Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон

Курс современного анализа

II

ØM

A COURSE OF MODERN ANALYSIS

AN INTRODUCTION TO THE GENERAL THEORY OF INFINITE PROCESSES AND OF ANALYTIC FUNCTIONS; WITH AN ACCOUNT OF THE PRINCIPAL TRANSCENDENTAL FUNCTIONS

BY

E. T. WHITTAKER, Sc. D., F. R. S.

Professor of Mathematics in the University of Edinburgh

AND

G. N. WATSON, Sc. D., F. R. S.

Professor of Mathematics in the University of Birmingham

FOURTH EDITION

CAMBRIDGE
AT THE UNIVERSITY PRESS
1927

Э. Т. УИТТЕКЕР и Дж. Н. ВАТСОН

КУРС СОВРЕМЕННОГО АНАЛИЗА

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ

ПЕРЕВОД С АНГЛИЙСКОГО
ПОД РЕДАКЦИЕЙ Ф. В. ШИРОКОВА

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1963

СОДЕРЖАНИЕ

ГЛАВА 12

ГАММА-ФУНКЦИЯ

12.1. Определение гамма-функции. Произведение Вейерштрасса

Гамма-функция[1]) $\Gamma(z)$ впервые была определена Эйлером как предел произведения (§ 12.11), из которого можно получить интеграл $\int\limits_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,dt$, но для изложения теории этой функции удобнее определять ее посредством бесконечного произведения в канонической форме Вейерштрасса.

Рассмотрим бесконечное произведение

$$ze^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}\right\},$$

где

$$\gamma=\lim_{m\to\infty}\left\{\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ \ldots\ +\frac{1}{m}-\lg m\right\}=0{,}5772157\ldots$$

[Постоянная γ известна под названием постоянной Эйлера или Маскерони (Mascheroni). Ее существование вытекает из следующего: если

$$u_n=\int\limits_0^1\frac{t}{n(n+t)}\,dt=\frac{1}{n}-\lg\frac{n+1}{n},$$

то u_n будет положительным и меньшим, чем $\int\limits_0^1\frac{dt}{n^2}=\frac{1}{n^2}$; поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ сходится,

$$\lim_{m\to\infty}\left\{\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ \ldots\ +\frac{1}{m}-\lg m\right\}=\lim_{m\to\infty}\left\{\sum_{n=1}^{m}u_n+\lg\frac{m+1}{m}\right\}=\sum_{n=1}^{\infty}u_n.$$

---

[1]) Обозначение $\Gamma(z)$ было введено Лежандром в 1814 г.

Значение γ было вычислено Адамсом (J. C. Adams) с 260 десятичными знаками].

Рассматриваемое произведение представляет аналитическую функцию от z для всех значений z; ибо если N — такое целое число, что $|z| \leqslant \frac{1}{2}N$, то при $n > N$ мы имеем[1])

$$\left|\lg\left(1+\frac{z}{n}\right)-\frac{z}{n}\right| = \left|-\frac{1}{2}\frac{z^2}{n^2}+\frac{1}{3}\frac{z^3}{n^3}-\ldots\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{|z|^2}{n^2}\left\{1+\left|\frac{z}{n}\right|+\left|\frac{z^2}{n^2}\right|+\ldots\right\} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{4}\frac{N^2}{n^2}\left\{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots\right\} \leqslant \frac{1}{2}\frac{N^2}{n^2}.$$

Так как ряд $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}\{N^2/(2n^2)\}$ сходится, то при $|z| \leqslant \frac{1}{2}N$ ряд

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}\left\{\lg\left(1+\frac{z}{n}\right)-\frac{z}{n}\right\}$$

будет абсолютно и равномерно сходящимся рядом аналитических функций и, следовательно, сам будет представлять аналитическую функцию (§ 5.3, часть I). Взяв e с показателем степени, равным этому ряду, находим (§ 5.3, часть I), что бесконечное произведение

$$\prod_{n=N+1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}\right\},$$

а потому и бесконечное произведение

$$ze^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}\right\}$$

будут аналитическими функциями при $|z| \leqslant \frac{1}{2}N$, где N — произвольное целое число. Иначе говоря, последнее произведение будет аналитической функцией для всех конечных значений z.

Гамма-функция была определена Вейерштрассом[2]) с помощью равенства

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}\right\}.$$

---

[1]) Беря главное значение $\lg\left(1+\frac{z}{n}\right)$.

[2]) Journ. für Math. LI (1856). Эта формула для $\Gamma(z)$ была получена из формулы Эйлера (см. § 12.11) в 1848 г. Ньюманом (Newmann F. W., Cambridge and Dublin Math. Journ., III (1848), 60).

Из этого равенства ясно, что *функция* $\Gamma(z)$ *аналитична всюду, за исключением точек* $z=0, -1, -2, \ldots$, *в которых она имеет простые полюсы.*

Гёльдером [1]), Муром [2]) и Барнсом [3]) были опубликованы доказательства теоремы, известной еще Вейерштрассу, что гамма-функция не может удовлетворять никакому дифференциальному уравнению с рациональными коэффициентами.

Пример 1. Доказать, что

$$\Gamma(1)=1, \quad \Gamma'(1)=-\gamma,$$

где γ есть постоянная Эйлера.

[Продифференцируйте логарифмически равенство

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=ze^{\gamma z}\prod_{1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}\right\}$$

(§ 4.7, часть I) и подставьте в результат $z=1$.]

Пример 2. Показать, что

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{1-(1-t)^n}{t}\,dt,$$

и, исходя отсюда, доказать, что постоянная Эйлера равна пределу [4])

$$\lim_{n\to\infty}\left[\int_0^1\left\{1-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right\}\frac{dt}{t}-\int_1^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\frac{dt}{t}\right].$$

Пример 3. Показать, что

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1-\frac{x}{z+n}\right)e^{\frac{x}{n}}\right\}=\frac{e^{\gamma x}\Gamma(z+1)}{\Gamma(z-x+1)}.$$

---

[1]) Hölder, Math. Ann., XXVIII (1887), 1—13.
[2]) Moore, Math. Ann., XLVIII (1897), 70—74.
[3]) Barnes, Messenger of Math., XXIX, (1900), 122—128.
[4]) Читатель увидит ниже (§ 12.2, пример 4), что этот предел равен

$$\int_0^1(1-e^{-t})\frac{dt}{t}-\int_1^{\infty}\frac{e^{-t}\,dt}{t}.$$

§ 12.11. Формула Эйлера для гамма-функции

По определению бесконечного произведения имеем

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z\left[\lim_{m\to\infty} e^{\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{m}-\lg m\right)z}\right]\left[\lim_{m\to\infty}\prod_{n=1}^{m}\left\{\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}\right\}\right] =$$

$$= z\lim_{m\to\infty}\left[e^{\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{m}-\lg m\right)z}\prod_{n=1}^{m}\left\{\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}\right\}\right] =$$

$$= z\lim_{m\to\infty}\left[m^{-z}\prod_{n=1}^{m}\left(1+\frac{z}{n}\right)\right] =$$

$$= z\lim_{m\to\infty}\left[\prod_{n=1}^{m-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-z}\prod_{n=1}^{m}\left(1+\frac{z}{n}\right)\right] =$$

$$= z\lim_{m\to\infty}\left[\prod_{n=1}^{m}\left\{\left(1+\frac{z}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-z}\right\}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{z}\right].$$

