

Д.Т. Уиттекер, Дж.Н. Ватсон

КУРС
СОВРЕМЕННОГО
АНАЛИЗА

$\overline{\phi M}$

A COURSE OF MODERN ANALYSIS

AN INTRODUCTION TO THE GENERAL THEORY
OF INFINITE PROCESSES AND OF ANALYTIC
FUNCTIONS; WITH AN ACCOUNT OF THE
PRINCIPAL TRANSCENDENTAL FUNCTIONS

BY

E. T. WHITTAKER, Sc. D., F. R. S.

Professor of Mathematics in the University of Edinburgh

AND

G. N. WATSON, Sc. D., F. R. S.

Professor of Mathematics in the University of Birmingham

FOURTH EDITION

CAMBRIDGE
AT THE UNIVERSITY PRESS

1927

Э. Т. УИТТЕКЕР и Дж. Н. ВАТСОН

КУРС
СОВРЕМЕННОГО
АНАЛИЗА

ЧАСТЬ ВТОРАЯ
ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ
ФУНКЦИИ

ПЕРЕВОД С АНГЛИЙСКОГО
ПОД РЕДАКЦИЕЙ Ф. В. ШИРОКОВА

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1963

СОДЕРЖАНИЕ

Г л а в а 12. Гамма-функция	13
12.1. Определение гамма-функции. Произведение Вейерштрасса	13
12.11. Формула Эйлера для гамма-функции	16
12.12. Уравнение в конечных разностях для гамма-функции	16
12.13. Вычисление некоторых бесконечных произведений	18
12.14. Связь между гамма-функцией и тригонометрическими функциями	19
12.15. Теорема умножения Гаусса и Лежандра	20
12.16. Разложения для логарифмических производных гамма-функций	21
12.2. Интегральное представление Эйлера для $\Gamma(z)$	22
12.21. Распространение интегрального представления гамма-функции на случай отрицательного аргумента	25
12.22. Представление Ханкеля функции $\Gamma(z)$ в виде контурного интеграла	26
12.3. Интегральное представление Гаусса для логарифмической производной от гамма-функции	29
12.31. Первое интегральное представление Бине для $\lg \Gamma(z)$	32
12.32. Второе интегральное представление Бине для $\lg \Gamma(z)$	35
12.33. Асимптотическое разложение логарифма гамма-функции (ряд Стирлинга)	37
12.4. Интеграл Эйлера первого рода	40
12.41. Выражение интеграла Эйлера первого рода через гамма-функцию	42
12.42. Выражение интегралов от тригонометрических функций через гамма-функции	44
12.43. Обобщение интеграла Эйлера первого рода (Похгаммер)	44
12.5. Интеграл Дирихле	46
Литература	48
Примеры	48
Г л а в а 13. Дзета-функция Римана	58
13.1. Определение дзета-функции	58
13.11. Обобщенная дзета-функция	58
13.12. Представление функции $\zeta(s, a)$ в виде несобственного интеграла	59
13.13. Представление функции $\zeta(s, a)$ в виде интеграла по контуру	60
13.14. Значение функции $\zeta(s, a)$ для частных значений s	61
13.15. Формула Гурвица для функции $\zeta(s, a)$, когда $s < 0$	62
13.151. Соотношение Римана между $\zeta(s)$ и $\zeta(1 - s)$	63
13.2. Формула Эрмита для $\zeta(s, a)$	64

13.21. Следствия из формулы Эрмита	66
13.3. Бесконечное произведение Эйлера для $\zeta(s)$	67
13.31. Гипотеза Римана относительно нулей функции $\zeta(s)$	68
13.4. Интеграл Римана для $\zeta(s)$	68
13.5. Неравенства, которым удовлетворяет функция $\zeta(s, a)$ при $s > 0$	71
13.51. Неравенства, которым удовлетворяет функция $\zeta(s, a)$ при $s \leq 0$	72
13.6. Асимптотическое разложение функции $\lg \Gamma(z + a)$	74
Литература	78
Примеры	78
Г л а в а 14. Гипергеометрическая функция	81
14.1. Гипергеометрический ряд	81
14.11. Значение функции $F(a, b; c; 1)$ при $\operatorname{Re}(c - a - b) > 0$	82
14.2. Дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция $F(a, b; c; z)$	83
14.3. Решения P -уравнения Римана при помощи гипергеометрических функций	84
14.4. Соотношения между частными решениями гипергеометрического уравнения	86
14.5. Контурные интегралы Барнса для гипергеометрической функции	88
14.51. Аналитическое продолжение гипергеометрического ряда	90
14.52. Лемма Барнса	91
14.53. Связь между гипергеометрическими функциями от z и от $1 - z$	93
14.6. Решение уравнения Римана при помощи интеграла по контуру	94
14.61. Нахождение интеграла, представляющего $P^{(2)}$	97
14.7. Соотношения между смежными гипергеометрическими функциями	98
Литература	101
Примеры	101
Г л а в а 15. Функции Лежандра	109
15.1. Определение полиномов Лежандра	109
15.11. Формула Родрига для полиномов Лежандра	111
15.12. Интеграл Шлефли для $P_n(z)$	111
15.13. Дифференциальное уравнение Лежандра	111
15.14. Интегральные свойства полиномов Лежандра	113
15.2. Функции Лежандра	114
15.21. Рекуррентные формулы	116
15.211. Разложение любого полинома по полиномам Лежандра	119
15.22. Представление Мерфи функции $P_n(z)$ в виде гипергеометрической функции	121
15.23. Интегралы Лапласа для $P_n(z)$	123
15.231. Интеграл Мелера — Дирихле для $P_n(z)$	127
15.3. Функции Лежандра второго рода	129
15.31. Разложение функции $Q_n(z)$ в степенной ряд	130
15.32. Рекуррентные формулы для $Q_n(z)$	132
15.33. Интеграл Лапласа для функций Лежандра второго рода	133
15.34. Формула Неймана для $Q_n(z)$, когда n — целое число	135
15.4. Разложение Гейне для функции $(t - z)^{-1}$ в ряд по полиномам Лежандра	136

15.41.	Разложение Неймана для произвольной функции в ряд по полиномам Лежандра	138
15.5.	Присоединенные лежандровы функции $P_n^m(z)$ и $Q_n^m(z)$ Феррерса	140
15.51.	Интегральные свойства присоединенных функций Лежандра	141
15.6.	Определение Гобсона присоединенных функций Лежандра	143
15.61.	Выражение функции $P_n^m(z)$ через интеграл типа Лапласа	144
15.7.	Теорема сложения для полиномов Лежандра	145
15.71.	Теорема сложения для функций Лежандра	147
15.8.	Функция $C_n^v(z)$	149
	Литература	150
	Примеры	151
Г л а в а 16. Вырожденная гипергеометрическая функция		162
16.1.	Слияние двух особых точек уравнения Римана	162
16.11.	Формулы Куммера	163
16.12.	Определение функции $W_{k, m}(z)$	165
16.2.	Выражение различных функций через функции типа $W_{k, m}(z)$	167
16.3.	Асимптотическое разложение функции $W_{k, m}(z)$ при $ z $ большом	169
16.31.	Второе решение дифференциального уравнения для функции $W_{k, m}(z)$	171
16.4.	Контурные интегралы типа Меллина — Барнса (Mellin — Barnes) для $W_{k, m}(z)$	171
16.41.	Соотношения между $W_{k, m}(z)$ и $M_{k, \pm m}(z)$	174
16.5.	Функции параболического цилиндра. Уравнение Вебера	176
16.51.	Второе решение уравнения Вебера	177
16.511.	Соотношение между функциями $D_n(z)$, $D_{-n-1}(\pm iz)$	178
16.52.	Общее асимптотическое разложение для функции $D_n(z)$	178
16.6.	Контурный интеграл для функции $D_n(z)$	179
16.61.	Рекуррентные формулы для функции $D_n(z)$	181
16.7.	Свойства функции $D_n(z)$, когда n — целое число	181
	Литература	182
	Примеры	183
Г л а в а 17. Функции Бесселя		188
17.1.	Коэффициенты Бесселя	188
17.11.	Дифференциальное уравнение Бесселя	191
17.2.	Решение уравнения Бесселя при любом комплексном n	192
17.21.	Рекуррентные формулы для функций Бесселя	193
17.211.	Соотношение между двумя функциями Бесселя, порядки которых отличаются на целое число	195
17.212.	Связь между функциями $J_n(z)$ и $W_{k, m}$	195
17.22.	Нули функций Бесселя, порядок которых n вещественный	196
17.23.	Интеграл Бесселя для коэффициентов Бесселя	197
17.231.	Видоизменение интеграла Бесселя, когда n не целое число	198
17.24.	Функции Бесселя, порядок которых равен половине нечетного целого числа	200
17.3.	Контурный интеграл Ханкеля для функции $J_n(z)$	202
17.4.	Связь между коэффициентами Бесселя и функциями Лежандра	205
17.5.	Асимптотический ряд для функции $J_n(z)$, когда $ z $ велик	206
17.6.	Второе решение уравнения Бесселя, когда порядок — целое число	209

17.61.	Ряд для функции $Y_n(z)$ при малых z	211
17.7.	Функции Бесселя с чисто мнимым аргументом	213
17.71.	Модифицированные функции Бесселя второго рода	214
17.8.	Разложение Неймана аналитической функции в ряд по коэффициентам Бесселя	215
17.81.	Доказательство разложения Неймана	217
17.82.	Разложение Шлёмильха произвольной функции по функциям Бесселя нулевого порядка	219
17.9.	Составление таблиц функций Бесселя	221
	Литература	221
	Примеры	222
Г л а в а 18. Уравнения математической физики		233
18.1.	Дифференциальные уравнения математической физики	233
18.2.	Границные условия	234
18.3.	Общее решение уравнения Лапласа	236
18.31.	Решение уравнения Лапласа с помощью функций Лежандра	240
18.4.	Решение уравнения Лапласа, удовлетворяющее определенным граничным условиям на поверхности сферы	242
18.5.	Решение уравнения Лапласа в бесселевых функциях целого порядка	245
18.51.	Периоды колебания однородной мембранны	246
18.6.	Общее решение волнового уравнения	247
18.61.	Решение волнового уравнения в функциях Бесселя	248
18.611.	Приложение результатов § 18.61 к одной физической задаче	250
	Литература	250
	Примеры	250
Г л а в а 19. Функции Матье		257
19.1.	Дифференциальное уравнение Матье	257
19.11.	Форма решения уравнения Матье	259
19.12.	Уравнение Хилла	260
19.2.	Периодические решения уравнения Матье	260
19.21.	Интегральное уравнение, которому удовлетворяют четные функции Матье	261
19.22.	Доказательство того, что четные функции Матье удовлетворяют интегральному уравнению	262
19.3.	Построение функций Матье	264
19.31.	Интегральные формулы для функций Матье	267
19.4.	Характер решения общего уравнения Матье; теория Флоке	267
19.41.	Метод решения Хилла	269
19.42.	Вычисление определителя Хилла	271
19.5.	Теория Линдемана — Стильеса, относящаяся к общему уравнению Матье	274
19.51.	Форма Линдемана теоремы Флоке	274
19.52.	Определение целой функции, связанной с общим уравнением Матье	275
19.53.	Решение уравнения Матье с помощью функции $F(\zeta)$	277
19.6.	Второй метод построения функции Матье	278
19.61.	Сходимость рядов, определяющих функции Матье	281
19.7.	Метод замены параметра	284
19.8.	Асимптотическое решение уравнения Матье	285
	Литература	286
	Примеры	287

