

Пусть

$$g(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} g_n (z-c)^n.$$

Тогда, если $s \neq 0$, то

$$\zeta = A + B \int^z \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} g_n (z-c)^n \right\} (z-c)^{-s-1} dz =$$

$$= A + B \left[-\frac{1}{s}(z-c)^{-s} - \sum_{n=1}^{s-1} \frac{g_n}{s-n} (z-c)^{n-s} + \right.$$

$$\left. + g_s \lg(z-c) + \sum_{n=s+1}^{\infty} \frac{g_n}{n-s} (z-c)^{n-s} \right].$$

---

[1]) Коэффициент a_s' может оказаться неопределенным или бесконечным; в первом случае $w_2(z)$ будет решением, содержащим две произвольные постоянные a_0' и a_s'; ряд, у которого a_s' будет множителем, будет отличаться от $w_1(z)$ лишь постоянным множителем.

Поэтому общим решением дифференциального уравнения, аналитическим во всех точках S_c (кроме c), будет

$$Aw_1(z)+B\left[g_s w_1(z)\lg(z-c)+\overline{w}(z)\right],$$

где по § 2.53

$$\overline{w}(z)=(z-c)^{\rho_2}\left\{-\frac{1}{s}-\sum_{n=1}^{\infty}h_n(z-c)^n\right\},$$

причем коэффициенты h_n будут постоянными.

При $s=0$ соответствующая форма решения имеет вид

$$Aw_1(z)+B\left[w_1(z)\lg(z-c)+(z-c)^{\rho_2}\sum_{n=1}^{\infty}h_n(z-c)^n\right].$$

Утверждение, приведенное в конце § 10.31, сохраняется, как теперь видим, и в исключительном случае, когда s — нуль или положительное целое число.

В частном случае, когда $g_s=0$, второе решение не содержит логарифма.

Полученные решения, годные в окрестности правильной точки уравнения, называются *правильными интегралами*.

Интегралы уравнения, годные вблизи правильной точки c, можно практически получить, найдя сначала $w_1(z)$ и определив затем коэффициенты функции $\overline{w}_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n(z-c)^{\rho_2+n}$ подстановкой $w_1(z)\lg(z-c)+\overline{w}_1(z)$ в левую часть уравнениия и приравниванием нулю коэффициентов различных степеней $(z-c)$ в окончательном выражении. Другой способ, принадлежащий Фробениусу[1]), приведен у Форсайта (Forsyth, Treatise on differential equations, 243—258).

Пример 1. Показать, что интегралы уравнения

$$\frac{d^2u}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{du}{dz}-m^2u=0,$$

правильные вблизи $z=0$, будут

$$w_1(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m^{2n}z^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$$

$$w_1(z)\lg z-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m^{2n}z^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right).$$

Проверить, что эти ряды сходятся для всех значений z.

---

[1]) Frobenius, Journal für Math., LXXVI, 214—224 (1874).

Пример 2. Показать, что интегралы уравнения

$$z(z-1)\frac{d^2u}{dz^2}+(2z-1)\frac{du}{dz}+\frac{1}{4}u=0,$$

правильные вблизи $z=0$, будут

$$w_1(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1\cdot 3\ldots 2n-1}{2\cdot 4\ldots 2n}\right)^2 z^n$$

и

$$w_1(z)\lg z+4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1\cdot 3\ldots 2n-1}{2\cdot 4\ldots 2n}\right)^2\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots-\frac{1}{2n}\right)z^n.$$

Проверить, что эти ряды сходятся при $|z|<1$, и получить интегралы, правильные вблизи $z=1$.

Пример 3. Показать, что гипергеометрическому уравнению

$$z(1-z)\frac{d^2u}{dz^2}+\{c-(a+b+1)z\}\frac{du}{dz}-abu=0$$

удовлетворяет гипергеометрический ряд § 2.38. Получить полное решение уравнения при $c=1$.

10.4. Решения, годные для больших значений $|z|$

Пусть $z=1/z_1$; тогда говорят, что решение дифференциального уравнения годно для «больших значений $|z|$», если оно годно для достаточно малых значений $|z_1|$, и говорят также, что «точка на бесконечности есть обыкновенная (или правильная, или неправильная) точка уравнения», когда точка $z_1=0$ — обыкновенная (или правильная, или неправильная) точка уравнения, в которое преобразуется заданное уравнение, если вместо z принять за независимую переменную z_1.

Так как

$$\frac{d^2u}{dz^2}+p(z)\frac{du}{dz}+q(z)u\equiv$$
$$\equiv z_1^4\frac{d^2u}{dz_1^2}+\left\{2z_1^3-z_1^2p\left(\frac{1}{z_1}\right)\right\}\frac{du}{dz_1}+q\left(\frac{1}{z_1}\right)u,$$

то мы видим, что условия, чтобы точка $z=\infty$ была (I) обыкновенной точкой или (II) правильной точкой, заключаются в том, чтобы (I) $2z-z^2p(z)$, $z^4q(z)$ были аналитическими на бесконечности (§ 5.62) и (II) чтобы $zp(z)$, $z^2q(z)$ были аналитическими на бесконечности.