Отсюда

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{z}\left(1+\frac{z}{n}\right)^{-1}\right\}.$$

Эта формула принадлежит Эйлеру[1]), она имеет место всюду, кроме точек $z = 0, -1, -2, \ldots$

Пример. Доказать, что

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 2\ldots(n-1)}{z(z+1)\ldots(z+n-1)}n^{z}.$$

(Euler)

12.12. Уравнение в конечных разностях для гамма-функции

Покажем теперь, что функция $\Gamma(z)$ удовлетворяет уравнению в конечных разностях

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

---

[1]) Эта формула была дана в 1729 г. в письме к Гольдбаху, напечатанном в «Corresp. Math.» Фусса (Fuss).

В самом деле, если z не является целым неположительным числом, то по формуле Эйлера имеем

$$\Gamma(z+1)/\Gamma(z)=$$

$$=\frac{1}{z+1}\left[\lim_{m\to\infty}\prod_{n=1}^{m}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{z+1}}{1+\frac{z+1}{n}}\right]:\left[\frac{1}{z}\lim_{m\to\infty}\prod_{n=1}^{m}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{z}}{1+\frac{z}{n}}\right]=$$

$$=\frac{z}{z+1}\lim_{m\to\infty}\prod_{n=1}^{m}\left\{\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)(z+n)}{z+n+1}\right\}=z\lim_{m\to\infty}\frac{m+1}{z+m+1}=z.$$

Это — одно из наиболее важных свойств гамма-функции.

Так как $\Gamma(1)=1$, то

$$\Gamma(z)=(z-1)!,$$

когда z — целое положительное число.

Пример. Доказать, что

$$\frac{1}{\Gamma(z+1)}+\frac{1}{\Gamma(z+2)}+\frac{1}{\Gamma(z+3)}+\ldots=$$

$$=\frac{e}{\Gamma(z)}\left\{\frac{1}{z}-\frac{1}{1!}\frac{1}{z+1}+\frac{1}{2!}\frac{1}{z+2}-\ldots\right\}.$$

[Следует рассмотреть выражение

$$\frac{1}{z}+\frac{1}{z(z+1)}+\frac{1}{z(z+1)(z+2)}+\ldots+\frac{1}{z(z+1)\ldots(z+m)}.$$

Оно может быть разложено на простейшие дроби и приведено к виду $\sum_{n=0}^{m}\frac{a_n}{z+n}$, где

$$a_n=\frac{(-1)^n}{n!}\left\{1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{(m-n)!}\right\}=\frac{(-1)^n}{n!}\left\{e-\sum_{r=m-n+1}^{\infty}\frac{1}{r!}\right\}.$$

Замечая, что $\sum_{r=m-n+1}^{\infty}\frac{1}{r!}<\frac{e}{(m-n+1)!}$, надо доказать, что

$$\sum_{n=0}^{m}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{z+n}\left\{\sum_{r=m-n+1}^{\infty}\frac{1}{r!}\right\}\to 0,$$

когда $m\to\infty$, а z не равно $0, -1, -2, \ldots$]

12.13. Вычисление некоторых бесконечных произведений

При помощи гамма-функции можно вычислять бесконечные произведения вида

$$\prod_{n=1}^{\infty} u_n,$$

где u_n — любая рациональная функция индекса n.

Действительно, разлагая u_n на множители, мы можем написать это произведение в виде

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{A(n-a_1)(n-a_2)\ldots(n-a_k)}{(n-b_1)(n-b_2)\ldots(n-b_l)} \right\};$$

предполагается, что ни один из множителей знаменателя не равен нулю.

Для сходимости этого произведения, очевидно, необходимо, чтобы число множителей числителя равнялось числу множителей знаменателя и чтобы $A=1$, ибо в противном случае u_n не будет стремиться к единице, когда n стремится к бесконечности. Поэтому мы имеем $k=l$ и, обозначая произведение через P, можем написать

$$P=\prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{(n-a_1)\ldots(n-a_k)}{(n-b_1)\ldots(n-b_k)} \right\}.$$

Общий член в этом произведении можно написать в виде

$$\left(1-\frac{a_1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{a_k}{n}\right)\left(1-\frac{b_1}{n}\right)^{-1}\ldots\left(1-\frac{b_k}{n}\right)^{-1}=$$
$$=1-\frac{a_1+\ldots+a_k-b_1-\ldots-b_k}{n}+A_n,$$

где A_n будет $O(n^{-2})$ при больших n.

Для того чтобы бесконечное произведение было абсолютно сходящимся, необходимо (§ 2.7, часть I), чтобы

$$a_1+\ldots+a_k-b_1-\ldots-b_k=0.$$

Мы можем поэтому, не меняя значения общего множителя рассматриваемого произведения, ввести в него множитель

$$\exp\{n^{-1}(a_1+\ldots+a_k-b_1-\ldots-b_k)\}.$$

Таким образом, получим

$$P=\prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\left(1-\frac{a_1}{n}\right)e^{\frac{a_1}{n}}\ldots\left(1-\frac{a_k}{n}\right)e^{\frac{a_k}{n}}}{\left(1-\frac{b_1}{n}\right)e^{\frac{b_1}{n}}\ldots\left(1-\frac{b_k}{n}\right)e^{\frac{b_k}{n}}} \right\}.$$

Но из определения гамма-функции по Вейерштрассу видно, что

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1-\frac{z}{n}\right)e^{\frac{z}{n}}\right\}=\frac{1}{-z\Gamma(-z)e^{-\gamma z}}$$

и, таким образом,

$$P=\frac{b_1\Gamma(-b_1)\ldots b_k\Gamma(-b_k)}{a_1\Gamma(-a_1)\ldots a_k\Gamma(-a_k)}=\prod_{m=1}^{k}\frac{\Gamma(1-b_m)}{\Gamma(1-a_m)}.$$

Эта формула выражает бесконечное произведение P через гамма-функцию.