Г л а в а 20. Эллиптические функции. Общие теоремы и функции Вейерштрасса	290
20.1. Двоякоперiodические функции	290
20.11. Параллелограммы периодов	291
20.12. Простые свойства эллиптических функций	292
20.13. Порядок эллиптической функции	293
20.14. Соотношение между нулями и полюсами эллиптической функции	294
20.2. Построение эллиптической функции. Определение функции $\wp(z)$	295
20.21. Периодичность и другие свойства функции $\wp(z)$	297
20.22. Дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция $\wp(z)$	299
20.221. Интегральная формула для $\wp(z)$	301
20.222. Иллюстрация из теории тригонометрических функций	301
20.3. Теорема сложения для функции $\wp(z)$	304
20.31. Другая форма теоремы сложения	305
20.311. Формула удвоения для $\wp(z)$	306
20.312. Метод Абеля доказательства теоремы сложения для $\wp(z)$	307
20.32. Постоянные e_1, e_2, e_3	308
20.33. Прибавление полупериода к аргументу функции $\wp(z)$	310
20.4. Квазипериодические функции. Функция $\zeta(z)$	311
20.41. Квазипериодичность функции $\zeta(z)$	312
20.411. Соотношение между η_1 и η_2	313
20.42. Функция $\sigma(z)$	313
20.421. Квазипериодичность функции $\sigma(z)$	314
20.5. Формулы, выражающие любую эллиптическую функцию через функции Вейерштрасса с теми же периодами	315
20.51. Выражение любой эллиптической функции через функции $\wp(z)$ и $\wp'(z)$	315
20.52. Выражение любой эллиптической функции через линейную комбинацию из дзета-функции и ее производных	317
20.53. Выражение любой эллиптической функции в виде отношения сигма-функций	318
20.54. Связь между любыми двумя эллиптическими функциями с одинаковыми периодами	320
20.6. Об интегрировании функции $\{a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + \dots + 4a_3x + a_4\}^{-\frac{1}{2}}$	321
20.7. Униформизация кривых рода единица	324
Литература	325
Примеры	325
Г л а в а 21. Тэта-функции	334
21.1. Определение тэта-функции	334
21.11. Четыре типа тэта-функций	336
21.12. Нули тэта-функций	338
21.2. Соотношения между квадратами тэта-функций	339
21.21. Формулы сложения для тэта-функций	340
21.22. Основные формулы Якоби	341
21.3. Выражения Якоби для тэта-функций через бесконечные произведения	343
21.4. Дифференциальное уравнение, которому удовлетворяют тэта-функции	345
21.41. Соотношение между тэта-функциями нулевого аргумента	345

21.42.	Значение постоянной G	348
21.43.	Связь сигма-функции с тэта-функциями	349
21.5.	Выражение эллиптических функций при помощи тэта-функций	350
21.51.	Мнимое преобразование Якоби	351
21.52.	Преобразование типа Ландена	354
21.6.	Дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют отношения тэта-функций	354
21.61.	Генезис эллиптической функции Якоби $sn u$	356
21.62.	Более раннее обозначение Якоби. Тэта-функция $\Theta(u)$ и тэта-функция $H(u)$	358
21.7.	Задача обращения	359
21.71.	Задача обращения для комплексных значений c . Модулярные функции $f(\tau), g(\tau), h(\tau)$	360
21.711.	Главное решение уравнения $f(\tau) - c = 0$	361
21.712.	Значения модулярной функции $f(\tau)$ на рассмотренном выше контуре	363
21.72.	Периоды, рассматриваемые как функции модулей	364
21.73.	Задача обращения, связанная с эллиптическими функциями Вейерштрасса	364
21.8.	Вычисление эллиптических функций	366
21.9.	Обозначения, применяемые для тэта-функций	368
	Литература	368
	Примеры	369
Г л а в а 22. Эллиптические функции Якоби		374
22.1.	Эллиптические функции с двумя простыми полюсами	374
22.11.	Эллиптические функции Якоби $sn u, cn u, dn u$	375
22.12.	Простые свойства функций $sn u, cn u, dn u$	377
22.121.	Дополнительный модуль	377
22.122.	Обозначение Глешера для отношений	378
22.2.	Теорема сложения для функции $sn u$	379
22.21.	Теоремы сложения для $sn u$ и $dn u$	382
22.3.	Постоянная K	384
22.301.	Выражение K через k	384
22.302.	Эквивалентность определений K	385
22.31.	Свойства периодичности (связанные с K) эллиптических функций Якоби	387
22.32.	Постоянная K'	387
22.33.	Свойства периодичности (связанные с $K + iK'$) эллиптических функций Якоби	390
22.34.	Свойства периодичности (связанные с iK') эллиптических функций Якоби	391
22.341.	Поведение эллиптических функций Якоби в окрестности начала координат и в окрестности iK'	392
22.35.	Общее описание функций $sn u, cn u, dn u$	392
22.351.	Связь между эллиптическими функциями Вейерштрасса и Якоби	393
22.4.	Мнимое преобразование Якоби	394
22.41.	Доказательство мнимого преобразования Якоби при помощи тэта-функций	395
22.42.	Преобразование Ландена	396
22.421.	Преобразование эллиптических функций	398
22.5.	Бесконечные произведения для эллиптических функций Якоби	398
22.6.	Ряды Фурье для эллиптических функций Якоби	401

22.61. Ряды Фурье для обратных величин эллиптических функций Якоби	403
22.7. Эллиптические интегралы	404
22.71. Представление полинома четвертой степени в виде произведения двух сумм квадратов	406
22.72. Три рода эллиптических интегралов	407
22.73. Эллиптический интеграл второго рода. Функция $E(u)$	410
22.731. Дзета-функция $Z(u)$	412
22.732. Формулы сложения для $E(u)$ и $Z(u)$	413
22.733. Минимое преобразование Якоби для функции $Z(u)$	414
22.734. Минимое преобразование Якоби для функции $E(u)$	414
22.735. Соотношение Лежандра	415
22.736. Свойства полных эллиптических интегралов, рассматривающих как функции модуля	416
22.737. Значения полных интегралов для малых значений k	417
22.74. Эллиптический интеграл третьего рода	418
22.741. Динамическое приложение эллиптического интеграла третьего рода	420
22.8. Лемнискатные функции	420
22.81. Значения K и K' для частных значений k	422
22.82. Геометрическое толкование функций $sn u$, $cn u$, $dn u$	426
Литература	426
Примеры	427

Г л а в а 23. Эллипсоидальные гармонические функции и уравнение Ламе	439
23.1. Определение эллипсоидальных гармонических функций	439
23.2. Четыре вида эллипсоидальных гармонических функций	440
23.21. Построение эллипсоидальных гармонических функций первого вида	441
23.22. Эллипсоидальные гармонические функции второго вида	445
23.23. Эллипсоидальные гармонические функции третьего вида	446
23.24. Эллипсоидальные гармонические функции четвертого вида	447
23.25. Выражение Нивена для эллипсоидальных гармонических функций через однородные гармонические функции	448
23.26. Эллипсоидальные гармонические функции степени n	453
23.3. Эллипсоидальные координаты	454
23.31. Униформизирующие переменные, связанные с эллипсоидальными координатами	457
23.32. Уравнение Лапласа в эллипсоидальных координатах	459
23.33. Эллипсоидальные гармонические функции в эллипсоидальных координатах	461
23.4. Различные формы дифференциального уравнения Ламе	463
23.41. Решения уравнения Ламе в виде рядов	465
23.42. Определение функций Ламе	468
23.43. Об отсутствии кратных корней у функций Ламе	469
23.44. Линейная независимость функций Ламе	469
23.45. Линейная независимость эллипсоидальных гармонических функций	470
23.46. Теорема Стильбеса о нулях функций Ламе	471
23.47. Функции Ламе второго рода	473
23.5. Уравнение Ламе в связи с эллиптическими функциями Якоби	475
23.6. Интегральное уравнение, которому удовлетворяют функции Ламе первого и второго вида	476

23.61.	Интегральное уравнение, которому удовлетворяют функции Ламе третьего и четвертого вида	478
23.62.	Интегральные формулы для эллипсоидальных гармонических функций	479
23.63.	Интегральные формулы для эллипсоидальных гармонических функций третьего и четвертого вида	482
23.7.	Обобщения уравнения Ламе	483
23.71.	Форма Якоби обобщенного уравнения Ламе	487
	Литература	490
	Примеры	490
	Именной указатель	495
	Предметный указатель	500

ГЛАВА 12
ГАММА-ФУНКЦИЯ

**12.1. Определение гамма-функции.
Произведение Вейерштраса**

Гамма-функция¹⁾ $\Gamma(z)$ впервые была определена Эйлером как предел произведения (§ 12.11), из которого можно получить интеграл $\int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$, но для изложения теории этой функции удобнее определять ее посредством бесконечного произведения в канонической форме Вейерштрасса.

Рассмотрим бесконечное произведение

$$ze^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}} \right\},$$

где

$$\gamma = \lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m} - \lg m \right\} = 0,5772157\dots$$

[Постоянная γ известна под названием постоянной Эйлера или Маскерони (Mascheroni). Ее существование вытекает из следующего: если

$$u_n = \int_0^1 \frac{t}{n(n+t)} dt = \frac{1}{n} - \lg \frac{n+1}{n},$$

то u_n будет положительным и меньшим, чем $\int_0^1 \frac{dt}{n^2} = \frac{1}{n^2}$; поэтому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m} - \lg m \right\} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{n=1}^m u_n + \lg \frac{m+1}{m} \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

¹⁾ Обозначение $\Gamma(z)$ было введено Лежандром в 1814 г.

Значение γ было вычислено Адамсом (J. C. Adams) с 260 десятичными знаками].

Рассматриваемое произведение представляет аналитическую функцию от z для всех значений z ; ибо если N — такое целое число, что $|z| \leq \frac{1}{2}N$, то при $n > N$ мы имеем¹⁾

$$\begin{aligned} \left| \lg\left(1 + \frac{z}{n}\right) - \frac{z}{n} \right| &= \left| -\frac{1}{2} \frac{z^2}{n^2} + \frac{1}{3} \frac{z^3}{n^3} - \dots \right| \leq \\ &\leq \frac{|z|^2}{n^2} \left\{ 1 + \left| \frac{z}{n} \right| + \left| \frac{z^2}{n^2} \right| + \dots \right\} \leq \\ &\leq \frac{1}{4} \frac{N^2}{n^2} \left\{ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots \right\} \leq \frac{1}{2} \frac{N^2}{n^2}. \end{aligned}$$

Так как ряд $\sum_{n=N+1}^{\infty} \{N^2/(2n^2)\}$ сходится, то при $|z| \leq \frac{1}{2}N$ ряд

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \left\{ \lg\left(1 + \frac{z}{n}\right) - \frac{z}{n} \right\}$$

будет абсолютно и равномерно сходящимся рядом аналитических функций и, следовательно, сам будет представлять аналитическую функцию (§ 5.3, часть I). Взяв e с показателем степени, равным этому ряду, находим (§ 5.3, часть I), что бесконечное произведение

$$\prod_{n=N+1}^{\infty} \left\{ \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}} \right\},$$

а потому и бесконечное произведение

$$ze^{rz} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}} \right\}$$

будут аналитическими функциями при $|z| \leq \frac{1}{2}N$, где N — произвольное целое число. Иначе говоря, последнее произведение будет аналитической функцией для всех конечных значений z .

Гамма-функция была определена Вейерштрасом²⁾ с помощью равенства

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{rz} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}} \right\}.$$

¹⁾ Беря главное значение $\lg\left(1 + \frac{z}{n}\right)$.

²⁾ Journ. für Math. LI (1856). Эта формула для $\Gamma(z)$ была получена из формулы Эйлера (см. § 12.11) в 1848 г. Ньюманом (Newmann F. W., Cambridge and Dublin Math. Journ., III (1848), 60).

Из этого равенства ясно, что функция $\Gamma(z)$ аналитична всюду, за исключением точек $z = 0, -1, -2, \dots$, в которых она имеет простые полюсы.

Гельдером¹⁾, Муром²⁾ и Барисом³⁾ были опубликованы доказательства теоремы, известной еще Вейерштрассу, что гамма-функция не может удовлетворять никакому дифференциальному уравнению с рациональными коэффициентами.

Пример 1. Доказать, что

$$\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma'(1) = -\gamma,$$

где γ есть постоянная Эйлера.

[Продифференцируйте логарифмически равенство

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}} \right\}$$

(§ 4.7, часть I) и подставьте в результат $z = 1$.]

Пример 2. Показать, что

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{1 - (1-t)^n}{t} dt,$$

и, исходя отсюда, доказать, что постоянная Эйлера равна пределу⁴⁾

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\int_0^1 \left\{ 1 - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right\} \frac{dt}{t} - \int_1^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \frac{dt}{t} \right].$$

Пример 3. Показать, что

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1 - \frac{x}{z+n}\right) e^{\frac{x}{z+n}} \right\} = \frac{e^{ix} \Gamma(z+1)}{\Gamma(z-x+1)}.$$

¹⁾ Hölder, Math. Ann., XXVIII (1887), 1—13.