Пример 1. Показать, что каждая точка (включая бесконечность) будет или обыкновенной точкой, или правильной точкой каждого из уравнений

$$z(1-z)\frac{d^2u}{dz^2}+\{(c-(a+b+1)z\}\frac{du}{dz}-abu=0,$$
$$(1-z^2)\frac{d^2u}{dz^2}-2z\frac{du}{dz}+n(n+1)u=0,$$

где a, $в$, c, n, —постоянные.

Пример 2. Показать, что каждая точка (исключая бесконечность) будет или обыкновенной точкой, или правильной точкой уравнения

$$z^2 \frac{d^2u}{dz^2} + z \frac{dn}{dz} + (z^2 - n^2) u = 0,$$

где n — постоянная.

Пример 3. Показать, что уравнение

$$(1 - z^2) \frac{d^2u}{dz^2} - 2z \frac{du}{dz} + 6u = 0$$

имеет решения

$$z^2 - \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{z^3} + \frac{3 \cdot 4}{2 \cdot 7} \frac{1}{z^5} + \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{2 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 9} \frac{1}{z^7} + \ldots,$$

причем последнее решение будет сходиться, если $|z| > 1$.

10.5. Неправильные особые точки и слияние

Вблизи точки, которая не является правильной, уравнение второго порядка не может иметь двух правильных интегралов, ибо определяющее уравнение будет, самое большее, первой степени; в рассматриваемом случае может быть или один правильный интеграл, или ни одного. Ниже мы увидим (§ 16.3), каков характер решения вблизи таких точек в некоторых простых случаях. Общее исследование таких решений не входит в задачи этой книги[1]).

Часто случается, что некоторое дифференциальное уравнение может быть получено из другого дифференциального уравнения, если заставить две или более особые точки последнего стремиться к совпадению. Такой предельный процесс называется *слиянием* (confluence), и первое уравнение называется предельной формой (confluent form) второго при слиянии. В § 10.6 мы увидим, что особые точки первого уравнения могут быть более сложного характера, чем особые точки второго уравнения.

10.6. Дифференциальные уравнения математической физики

Наиболее общее дифференциальное уравнение второго порядка, у которого всякая точка, за исключением a_1, a_2, a_3, a_4 и ∞, является обыкновенной, причем эти пять точек будут правильными точками с показателями α_r, β_r в a_r ($r = 1, 2, 3, 4$) и показателями μ_1, μ_2

---

[1]) Некоторые элементарные исследования даны Форсайтом (Forsyth, Differential equations, 1914). Полное исследование дано в его «Theory of differential equations», IV, 1902.

на ∞, как легко проверить[1]), имеет вид

$$\frac{d^2u}{dz^2}+\left\{\sum_{r=1}^{4}\frac{1-\alpha_r-\beta_r}{z-a_r}\right\}\frac{du}{dz}+\left\{\sum_{r=1}^{4}\frac{\alpha_r\beta_r}{(z-a_r)^2}+\frac{Az^2+2Bz+C}{\prod\limits_{r=1}^{4}(z-a_r)}\right\}u=0,$$

где A таково, что μ_1 и μ_2 будут корнями уравнения

$$\mu^2+\mu\left\{\sum_{r=1}^{4}(\alpha_r+\beta_r)-3\right\}+\sum_{r=1}^{4}\alpha_r\beta_r+A=0,$$

а B, C — постоянные[2]).

Клейном[3]) и Бохером[4]) была доказана замечательная теорема: все линейные дифференциальные уравнения, встречающиеся в определенных областях математической физики, могут быть получены путем слияния из частного уравнения только что указанного типа, в котором *разность показателей в каждой особой точке равна* $\frac{1}{2}$; краткое исследование предельных уравнений мы сейчас дадим.

Если положить $\beta_r=\alpha_r+\frac{1}{2}$ $(r=1, 2, 3, 4)$ и написать ζ вместо z, то написанное выше уравнение примет вид

$$\frac{d^2u}{d\zeta^2}+\left\{\sum_{r=1}^{4}\frac{\frac{1}{2}-2\alpha_r}{\zeta-a_r}\right\}\frac{du}{d\zeta}+$$
$$+\left\{\sum_{r=1}^{4}\frac{\alpha_r\left(\alpha_r+\frac{1}{2}\right)}{(\zeta-a_r)^2}+\frac{A\zeta^2+2B\zeta+C}{\prod\limits_{r=1}^{4}(\zeta-a_r)}\right\}u=0,$$

---

[1]) Коэффициенты при $\frac{du}{dz}$ и u должны быть рациональными, так как в противном случае они имели бы существенно особые точки; знаменателями у $p(z)$, $q(z)$ должны быть соответственно $\prod\limits_{r=1}^{4}(z-a_r)$, $\prod\limits_{r=1}^{4}(z-a_r)^2$; разлагая $p(z)$ и $q(z)$ на простейшие дроби и вспоминая, что $p(z)=O(z^{-1})$, $q(z)=O(z^{-2})$ при $|z|\to\infty$, мы получим требуемый результат без затруднений.

[2]) Отсюда видно, что μ_1, μ_2 связаны соотношением

$$\mu_1+\mu_2+\sum_{r=1}^{4}(\alpha_r+\beta_r)=3.$$

[3]) F. Klein, Ueber lineare Differentialgleichungen der zweiten Ordnung, 40, 1894; см. также Vorlesung über Lamé'schen Funktionen.

[4]) Bocher, Ueber die Reihenentwickelungen der Potenzialtheorie, 193, 1894.