Пример 1. Доказать, что

$$\prod_{s=1}^{\infty}\frac{s(a+b+s)}{(a+s)(b+s)}=\frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+1)}.$$

Пример 2. Показать, что при $a=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$ имеет место равенство

$$x\left(1-\frac{x}{1^n}\right)\left(1-\frac{x}{2^n}\right)\ldots=\left\{-\Gamma\left(-x^{\frac{1}{n}}\right)\Gamma\left(-ax^{\frac{1}{n}}\right)\ldots\Gamma\left(-a^{n-1}x^{\frac{1}{n}}\right)\right\}^{-1}.$$

§ 12.14. Связь между гамма-функцией и тригонометрическими функциями

Докажем еще одно весьма важное свойство гамма-функции, выражаемое равенством [1])

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}.$$

По определению Вейерштрасса (§ 12.1) имеем

$$\Gamma(z)\Gamma(-z)=-\frac{1}{z^2}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}\right\}^{-1}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1-\frac{z}{n}\right)e^{\frac{z}{n}}\right\}^{-1}=$$

$$=\frac{-\pi}{z\sin\pi z},$$

если примем во внимание пример 1 § 7.5 части I. Так как согласно § 12.12

$$\Gamma(1-z)=-z\Gamma(-z),$$

то отсюда и получим требуемый результат.

---

[1]) Эту формулу часто называют *формулой дополнения*. — *Прим. ред.*

Следствие 1. Если мы дадим z значение $\frac{1}{2}$, то полученная формула дает $\left\{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right\}^2=\pi$, и так как по формуле Вейерштрасса $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ положительно, то мы имеем

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\pi^{\frac{1}{2}}.$$

Следствие 2. Если $\psi(z)=\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$, то

$$\psi(1-z)-\psi(z)=\pi\operatorname{ctg}\pi z.$$

12.15. Теорема умножения Гаусса [1]) и Лежандра

Докажем равенство

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(z+\frac{2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(z+\frac{n-1}{n}\right)=(2\pi)^{\frac{1}{2}(n-1)}n^{\frac{1}{2}-nz}\Gamma(nz).$$

Положим

$$\varphi(z)=\frac{n^{nz}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{n}\right)\ldots\Gamma\left(z+\frac{n-1}{n}\right)}{n\Gamma(nz)}.$$

Тогда имеем по формуле Эйлера (пример § 12.11)

$$\varphi(z)=\frac{n^{nz}\prod\limits_{r=0}^{n-1}\lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{1\cdot 2\ldots(m-1)\cdot m^{z+\frac{r}{n}}}{\left(z+\frac{r}{n}\right)\left(z+\frac{r}{n}+1\right)\ldots\left(z+\frac{r}{n}+m-1\right)}}{n\lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{1\cdot 2\ldots(nm-1)\cdot(nm)^{nz}}{nz(nz+1)\ldots(nz+nm-1)}}=$$

$$=n^{nz-1}\lim_{m\to\infty}\frac{\{(m-1)!\}^n m^{nz+\frac{1}{2}(n-1)}n^{mn}}{(nm-1)!\,(nm)^{nz}}=$$

$$=\lim_{m\to\infty}\frac{\{(m-1)!\}^n m^{\frac{1}{2}(n-1)}n^{mn-1}}{(nm-1)!}.$$

Из этого последнего выражения видно, что $\varphi(z)$ не зависит от z. Таким образом, $\varphi(z)$ равна значению, которое она имеет при $z=\frac{1}{n}$, т. е.

$$\varphi(z)=\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right).$$

---

[1]) Gauss, Werke, III, 149. Случай $n=2$ был дан Лежандром.

Следовательно,

$$\{\varphi(z)\}^2 = \prod_{r=1}^{n-1} \left\{ \Gamma\left(\frac{r}{n}\right) \Gamma\left(1 - \frac{r}{n}\right) \right\} =$$

$$= \frac{\pi^{n-1}}{\sin\frac{\pi}{n} \sin\frac{2\pi}{n} \ldots \sin\frac{(n-1)\pi}{n}} = \frac{(2\pi)^{n-1}}{n}\ ^{1)},$$

или так как $\varphi(n^{-1})$ положительна, то

$$\varphi(z) = (2\pi)^{\frac{1}{2}(n-1)} n^{-\frac{1}{2}},$$

откуда

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{n}\right) \ldots \Gamma\left(z + \frac{n-1}{n}\right) = n^{\frac{1}{2} - nz} (2\pi)^{\frac{1}{2}(n-1)} \Gamma(nz).$$

Следствие. Полагая $n = 2$, имеем

$$2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) = \pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(2z).$$

Эта формула называется *формулой удвоения.*

Пример. Пусть $B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$; показать, что

$$B(np, nq) = n^{-nq} \frac{B(p, q) B\left(p + \frac{1}{n}, q\right) \ldots B\left(p + \frac{n-1}{n}, q\right)}{B(q, q) B(2q, q) \ldots B((n-1)q, q)}.$$

12.16. Разложения для логарифмических производных гамма-функции

Мы имеем

$$\{\Gamma(z+1)\}^{-1} = e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}} \right\}.$$

Взяв логарифмическую производную (§ 4.7, часть I), получим

$$\frac{d \lg \Gamma(z+1)}{dz} = -\gamma + \frac{z}{1(z+1)} + \frac{z}{2(z+2)} + \frac{z}{3(z+3)} + \ldots$$

или, так как $\lg \Gamma(z+1) = \lg z + \lg \Gamma(z)$,

$$\frac{d}{dz} \lg \Gamma(z) = -\gamma - \frac{1}{z} + z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(z+n)}.$$

---

[1]) Вычисление $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{\pi k}{n}$ см., например, в книге: М. А. Лаврентьев и Б. В. Шабат, Методы теории функций комплексного переменного, Физматгиз, 1958, стр. 558. — *Прим. ред.*

Дифференцируя вторично, получаем

$$\frac{d^2}{dz^2}\lg\Gamma(z+1)=\frac{d}{dz}\left\{\frac{z}{1(z+1)}+\frac{z}{2(z+2)}+\ldots\right\}=\frac{1}{(z+1)^2}+\frac{1}{(z+2)^2}+\ldots$$

Эти разложения иногда применяются в приложениях.

12.2. Интегральное представление Эйлера для $\Gamma(z)$

Несобственный интеграл $\int\limits_0^\infty e^{-t}t^{z-1}\,dt$ представляет аналитическую функцию от z, когда [1]) вещественная часть z положительна (§ 5.32, часть I). Он называется *интегралом Эйлера второго рода* [2]). Покажем теперь, что при $\operatorname{Re} z>0$ этот интеграл равен $\Gamma(z)$. Обозначив вещественную часть z через x, имеем $x>0$. Если теперь обозначить [3])

$$\Pi(z,\ n)=\int\limits_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dt,$$

то, положив $t=n\tau$, получим

$$\Pi(z,\ n)=n^z\int\limits_0^1(1-\tau)^n\tau^{z-1}\,d\tau;$$

n-кратным интегрированием по частям легко показать, что при $x>0$ и n целом положительном

$$\int\limits_0^1(1-\tau)^n\tau^{z-1}\,d\tau=$$

$$=\left[\frac{1}{z}\tau^z(1-\tau)^n\right]_0^1+\frac{n}{z}\int\limits_0^1(1-\tau)^{n-1}\tau^z\,d\tau=\ldots=$$

$$=\frac{n(n-1)\ldots 1}{z(z+1)\ldots(z+n-1)}\int\limits_0^1\tau^{z+n-1}\,d\tau,$$

---

[1]) Если вещественная часть z не положительна, то интеграл не сходится из-за особенности подинтегрального выражения при $t=0$.