²⁾ Moore, Math. Ann., XLVIII (1897), 70—74.

³⁾ Barnes, Messenger of Math., XXIX, (1900), 122—128.

⁴⁾ Читатель увидит ниже (§ 12.2, пример 4), что этот предел равен

$$\int_0^1 (1 - e^{-t}) \frac{dt}{t} - \int_1^{\infty} \frac{e^{-t} dt}{t}.$$

§ 12.11. Формула Эйлера для гамма-функции

По определению бесконечного произведения имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(z)} &= z \left[\lim_{m \rightarrow \infty} e^{\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m} - \lg m\right)z} \right] \left[\lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^m \left\{ \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}} \right\} \right] = \\ &= z \lim_{m \rightarrow \infty} \left[e^{\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m} - \lg m\right)z} \prod_{n=1}^m \left\{ \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}} \right\} \right] = \\ &= z \lim_{m \rightarrow \infty} \left[m^{-z} \prod_{n=1}^m \left(1 + \frac{z}{n}\right) \right] = \\ &= z \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\prod_{n=1}^{m-1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-z} \prod_{n=1}^m \left(1 + \frac{z}{n}\right) \right] = \\ &= z \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\prod_{n=1}^m \left\{ \left(1 + \frac{z}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-z} \right\} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^z \right]. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^z \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} \right\}.$$

Эта формула принадлежит Эйлеру¹⁾, она имеет место всюду, кроме точек $z = 0, -1, -2, \dots$

Пример. Доказать, что

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdots (n-1)}{z(z+1) \cdots (z+n-1)} n^z. \quad (\text{Euler})$$

12.12. Уравнение в конечных разностях для гамма-функции

Покажем теперь, что функция $\Gamma(z)$ удовлетворяет уравнению в конечных разностях

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

¹⁾ Эта формула была дана в 1729 г. в письме к Гольдбаху, напечатанном в «Corresp. Math.» Фусса (Fuss).

В самом деле, если z не является целым неположительным числом, то по формуле Эйлера имеем

$$\begin{aligned}\Gamma(z+1)/\Gamma(z) &= \\ &= \frac{1}{z+1} \left[\lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^m \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{z+1}}{1 + \frac{z+1}{n}} \right] : \left[\frac{1}{z} \lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^m \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^z}{1 + \frac{z}{n}} \right] = \\ &= \frac{z}{z+1} \lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^m \left\{ \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)(z+n)}{z+n+1} \right\} = z \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m+1}{z+m+1} = z.\end{aligned}$$

Это — одно из наиболее важных свойств гамма-функции.
Так как $\Gamma(1) = 1$, то

$$\Gamma(z) = (z-1)!,$$

когда z — целое положительное число.

Пример. Доказать, что

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Gamma(z+1)} + \frac{1}{\Gamma(z+2)} + \frac{1}{\Gamma(z+3)} + \dots &= \\ &= \frac{e}{\Gamma(z)} \left\{ \frac{1}{z} - \frac{1}{1!} \frac{1}{z+1} + \frac{1}{2!} \frac{1}{z+2} - \dots \right\}.\end{aligned}$$

[Следует рассмотреть выражение

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{z(z+1)} + \frac{1}{z(z+1)(z+2)} + \dots + \frac{1}{z(z+1)\dots(z+m)}.$$

Оно может быть разложено на простейшие дроби и приведено к виду $\sum_{n=0}^m \frac{a_n}{z+n}$, где

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n!} \left\{ 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{(m-n)!} \right\} = \frac{(-1)^n}{n!} \left\{ e - \sum_{r=m-n+1}^{\infty} \frac{1}{r!} \right\}.$$

Замечая, что $\sum_{r=m-n+1}^{\infty} \frac{1}{r!} < \frac{e}{(m-n+1)!}$, надо доказать, что

$$\sum_{n=0}^m \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n} \left\{ \sum_{r=m-n+1}^{\infty} \frac{1}{r!} \right\} \rightarrow 0,$$

когда $m \rightarrow \infty$, а z не равно $0, -1, -2, \dots$]

12.13. Вычисление некоторых бесконечных произведений

При помощи гамма-функции можно вычислять бесконечные произведения вида

$$\prod_{n=1}^{\infty} u_n,$$

где u_n — любая рациональная функция индекса n .

Действительно, разлагая u_n на множители, мы можем написать это произведение в виде

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{A(n-a_1)(n-a_2) \dots (n-a_k)}{(n-b_1)(n-b_2) \dots (n-b_l)} \right\};$$

предполагается, что ни один из множителей знаменателя не равен нулю.

Для сходимости этого произведения, очевидно, необходимо, чтобы число множителей числителя равнялось числу множителей знаменателя и чтобы $A = 1$, ибо в противном случае u_n не будет стремиться к единице, когда n стремится к бесконечности. Поэтому мы имеем $k = l$ и, обозначая произведение через P , можем написать

$$P = \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{(n-a_1) \dots (n-a_k)}{(n-b_1) \dots (n-b_k)} \right\}.$$

Общий член в этом произведении можно написать в виде

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{a_1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{a_k}{n}\right) \left(1 - \frac{b_1}{n}\right)^{-1} \dots \left(1 - \frac{b_k}{n}\right)^{-1} = \\ = 1 - \frac{a_1 + \dots + a_k - b_1 - \dots - b_k}{n} + A_n, \end{aligned}$$

где A_n будет $O(n^{-2})$ при больших n .

Для того чтобы бесконечное произведение было абсолютно сходящимся, необходимо (\S 2.7, часть I), чтобы

$$a_1 + \dots + a_k - b_1 - \dots - b_k = 0.$$

Мы можем поэтому, не меняя значения общего множителя рассматриваемого произведения, ввести в него множитель

$$\exp \{n^{-1}(a_1 + \dots + a_k - b_1 - \dots - b_k)\}.$$

Таким образом, получим

$$P = \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\left(1 - \frac{a_1}{n}\right) e^{\frac{a_1}{n}} \dots \left(1 - \frac{a_k}{n}\right) e^{\frac{a_k}{n}}}{\left(1 - \frac{b_1}{n}\right) e^{\frac{b_1}{n}} \dots \left(1 - \frac{b_k}{n}\right) e^{\frac{b_k}{n}}} \right\}.$$

Но из определения гамма-функции по Вейерштрассу видно, что

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1 - \frac{z}{n} \right) e^{\frac{z}{n}} \right\} = \frac{1}{-z\Gamma(-z)e^{-\gamma z}}.$$

и, таким образом,

$$P = \frac{b_1\Gamma(-b_1)\dots b_k\Gamma(-b_k)}{a_1\Gamma(-a_1)\dots a_k\Gamma(-a_k)} = \prod_{m=1}^k \frac{\Gamma(1-b_m)}{\Gamma(1-a_m)}.$$

Эта формула выражает бесконечное произведение P через гамма-функцию.

Пример 1. Доказать, что

$$\prod_{s=1}^{\infty} \frac{s(a+b+s)}{(a+s)(b+s)} = \frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+1)}.$$

Пример 2. Показать, что при $a = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$ имеет место равенство

$$x \left(1 - \frac{x}{1^n} \right) \left(1 - \frac{x}{2^n} \right) \dots = \left\{ -\Gamma \left(-x^{\frac{1}{n}} \right) \Gamma \left(-ax^{\frac{1}{n}} \right) \dots \Gamma \left(-a^{n-1}x^{\frac{1}{n}} \right) \right\}^{-1}.$$

§ 12.14. Свя́зь между гамма-функцией и тригонометрическими функциями

Докажем еще одно весьма важное свойство гамма-функции, выражаемое равенством¹⁾

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}.$$

По определению Вейерштрасса (§ 12.1) имеем

$$\begin{aligned} \Gamma(z)\Gamma(-z) &= -\frac{1}{z^2} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1 + \frac{z}{n} \right) e^{-\frac{z}{n}} \right\}^{-1} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1 - \frac{z}{n} \right) e^{\frac{z}{n}} \right\}^{-1} = \\ &= -\frac{\pi}{z \sin \pi z}, \end{aligned}$$

если примем во внимание пример 1 § 7.5 части I. Так как согласно § 12.12

$$\Gamma(1-z) = -z\Gamma(-z),$$

то отсюда и получим требуемый результат.

¹⁾ Эту формулу часто называют *формулой дополнения*. — Прим. ред.

Следствие 1. Если мы дадим z значение $\frac{1}{2}$, то полученная формула дает $\left\{ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right\}^2 = \pi$, и так как по формуле Вейерштрасса $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ положительно, то мы имеем

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \pi^{\frac{1}{2}}.$$

Следствие 2. Если $\psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$, то

$$\psi(1-z) - \psi(z) = \pi \operatorname{ctg} \pi z.$$

12.15. Теорема умножения Гаусса¹⁾ и Лежандра

Докажем равенство

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{n}\right)\Gamma\left(z + \frac{2}{n}\right)\dots\Gamma\left(z + \frac{n-1}{n}\right) = (2\pi)^{\frac{1}{2}(n-1)} n^{\frac{1}{2}-nz} \Gamma(nz).$$

Положим

$$\varphi(z) = \frac{n^{nz}\Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{n}\right)\dots\Gamma\left(z + \frac{n-1}{n}\right)}{n^z\Gamma(nz)}.$$

Тогда имеем по формуле Эйлера (пример § 12.11)

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \frac{n^{nz} \prod_{r=0}^{n-1} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \dots (m-1) \cdot m^{z+\frac{r}{n}}}{\left(z + \frac{r}{n}\right)\left(z + \frac{r}{n} + 1\right) \dots \left(z + \frac{r}{n} + m-1\right)}}{n \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \dots (nm-1) \cdot (nm)^{nz}}{nz(nz+1)\dots(nz+nm-1)}} = \\ &= n^{nz-1} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\{(m-1)!\}^n m^{nz+\frac{1}{2}(n-1)} n^{mn}}{(nm-1)!(nm)^{nz}} = \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\{(m-1)!\}^n m^{\frac{1}{2}(n-1)} n^{mn-1}}{(nm-1)!}. \end{aligned}$$

Из этого последнего выражения видно, что $\varphi(z)$ не зависит от z . Таким образом, $\varphi(z)$ равна значению, которое она имеет при $z = \frac{1}{n}$, т. е.

$$\varphi(z) = \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\dots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right).$$

¹⁾ G a u s s, Werke, III, 149. Случай $n = 2$ был дан Лежандром.

Следовательно,

$$\begin{aligned} \{\varphi(z)\}^2 &= \prod_{r=1}^{n-1} \left\{ \Gamma\left(\frac{r}{n}\right) \Gamma\left(1 - \frac{r}{n}\right) \right\} = \\ &= \frac{\pi^{n-1}}{\sin \frac{\pi}{n} \sin \frac{2\pi}{n} \dots \sin \frac{(n-1)\pi}{n}} = \frac{(2\pi)^{n-1}}{n}, \end{aligned}$$

или так как $\varphi(n^{-1})$ положительна, то

$$\varphi(z) = (2\pi)^{\frac{1}{2}(n-1)} n^{-\frac{1}{2}},$$

откуда

$$\Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{n}\right) \dots \Gamma\left(z + \frac{n-1}{n}\right) = n^{\frac{1}{2}-nz} (2\pi)^{\frac{1}{2}(n-1)} \Gamma(nz).$$

Следствие. Полагая $n = 2$, имеем

$$2^{2z-1} \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) = \pi^{\frac{1}{2}} \Gamma(2z).$$

Эта формула называется *формулой удвоения*.