где $\left(\text{на основании условия } \mu_2 - \mu_1 = \frac{1}{2}\right)$

$$A = \left(\sum_{r=1}^{4} \alpha_r\right)^2 - \sum_{r=1}^{4} \alpha_r^2 - \frac{3}{2}\sum_{r=1}^{4} \alpha_r + \frac{3}{16}\ ^{1)}.$$

Это дифференциальное уравнение называется *обобщенным уравнением Ламе.*

Если положить в этом уравнении $a_1 = a_2$, то очевидно, что слияние особых точек a_1, a_2 порождает особую точку, в которой показатели α, β даются уравнениями

$$\alpha + \beta = 2(\alpha_1 + \alpha_2), \quad \alpha\beta = \alpha_1\left(\alpha_1 + \frac{1}{2}\right) + \alpha_2\left(\alpha_2 + \frac{1}{2}\right) + D,$$

где

$$D = \frac{Aa_1^2 + 2Ba_1 + C}{(a_1 - a_3)(a_1 - a_4)}.$$

Поэтому разность показателей в слитной особой точке *будет не* $\frac{1}{2}$, *а может иметь любое заданное значение при соответственном выборе B и C.* Подобным же образом слиянием трех или более особых точек мы можем получить одну неправильную особую точку.

Надлежащим слиянием пяти особых точек, находящихся в нашем распоряжении, мы можем получить шесть типов уравнений, которые можно классифицировать (a) по числу особых точек с разностью показателей $\frac{1}{2}$, (b) по числу других правильных особых точек, (c) по числу неправильных особых точек при помощи следующей схемы, которая, как легко видеть, будет исчерпывающей [2]).

	(a)	(b)	(c)	
(I)	3	1	0	Ламé
(II)	2	0	1	Матье
(III)	1	2	0	Лежандр
(IV)	0	1	1	Бессель
(V)	1	0	1	Вебер, Эрмит
(VI)	0	0	1	Стокс [3])

[1]) Действительно, в общем случае $A = \mu_1\mu_2 - \sum_1^4 \alpha_r\beta_r$, $\mu_1\mu_2 = \frac{1}{4} \times$ $\times [(\mu_1 + \mu_2)^2 - (\mu_1 - \mu_2)^2]$ и $\mu_1 + \mu_2 = 3 - \sum_1^4 (\alpha_r + \beta_r)$. (*Прим. ред.*)

[2]) Например, тип (a) 3, (b) 0, (c) 1 невозможен, так как он вызывает необходимость в шести начальных особых точках.

[3]) Уравнение этого типа было рассмотрено Стоксом в его исследованиях о дифракции (Stokes, Camb. Phil. Trans, IX, 168—182 (1856)); впрочем, оно легко преобразуется в частный случай уравнения Бесселя (пример 6, ниже).

Эти уравнения обычно называют по фамилиям математиков, приведенным в последнем столбце. Вообще говоря, чем ниже поставлено уравнение в этой схеме, тем более просты свойства его решения. Решения уравнений (II)—(VI) рассматриваются в гл. 15—19 этой книги, а решение уравнения (I)[1] — в гл. 23. Выводы канонических форм этих уравнений из обобщенного уравнения Ламе указаны в следующих примерах.

Пример 1. Получить уравнение Ламе

$$\frac{d^2u}{d\zeta^2}+\left\{\sum_{r=1}^{3}\frac{\frac{1}{2}}{\zeta-a_r}\right\}\frac{du}{d\zeta}-\frac{\{n(n+1)\zeta+h\}\,u}{4\prod\limits_{r=1}^{3}(\zeta-a_r)}=0$$

(где h и n — постоянные), полагая

$$\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=0,\qquad 8B=n(n+1)\,a_4,\qquad 4C=ha_4$$

и заставляя $a_4\to\infty$.

Пример 2. Получить уравнение

$$\frac{d^2u}{d\zeta^2}+\left(\frac{\frac{1}{2}}{\zeta}+\frac{\frac{1}{2}}{\zeta-1}\right)\frac{du}{d\zeta}-\frac{(a-16q+32q\zeta)\,u}{4\zeta(\zeta-1)}=0$$

(где a и q — постоянные), полагая $a_1=0$, $a_2=1$ и заставляя $a_3=a_4\to\infty$. Вывести отсюда уравнение Матье (§ 19.1)

$$\frac{d^2u}{dz^2}+(a+16q\cos 2z)\,u=0$$

при помощи подстановки $\zeta=\cos^2 z$.

Пример 3. Получить уравнение

$$\frac{d^2u}{d\zeta^2}+\left(\frac{\frac{1}{2}}{\zeta}+\frac{1}{\zeta-1}\right)\frac{du}{d\zeta}+\frac{1}{4}\left\{\frac{n(n+1)}{\zeta}-\frac{m^2}{\zeta-1}\right\}\frac{u}{\zeta(\zeta-1)}=0,$$

полагая

$$a_1=a_2=1,\quad a_3=a_4=0,\quad \alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0,\quad \alpha_4=\frac{1}{4}.$$

Вывести отсюда уравнение Лежандра (§§ 15.13, 15.5)

$$(1-z^2)\frac{d^2u}{dz^2}-2z\frac{du}{dz}+\left\{n(n+1)-\frac{m^2}{1-z^2}\right\}u=0$$

при помощи подстановки $\zeta=z^{-2}$.