[2]) Это название было дано Лежандром, см. § 12.4 об интеграле Эйлера первого рода.

[3]) Многозначность функции t^{z-1} устраняется, если определить эту функцию равенством $t^{z-1}=e^{(z-1)\lg t}$, где $\lg t$ веществен.

а потому

$$\Pi(z, n) = \frac{1 \cdot 2 \ldots n}{z(z+1)\ldots(z+n)} n^z.$$

Отсюда, согласно примеру § 12.11, $\Pi(z, n) \to \Gamma(z)$, когда $n \to \infty$, т. е.

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}\, dt.$$

Итак, если положим

$$\Gamma_1(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt,$$

то имеем

$$\Gamma_1(z) - \Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \left[\int_0^n \left\{ e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right\} t^{z-1} dt + \int_n^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \right].$$

Но

$$\lim_{n\to\infty} \int_n^\infty e^{-t} t^{z-1} dt = 0,$$

ибо интеграл $\int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$ сходится.

Для того чтобы показать, что и первый интеграл в выражении для $\Gamma_1(z) - \Gamma(z)$ имеет пределом нуль, заметим, что

$$0 \leqslant e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leqslant n^{-1} t^2 e^{-t}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant n.$$

[Чтобы установить эти неравенства, мы рассуждаем следующим образом. Если $0 \leqslant y < 1$, то, как это следует из разложений функций e^y и $(1-y)^{-1}$ в ряды, имеют место неравенства

$$1 + y \leqslant e^y \leqslant (1-y)^{-1}.$$

Подставив $\frac{t}{n}$ вместо y, будем иметь

$$\left(1 + \frac{t}{n}\right)^{-n} \geqslant e^{-t} \geqslant \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n,$$

а потому

$$0 \leqslant e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = e^{-t}\left\{1 - e^t \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right\} \leqslant e^{-t}\left\{1 - \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n\right\}.$$

Далее, если $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, то $(1-\alpha)^n \geqslant 1 - n\alpha$. При $n\alpha \geqslant 1$ это очевидно, а при $n\alpha < 1$ легко доказывается методом индукции. Положив здесь $\alpha = \frac{t^2}{n^2}$, получим

$$1 - \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n \leqslant \frac{t^2}{n}$$

и, следовательно, [1])

$$0 \leqslant e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leqslant e^{-t}\frac{t^2}{n},$$

что и требовалось доказать.]

Из доказанных неравенств непосредственно получаем, что

$$\left|\int_0^n \left\{e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right\} t^{z-1} dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^n n^{-1} e^{-t} t^{x+1} dt < n^{-1} \int_0^\infty e^{-t} t^{x+1} dt \to 0,$$

когда $n \to \infty$, ибо последний интеграл сходится.

Следовательно, $\Gamma_1(z) = \Gamma(z)$, когда интеграл, которым определяется $\Gamma_1(z)$, сходится, т. е.

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt,$$

когда вещественная часть z положительна.

Таким образом, когда вещественная часть z положительна, $\Gamma(z)$ можно определять как этим интегралом, так и бесконечным произведением Вейерштрасса.

Пример 1. Доказать, что при $\operatorname{Re} z > 0$

$$\Gamma(z) = \int_0^1 \left(\lg \frac{1}{x}\right)^{z-1} dx.$$

Пример 2. Доказать, что при $\operatorname{Re} z > 0$ и $\operatorname{Re} s > 0$

$$\int_0^\infty e^{-zx} x^{s-1} dx = \frac{\Gamma(s)}{z^s}.$$

---

[1]) Эти рассуждения представляют собой видоизменение способа, данного Шлёмильхом (Schlömilch, Compendium der höheren Analysis, II, 243). Простой способ получения менее точного неравенства (достаточного для требуемой цели) дан Бромуичем (Bromwich, Infinite Series, 459).

Пример 3. Доказать, что при $\operatorname{Re} z > 0$ и $\operatorname{Re} s > 1$

$$\frac{1}{(z+1)^s} + \frac{1}{(z+2)^s} + \frac{1}{(z+3)^s} + \ldots = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{e^{-xz} x^{s-1} dx}{e^x - 1}.$$

Пример 4. Из результата примера 2 § 12.1, пользуясь неравенством

$$0 \leqslant e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leqslant \frac{t^2 e^{-t}}{n},$$

получить, что

$$\gamma = \int_0^1 \frac{1 - e^{-t} - e^{-\frac{1}{t}}}{t} dt.$$

12.21. Распространение интегрального представления гамма-функции на случай отрицательного аргумента

Формула последнего параграфа непригодна для случая, когда вещественная часть z отрицательна. Коши [1]) и Залшютц [2]) показали тем не менее, что существует аналогичная формула и для отрицательных значений.

Она может быть получена следующим путем.

Рассмотрим функцию

$$\Gamma_2(z) = \int_0^\infty t^{z-1} \left(e^{-t} - 1 + t - \frac{t^2}{2!} + \ldots + (-1)^{k+1} \frac{t^k}{k!}\right) dt,$$

где k — целое число, такое, что $-k > x > -k-1$, x — вещественная часть z.

Интегрированием по частям получаем при $x < -1$

$$\Gamma_2(z) = \left[\frac{t^z}{z}\left(e^{-t} - 1 + t - \frac{t^2}{2!} + \ldots + (-1)^{k+1} \frac{t^k}{k!}\right)\right]_0^\infty +$$

$$+ \frac{1}{z} \int_0^\infty t^z \left(e^{-t} - 1 + t - \ldots + (-1)^k \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\right) dt.$$

Обинтегрированный член стремится к нулю при обоих пределах, так как $x + k$ отрицательно, а $x + k + 1$ положительно. Таким образом, имеем

$$\Gamma_2(z) = \frac{1}{z} \Gamma_2(z+1).$$

То же самое рассуждение применимо и в том случае, когда x лежит между 0 и -1, и приводит к формуле

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma_2(z) \qquad (0 > x > -1).$$

Последнее равенство показывает, что при $-1 < x < 0$

$$\Gamma_2(z) = \Gamma(z).$$

---

[1]) Cauchy, Exercices de Math. (1827), 91—92.

[2]) Saalschütz, Zs. für Math. und Phys., XXXII (1887), XXXIII (1888).

Из предпоследнего равенства следует затем, что $\Gamma_2(z)$ равно $\Gamma(z)$ для всех отрицательных значений $\operatorname{Re} z$, меньших -1. Таким образом, для всех отрицательных значений $\operatorname{Re} z$ мы имеем следующую формулу Коши и Залшютца:

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty t^{z-1}\left(e^{-t}-1+t-\frac{t^2}{2!}+\ldots+(-1)^{k+1}\frac{t^k}{k!}\right)dt,$$

где k — ближайшее целое число, меньшее $-\operatorname{Re} z$.