Пример. Пусть $B(p, q) = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$; показать, что

$$B(np, nq) = n^{-nq} \frac{B(p, q) B\left(p + \frac{1}{n}, q\right) \dots B\left(p + \frac{n-1}{n}, q\right)}{B(q, q) B(2q, q) \dots B((n-1)q, q)}.$$

12.16. Разложения для логарифмических производных гамма-функции

Мы имеем

$$\{\Gamma(z+1)\}^{-1} = e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}} \right\}.$$

Взяв логарифмическую производную (§ 4.7, часть I), получим

$$\frac{d \lg \Gamma(z+1)}{dz} = -\gamma + \frac{z}{1(z+1)} + \frac{z}{2(z+2)} + \frac{z}{3(z+3)} + \dots$$

или, так как $\lg \Gamma(z+1) = \lg z + \lg \Gamma(z)$,

$$\frac{d}{dz} \lg \Gamma(z) = -\gamma - \frac{1}{z} + z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(z+n)}.$$

¹⁾ Вычисление $\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{\pi k}{n}$ см., например, в книге: М. А. Лаврентьев

и Б. В. Шабат, *Методы теории функций комплексного переменного*, Физматгиз, 1958, стр. 558.—*Прим. ред.*

Дифференцируя вторично, получаем

$$\frac{d^2}{dz^2} \lg \Gamma(z+1) = \frac{d}{dz} \left\{ \frac{z}{1(z+1)} + \frac{z}{2(z+2)} + \dots \right\} = \frac{1}{(z+1)^2} + \frac{1}{(z+2)^2} + \dots$$

Эти разложения иногда применяются в приложениях.

12.2. Интегральное представление Эйлера для $\Gamma(z)$

Несобственный интеграл $\int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$ представляет аналитическую функцию от z , когда ¹⁾ вещественная часть z положительна (<§ 5.32, часть I). Он называется *интегралом Эйлера второго рода* ²⁾. Покажем теперь, что при $\operatorname{Re} z > 0$ этот интеграл равен $\Gamma(z)$. Обозначив вещественную часть z через x , имеем $x > 0$. Если теперь обозначить ³⁾

$$\Pi(z, n) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt,$$

то, положив $t = n\tau$, получим

$$\Pi(z, n) = n^z \int_0^1 (1 - \tau)^n \tau^{z-1} d\tau;$$

n -кратным интегрированием по частям легко показать, что при $x > 0$ и n целом положительном

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1 - \tau)^n \tau^{z-1} d\tau &= \\ &= \left[\frac{1}{z} \tau^z (1 - \tau)^n \right]_0^1 + \frac{n}{z} \int_0^1 (1 - \tau)^{n-1} \tau^z d\tau = \dots = \\ &= \frac{n(n-1)\dots 1}{z(z+1)\dots(z+n-1)} \int_0^1 \tau^{z+n-1} d\tau, \end{aligned}$$

¹⁾ Если вещественная часть z не положительна, то интеграл не сходится из-за особенности подинтегрального выражения при $t = 0$.

²⁾ Это название было дано Лежандром, см. § 12.4 об интеграле Эйлера первого рода.

³⁾ Многозначность функции t^{z-1} устраняется, если определить эту функцию равенством $t^{z-1} = e^{(z-1) \lg t}$, где $\lg t$ веществен.

а потому

$$\Pi(z, n) = \frac{1 \cdot 2 \dots n}{z(z+1) \dots (z+n)} n^z.$$

Отсюда, согласно примеру § 12.11, $\Pi(z, n) \rightarrow \Gamma(z)$, когда $n \rightarrow \infty$, т. е.

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt.$$

Итак, если положим

$$\Gamma_1(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt,$$

то имеем

$$\Gamma_1(z) - \Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\int_0^n \left\{ e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right\} t^{z-1} dt + \int_n^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \right].$$

Но

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_n^\infty e^{-t} t^{z-1} dt = 0,$$

ибо интеграл $\int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$ сходится.

Для того чтобы показать, что и первый интеграл в выражении для $\Gamma_1(z) - \Gamma(z)$ имеет пределом нуль, заметим, что

$$0 \leq e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq n^{-1} t^2 e^{-t}, \quad 0 \leq t \leq n.$$

[Чтобы установить эти неравенства, мы рассуждаем следующим образом. Если $0 \leq y < 1$, то, как это следует из разложений функций e^y и $(1-y)^{-1}$ в ряды, имеют место неравенства

$$1 + y \leq e^y \leq (1-y)^{-1}.$$

Подставив $\frac{t}{n}$ вместо y , будем иметь

$$\left(1 + \frac{t}{n}\right)^{-n} \geq e^{-t} \geq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n,$$

а потому

$$0 \leq e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = e^{-t} \left\{ 1 - e^t \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right\} \leq e^{-t} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n \right\}.$$

Далее, если $0 < \alpha < 1$, то $(1 - \alpha)^n \geq 1 - n\alpha$. При $n\alpha \geq 1$ это очевидно, а при $n\alpha < 1$ легко доказывается методом индукции. Положив здесь $\alpha = \frac{t^2}{n^2}$, получим

$$1 - \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n \leq \frac{t^2}{n}$$

и, следовательно,¹⁾

$$0 \leq e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t} \frac{t^2}{n},$$

что и требовалось доказать.]

Из доказанных неравенств непосредственно получаем, что

$$\begin{aligned} \left| \int_0^n \left\{ e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right\} t^{z-1} dt \right| &\leq \\ &\leq \int_0^n n^{-1} e^{-t} t^{x+1} dt < n^{-1} \int_0^\infty e^{-t} t^{x+1} dt \rightarrow 0, \end{aligned}$$

когда $n \rightarrow \infty$, ибо последний интеграл сходится.

Следовательно, $\Gamma_1(z) = \Gamma(z)$, когда интеграл, которым определяется $\Gamma_1(z)$, сходится, т. е.

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt,$$

когда вещественная часть z положительна.

Таким образом, когда вещественная часть z положительна, $\Gamma(z)$ можно определять как этим интегралом, так и бесконечным произведением Вейерштрасса.

Пример 1. Доказать, что при $\operatorname{Re} z > 0$

$$\Gamma(z) = \int_0^1 \left(\lg \frac{1}{x}\right)^{z-1} dx.$$

Пример 2. Доказать, что при $\operatorname{Re} z > 0$ и $\operatorname{Re} s > 0$

$$\int_0^\infty e^{-zx} x^{s-1} dx = \frac{\Gamma(s)}{z^s}.$$

¹⁾ Эти рассуждения представляют собой видоизменение способа, данного Шлёмильхом (Schlömilch, Compendium der höheren Analysis, II, 243). Простой способ получения менее точного неравенства (достаточного для требуемой цели) дан Бромуичем (Bromwich, Infinite Series, 459).

Пример 3. Доказать, что при $\operatorname{Re} z > 0$ и $\operatorname{Re} s > 1$

$$\frac{1}{(z+1)^s} + \frac{1}{(z+2)^s} + \frac{1}{(z+3)^s} + \dots = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{e^{-xz} x^{s-1} dx}{e^x - 1}.$$

Пример 4. Из результата примера 2 § 12.1, пользуясь неравенством

$$0 \leq e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq \frac{t^2 e^{-t}}{n},$$

получить, что

$$\gamma = \int_0^1 \frac{1 - e^{-t} - e^{-\frac{1}{t}}}{t} dt.$$

12.21. Распространение интегрального представления гамма-функции на случай отрицательного аргумента

Формула последнего параграфа непригодна для случая, когда вещественная часть z отрицательна. Коши¹⁾ и Залшютц²⁾ показали тем не менее, что существует аналогичная формула и для отрицательных значений.

Она может быть получена следующим путем.

Рассмотрим функцию

$$\Gamma_2(z) = \int_0^\infty t^{z-1} \left(e^{-t} - 1 + t - \frac{t^2}{2!} + \dots + (-1)^{k+1} \frac{t^k}{k!} \right) dt,$$

где k — целое число, такое, что $-k > x > -k-1$, x — вещественная часть z .

Интегрированием по частям получаем при $x < -1$

$$\begin{aligned} \Gamma_2(z) &= \left[\frac{t^z}{z} \left(e^{-t} - 1 + t - \frac{t^2}{2!} + \dots + (-1)^{k+1} \frac{t^k}{k!} \right) \right]_0^\infty + \\ &\quad + \frac{1}{z} \int_0^\infty t^z \left(e^{-t} - 1 + t - \dots + (-1)^k \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \right) dt. \end{aligned}$$

Обинтегрированный член стремится к нулю при обоих пределах, так как $x+k$ отрицательно, а $x+k+1$ положительно. Таким образом, имеем

$$\Gamma_2(z) = \frac{1}{z} \Gamma_2(z+1).$$

То же самое рассуждение применимо и в том случае, когда x лежит между 0 и -1 , и приводит к формуле

$$\Gamma(z+1) = z \Gamma_2(z) \quad (0 > x > -1).$$

Последнее равенство показывает, что при $-1 < x < 0$

$$\Gamma_2(z) = \Gamma(z).$$

¹⁾ Cauchy, Exercices de Math. (1827), 91—92.

²⁾ Saalschütz, Zs. für Math. und Phys., XXXII (1887), XXXIII (1888).

Из предпоследнего равенства следует затем, что $\Gamma_2(z)$ равно $\Gamma(z)$ для всех отрицательных значений $\operatorname{Re} z$, меньших —1. Таким образом, для всех отрицательных значений $\operatorname{Re} z$ мы имеем следующую формулу Коши и Зальщутца:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} \left(e^{-t} - 1 + t - \frac{t^2}{2!} + \dots + (-1)^{k+1} \frac{t^k}{k!} \right) dt,$$

где k — ближайшее целое число, меньшее — $\operatorname{Re} z$.

Пример. Пусть функция $P(\mu)$ определена для положительных значений μ равенством

$$P(\mu) = \int_0^1 x^{\mu-1} e^{-x} dx,$$

и пусть для отрицательных значений μ функция $P_1(\mu)$ определена равенством

$$P_1(\mu) = \int_0^1 x^{\mu-1} \left(e^{-x} - 1 + x - \dots + (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k!} \right) dx,$$

где k — ближайшее целое число, меньшее — μ . Показать, что

$$P_1(\mu) = P(\mu) - \frac{1}{\mu} + \frac{1}{1!(\mu+1)} - \dots + (-1)^{k-1} \frac{1}{k!(\mu+k)}.$$

(Saalschütz)

12.22. Представление Ханкеля функции $\Gamma(z)$ в виде контурного интеграла

Интегралы, полученные для $\Gamma(z)$ в §§ 12.2, 12.21, являются лишь наиболее известными из обширного класса определенных интегралов, при помощи которых может быть определена гамма-функция. Наиболее общий интеграл этого класса принадлежит Ханкелю¹⁾. Этот интеграл мы сейчас и рассмотрим.

Пусть D — контур, который начинается в точке ρ на вещественной оси, обходит один раз начало координат против часовой стрелки и возвращается обратно в ρ .

Рассмотрим $\int_D (-t)^{z-1} e^{-t} dt$, когда вещественная часть z положительна, а само z не есть целое число.

Многозначную функцию $(-t)^{z-1}$ сделаем однозначной, приняв $(-t)^{z-1} = e^{(z-1)\lg(-t)}$, где $\lg(-t)$ веществен, когда t находится на отрицательной части вещественной оси, так что на контуре D имеем $-\pi \leqslant \arg(-t) \leqslant \pi$.

¹⁾ Hankel, Zs. für Math. und Phys., IX (1864), 7.

Подинтегральная функция не будет аналитической внутри D , но, по следствию 1 § 5.2 части I, путь интегрирования можно деформировать (не меняя значения интеграла) в путь, начинающийся в ρ , идущий вдоль вещественной оси до δ , описзывающий окружность радиуса δ вокруг начала координат против часовой стрелки и возвращающейся обратно в ρ вдоль вещественной оси.

На вещественной оси в первой части этого нового пути интегрирования мы имеем $\arg(-t) = -\pi$, так что $(-t)^{z-1} = e^{-i\pi(z-1)} t^{z-1}$ (где $\lg t$ веществен), а на последней части пути $(-t)^{z-1} = e^{i\pi(z-1)} t^{z-1}$.

На окружности положим $-t = \delta e^{i\theta}$; тогда получим

$$\begin{aligned} \int_D (-t)^{z-1} e^{-t} dt &= \int_{-\pi}^{\delta} e^{-i\pi(z-1)} \delta e^{i\theta} e^{-\delta e^{i\theta}} d\theta + \\ &+ \int_{-\pi}^{\pi} (\delta e^{i\theta})^{z-1} e^{\delta(\cos \theta + i \sin \theta)} \delta e^{i\theta} d\theta + \int_{\delta}^{\rho} e^{i\pi(z-1)} t^{z-1} e^{-t} dt = \\ &= -2i \sin \pi z \int_{-\pi}^{\delta} t^{z-1} e^{-t} dt + i\delta^z \int_{-\pi}^{\pi} e^{iz\theta + \delta(\cos \theta + i \sin \theta)} d\theta. \end{aligned}$$

Это соотношение справедливо для всех положительных значений $\delta \leq \rho$. Будем теперь приближать δ к 0; тогда $\delta^z \rightarrow 0$ и

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{iz\theta + \delta(\cos \theta + i \sin \theta)} d\theta \rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} e^{iz\theta} d\theta,$$

так как подинтегральная функция стремится к своему пределу равномерно.