Пример 4. Полагая $a_1=a_2=0$, $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=0$ и заставляя $a_3=a_4\to\infty$, получить уравнение

$$\zeta^2\frac{d^2u}{d\zeta^2}+\zeta\frac{du}{d\zeta}+\frac{1}{4}(\zeta-n^2)\,u=0.$$

---

[1]) О свойствах уравнений типа (I) см. работы Клейна и Форсайта, цитируемые в конце этой главы; см. также Todhunter, The Functions of Laplace, Lamé and Bessel, 1875.

Вывести отсюда уравнение Бесселя (§ 17.11)

$$z^2 \frac{d^2u}{dz^2} + z \frac{du}{dz} + (z^2 - n^2) u = 0$$

при помощи подстановки $\zeta = z^2$.

Пример 5. Полагая $a_1 = 0$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$ и заставляя $a_2 = a_3 = a_4 \to \infty$, получить уравнение

$$\zeta \frac{d^2u}{d\zeta^2} + \frac{1}{2} \frac{du}{d\zeta} + \frac{1}{4} \left(n + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \zeta\right) u = 0.$$

Вывести отсюда уравнение Вебера (§ 16.5)

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \left(n + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} z^2\right) u = 0$$

при помощи подстановки $\zeta = z^2$.

Пример 6. Полагая $\alpha_r = 0$ и заставляя $a_r \to \infty$ ($r = 1, 2, 3, 4$), получить уравнение

$$\frac{d^2u}{d\zeta^2} + (B_1\zeta + C_1) u = 0.$$

Полагая затем

$$u = (B_1\zeta + C_1)^{\frac{1}{2}} v, \quad B_1\zeta + C_1 = \left(\frac{3}{2} B_1 z\right)^{\frac{2}{3}},$$

показать, что

$$z^2 \frac{d^2v}{dz^2} + z \frac{dv}{dz} + \left(z^2 - \frac{1}{9}\right) v = 0.$$

Пример 7. Показать, что общая форма обобщенного уравнения Ламе не изменится (I) при любом дробнолинейном преобразовании независимой переменной, при котором ∞ остается особой точкой преобразованного уравнения; (II) при любой замене зависимой переменной типа $u = (z - a_r)^\lambda v$.

Пример 8. Вывести из примера 7, что различные предельные формы обобщенного уравнения Ламе всегда могут быть сведены к формам в примерах 1—6. [Заметьте, что подходящее дробнолинейное преобразование переменной преобразует любые три различные точки в точки 0, 1, ∞.]

10.7. Линейные дифференциальные уравнения с тремя особыми точками

Пусть

$$\frac{d^2u}{dz^2} + p(z) \frac{du}{dz} + q(z) u = 0$$

имеет три и только три особые точки a, b, c [1]); пусть эти точки будут правильными точками с показателями α, α'; β, β'; γ, γ'.

Тогда коэффициент $p(z)$ будет рациональной функцией с простыми полюсами в a, b, c, его вычеты в этих полюсах будут равны

---

[1]) Точка на бесконечности должна быть обыкновенной точкой.

$1-\alpha-\alpha'$, $1-\beta-\beta'$, $1-\gamma-\gamma'$, и $p(z)-2z^{-1}$ при $z\to\infty$ будет $O(z^{-2})$. Поэтому

$$p(z)=\frac{1-\alpha-\alpha'}{z-a}+\frac{1-\beta-\beta'}{z-b}+\frac{1-\gamma-\gamma'}{z-c}$$

и[1])

$$\alpha+\alpha'+\beta+\beta'+\gamma+\gamma'=1.$$

Подобным же образом

$$q(z)=\left\{\frac{\alpha\alpha'(a-b)(a-c)}{z-a}+\frac{\beta\beta'(b-c)(b-a)}{z-b}+\right.$$
$$\left.+\frac{\gamma\gamma'(c-a)(c-b)}{z-c}\right\}\frac{1}{(z-a)(z-b)(z-c)},$$

и следовательно, дифференциальное уравнение имеет вид

$$\frac{d^2u}{dz^2}+\left\{\frac{1-\alpha-\alpha'}{z-a}+\frac{1-\beta-\beta'}{z-b}+\frac{1-\gamma-\gamma'}{z-c}\right\}\frac{du}{dz}+$$
$$+\left\{\frac{\alpha\alpha'(a-b)(a-c)}{z-a}+\frac{\beta\beta'(b-c)(b-a)}{z-b}+\right.$$
$$\left.+\frac{\gamma\gamma'(c-a)(c-b)}{z-c}\right\}\frac{u}{(z-a)(z-b)(z-c)}=0.$$

Это уравнение было впервые дано Папперитцем[2]).

Чтобы выразить тот факт, что u удовлетворяет уравнению этого типа (которое мы будем называть P-уравнением Римана), Риман писал[3])

$$u=P\left\{\begin{matrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & z \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{matrix}\right\}.$$

Особые точки уравнения помещены в первой строке с соответственными показателями непосредственно под ними, а независимая переменная помещена в четвертом столбце.

Пример. Показать, что гипергеометрическое уравнение

$$z(1-z)\frac{d^2u}{dz^2}+\{c-(a+b+1)z\}\frac{du}{dz}-abu=0$$

---

[1]) Показатели должны удовлетворять этому уравнению.

[2]) Papperitz, Math. Ann., XXV, 213 (1885).