Пример. Пусть функция $P(\mu)$ определена для положительных значений μ равенством

$$P(\mu)=\int_0^1 x^{\mu-1}e^{-x}dx,$$

и пусть для отрицательных значений μ функция $P_1(\mu)$ определена равенством

$$P_1(\mu)=\int_0^1 x^{\mu-1}\left(e^{-x}-1+x-\ldots+(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k!}\right)dx,$$

где k — ближайшее целое число, меньшее $-\mu$. Показать, что

$$P_1(\mu)=P(\mu)-\frac{1}{\mu}+\frac{1}{1!(\mu+1)}-\ldots+(-1)^{k-1}\frac{1}{k!(\mu+k)}.$$

(Saalschütz)

12.22. Представление Ханкеля функции $\Gamma(z)$ в виде контурного интеграла

Интегралы, полученные для $\Gamma(z)$ в §§ 12.2, 12.21, являются лишь наиболее известными из обширного класса определенных интегралов, при помощи которых может быть определена гамма-функция. Наиболее общий интеграл этого класса принадлежит Ханкелю [1]). Этот интеграл мы сейчас и рассмотрим.

Пусть D — контур, который начинается в точке ρ на вещественной оси, обходит один раз начало координат против часовой стрелки и возвращается обратно в ρ.

Рассмотрим $\int_D (-t)^{z-1}e^{-t}dt$, когда вещественная часть z положительна, а само z не есть целое число.

Многозначную функцию $(-t)^{z-1}$ сделаем однозначной, приняв $(-t)^{z-1}=e^{(z-1)\lg(-t)}$, где $\lg(-t)$ веществен, когда t находится на отрицательной части вещественной оси, так что на контуре D имеем $-\pi\leqslant\arg(-t)\leqslant\pi$.

---

[1]) Hankel, Zs. für Math. und Phys., IX (1864), 7.

Подинтегральная функция не будет аналитической внутри D, но, по следствию 1 § 5.2 части I, путь интегрирования можно деформировать (не меняя значения интеграла) в путь, начинающийся в ρ, идущий вдоль вещественной оси до δ, описывающий окружность радиуса δ вокруг начала координат против часовой стрелки и возвращающийся обратно в ρ вдоль вещественной оси.

На вещественной оси в первой части этого нового пути интегрирования мы имеем $\arg(-t) = -\pi$, так что $(-t)^{z-1} = e^{-i\pi(z-1)}t^{z-1}$ (где $\lg t$ веществен), а на последней части пути $(-t)^{z-1} = e^{i\pi(z-1)}t^{z-1}$.

На окружности положим $-t = \delta e^{i\theta}$; тогда получим

$$\int_D (-t)^{z-1}e^{-t}dt = \int_\rho^\delta e^{-i\pi(z-1)}t^{z-1}e^{-t}dt +$$

$$+ \int_{-\pi}^{\pi} (\delta e^{i\theta})^{z-1}e^{\delta(\cos\theta + i\sin\theta)}\delta e^{i\theta} i\, d\theta + \int_\delta^\rho e^{i\pi(z-1)}t^{z-1}e^{-t}\,dt =$$

$$= -2i\sin\pi z\int_\delta^\rho t^{z-1}e^{-t}dt + i\delta^z\int_{-\pi}^{\pi} e^{iz\theta+\delta(\cos\theta+i\sin\theta)}\,d\theta.$$

Это соотношение справедливо для всех положительных значений $\delta \leqslant \rho$. Будем теперь приближать δ к 0; тогда $\delta^z \to 0$ и

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{iz\theta+\delta(\cos\theta+i\sin\theta)}\,d\theta \to \int_{-\pi}^{\pi} e^{iz\theta}\,d\theta,$$

так как подинтегральная функция стремится к своему пределу равномерно.

Следовательно, мы приходим к заключению, что равенство

$$\int_D (-t)^{z-1}e^{-t}\,dt = -2i\sin\pi z\int_0^\rho t^{z-1}\,e^{-t}\,dt$$

будет справедливым для всех положительных значений ρ. Пусть $\rho \to \infty$, и пусть C — контур, в который переходит D.

Тогда

$$\int_C (-t)^{z-1}e^{-t}dt = -2i\sin\pi z\int_0^\infty t^{z-1}\,e^{-t}\,dt$$

и, следовательно,

$$\Gamma(z) = -\frac{1}{2i\sin\pi z}\int_C (-t)^{z-1}\,e^{-t}\,dt.$$

Далее, поскольку контур C не проходит через точку $t = 0$, уже не надо требовать, чтобы вещественная часть z была положительной;

интеграл $\int\limits_C (-t)^{z-1}e^{-t}dt$ будет однозначной аналитической функцией z для всех значений z. *Поэтому, согласно* § 5.5 *части I, равенство, только что доказанное для случая, когда вещественная часть z положительна, сохраняет силу для всех значений z, за исключением значений* 0, ± 1, ± 2, ...

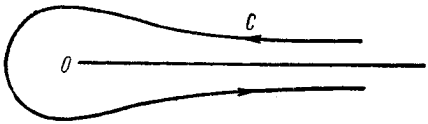

Рис. 1.

Следовательно, для всех значений z, за исключением 0, ± 1, ± 2, ...,

$$\Gamma(z) = -\frac{1}{2i\sin\pi z}\int\limits_C (-t)^{z-1}e^{-t}\,dt.$$

Это и есть *формула Ханкеля*. Если мы заменим в ней z на $1-z$ и используем формулу § 12.14, то получим дальнейший результат

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{i}{2\pi}\int\limits_C (-t)^{-z}e^{-t}\,dt.$$

Вместо $\int\limits_C$ мы будем писать $\int\limits_{\infty}^{+0}$, подразумевая под этим, что путь интегрирования идет из бесконечности на вещественной оси, обходит начало координат в положительном направлении и возвращается к исходной точке.

Пример 1. Показать, что если вещественная часть z положительна и a — какое-либо положительное постоянное число, то $\int (-t)^{-z}e^{-t}\,dt$ стремится к нулю при $\rho\to\infty$, когда путь интегрирования есть четверть окружности радиуса $\rho+a$ с центром в точке $-a$, концами которой служат точки ρ и $-a+i(\rho+a)$ или точки ρ и $-a-i(\rho+a)$.

Вывести формулу

$$\lim_{\rho\to\infty}\int\limits_{-a+i\rho}^{-a-i\rho}(-t)^{-z}e^{-t}\,dt = \lim_{\rho\to\infty}\int\limits_C (-t)^{-z}e^{-t}\,dt\,^{1)}$$

и отсюда, положив $t=-a-iu$, получить, что

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{a+iu}(a+iu)^{-z}\,du.$$

---

[1]) Здесь C — контур, представленный выше на рисунке. — *Прим. ред.*

[Эта формула была дана Лапласом (Laplace, Theorie Analitique des Probabilites (1812), 134) и по существу эквивалентна формуле Ханкеля с контурным интегралом.]