Следовательно, мы приходим к заключению, что равенство

$$\int_D (-t)^{z-1} e^{-t} dt = -2i \sin \pi z \int_0^\rho t^{z-1} e^{-t} dt$$

будет справедливым для всех положительных значений ρ . Пусть $\rho \rightarrow \infty$, и пусть C — контур, в который переходит D .

Тогда

$$\int_C (-t)^{z-1} e^{-t} dt = -2i \sin \pi z \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$$

и, следовательно,

$$\Gamma(z) = -\frac{1}{2i \sin \pi z} \int_C (-t)^{z-1} e^{-t} dt.$$

Далее, поскольку контур C не проходит через точку $t = 0$, уже не надо требовать, чтобы вещественная часть z была положительной;

интеграл $\int_C (-t)^{z-1} e^{-t} dt$ будет однозначной аналитической функцией z

для всех значений z . Поэтому, согласно § 5.5 части I, равенство, только что доказанное для случая, когда вещественная часть z положительна, сохраняет силу для всех значений z , за исключением значений $0, \pm 1, \pm 2, \dots$

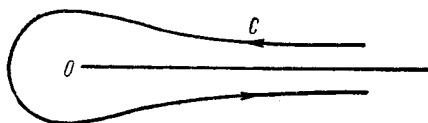


Рис. 1.

Следовательно, для всех значений z , за исключением $0, \pm 1, \pm 2, \dots$,

$$\Gamma(z) = -\frac{1}{2i \sin \pi z} \int_C (-t)^{z-1} e^{-t} dt.$$

Это и есть *формула Ханкеля*. Если мы заменим в ней z на $1-z$ и используем формулу § 12.14, то получим дальнейший результат

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{i}{2\pi} \int_C (-t)^{-z} e^{-t} dt.$$

Вместо \int_C мы будем писать $\int_{-\infty}^{+0}$, подразумевая под этим, что путь интегрирования идет из бесконечности на вещественной оси, обходит начало координат в положительном направлении и возвращается к исходной точке.

Пример 1. Показать, что если вещественная часть z положительна и a — какое-либо положительное постоянное число, то $\int (-t)^{-z} e^{-t} dt$ стремится к нулю при $\rho \rightarrow \infty$, когда путь интегрирования есть четверть окружности радиуса $\rho + a$ с центром в точке $-a$, концами которой служат точки ρ и $-a + i(\rho + a)$ или точки ρ и $-a - i(\rho + a)$.

Вывести формулу

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{-a+i\rho}^{-a-i\rho} (-t)^{-z} e^{-t} dt = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_C^1 (-t)^{-z} e^{-t} dt$$

и отсюда, положив $t = -a - iu$, получить, что

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{a+iu} (a+iu)^{-z} du.$$

¹⁾ Здесь C — контур, представленный выше на рисунке. — Прим. ред.

[Эта формула была дана Лапласом (*Laplace, Theorie Analytique des Probabilités* (1812), 134) и по существу эквивалентна формуле Ханкеля с контурным интегралом.]

Пример 2. Взяв $a = 1$ и положив $t = -1 + i \operatorname{tg} \theta$ в примере 1, показать, что

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{e^{-\frac{\pi}{2}}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\operatorname{tg} \theta - z\theta) \cos^{z-2}\theta d\theta.$$

Пример 3. Взяв за контур интегрирования параболу с фокусом в начале координат, показать, что при $a > 0$ ¹⁾

$$\Gamma(z) = \frac{2az e^a}{\sin \pi z} \int_0^\infty e^{-at^2} (1+t^2)^{z-\frac{1}{2}} \cos \{2at + (2z-1) \operatorname{arctg} t\} dt.$$

(Bourguet, *Acta Math.*, I)

Пример 4. Найти значения x , для которых интеграл

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty t^{x-1} \sin t dt$$

будет сходящимся; для этих значений x выразить его через гамма-функцию и затем показать, что он равен

$$e^{-\gamma x} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1 - \frac{x}{2n}\right) e^{x/(2n)} \right\} / \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1 + \frac{x}{2n-1}\right) e^{-x/(2n-1)} \right\}.$$

(St. John's, 1902)

Пример 5. Доказать, что $\int_0^\infty (\lg t)^m \frac{\sin t}{t} dt$ сходится при $m > 0$, и, пользуясь результатом примера 4, определить его величину при $m = 1$ и $m = 2$.

(St. John's, 1902)

12.3. Интегральное представление Гаусса для логарифмической производной от гамма-функции²⁾

Представим теперь функцию $\frac{d}{dz} \lg \Gamma(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$ в виде несобственного интеграла, когда вещественная часть z положительна; рассматриваемая функция часто обозначается через $\psi(z)$. Но сначала нам нужна новая формула для γ .

¹⁾ a — расстояние от вершины до фокуса. — Прим. ред.

²⁾ Gauss, *Werke*, III, 159.

Из формулы примера 4 § 12.2 находим

$$\gamma = \int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t} dt - \int_1^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \int_\delta^1 \frac{dt}{t} - \int_\delta^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt \right\} = \\ = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \int_\Delta^\delta \frac{dt}{t} - \int_\delta^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt \right\},$$

где $\Delta = 1 - e^{-\delta}$; замена δ на Δ допустима, так как

$$\int_\Delta^\delta \frac{dt}{t} = \lg \frac{\delta}{1-e^{-\delta}} \rightarrow 0 \quad \text{при } \delta \rightarrow 0.$$

Положив $t = 1 - e^{-u}$ в первом из этих интегралов и обозначая затем u снова через t , получим

$$\gamma = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \int_\delta^\infty \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} dt - \int_\delta^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt \right\} = \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} \right\} e^{-t} dt.$$

Это и есть необходимая нам формула для γ .

Чтобы получить формулу Гаусса, возьмем равенство (§ 12.16)

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -\gamma - \frac{1}{z} + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{z+m} \right)$$

и положим

$$\frac{1}{z+m} = \int_0^\infty e^{-t(z+m)} dt,$$

что допустимо при $m = 0, 1, 2, \dots$, если вещественная часть z положительна.

Получаем

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -\gamma - \int_0^\infty e^{-zt} dt + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \sum_{m=1}^n (e^{-mt} - e^{-(m+z)t}) dt = \\ = -\gamma + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{e^{-t} - e^{-zt} - e^{-(n+1)t} + e^{-(z+n+1)t}}{1-e^{-t}} dt = \\ = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-zt}}{1-e^{-t}} \right) dt - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{1-e^{-zt}}{1-e^{-t}} e^{-(n+1)t} dt.$$

Но если $0 < t \leq 1$, то $\left| \frac{1 - e^{-zt}}{1 - e^{-t}} \right|$ будет ограниченной функцией от t , предел которой при $t \rightarrow 0$ будет конечным, а при $t \geq 1$

$$\left| \frac{1 - e^{-zt}}{1 - e^{-t}} \right| < \frac{1 + |e^{-zt}|}{1 - e^{-1}} < \frac{2}{1 - e^{-1}}.$$

Поэтому мы можем найти такое число K , не зависящее от t , что на пути интегрирования

$$\left| \frac{1 - e^{-zt}}{1 - e^{-t}} \right| < K;$$

и таким образом,

$$\left| \int_0^\infty \frac{1 - e^{-zt}}{1 - e^{-t}} e^{-(n+1)t} dt \right| < K \int_0^\infty e^{-(n+1)t} dt = K(n+1)^{-1} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Мы доказали формулу

$$\psi(z) = \frac{d}{dz} \lg \Gamma(z) = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-zt}}{1 - e^{-t}} \right) dt,$$

которая и является гауссовым представлением $\psi(z)$ в виде несобственного интеграла.

Следует отметить, что это первый из числа встречавшихся нам в связи с гамма-функцией несобственных интегралов, в котором подинтегральная функция однозначна.

Положив в формуле Гаусса $t = \lg(1+x)$, получаем, полагая $\Delta = e^\delta - 1$,

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_\delta^\infty \left\{ \frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-zt}}{1 - e^{-t}} \right\} dt = \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \int_\delta^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt - \int_\Delta^\infty \frac{dx}{x(1+x)^z} \right\} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \int_\Delta^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt - \int_\Delta^\infty \frac{dx}{x(1+x)^z} \right\}, \end{aligned}$$

так как при $\delta \rightarrow 0$

$$0 < \int_\delta^\Delta \frac{e^{-t}}{t} dt < \int_\delta^\Delta \frac{dt}{t} = \lg \frac{e^\delta - 1}{\delta} \rightarrow 0.$$

Отсюда

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \int_\Delta^\infty \left\{ e^{-x} - \frac{1}{(1+x)^z} \right\} \frac{dx}{x},$$

или

$$\Gamma'(z) = \Gamma(z) \int_0^\infty \left\{ e^{-x} - \frac{1}{(1+x)^2} \right\} \frac{dx}{x}$$

— формула, принадлежащая Дирихле¹⁾.

Пример 1. Доказать, что

$$\psi(z) = \int_0^1 \left\{ \frac{1}{-\lg t} - \frac{t^{z-1}}{1-t} \right\} dt,$$

если вещественная часть z положительна.

(Gauss)

Пример 2. Показать, что

$$\gamma = \int_0^\infty \{(1+t)^{-1} - e^{-t}\} t^{-1} dt.$$

(Dirichlet)

12.31. Первое интегральное представление Бине для $\lg \Gamma(z)$

Бине²⁾ дал два выражения для $\lg \Gamma(z)$, которые имеют большое значение потому, что они показывают, как ведет себя $\lg \Gamma(z)$ при $|z| \rightarrow \infty$.

Для того чтобы получить первое из этих выражений, отметим, что если вещественная часть z положительна, то

$$\frac{\Gamma'(z+1)}{\Gamma(z+1)} = \int_0^\infty \left\{ \frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-tz}}{e^t - 1} \right\} dt,$$

что легко проверить, заменяя z на $z+1$ в формуле § 12.3.

Далее, согласно примеру 6 § 6.222 части I,

$$\lg z = \int_0^\infty \frac{e^{-t} - e^{-tz}}{t} dt,$$

и поскольку

$$\frac{1}{2z} = \int_0^\infty \frac{1}{2} e^{-tz} dt,$$

имеем

$$\frac{d}{dz} \lg \Gamma(z+1) = \frac{1}{2z} + \lg z - \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t - 1} \right\} e^{-tz} dt.$$

¹⁾ Dirichlet, Werke, I, 275.

²⁾ Binet, Journ. de l'école polytechnique, XVI (1839), 123—143.

Подинтегральная функция в последнем интеграле будет непрерывной при $t \rightarrow 0$; и так как $\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t - 1}$ ограничена, когда $t \rightarrow \infty$, то легко получаем, что интеграл сходится равномерно, когда вещественная часть z будет положительной. Мы можем, следовательно, интегрировать от 1 до z под знаком интеграла (§ 4.44, часть I), после чего получим¹⁾

$$\lg \Gamma(z+1) = \left(z + \frac{1}{2}\right) \lg z - z + 1 + \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t - 1} \right\} \frac{e^{-tz} - e^{-t}}{t} dt.$$

Так как, согласно § 7.2 части I, функция $\left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t - 1} \right\} \frac{1}{t}$ непрерывна при $t \rightarrow 0$ и так как

$$\lg \Gamma(z+1) = \lg z + \lg \Gamma(z),$$

то имеем

$$\begin{aligned} \lg \Gamma(z) &= \left(z - \frac{1}{2}\right) \lg z - z + 1 + \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t - 1} \right\} \frac{e^{-tz}}{t} dt - \\ &\quad - \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t - 1} \right\} \frac{e^{-t}}{t} dt. \end{aligned}$$

Чтобы вычислить второй из этих интегралов, положим²⁾

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t - 1} \right) \frac{e^{-t}}{t} dt = I, \quad \int_0^\infty \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t - 1} \right) \frac{e^{-\frac{t}{2}}}{t} dt = J;$$

тогда, взяв $z = \frac{1}{2}$ в последнем выражении для $\Gamma(z)$, получим

$$\frac{1}{2} \lg \pi = \frac{1}{2} + J - I.$$

Но так как $I = \int_0^\infty \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{t} + \frac{1}{\frac{t}{e^{\frac{t}{2}}} - 1} \right) \frac{e^{-\frac{t}{2}}}{t} dt$, то мы имеем

$$J - I = \int_0^\infty \left(\frac{1}{t} - \frac{e^{\frac{t}{2}}}{e^t - 1} \right) \frac{e^{-\frac{t}{2}}}{t} dt = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-\frac{t}{2}}}{t} - \frac{1}{e^t - 1} \right) \frac{dt}{t},$$

¹⁾ $\lg \Gamma(z+1)$ означает сумму главных значений логарифмов множителей произведения Вейерштрасса.