[3]) Riemann, Abh. d. k. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, VII (1857). Из этого мемуара видно, что хотя Риман и не составлял этого уравнения явно, но выводил его существование из гипергеометрического уравнения.

определяется схемой

$$P\left\{\begin{matrix} 0 & \infty & 1 & \\ 0 & a & 0 & z \\ 1-c & b & c-a-b & \end{matrix}\right\}.$$

10.71. Преобразования P-уравнения Римана

Два преобразования, представляемые схематически равенствами

$$\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^k\left(\frac{z-c}{z-b}\right)^l P\left\{\begin{matrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & z \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{matrix}\right\}=$$

$$=P\left\{\begin{matrix} a & b & c & \\ \alpha+k & \beta-k-l & \gamma+l & z \\ \alpha'+k & \beta'-k-l & \gamma'+l & \end{matrix}\right\}, \qquad \text{(I)}$$

$$P\left\{\begin{matrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & z \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{matrix}\right\}=P\left\{\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & \\ \alpha & \beta & \gamma & z_1 \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{matrix}\right\} \qquad \text{(II)}$$

(где z_1, a_1, b_1, c_1 получены из z, a, b, c некоторым дробнолинейным преобразованием), имеют большое значение. Они могут быть получены прямым преобразованием дифференциального уравнения Папперитца — Римана путем надлежащей замены зависимой и независимой переменных; но верность результатов преобразований можно видеть интуитивно, если заметить, что P-уравнение Римана определяется однозначно знанием трех особых точек и их показателей, а также что (I), если

$$u=P\left\{\begin{matrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & z \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{matrix}\right\},$$

то $u_1=\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^k\left(\frac{z-c}{z-b}\right)^l u$ удовлетворяет дифференциальному уравнению второго порядка с теми же самыми тремя особыми точками и показателями $\alpha+k$, $\alpha'+k$; $\beta-k-l$, $\beta'-k-l$; $\gamma+l$, $\gamma'+l$ и сумма этих показателей будет 1; (II) если мы положим $z=\frac{Az_1+B}{Cz_1+D}$, то уравнение относительно z_1 будет линейным уравнением второго порядка с особыми точками в точках, полученных из a, b, c при помощи этого дробнолинейного преобразования, с показателями α, α', β, β', γ, γ' при них.

10.72. Связь P-уравнения Римана с гипергеометрическим уравнением

На основании результатов § 10.71 заключаем, что

$$P\left\{\begin{matrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & z \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{matrix}\right\} = \left(\frac{z-a}{z-b}\right)^{\alpha}\left(\frac{z-c}{z-b}\right)^{\gamma} P\left\{\begin{matrix} a & b & c & \\ 0 & \beta+\alpha+\gamma & 0 & z \\ \alpha'-\alpha & \beta'+\alpha+\gamma & \gamma'-\gamma & \end{matrix}\right\} =$$

$$= \left(\frac{z-a}{z-b}\right)^{\alpha}\left(\frac{z-c}{z-b}\right)^{\gamma} P\left\{\begin{matrix} 0 & \infty & 1 & \\ 0 & \beta+\alpha+\gamma & 0 & x \\ \alpha'-\alpha & \beta'+\alpha+\gamma & \gamma'-\gamma & \end{matrix}\right\},$$

где

$$x = \frac{(z-a)(c-b)}{(z-b)(c-a)}.$$

Поэтому, согласно примеру § 10.7, решение P-уравнения Римана можно всегда получить из решения гипергеометрического уравнения, элементы которого a, b, c, x соответственно равны

$$\alpha+\beta+\gamma, \quad \alpha+\beta'+\gamma, \quad 1+\alpha-\alpha', \quad \frac{(z-a)(c-b)}{(z-b)(c-a)}.$$

10.8. Линейные дифференциальные уравнения с двумя особыми точками

Если в § 10.7 мы сделаем точку c обыкновенной точкой, то мы должны будем иметь $1-\gamma-\gamma'=0$, $\gamma\gamma'=0$, а

$$\frac{\alpha\alpha'(a-b)(a-c)}{z-a} + \frac{\beta\beta'(b-c)(b-a)}{z-b}$$

должно делиться на $(z-c)$ для того, чтобы $p(z)$ и $q(z)$ были аналитическими в c. Отсюда $\alpha+\alpha'+\beta+\beta'=0$, $\alpha\alpha'=\beta\beta'$, и мы получаем уравнение

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \left\{\frac{1-\alpha-\alpha'}{z-a} + \frac{1+\alpha+\alpha'}{z-b}\right\}\frac{du}{dz} + \frac{\alpha\alpha'(a-b)^2 u}{(z-a)^2(z-b)^2} = 0,$$

решение которого будет

$$u = A\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^{\alpha} + B\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^{\alpha'};$$

таким образом, решение содержит только элементарные функции.