Пример 2. Взяв $a=1$ и положив $t=-1+i\operatorname{tg}\theta$ в примере 1, показать, что

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=\frac{e}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(\operatorname{tg}\theta-z\theta)\cos^{z-2}\theta\,d\theta.$$

Пример 3. Взяв за контур интегрирования параболу с фокусом в начале координат, показать, что при $a>0$ [1])

$$\Gamma(z)=\frac{2a^z e^a}{\sin\pi z}\int_0^\infty e^{-at^2}(1+t^2)^{z-\frac{1}{2}}\cos\{2at+(2z-1)\operatorname{arctg}t\}\,dt.$$

(Bourguet, Acta Math., I)

Пример 4. Найти значения x, для которых интеграл

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty t^{x-1}\sin t\,dt$$

будет сходящимся; для этих значений x выразить его через гамма-функцию и затем показать, что он равен

$$e^{-\gamma x}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1-\frac{x}{2n}\right)e^{x/(2n)}\right\}\Big/\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{x}{2n-1}\right)e^{-x/(2n-1)}\right\}.$$

(St. John's, 1902)

Пример 5. Доказать, что $\int_0^\infty(\lg t)^m\frac{\sin t}{t}\,dt$ сходится при $m>0$, и, пользуясь результатом примера 4, определить его величину при $m=1$ и $m=2$.

(St. John's, 1902)

12.3. Интегральное представление Гаусса для логарифмической производной от гамма-функции [2])

Представим теперь функцию $\frac{d}{dz}\lg\Gamma(z)=\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$ в виде несобственного интеграла, когда вещественная часть z положительна; рассматриваемая функция часто обозначается через $\psi(z)$. Но сначала нам нужна новая формула для γ.

---

[1]) a — расстояние от вершины до фокуса. — *Прим. ред.*

[2]) Gauss, Werke, III, 159.

Из формулы примера 4 § 12.2 находим

$$\gamma=\int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t}\,dt-\int_1^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,dt=\lim_{\delta\to 0}\left\{\int_\delta^1 \frac{dt}{t}-\int_\delta^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,dt\right\}=$$

$$=\lim_{\delta\to 0}\left\{\int_\Delta^1 \frac{dt}{t}-\int_\delta^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,dt\right\},$$

где $\Delta=1-e^{-\delta}$; замена δ на Δ допустима, так как

$$\int_\Delta^\delta \frac{dt}{t}=\lg\frac{\delta}{1-e^{-\delta}}\to 0 \quad \text{при} \quad \delta\to 0.$$

Положив $t=1-e^{-u}$ в первом из этих интегралов и обозначая затем u снова через t, получим

$$\gamma=\lim_{\delta\to 0}\left\{\int_\delta^\infty \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}\,dt-\int_\delta^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,dt\right\}=\int_0^\infty\left\{\frac{1}{1-e^{-t}}-\frac{1}{t}\right\}e^{-t}\,dt.$$

Это и есть необходимая нам формула для γ.

Чтобы получить формулу Гаусса, возьмем равенство (§ 12.16)

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}=-\gamma-\frac{1}{z}+\lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{z+m}\right)$$

и положим

$$\frac{1}{z+m}=\int_0^\infty e^{-t(z+m)}\,dt,$$

что допустимо при $m=0, 1, 2, \ldots,$ если вещественная часть z положительна.

Получаем

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}=-\gamma-\int_0^\infty e^{-zt}\,dt+\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty\sum_{m=1}^{n}\left(e^{-mt}-e^{-(m+z)t}\right)dt=$$

$$=-\gamma+\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{e^{-t}-e^{-zt}-e^{-(n+1)t}+e^{-(z+n+1)t}}{1-e^{-t}}\,dt=$$

$$=\int_0^\infty\left(\frac{e^{-t}}{t}-\frac{e^{-zt}}{1-e^{-t}}\right)dt-\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{1-e^{-zt}}{1-e^{-t}}\,e^{-(n+1)t}\,dt.$$

Но если $0 < t \leqslant 1$, то $\left|\frac{1-e^{-zt}}{1-e^{-t}}\right|$ будет ограниченной функцией от t, предел которой при $t \to 0$ будет конечным, а при $t \geqslant 1$

$$\left|\frac{1-e^{-zt}}{1-e^{-t}}\right| < \frac{1+|e^{-zt}|}{1-e^{-1}} < \frac{2}{1-e^{-1}}.$$

Поэтому мы можем найти такое число K, не зависящее от t, что на пути интегрирования

$$\left|\frac{1-e^{-zt}}{1-e^{-t}}\right| < K;$$

и таким образом,

$$\left|\int_0^\infty \frac{1-e^{-zt}}{1-e^{-t}} e^{-(n+1)t}\,dt\right| < K\int_0^\infty e^{-(n+1)t}\,dt = K(n+1)^{-1} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Мы доказали формулу

$$\psi(z) = \frac{d}{dz}\lg\Gamma(z) = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-zt}}{1-e^{-t}}\right) dt,$$

которая и является гауссовым представлением $\psi(z)$ в виде несобственного интеграла.

Следует отметить, что это первый из числа встречавшихся нам в связи с гамма-функцией несобственных интегралов, в котором подинтегральная функция однозначна.

Положив в формуле Гаусса $t = \lg(1+x)$, получаем, полагая $\Delta = e^\delta - 1$,

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \lim_{\delta\to 0}\int_\delta^\infty \left\{\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-zt}}{1-e^{-t}}\right\} dt =$$

$$= \lim_{\delta\to 0}\left\{\int_\delta^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,dt - \int_\Delta^\infty \frac{dx}{x(1+x)^z}\right\} = \lim_{\delta\to 0}\left\{\int_\Delta^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,dt - \int_\Delta^\infty \frac{dx}{x(1+x)^z}\right\},$$

так как при $\delta \to 0$

$$0 < \int_\delta^\Delta \frac{e^{-t}}{t}\,dt < \int_\delta^\Delta \frac{dt}{t} = \lg\frac{e^\delta - 1}{\delta} \to 0.$$

Отсюда

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \lim_{\Delta\to 0}\int_\Delta^\infty \left\{e^{-x} - \frac{1}{(1+x)^z}\right\}\frac{dx}{x},$$

или

$$\Gamma'(z) = \Gamma(z) \int_0^\infty \left\{ e^{-x} - \frac{1}{(1+x)^z} \right\} \frac{dx}{x}$$

— формула, принадлежащая Дирихле [1]).

Пример 1. Доказать, что

$$\psi(z) = \int_0^1 \left\{ \frac{1}{-\lg t} - \frac{t^{z-1}}{1-t} \right\} dt,$$

если вещественная часть z положительна.

(Gauss)

Пример 2. Показать, что

$$\gamma = \int_0^\infty \{(1+t)^{-1} - e^{-t}\} t^{-1} dt.$$

(Dirichlet)

12.31. Первое интегральное представление Бине для $\lg \Gamma(z)$

Бине [2]) дал два выражения для $\lg \Gamma(z)$, которые имеют большое значение потому, что они показывают, как ведет себя $\lg \Gamma(z)$ при $|z| \to \infty$.