²⁾ Этот прием принадлежит Принггейму (Pringsheim, Math. Ann., XXXI (1888), 473).

откуда

$$\begin{aligned}
 J &= \int_0^\infty \left\{ \frac{e^{-\frac{t}{2}}}{t} - \frac{1}{e^t - 1} + \frac{1}{2} e^{-t} - \frac{e^{-t}}{t} + \frac{e^{-t}}{e^t - 1} \right\} \frac{dt}{t} = \\
 &= \int_0^\infty \left\{ \frac{e^{-\frac{t}{2}} - e^{-t}}{t} - \frac{1}{2} e^{-t} \right\} \frac{dt}{t} = \\
 &= \int_0^\infty \left\{ -\frac{d}{dt} \left(\frac{e^{-\frac{t}{2}} - e^{-t}}{t} \right) - \frac{\frac{1}{2} e^{-\frac{t}{2}} - e^{-t}}{t} - \frac{e^{-t}}{2t} \right\} dt = \\
 &= \left[-\frac{e^{-\frac{t}{2}} - e^{-t}}{t} \right]_0^\infty + \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{e^{-t} - e^{-\frac{t}{2}}}{t} dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \lg \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

Следовательно,

$$I = 1 - \frac{1}{2} \lg 2\pi.$$

Поэтому, когда вещественная часть z положительна, мы имеем следующую формулу Бине:

$$\lg \Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right) \lg z - z + \frac{1}{2} \lg 2\pi + \int_0^\infty \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t - 1}\right) \frac{e^{-tz}}{t} dt.$$

Полагая $z = x + iy$, видим, что если обозначить верхнюю грань выражения $\left| \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t - 1} \right) \frac{1}{t} \right|$ для вещественных значений t через K , то

$$\left| \lg \Gamma(z) - \left(z - \frac{1}{2}\right) \lg z + z - \frac{1}{2} \lg 2\pi \right| < K \int_0^\infty e^{-tx} dt = Kx^{-1},$$

так что при больших x выражение $\left(z - \frac{1}{2}\right) \lg z - z + \frac{1}{2} \lg 2\pi$ дает приближенное значение для $\lg \Gamma(z)$.

Пример 1. Доказать, что при $\operatorname{Re} z > 0$

$$\lg \Gamma(z) = \int_0^\infty \left\{ \frac{e^{-zt} - e^{-t}}{1 - e^{-t}} + (z - 1)e^{-t} \right\} \frac{dt}{t}.$$

(Malmst  n)

12.32. ВТОРОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ БИНЕ ДЛЯ $\lg \Gamma(z)$ 35

Пример 2. Доказать, что при $\operatorname{Re} z > 0$

$$\lg \Gamma(z) = \int_0^\infty \left\{ (z-1)e^{-t} + \frac{(1+t)^{-z} - (1+t)^{-1}}{\lg(1+t)} \right\} \frac{dt}{t}.$$

(Féaux)

Пример 3. С помощью формулы § 12.14 показать, что при $0 < x < 1$

$$2\lg \Gamma(x) - \lg \pi + \lg \sin \pi x = \int_0^\infty \left\{ \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}-x\right)t}{\operatorname{sh}\frac{1}{2}t} - (1-2x)e^{-t} \right\} \frac{dt}{t}.$$

(Kummer)

Пример 4. Разлагая $\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}-x\right)t$ и $1-2x$ в ряды Фурье по синусам, показать, исходя из примера 3, что при $0 < x < 1$

$$\lg \Gamma(x) = \frac{1}{2}\lg \pi - \frac{1}{2}\lg \sin \pi x + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin 2n\pi x,$$

где

$$a_n = \int_0^\infty \left\{ \frac{2n\pi}{t^2 + 4n^2\pi^2} - \frac{e^{-t}}{2n\pi} \right\} \frac{dt}{t}.$$

Далее показать, исходя из примера 2 § 12.3, что

$$a_n = \frac{1}{2n\pi} (\gamma + \lg 2\pi + \lg n).$$

(Kummer, Journ. für Math., XXXV (1847), 1)

12.32. Второе интегральное представление Бине для $\lg \Gamma(z)$

Применим формулу Плана, приведенную в примере 7 главы 7 части I, к суммированию ряда (§ 12.16)

$$\frac{d^2}{dz^2} \lg \Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2}.$$

Условия, установленные там как достаточные для выражения ряда через интегралы, очевидно, удовлетворяются функцией $\varphi(\zeta) = \frac{1}{(z+\zeta)^2}$, если вещественная часть z положительна; поэтому имеем

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dz^2} \lg \Gamma(z) &= \frac{1}{2z^2} + \int_0^\infty \frac{d\xi}{(z+\xi)^2} - 2 \int_0^\infty \frac{q(t, z)}{e^{2\pi t} - 1} dt + \\ &\quad + 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{q(t, z+n)}{e^{2\pi t} - 1} dt. \end{aligned}$$

где

$$2iq(t, z) = \frac{1}{(z+it)^2} - \frac{1}{(z-it)^2}.$$

Так как $|q(t, z+n)|$, как легко видеть, будет меньше $K_1 \frac{t}{n}$, где K_1 не зависит от t и n , то предел последнего интеграла равен нулю.

Отсюда

$$\frac{d^2}{dz^2} \lg \Gamma(z) = \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{z} + \int_0^\infty \frac{4tz}{(z^2+t^2)^2} \frac{dt}{e^{2\pi t}-1}.$$

Так как $\left| \frac{2z}{z^2+t^2} \right|$ не превосходит K (где K зависит только от δ), когда вещественная часть z превосходит δ , то интеграл сходится равномерно, и мы можем его проинтегрировать (§ 4.44, часть I) в пределах от 1 до z .

Получим

$$\frac{d}{dz} \lg \Gamma(z) = -\frac{1}{2z} + \lg z + C - 2 \int_0^\infty \frac{t dt}{(z^2+t^2)(e^{2\pi t}-1)},$$

где C — постоянная. Интегрируя это выражение еще раз, получим

$$\lg \Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2} \right) \lg z + (C-1)z + C' + 2 \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}(t/z)}{e^{2\pi t}-1} dt,$$

где C' — новая постоянная.

Если z вещественно, то $0 < \operatorname{arctg} \frac{t}{z} \leq \frac{\pi}{2}$, а потому

$$\left| \lg \Gamma(z) - \left(z - \frac{1}{2} \right) \lg z - (C-1)z - C' \right| < \frac{2}{z} \int_0^\infty \frac{t}{e^{2\pi t}-1} dt.$$

Но в § 12.31 было показано, что

$$\left| \lg \Gamma(z) - \left(z - \frac{1}{2} \right) \lg z + z - \frac{1}{2} \lg 2\pi \right| \rightarrow 0,$$

когда $z \rightarrow \infty$ по вещественной оси. Сравнивая эти результаты, видим, что

$$C = 0, \quad C' = \frac{1}{2} \lg 2\pi.$$

Следовательно, для всех значений z , вещественная часть которых положительна, имеем

$$\lg \Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right) \lg z - z + \frac{1}{2} \lg 2\pi + 2 \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}(t/z)}{e^{2\pi t} - 1} dt,$$

где $\operatorname{arctg} u$ определяется интегралом

$$\operatorname{arctg} u = \int_0^u \frac{dt}{1+t^2},$$

в котором путь интегрирования есть прямая линия.

Это и есть второе выражение Бине для $\lg \Gamma(z)$.

При мер. Проверить законность дифференцирования по z под знаком интеграла и получить этим путем равенство

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \lg z - \frac{1}{2z} - 2 \int_0^\infty \frac{t dt}{(t^2 + z^2)(e^{2\pi t} - 1)}.$$

12.33. Асимптотическое разложение логарифма гамма-функции (ряд Стирлинга)

Теперь мы можем вывести асимптотическое разложение (§ 8.2, часть I) $\lg \Gamma(z)$ для больших значений $|z|$, применяемое при вычислении гамма-функции.

Пусть $z = x + iy$, где $x \geqslant \delta > 0$.

По второй формуле Бине будем иметь

$$\lg \Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right) \lg z - z + \frac{1}{2} \lg 2\pi + \varphi(z),$$

где

$$\varphi(z) = 2 \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}(t/z)}{e^{2\pi t} - 1} dt.$$

Но

$$\operatorname{arctg} \frac{t}{z} = \frac{t}{z} - \frac{1}{3} \frac{t^3}{z^3} + \frac{1}{5} \frac{t^5}{z^5} - \dots$$

$$\dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \frac{t^{2n-1}}{z^{2n-1}} + \frac{(-1)^n}{z^{n-1}} \int_0^t \frac{u^{2n} du}{u^2 + z^2},$$

Подставляя это разложение в интеграл и вспоминая (§ 7.2, часть I), что

$$\int_0^\infty \frac{t^{2n-1} dt}{e^{2\pi t} - 1} = \frac{B_n}{4n},$$

где B_1, B_2, \dots — числа Бернулли, получим

$$\varphi(z) = \sum_{r=1}^n \frac{(-1)^{r-1} B_r}{2r(2r-1) z^{2r-1}} + \frac{2(-1)^n}{z^{2n-1}} \int_0^\infty \left\{ \int_0^t \frac{u^{2n} du}{u^2 + z^2} \right\} \frac{dt}{e^{2\pi t} - 1}.$$

Пусть K_z — верхняя граница¹⁾ выражения $\left| \frac{z^2}{u^2 + z^2} \right|$ для положительных значений u .

Тогда

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\infty \left\{ \int_0^t \frac{u^{2n} du}{u^2 + z^2} \right\} \frac{dt}{e^{2\pi t} - 1} \right| &\leq K_z |z|^{-2} \int_0^\infty \left\{ \int_0^t u^{2n} du \right\} \frac{dt}{e^{2\pi t} - 1} \leq \\ &\leq \frac{K_z B_{n+1}}{4(n+1)(2n+1)|z|^2}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\left| \frac{2(-1)^n}{z^{2n-1}} \int_0^\infty \left\{ \int_0^t \frac{u^{2n} du}{u^2 + z^2} \right\} \frac{dt}{e^{2\pi t} - 1} \right| < \frac{K_z B_{n+1}}{2(n+1)(2n+1)|z|^{2n+1}}.$$

Очевидно, что это выражение стремится к нулю равномерно при $|z| \rightarrow \infty$, если $|\arg z| \leq \frac{1}{2}\pi - \Delta$, где $\frac{1}{4}\pi > \Delta > 0$, так как тогда $K_z \leq \operatorname{cosec} 2\Delta$. Ясно также, что если $|\arg z| \leq \frac{1}{4}\pi$ (так что $K_z = 1$), то, взяв сумму n первых членов ряда

$$\sum_{r=1}^n \frac{(-1)^{r-1} B_r}{2r(2r-1)} \frac{1}{z^{2r-1}}$$

¹⁾ K_z^{-2} является нижней границей выражения $\frac{(u^2 + (x^2 - y^2))^2 + 4x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2}$ и, следовательно, равно $\frac{4x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2}$ или 1 в зависимости от того, будет ли $x^2 < y^2$ или $x^2 \geq y^2$.