Когда $\alpha=\alpha'$, решение имеет вид

$$u = A\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^{\alpha} + B_1\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^{\alpha}\lg\left(\frac{z-a}{z-b}\right).$$

ЛИТЕРАТУРА

L. Fuchs, Journal für Math., LXVI, 121—160 (1866).
L. W. Thomé, Journal für Math., LXXV, 265—291 (1873), LXXXVII, 222—349 (1879).
L. Schlesinger, Handbuch der linearen Differentialgleichungen (Leipzig, 1895—1898).
G. Frobenius, Journal für Math., LXXVI, 214—235 (1874).
Б. Риман, Сочинения, Гостехиздат, 159—175, 1948.
F. C. Klein, Ueber lineare Differentialgleichungen der zweiten Ordnung, Göttingen, 1894.
A. R. Forsyth, Theory of differential equations, IV, 1902.
T. Craig, Differential equations, New York, 1889.
Э. Гурса, Курс математического анализа, ОНТИ, 1936.
В. В. Голубев, Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, Гостехиздат, 1950.
Э. А. Коддингтон и Н. Левинсон, Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, ИЛ, 1958.

Примеры

1. Показать, что уравнение

$$\frac{d^2u}{dz^2}+zu=0$$

имеет решения $z-\frac{1}{12}z^4+\ldots$, $1-\frac{1}{6}z^3+\ldots$, а также исследовать область сходимости этих рядов.

2. Получить интегралы уравнения

$$\frac{d^2u}{dz^2}+\frac{1}{4z^2}(1-z^2)u=0,$$

правильные вблизи $z=0$, в форме

$$u_1=z^{\frac{1}{2}}\left\{1+\frac{z^2}{16}+\frac{z^4}{1024}+\ldots\right\},$$

$$u_2=u_1\lg z-\frac{z^{\frac{3}{2}}}{16}+\ldots$$

3. Показать, что уравнение

$$\frac{d^2u}{dz^2}+\left(n+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}z^2\right)u=0$$

имеет решения

$$1-\frac{2n+1}{4}z^2+\frac{4n^2+4n+3}{96}z^4-\ldots,$$

$$z-\frac{2n+1}{12}z^3+\frac{4n^2+4n+7}{480}z^5-\ldots$$

и что эти ряды сходятся для всех значений z.

4. Показать, что уравнение

$$\frac{d^2u}{dz^2}+\left\{\sum_{r=1}^{n}\frac{1-\alpha_r-\beta_r}{z-a_r}\right\}\frac{du}{dz}+\left\{\sum_{r=1}^{n}\frac{\alpha_r\beta_r}{(z-a_r)^2}+\sum_{r=1}^{n}\frac{D_r}{z-a_r}\right\}u=0,$$

где

$$\sum_{r=1}^{n}(\alpha_r+\beta_r)=n-2,\quad \sum_{r=1}^{n}D_r=0,\quad \sum_{r=1}^{n}(a_rD_r+\alpha_r\beta_r)=0,$$

$$\sum_{r=1}^{n}(a_r^2D_r+2a_r\alpha_r\beta_r)=0,$$

является наиболее общим уравнением, для которого все точки (включая ∞), кроме точек $a_1, a_2, \ldots, a_n$, будут обыкновенными, а точки a_r будут правильными точками с показателями α_r, β_r соответственно.

(Klein)

5. Показать, что при $\beta+\gamma+\beta'+\gamma'=\frac{1}{2}$

$$P\left\{\begin{matrix} 0 & \infty & 1 & \\ 0 & \beta & \gamma & z^2 \\ \frac{1}{2} & \beta' & \gamma' & \end{matrix}\right\}=P\left\{\begin{matrix} -1 & \infty & 1 & \\ \gamma & 2\beta & \gamma & z \\ \gamma' & 2\beta' & \gamma' & \end{matrix}\right\}.$$

(Riemann)

[Дифференциальное уравнение в обоих случаях будет

$$\frac{d^2u}{dz^2}+\frac{2z(1-\gamma-\gamma')}{z^2-1}\frac{du}{dz}+\left\{\beta\beta'+\frac{\gamma\gamma'}{z^2-1}\right\}\frac{4u}{z^2-1}=0.\Big]$$

6. Показать, что если $\gamma+\gamma'=\frac{1}{3}$ и ω, ω^2 — комплексные кубичные корни из единицы, то

$$P\left\{\begin{matrix} 0 & \infty & 1 & \\ 0 & 0 & \gamma & z^3 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \gamma' & \end{matrix}\right\}=P\left\{\begin{matrix} 1 & \omega & \omega^2 & \\ \gamma & \gamma & \gamma & z \\ \gamma' & \gamma' & \gamma' & \end{matrix}\right\}.$$

(Riemann)

[Дифференциальное уравнение в обоих случаях будет

$$\frac{d^2u}{dz^2}+\frac{2z^2}{z^3-1}\frac{du}{dz}+\frac{9\gamma\gamma' zu}{(z^3-1)^2}=0.\Big]$$

7. Показать, что уравнение

$$(1-z^2)\frac{d^2u}{dz^2}-(2a+1)z\frac{du}{dz}+n(n+2a)u=0$$

определяется схемой

$$P\left\{\begin{matrix} 1 & \infty & -1 & \\ 0 & -n & 0 & z \\ \frac{1}{2}-a & n+2a & \frac{1}{2}-a & \end{matrix}\right\},$$

и что уравнение

$$(1+\zeta^2)^2 \frac{d^2u}{d\zeta^2} + n(n+2)u = 0$$

можно получить из него, положив $a = 1$ и произведя замену независимой переменной.

(Halm)

8. Рассмотреть решения уравнения

$$z\frac{d^2u}{dz^2} + (z+1+m)\frac{du}{dz} + \left(n+1+\frac{1}{2}m\right)u = 0,$$

годные вблизи $z = 0$, и решения, годные вблизи $z = \infty$.