Для того чтобы получить первое из этих выражений, отметим, что если вещественная часть z положительна, то

$$\frac{\Gamma'(z+1)}{\Gamma(z+1)} = \int_0^\infty \left\{ \frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-tz}}{e^t - 1} \right\} dt,$$

что легко проверить, заменяя z на $z+1$ в формуле § 12.3.

Далее, согласно примеру 6 § 6.222 части I,

$$\lg z = \int_0^\infty \frac{e^{-t} - e^{-tz}}{t} dt,$$

и поскольку

$$\frac{1}{2z} = \int_0^\infty \frac{1}{2} e^{-tz} dt,$$

имеем

$$\frac{d}{dz} \lg \Gamma(z+1) = \frac{1}{2z} + \lg z - \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t - 1} \right\} e^{-tz} dt.$$

---

[1]) Dirichlet, Werke, I, 275.

[2]) Binet, Journ. de l'école polytechnique, XVI (1839), 123—143.

Подинтегральная функция в последнем интеграле будет непрерывной при $t\to 0$; и так как $\frac{1}{2}-\frac{1}{t}+\frac{1}{e^t-1}$ ограничена, когда $t\to\infty$, то легко получаем, что интеграл сходится равномерно, когда вещественная часть z будет положительной. Мы можем, следовательно, интегрировать от 1 до z под знаком интеграла (§ 4.44, часть I), после чего получим [1])

$$\lg\Gamma(z+1)=\left(z+\frac{1}{2}\right)\lg z-z+1+\int_0^\infty\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{t}+\frac{1}{e^t-1}\right\}\frac{e^{-tz}-e^{-t}}{t}\,dt.$$

Так как, согласно § 7.2 части I, функция $\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{t}+\frac{1}{e^t-1}\right\}\frac{1}{t}$ непрерывна при $t\to 0$ и так как

$$\lg\Gamma(z+1)=\lg z+\lg\Gamma(z),$$

то имеем

$$\lg\Gamma(z)=\left(z-\frac{1}{2}\right)\lg z-z+1+\int_0^\infty\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{t}+\frac{1}{e^t-1}\right\}\frac{e^{-tz}}{t}\,dt-$$

$$-\int_0^\infty\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{t}+\frac{1}{e^t-1}\right\}\frac{e^{-t}}{t}\,dt.$$

Чтобы вычислить второй из этих интегралов, положим [2])

$$\int_0^\infty\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{t}+\frac{1}{e^t-1}\right)\frac{e^{-t}}{t}\,dt=I,\quad \int_0^\infty\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{t}+\frac{1}{e^t-1}\right)\frac{e^{-\frac{t}{2}}}{t}=J;$$

тогда, взяв $z=\frac{1}{2}$ в последнем выражении для $\Gamma(z)$, получим

$$\frac{1}{2}\lg\pi=\frac{1}{2}+J-I.$$

Но так как $I=\int_0^\infty\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{t}+\frac{1}{e^{\frac{t}{2}}-1}\right)\frac{e^{-\frac{t}{2}}}{t}\,dt$, то мы имеем

$$J-I=\int_0^\infty\left(\frac{1}{t}-\frac{e^{\frac{t}{2}}}{e^t-1}\right)\frac{e^{-\frac{t}{2}}}{t}\,dt=\int_0^\infty\left(\frac{e^{-\frac{t}{2}}}{t}-\frac{1}{e^t-1}\right)\frac{dt}{t},$$

---

[1]) $\lg\Gamma(z+1)$ означает сумму главных значений логарифмов множителей произведения Вейерштрасса.

[2]) Этот прием принадлежит Прингсгейму (Pringsheim, Math. Ann., XXXI (1888), 473).

откуда

$$J=\int_0^\infty\left\{\frac{e^{-\frac{t}{2}}}{t}-\frac{1}{e^t-1}+\frac{1}{2}e^{-t}-\frac{e^{-t}}{t}+\frac{e^{-t}}{e^t-1}\right\}\frac{dt}{t}=$$

$$=\int_0^\infty\left\{\frac{e^{-\frac{t}{2}}-e^{-t}}{t}-\frac{1}{2}e^{-t}\right\}\frac{dt}{t}=$$

$$=\int_0^\infty\left\{-\frac{d}{dt}\left(\frac{e^{-\frac{t}{2}}-e^{-t}}{t}\right)-\frac{\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}-e^{-t}}{t}-\frac{e^{-t}}{2t}\right\}dt=$$

$$=\left[-\frac{e^{-\frac{t}{2}}-e^{-t}}{t}\right]_0^\infty+\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{e^{-t}-e^{-\frac{t}{2}}}{t}dt=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\lg\frac{1}{2}.$$

Следовательно,

$$I=1-\frac{1}{2}\lg 2\pi.$$

Поэтому, когда вещественная часть z положительна, мы имеем следующую формулу Бине:

$$\lg\Gamma(z)=\left(z-\frac{1}{2}\right)\lg z-z+\frac{1}{2}\lg 2\pi+\int_0^\infty\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{t}+\frac{1}{e^t-1}\right)\frac{e^{-tz}}{t}dt.$$

Полагая $z=x+iy$, видим, что если обозначить верхнюю грань выражения $\left|\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{t}+\frac{1}{e^t-1}\right)\frac{1}{t}\right|$ для вещественных значений t через K, то

$$\left|\lg\Gamma(z)-\left(z-\frac{1}{2}\right)\lg z+z-\frac{1}{2}\lg 2\pi\right|<K\int_0^\infty e^{-tx}dt=Kx^{-1},$$

так что при больших x выражение $\left(z-\frac{1}{2}\right)\lg z-z+\frac{1}{2}\lg 2\pi$ дает приближенное значение для $\lg\Gamma(z)$.

Пример 1. Доказать, что при $\operatorname{Re} z>0$

$$\lg\Gamma(z)=\int_0^\infty\left\{\frac{e^{-zt}-e^{-t}}{1-e^{-t}}+(z-1)e^{-t}\right\}\frac{dt}{t}.$$

(Malmstén)

Пример 2. Доказать, что при $\operatorname{Re} z > 0$

$$\lg\Gamma(z) = \int_0^\infty \left\{(z-1)\,e^{-t} + \frac{(1+t)^{-z} - (1+t)^{-1}}{\lg(1+t)}\right\}\frac{dt}{t}.$$

(Féaux)

Пример 3. С помощью формулы § 12.14 показать, что при $0 < x < 1$

$$2\lg\Gamma(x) - \lg\pi + \lg\sin\pi x = \int_0^\infty \left\{\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}-x\right)t}{\operatorname{sh}\frac{1}{2}t} - (1-2x)\,e^{-t}\right\}\frac{dt}{t}.$$

(Kummer)