как приближение к $\varphi(z)$, получим погрешность, численно меньшую $(n+1)$ -го члена. Но так как при $|\arg z| \leq \frac{1}{2}\pi - \Delta$ имеем

$$z^{2n-1} \left\{ \varphi(z) - \sum_{r=1}^n \frac{(-1)^{r-1} B_r}{2r(2r-1)} \right\} < \operatorname{cosec}^2 2\Delta \frac{B_{n+1}}{2(n+1)(2n+1)} |z|^{-2} \rightarrow 0,$$

когда $z \rightarrow \infty$, то ясно, что ряд

$$\frac{B_1}{1 \cdot 2 \cdot z} - \frac{B_2}{3 \cdot 4 \cdot z^3} + \frac{B_3}{5 \cdot 6 \cdot z^5} - \dots$$

представляет собою асимптотическое разложение¹⁾ (§ 8.2, часть I) функции $\varphi(z)$.

Таким образом, мы видим, что ряд

$$\left(z - \frac{1}{2} \right) \lg z - z + \frac{1}{2} \lg 2\pi + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1} B_r}{2r(2r-1) z^{2r-1}}$$

будет асимптотическим разложением $\lg \Gamma(z)$, когда $|\arg z| \leq \frac{1}{2}\pi - \Delta$.

Это выражение обычно называют *рядом Стирлинга*.

В § 13.6 оно будет распространено на более широкую область $|\arg z| \leq \pi - \Delta$.

В частном случае при z положительном ($= x$) имеем

$$0 < 2 \int_0^\infty \left\{ \int_0^t \frac{u^{2n} du}{u^2 + x^2} \right\} \frac{dt}{e^{2\pi t} - 1} < \frac{B_{n+1}}{2(n+1)(2n+1)x^2},$$

т. е. при $x > 0$ значение функции $\varphi(x)$ всегда лежит между суммой n и суммой $n+1$ членов ряда при всех значениях n .

В частности, $0 < \varphi(x) < \frac{B_1}{1 \cdot 2x}$, так что $\varphi(x) = \frac{\theta}{12x}$, где $0 < \theta < 1$.

Следовательно,

$$\Gamma(x) = x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x} (2\pi)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{\theta}{12x}}.$$

¹⁾ Разложение действительно является асимптотическим, ибо если бы оно сходилось при $|z| \geq p$, то по § 2.6 части I мы нашли бы такое K , что $B_n < (2n-1) 2n K p^{2n}$, а тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} B_n t^{2n}}{(2n)!}$ был бы целой функцией, что противоречит § 7.2 части I.

Потенцированием ряда Стирлинга получаем

$$\begin{aligned}\Gamma(x) = e^{-x} x^{x-\frac{1}{2}} (2\pi)^{\frac{1}{2}} \left\{ 1 + \frac{1}{12x} + \frac{1}{288x^2} - \right. \\ \left. - \frac{139}{51840x^3} - \frac{571}{2488320x^4} + O\left(\frac{1}{x^5}\right) \right\},\end{aligned}$$

что и дает *асимптотическое выражение для гамма-функции*. В сочетании с формулой

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

оно весьма полезно при нахождении численного значения гамма-функции для вещественных x .

Этим способом Лежандр составил таблицы функции $\lg_{10} \Gamma(x)$ с 12 десятичными знаками для значений x от 1 до 2; они напечатаны в его «Exercices de Calcul Intégral», II, (1817), 85 и в его «Traité des fonctions elliptiques» (1826), 489.

Заметим, что $\Gamma(x)$ имеет один минимум для положительных значений x , а именно при $x = 1,4616321\dots$; значение же $\lg \Gamma(x)$ тогда будет равно 1,9472391...

Пример. Получить разложение

$$\lg \Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2} \right) \lg z - z + \frac{1}{2} \lg 2\pi + J(z),$$

сходящееся при $\operatorname{Re} z > 0$, где

$$J(z) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{c_1}{z+1} + \frac{c_2}{2(z+1)(z+2)} + \frac{c_3}{3(z+1)(z+2)(z+3)} + \dots \right\},$$

причем

$$c_1 = \frac{1}{6}, \quad c_2 = \frac{1}{3}, \quad c_3 = \frac{59}{60}, \quad c_4 = \frac{227}{60}$$

и вообще

$$c_n = \int_0^1 (x+1)(x+2)\dots(x+n-1)(2x-1)x \, dx.$$

(Binet)

12.4. Интеграл Эйлера первого рода

Название *интеграл Эйлера первого рода* было дано Лежандром интегралу

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} \, dx,$$

изученному впервые Эйлером и Лежандром¹⁾. В этом интеграле вещественные части p и q предполагаются положительными, а под x^{p-1} , $(1-x)^{q-1}$ понимаются те значения величин $e^{(p-1)\lg x}$ и $e^{(q-1)\lg(1-x)}$, которые соответствуют вещественным значениям логарифмов. При этих условиях легко видеть, что интеграл $B(p, q)$ (возможно, несобственный) имеет смысл (§ 4.5, часть I, пример 2).

Заменив x на $1-x$, получим

$$B(p, q) = B(q, p).$$

Далее, интегрируя по частям, находим

$$\int_0^1 x^{p-1} (1-x)^q dx = \left[\frac{x^p (1-x)^q}{p} \right]_0^1 + \frac{q}{p} \int_0^1 x^p (1-x)^{q-1} dx,$$

так что

$$B(p, q+1) = \frac{q}{p} B(p+1, q).$$

Пример 1. Показать, что

$$B(p, q) = B(p+1, q) + B(p, q+1).$$

Пример 2. Исходя из примера 1, доказать, что

$$B(p, q+1) = \frac{q}{p+q} B(p, q).$$

Пример 3. Доказать, что при целом положительном n

$$B(p, n+1) = \frac{1 \cdot 2 \cdots n}{p(p+1) \cdots (p+n)}.$$

Пример 4. Доказать, что

$$B(x, y) = \int_0^\infty \frac{a^{x-1}}{(1+a)^{x+y}} da.$$

Пример 5. Доказать, что

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^z B(z, n).$$

¹⁾ Euler, Nov. Comm. Petrop., XVI (1772); Legendre, Exercices, I, 221.

12.41. Выражение интеграла Эйлера первого рода через гамма-функцию

Докажем теперь важную теорему, выражаемую равенством

$$B(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}.$$

Пусть сначала вещественные части m и n больше $\frac{1}{2}$. Тогда

$$\Gamma(m)\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-x} x^{m-1} dx \times \int_0^\infty e^{-y} y^{n-1} dy.$$

Заменяя x на x^2 и y на y^2 , получим

$$\begin{aligned} \Gamma(m)\Gamma(n) &= 4 \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-x^2} x^{2m-1} dx \int_0^R e^{-y^2} y^{2n-1} dy = \\ &= 4 \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \int_0^R e^{-(x^2+y^2)} x^{2m-1} y^{2n-1} dx dy. \end{aligned}$$

Но для рассматриваемых значений m и n подинтегральная функция непрерывна во всей области интегрирования, а потому интеграл можно рассматривать как двойной интеграл, взятый по квадрату S_R . Обозначая через $f(x, y)$ подинтегральную функцию, через Q_R — четверть круга с центром в начале координат и с радиусом R и через T_R — часть S_R вне Q_R , получим

$$\begin{aligned} \left| \int_{S_R} \int f(x, y) dx dy - \int_{Q_R} \int f(x, y) dx dy \right| &= \\ &= \left| \int_{T_R} \int f(x, y) dx dy \right| \leqslant \int_{T_R} \int |f(x, y)| dx dy \leqslant \\ &\leqslant \int_{S_R} \int |f(x, y)| dx dy - \int_{\frac{1}{2}R}^R \int |f(x, y)| dx dy \rightarrow 0, \text{ когда } R \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

так как $\int_{S_R} \int |f(x, y)| dx dy$ стремится к следующему пределу:

$$2 \int_0^\infty e^{-x^2} |x^{2m-1}| dx \times 2 \int_0^\infty e^{-y} |y^{2n-1}| dy.$$

Поэтому

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{S_R} \int f(x, y) dx dy = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{Q_R} \int f(x, y) dx dy.$$

Переходя к полярным координатам¹⁾ ($x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$), имеем

$$\int \int_{Q_R} f(x, y) dx dy = \int_0^R \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2} (r \cos \theta)^{2m-1} (r \sin \theta)^{2n-1} r dr d\theta.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \Gamma(m)\Gamma(n) &= 4 \int_0^\infty e^{-r^2} r^{2(m+n)-1} dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m-1}\theta \sin^{2n-1}\theta d\theta = \\ &= 2\Gamma(m+n) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m-1}\theta \sin^{2n-1}\theta d\theta. \end{aligned}$$

Положив $\cos^2 \theta = u$, окончательно получаем

$$\Gamma(m)\Gamma(n) = \Gamma(m+n) B(m, n).$$

Мы доказали справедливость этой формулы только для случая, когда вещественные части m и n больше $\frac{1}{2}$, но, пользуясь результатом примера 2 § 12.4, ее легко доказать и для случая, когда они меньше $\frac{1}{2}$.

Этот результат, найденный Эйлером, устанавливает связь между интегралом Эйлера первого рода и гамма-функцией.

Пример 1. Показать, что

$$\int_{-1}^1 (1+x)^{p-1} (1-x)^{q-1} dx = 2^{p+q-1} \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Пример 2. Показать, что для функции

$$f(x, y) = \frac{1}{x} - y \frac{1}{x+1} + \frac{y(y-1)}{2!} \frac{1}{x+2} - \frac{y(y-1)(y-2)}{3!} \frac{1}{x+3} + \dots$$

имеет место соотношение

$$f(x, y) = f(y+1, x-1),$$

если значения x и y такие, что оба ряда сходятся.

(Jesus, 1901)

¹⁾ Способом § 4.11 части I легко показать, что площади $A_{m,n}$, § 4.3 не обязательно должны быть прямоугольными; требуется лишь, чтобы их наибольший поперечник мог быть сделан произвольно малым, когда число площадей будет взято достаточно большим, так что за эти площади могут быть приняты и области, ограниченные радиусами-векторами и дугами окружностей.

Пример 3. Доказать, что

$$\int_0^1 \int_0^1 f(xy) (1-x)^{\mu-1} y^\mu (1-y)^{\nu-1} dx dy = \frac{\Gamma(\mu) \Gamma(\nu)}{\Gamma(\mu + \nu)} \int_0^1 f(z) (1-z)^{\mu+\nu-1} dz.$$

(Math. Trip., 1894)

12.42. Выражение интегралов от тригонометрических функций через гамма-функции

Мы можем вычислить теперь интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m-1} x \sin^{n-1} x dx$,

где m и n не обязательно целые, но имеют положительные вещественные части.

Положив $\cos^2 x = t$, имеем, как в § 12.41,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m-1} x \sin^{n-1} x dx = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}.$$

Отсюда легко могут быть выведены обычные элементарные формулы для случаев, когда m и n — целые числа.

Пример. Доказать, что при $|k| < 1$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^m \theta \sin^n \theta d\theta}{(1 - k \sin^2 \theta)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+n+1}{2}\right)} V^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{m+n} \theta d\theta}{(1 - k \sin^2 \theta)^{\frac{n+1}{2}}}.$$

(Trinity, 1898)

12.43. Обобщение интеграла Эйлера первого рода (Похгаммер)

В § 12.22 мы видели, что интеграл Эйлера второго рода для $\Gamma(z)$ можно заменить интегралом по контуру, сходящимся для всех значений z . Для интегралов первого рода аналогичный результат был получен Похгаммером. Пусть P — какая-нибудь точка на веществен-

ной оси между 0 и 1; рассмотрим интеграл¹⁾

$$e^{-\pi i(\alpha+\beta)} \int_P^{(1+, 0+, 1-, 0-)} t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt = \varepsilon(\alpha, \beta).$$

Применяемое здесь обозначение введено в конце § 12.22, оно означает, что путь интегрирования начинается в точке P , обходит точку 1 в положительном направлении (против часовой стрелки), возвращается к P , затем обходит начало координат в положительном направлении и возвращается опять в P и т. д.

В исходной точке аргументы обеих величин t и $1-t$ равны нулю. После обхода $(1+)$ они будут 0 и 2π ; после обхода $(0+)$ эти аргументы станут 2π и 2π ; после обхода $(1-)$ значения их будут 2π и 0, и, наконец, после обхода $(0-)$ оба аргумента будут равны нулю, так что конечное значение подинтегральной функции будет такое же, как и начальное.