(Cunningham)

9. Рассмотреть решения уравнения

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{2\mu}{z}\frac{du}{dz} - 2z\frac{du}{dz} + 2z(\nu-\mu)u = 0,$$

годные вблизи $z = 0$, и решения, годные вблизи $z = \infty$.

Рассмотреть следующие частные случаи:

$$\text{(I)}\ \mu = -\frac{3}{2}, \quad \text{(II)}\ \mu = \frac{1}{2}, \quad \text{(III)}\ \mu + \nu = 3.$$

(Curzon)

10. Доказать, что уравнение

$$z(1-z)\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{1}{2}(1-2z)\frac{du}{dz} + (az+b)u = 0$$

имеет два частных интеграла, произведение которых есть однозначная трансцендентная функция. При каких обстоятельствах эти два частных интеграла совпадают? Обозначив их произведение через $F(z)$, доказать, что частные интегралы будут

$$u_1, u_2 = \{F(z)\}^{\frac{1}{2}} \exp\left\{\pm C\int^z \frac{dz}{F(z)\sqrt{z(1-z)}}\right\},$$

где C — определенная постоянная. (Lindemann; см. § 19.5).

11. Доказать, что общее линейное дифференциальное уравнение третьего порядка, особые точки которого суть 0, 1, ∞ и которое имеет все свои интегралы правильными вблизи каждой особой точки (причем показатели в каждой особой точке будут 1, 1, —1), будет

$$\frac{d^3u}{dz^3} + \left\{\frac{2}{z} + \frac{2}{z-1}\right\}\frac{d^2u}{dz^2} - \left\{\frac{1}{z^2} - \frac{3}{z(z-1)} + \frac{1}{(z-1)^2}\right\}\frac{du}{dz} +$$
$$+ \left\{\frac{1}{z^3} - \frac{3\cos^2\alpha}{z^2(z-1)} - \frac{3\sin^2\alpha}{z(z-1)^2} + \frac{1}{(z-1)^3}\right\}u = 0,$$

где α может иметь любое постоянное значение.

(Math. Trip., 1912)

ГЛАВА 11

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

11.1. Определение интегрального уравнения

Уравнение называется интегральным, если неизвестная функция содержится под знаком интеграла. Определение неизвестной функции называется решением уравнения[1]).

Введение интегральных уравнений в анализ принадлежит Лапласу (1782), который рассматривал уравнения

$$f(x)=\int e^{xt}\varphi(t)\,dt, \qquad g(x)=\int t^{x-1}\varphi(t)\,dt$$

(где в обоих случаях φ представляет собой неизвестную функцию) в связи с решением дифференциальных уравнений. Первым интегральным уравнением, решение которого было получено, было уравнение Фурье

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\cos xt\,\varphi(t)\,dt.$$

Его решением[2]) при известных обстоятельствах будет

$$\varphi(x)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\cos ux\,f(u)\,du;$$

$f(x)$ должна быть четной функцией от x, так как $\cos xt$ — четная функция.

Позже Абель[3]) пришел к интегральному уравнению в связи с одной механической задачей и получил два его решения; после этого Лиувилль исследовал интегральное уравнение, которое воз-

---

[1]) Исключая случай интеграла Фурье (§ 9.7), мы практически *всегда* нуждаемся в *непрерывных* решениях интегральных уравнений.

[2]) Действительно, если это значение для φ подставить в уравнение, то получится формула, доказанная в § 9.7.

[3]) Abel, Solution de quelques problèmes à l'aide d'intégrales définies, 1823. См. Oeuvres, 1, 11—97.

никло в процессе его занятий дифференциальными уравнениями, и открыл важный способ решения интегральных уравнений[1]), рассматриваемый нами в § 11.4.

В последние годы интегральные уравнения приобрели большое значение в различных отраслях математики; в такие уравнения (в физических проблемах) часто входят кратные интегралы, и исследование их, естественно, представляет бо́льшие трудности по сравнению с исследованием элементарных уравнений, которые будут рассмотрены в этой главе.

Для облегчения изложения мы предположим, что постоянные a, b и переменные x, y, ξ вещественны и, далее, что $a \leqslant x, y, \xi \leqslant b$. Заданная функция[2]) $K(x, y)$, встречающаяся под знаком интеграла, в большинстве рассматриваемых уравнений будет вещественной функцией от x и y и или (I) непрерывной функцией обеих переменных в области ($a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant y \leqslant b$), или (II) непрерывной функцией обеих переменных в области $a \leqslant y \leqslant x \leqslant b$ и нулем при $y > x$; в последнем случае $K(x, y)$ имеет правильно распределенные разрывы, и в обоих случаях легко доказать, что если $f(y)$ — непрерывная функция при $a \leqslant y \leqslant b$, то $\int\limits_a^b f(y) K(x, y)\, dy$ будет непрерывной функцией от x при $a \leqslant x \leqslant b$.

11.11. Алгебраическая лемма

Предложение алгебраического характера, которое мы сейчас получим, играет большую роль в теории интегральных уравнений Фредгольма.