Легко видеть, что, поскольку путь интегрирования можно деформировать любым образом, лишь бы только он не переходил через точки ветвления 0, 1 подинтегральной функции, этот путь можно

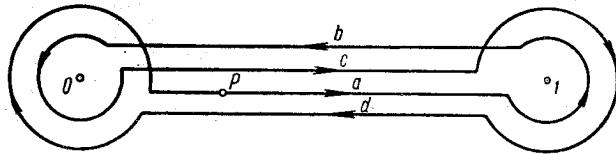


Рис. 2.

взять, как показано на рисунке, где четыре параллельные прямые подразумеваются совпадающими с вещественной осью.

Если вещественные части α и β положительны, то интегралы по окружностям стремятся к нулю, когда радиусы окружностей стремятся к нулю²⁾. На путях же a , b , c , d подинтегральная функция равна соответственно

$$t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1}, \quad t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} e^{2\pi i(\beta-1)}, \\ t^{\alpha-1} e^{2\pi i(\alpha-1)} (1-t)^{\beta-1} e^{2\pi i(\beta-1)}, \quad t^{\alpha-1} e^{2\pi i(\alpha-1)} (1-t)^{\beta-1},$$

где аргументы величин t и $1-t$ теперь равны нулю на всех путях.

¹⁾ Pochhammer, Math. Ann., XXXV (1890), 495. Применение интегралов по двойным петлям принадлежит, по-видимому, Жордану (Jordan, Courz d'Analyse, III (1887)).

²⁾ Доказательство этого не затруднит читателя.

Отсюда следует, что $\epsilon(\alpha, \beta)$ можно представить как сумму четырех (возможно, несобственных) интегралов, именно:

$$\begin{aligned}\epsilon(\alpha, \beta) = & e^{-\pi l(\alpha+\beta)} \left[\int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt + \right. \\ & + \int_1^0 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} e^{2\pi l\beta} dt + \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} e^{2\pi l(\alpha+\beta)} dt + \\ & \left. + \int_1^0 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} e^{2\pi l\alpha} dt \right]\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}\epsilon(\alpha, \beta) = & e^{-\pi l(\alpha+\beta)} (1 - e^{2\pi l\alpha}) (1 - e^{2\pi l\beta}) \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt = \\ = & -4 \sin(\alpha\pi) \sin(\beta\pi) \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} = \frac{-4\pi^2}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)\Gamma(\alpha+\beta)}.\end{aligned}$$

Но $\epsilon(\alpha, \beta)$ и это последнее выражение являются аналитическими функциями от α и β для *всех* значений α и β . Поэтому, по теории аналитического продолжения, это равенство, доказанное для случая, когда вещественные части α и β положительны, сохраняет силу для всех значений α и β . Итак, мы доказали, что для *всех* значений α и β

$$\epsilon(\alpha, \beta) = \frac{-4\pi^2}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

12.5. Интеграл Дирихле¹⁾

Покажем теперь, как кратный интеграл

$$I = \int \int \dots \int f(t_1 + t_2 + \dots + t_n) t_1^{\alpha_1-1} t_2^{\alpha_2-1} \dots t_n^{\alpha_n-1} dt_1 dt_2 \dots dt_n$$

может быть преобразован в простой, если предположить, что f — непрерывная функция, $\alpha_r > 0$ ($r = 1, 2, \dots, n$) и что интегрирование распространяется на все положительные значения переменных такие, что $t_1 + t_2 + \dots + t_n \leqslant 1$.

Чтобы упростить выражение

$$\int_0^{1-\lambda} \int_0^{1-\lambda-T} f(t+T+\lambda) t^{\alpha-1} T^{\beta-1} dt dT$$

¹⁾ Dirichlet, Werke, I, 375, 391.

(где мы написали t, T, α, β вместо $t_1, t_2, \alpha_1, \alpha_2$ и λ вместо $t_3 + t_4 + \dots + t_n$), положим $t = \frac{T(1-v)}{v}$. Тогда получим (при $\lambda \neq 0$)

$$\int_0^{1-\lambda} \int_{\frac{T}{1-\lambda}}^1 f\left(\lambda + \frac{T}{v}\right) (1-v)^{\alpha-1} v^{-\alpha-1} T^{\alpha+\beta-1} dv dT$$

или, изменив порядок интегрирования (§ 4.51, часть I),

$$\int_0^1 \int_0^{(1-\lambda)v} f\left(\lambda + \frac{T}{v}\right) (1-v)^{\alpha-1} v^{-\alpha-1} T^{\alpha+\beta-1} dT dv.$$

Положив $T = v\tau_2$, получим

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^{1-\lambda} f(\lambda + \tau_2) (1-v)^{\alpha-1} v^{\beta-1} \tau_2^{\alpha+\beta-1} d\tau_2 dv = \\ = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^{1-\lambda} f(\lambda + \tau_2) \tau_2^{\alpha+\beta-1} d\tau_2. \end{aligned}$$

Отсюда

$$I = \frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)} \int \int \dots \int f(\tau_2 + t_3 + \dots + t_n) \tau_2^{\alpha_1+\alpha_2-1} t_3^{\alpha_3-1} \dots t_n^{\alpha_n-1} d\tau_2 dt_3 \dots dt_n,$$

причем интегрирование распространяется на все такие положительные значения переменных, что $\tau_2 + t_3 + \dots + t_n \leq 1$.

Редуцируя таким же образом дальше, найдем:

$$I = \frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\dots\Gamma(\alpha_n)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n)} \int_0^1 f(\tau) \tau^{\Sigma\alpha-1} d\tau,$$

что и представляет собой результат, полученный Дирихле.

Пример 1. Привести интеграл

$$\int \int \int f \left\{ \left(\frac{x}{a} \right)^\alpha + \left(\frac{y}{b} \right)^\beta + \left(\frac{z}{c} \right)^\gamma \right\} x^{p-1} y^{q-1} z^{r-1} dx dy dz$$

к простому интегралу; область интегрирования распространяется на все такие положительные значения переменных, что

$$\left(\frac{x}{a} \right)^\alpha + \left(\frac{y}{b} \right)^\beta + \left(\frac{z}{c} \right)^\gamma \leq 1,$$

причем предполагается, что $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma, p, q, r$ положительны.

(Dirichlet)

Пример 2. Вычислить $\int \int x^p y^q dx dy$, где область интегрирования определяется неравенствами: $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x^m + y^n \leq 1$, m и n положительны.

(Pembroke, 1907)

Пример 3. Показать, что момент инерции однородного эллипсоида плотности 1, взятый относительно оси z , равен $\frac{4}{15}(a^2 + b^2)\pi abc$, где a , b , c — полуоси.

Пример 4. Показать, что площадь астроиды $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = l^{\frac{2}{3}}$ равна $\frac{3}{8}\pi l^2$.

ЛИТЕРАТУРА

N. Nielsen, Handbuch der Theorie der Gamma-funktion¹⁾ (Leipzig, 1906).

O. Schlömilch, Compendium der höheren Analysis, II (Brunswick, 1874).

E. L. Lindelöf, Le Calcul des Résidus, Ch. IV (Paris, 1905).

A Pringsheim, Math. Ann., XXXI (1888), 455—481.

Hj. Mellin, Math. Ann., LXVIII (1910), 305—337.

Н. Н. Лебедев, Специальные функции и их приложения, Гостехиздат (1953).

ПРИМЕРЫ

1. Показать, что

$$(1-z) \left(1 + \frac{z}{2}\right) \left(1 - \frac{z}{3}\right) \left(1 + \frac{z}{4}\right) \dots = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{2}z\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}z\right)}.$$

(Trinity, 1897)

2. Показать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{2}x} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{3}x} \cdots \frac{1}{1 + \frac{1}{n}x} n^x = \Gamma(x+1).$$

(Trinity, 1885)

3. Показать, что

$$\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} - \frac{\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = 2 \lg 2.$$

(Jesus, 1903)

4. Показать, что

$$\frac{\left\{ \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \right\}^4}{16\pi^2} = \frac{3^2}{3^2 - 1} \cdot \frac{5^2 - 1}{5^2} \cdot \frac{7^2}{7^2 - 1} \cdot \frac{9^2 - 1}{9^2} \cdot \frac{11^2}{11^2 - 1} \cdots$$

(Trinity, 1891)

¹⁾ Этот труд содержит полную библиографию.

5. Показать, что

$$\prod_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{(n-\alpha)(n+\beta+\gamma)}{(n+\beta)(n+\gamma)} \left(1 + \frac{\alpha}{n+1} \right) \right\} = -\frac{1}{\pi} \sin(\alpha\pi) B(\beta, \gamma).$$

(Trinity, 1905)

6. Показать, что

$$\prod_{r=1}^8 \Gamma\left(\frac{r}{3}\right) = \frac{640}{3^6} \left(\frac{\pi}{\sqrt[3]{3}}\right)^3.$$

(Peterhouse, 1906)

7. Показать, что при $z = i\zeta$, где ζ вещественно,

$$|\Gamma(z)| = \sqrt{\frac{\pi}{\zeta \operatorname{sh} \pi\zeta}}.$$

(Trinity, 1904)

8. Показать, что при x положительном ¹⁾

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n!}{2^{2n} \cdot n! \cdot n!} \frac{1}{x+n}.$$

(Math. Trip., 1897)

9. Показать, что при a положительном

$$\frac{\Gamma(z)\Gamma(a+1)}{\Gamma(z+a)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a \cdot (a-1) \cdot (a-2) \dots (a-n)}{n!} \frac{1}{z+n}.$$

10. Показать, что при $x > 0$ для $P(x) = \int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt$ имеют место соотношения

$$P(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{1!} \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2!} \frac{1}{x+2} - \frac{1}{3!} \frac{1}{x+3} + \dots$$

и

$$P(x+1) = xP(x) - e^{-1}.$$

11. Показать, что при $\lambda > 0$, $x > 0$, $-\frac{1}{2}\pi < \alpha < \frac{1}{2}\pi$

$$\int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-\lambda t \cos \alpha} \cos(\lambda t \sin \alpha) dt = \lambda^{-x} \Gamma(x) \cos \alpha x,$$

$$\int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-\lambda t \cos \alpha} \sin(\lambda t \sin \alpha) dt = \lambda^{-x} \Gamma(x) \sin \alpha x.$$

(Euler)

¹⁾ Этот и некоторые другие примеры легче всего решить, пользуясь результатом § 14.11.

12. Доказать, что при $b > 0$

$$\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x^z} dx = \frac{1}{2} \pi b^{z-1} \frac{\operatorname{cosec}\left(\frac{1}{2}\pi z\right)}{\Gamma(z)} \quad \text{при } 0 < z < 2,$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos bx}{x^z} dx = \frac{1}{2} \pi b^{z-1} \frac{\sec\left(\frac{1}{2}\pi z\right)}{\Gamma(z)} \quad \text{при } 0 < z < 1.$$

(Euler)

13. Доказать, что при $0 < n < 1$

$$\int_0^\infty (1+x)^{n-1} \cos x dx = \Gamma(n) \left\{ \cos\left(\frac{n\pi}{2} - 1\right) - \frac{1}{\Gamma(n+1)} + \frac{1}{\Gamma(n+3)} + \dots \right\}.$$

(Peterhouse, 1895)

14. Взяв за контур интегрирования параболу с вершиной в начале координат, вывести из формулы

$$\Gamma(a) = -\frac{1}{2i \sin \alpha\pi} \int_{\infty}^{(0+)} (-z)^{a-1} e^{-z} dz$$

формулу

$$\Gamma(a) = \frac{1}{2 \sin \alpha\pi} \int_0^\infty e^{-x^2} x^{a-1} (1+x^2)^{\frac{1}{2}-a} [3 \sin \{x + \alpha \operatorname{arcctg}(-x)\} + \\ + \sin \{x + (a-2) \operatorname{arcctg}(-x)\}] dx,$$

где arcctg обозначает тупой угол.

(Bourguet, Acta Math., I, 367)

15. Показать, что если вещественные части a_n положительны и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n^2}$ сходится, то бесконечное произведение

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\Gamma(a_n)}{\Gamma(z+a_n)} \exp \left\{ \sum_{s=1}^m \frac{z^s}{s!} \psi^{(s)}(a_n) \right\} \right],$$

где

$$\psi^{(s)}(z) = \frac{d^s}{dz^s} \lg \Gamma(z),$$

будет сходящимся при $m > 2$.

(Math. Trip., 1907)