Пусть (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) — три точки, находящиеся на расстоянии единица от начала координат. Наибольшее (по абсолютной величине) значение объема параллелепипеда, построенного на отрезках, соединяющих начало с данными точками, равно $+1$, причем ребра будут тогда перпендикулярны. Поэтому, если $x_r^2 + y_r^2 + z_r^2 = 1$ $(r = 1, 2, 3)$, то верхняя и нижняя границы определителя

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

равны ± 1.

---

[1]) Численное вычисление решений интегральных уравнений было исследовано в последнее время Уиттекером (Whittaker, Proc. Royal Soc., XCIV, (A), 367—383 (1918)).

[2]) Бохер в своей важной работе по интегральным уравнениям (Bôcher, Camb. Math. Tracts, № 10) всегда рассматривает более общий случай, в котором разрывы $K(x, y)$ *распределены правильно*, т. е. разрывы имеют характер, описанный в примере 11 гл. 4. Читатель увидит из указанного примера, что почти все результаты этой главы могут быть обобщены и на случай любого правильного распределения. Чтобы сделать эту главу более простой, мы не будем рассматривать таких обобщений.

Лемма, принадлежащая Адамару [1]), обобщает этот результат: Пусть

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = D,$$

где элементы a_{mr} вещественны и $\sum_{r=1}^{n} a_{mr}^2 = 1$ $(m = 1, 2, \dots, n)$; пусть A_{mr} — дополнение элемента a_{mr} в D, и пусть Δ — определитель, элементы которого суть A_{mr}; тогда по известной теореме [2])

$$\Delta = D^{n-1}.$$

Так как D является непрерывной функцией своих элементов и, следовательно, будет ограниченной, то к ней применима обычная теория максимума и минимума. Если мы заставим изменяться только a_{1r} $(r = 1, 2, \dots, n)$, то D будет стационарной при таких изменениях, когда $\sum_{r=1}^{n} \frac{\partial D}{\partial a_{1r}} \delta a_{1r} = 0$, причем вариации δa_{1r} подчинены только одному условию $\sum_{r=1}^{n} a_{1r} \delta a_{1r} = 0$, поэтому [3])

$$A_{1r} = \frac{\partial D}{\partial a_{1r}} = \lambda a_{1r};$$

но

$$\sum_{r=1}^{n} a_{1r} A_{1r} = D,$$

следовательно,

$$\lambda \sum_{r=1}^{n} a_{1r}^2 = D$$

и

$$A_{1r} = D a_{1r}.$$

Рассматривая изменения других элементов определителя D, мы видим, что D будет стационарным при изменении всех элементов, когда $A_{mr} = D a_{mr}$ $(m = 1, 2, \dots n;\ r = 1, 2, \dots n)$. Следовательно, $\Delta = D^n D$, откуда $D^{n+1} = D^{n-1}$. Отсюда следует, что максимальное и минимальное значения D будут ± 1.

Следствие. Если a_{mr} вещественны и подчинены только условию $|a_{mr}| < M$, то из неравенства

$$\sum_{r=1}^{n} \left(\frac{a_{mr}}{n^{1/2} M} \right)^2 \leqslant 1$$

---

[1]) Hadamard, Bulletin des Sci. Math. (2), XVII, 240 (1893).

[2]) Burnside and Panton, Theory of equations, II, 40. (См. также Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц, Гостехиздат, 1954. — *Прим. ред.*)

[3]) По обычной теории множителей Лагранжа.

легко видеть, что максимальное значение $|D|$ равно

$$\left(n^{\frac{1}{2}}M\right)^n = n^{\frac{1}{2}n}M^n.$$

11.2. Уравнение Фредгольма[1]) и его предполагаемое решение

Важным интегральным уравнением общего типа является уравнение

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, \xi)\varphi(\xi)\,d\xi,$$

где $f(x)$ — заданная непрерывная функция, λ — параметр (в общем случае комплексный), а $K(x, \xi)$ подчиняется условиям[2]), указанным в § 11.1. $K(x, \xi)$ называется *ядром* (nucleus)[3]) уравнения. Это интегральное уравнение известно под названием *уравнения Фредгольма* или *интегрального уравнения второго рода* (см. § 11.3). Вольтерра заметил, что уравнение этого типа можно рассматривать как предельный случай системы линейных уравнений. В своем исследовании Фредгольм эвристически проводит подобный предельный процесс, а затем проверяет результат рассуждениями, приводимыми ниже, в § 11.21. Гильберт (Hilbert, Göttinger Nach., 49—91 (1904)) обосновал предельный процесс непосредственно.

Мы приступим теперь к рассмотрению системы линейных уравнений и исследуем затем способ Фредгольма для оправдания перехода к пределу.

Интегральное уравнение является предельной формой при $\delta \to 0$ уравнения

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{q=1}^{n} K(x, x_q)\,\varphi(x_q)\,\delta,$$

где $x_q - x_{q-1} = \delta$, $x_0 = a$, $x_n = b$.

---

[1]) Первая работа Фредгольма (Fredholm) по этому вопросу появилась в «Öfversigt af K. Vetenskaps-Akad. Förhandlingar», LVII, 39—46 (1900). Его изыскания напечатаны также в «Acta Math.», XXVII, 365—390 (1903).

[2]) Читатель заметит, что если $K(x, \xi) = 0$ $(\xi > x)$, то уравнение может быть переписано в виде

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, \xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi.$$

Такое уравнение называется уравнением *с переменным верхним пределом*.

[3]) По-английски также kernel, по-французски noyau, по-немецки Kern.