Пример 4. Разлагая $\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}-x\right)t$ и $1-2x$ в ряды Фурье по синусам, показать, исходя из примера 3, что при $0 < x < 1$

$$\lg\Gamma(x) = \frac{1}{2}\lg\pi - \frac{1}{2}\lg\sin\pi x + 2\sum_{n=1}^\infty a_n \sin 2n\pi x,$$

где

$$a_n = \int_0^\infty \left\{\frac{2n\pi}{t^2+4n^2\pi^2} - \frac{e^{-t}}{2n\pi}\right\}\frac{dt}{t}.$$

Далее показать, исходя из примера 2 § 12.3, что

$$a_n = \frac{1}{2n\pi}(\gamma + \lg 2\pi + \lg n).$$

(Kummer, Journ. für Math., XXXV (1847), 1)

12.32. Второе интегральное представление Бине для $\lg\Gamma(z)$

Применим формулу Плана, приведенную в примере 7 главы 7 части I, к суммированию ряда (§ 12.16)

$$\frac{d^2}{dz^2}\lg\Gamma(z) = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(z+n)^2}.$$

Условия, установленные там как достаточные для выражения ряда через интегралы, очевидно, удовлетворяются функцией $\varphi(\zeta) = \frac{1}{(z+\zeta)^2}$, если вещественная часть z положительна; поэтому имеем

$$\frac{d^2}{dz^2}\lg\Gamma(z) = \frac{1}{2z^2} + \int_0^\infty \frac{d\xi}{(z+\xi)^2} - 2\int_0^\infty \frac{q(t,z)}{e^{2\pi t}-1}\,dt +$$

$$+ 2\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{q(t,z+n)}{e^{2\pi t}-1}\,dt,$$

где

$$2iq(t, z) = \frac{1}{(z+it)^2} - \frac{1}{(z-it)^2}.$$

Так как $|q(t, z+n)|$, как легко видеть, будет меньше $K_1 \frac{t}{n}$, где K_1 не зависит от t и n, то предел последнего интеграла равен нулю.

Отсюда

$$\frac{d^2}{dz^2} \lg \Gamma(z) = \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{z} + \int_0^\infty \frac{4tz}{(z^2+t^2)^2} \frac{dt}{e^{2\pi t}-1}.$$

Так как $\left|\frac{2z}{z^2+t^2}\right|$ не превосходит K (где K зависит только от δ), когда вещественная часть z превосходит δ, то интеграл сходится равномерно, и мы можем его проинтегрировать (§ 4.44, часть I) в пределах от 1 до z.

Получим

$$\frac{d}{dz} \lg \Gamma(z) = -\frac{1}{2z} + \lg z + C - 2\int_0^\infty \frac{t\,dt}{(z^2+t^2)(e^{2\pi t}-1)},$$

где C — постоянная. Интегрируя это выражение еще раз, получим

$$\lg \Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right) \lg z + (C-1)z + C' + 2\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}(t/z)}{e^{2\pi t}-1}\,dt,$$

где C' — новая постоянная.

Если z вещественно, то $0 < \operatorname{arctg}\frac{t}{z} \leqslant \frac{t}{z}$, а потому

$$\left|\lg \Gamma(z) - \left(z - \frac{1}{2}\right) \lg z - (C-1)z - C'\right| < \frac{2}{z}\int_0^\infty \frac{t}{e^{2\pi t}-1}\,dt.$$

Но в § 12.31 было показано, что

$$\left|\lg \Gamma(z) - \left(z - \frac{1}{2}\right) \lg z + z - \frac{1}{2} \lg 2\pi\right| \to 0,$$

когда $z \to \infty$ по вещественной оси. Сравнивая эти результаты, видим, что

$$C = 0, \quad C' = \frac{1}{2} \lg 2\pi.$$

Следовательно, для всех значений z, вещественная часть которых положительна, имеем

$$\lg \Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right) \lg z - z + \frac{1}{2} \lg 2\pi + 2 \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}(t/z)}{e^{2\pi t} - 1}\, dt,$$

где $\operatorname{arctg} u$ определяется интегралом

$$\operatorname{arctg} u = \int_0^u \frac{dt}{1+t^2},$$

в котором путь интегрирования есть прямая линия.

Это и есть второе выражение Бине для $\lg \Gamma(z)$.

Пример. Проверить законность дифференцирования по z под знаком интеграла и получить этим путем равенство

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \lg z - \frac{1}{2z} - 2 \int_0^\infty \frac{t\, dt}{(t^2 + z^2)(e^{2\pi t} - 1)}.$$

12.33. Асимптотическое разложение логарифма гамма-функции (ряд Стирлинга)

Теперь мы можем вывести асимптотическое разложение (§ 8.2, часть I) $\lg \Gamma(z)$ для больших значений $|z|$, применяемое при вычислении гамма-функции.

Пусть $z = x + iy$, где $x \geqslant \delta > 0$.

По второй формуле Бине будем иметь

$$\lg \Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right) \lg z - z + \frac{1}{2} \lg 2\pi + \varphi(z),$$

где

$$\varphi(z) = 2 \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}(t/z)}{e^{2\pi t} - 1}\, dt.$$

Но

$$\operatorname{arctg} \frac{t}{z} = \frac{t}{z} - \frac{1}{3} \frac{t^3}{z^3} + \frac{1}{5} \frac{t^5}{z^5} - \ldots$$

$$\ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \frac{t^{2n-1}}{z^{2n-1}} + \frac{(-1)^n}{z^{n-1}} \int_0^t \frac{u^{2n}\, du}{u^2 + z^2}.$$

Подставляя это разложение в интеграл и вспоминая (§ 7.2, часть I), что

$$\int_0^\infty \frac{t^{2n-1}\,dt}{e^{2\pi t}-1} = \frac{B_n}{4n},$$

где B_1, B_2, ... — числа Бернулли, получим

$$\varphi(z) = \sum_{r=1}^{n} \frac{(-1)^{r-1} B_r}{2r(2r-1)z^{2r-1}} + \frac{2(-1)^n}{z^{2n-1}} \int_0^\infty \left\{ \int_0^t \frac{u^{2n}\,du}{u^2+z^2} \right\} \frac{dt}{e^{2\pi t}-1}.$$

Пусть K_z — верхняя граница[1]) выражения $\left|\frac{z^2}{u^2+z^2}\right|$ для положительных значений u.

Тогда

$$\left| \int_0^\infty \left\{ \int_0^t \frac{u^{2n}\,du}{u^2+z^2} \right\} \frac{dt}{e^{2\pi t}-1} \right| \leqslant K_z |z|^{-2} \int_0^\infty \left\{ \int_0^t u^{2n}\,du \right\} \frac{dt}{e^{2\pi t}-1} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{K_z B_{n+1}}{4(n+1)(2n+1)|z|^2}.$$

Отсюда

$$\left| \frac{2(-1)^n}{z^{2n-1}} \int_0^\infty \left\{ \int_0^t \frac{u^{2n}\,du}{u^2+z^2} \right\} \frac{dt}{e^{2\pi t}-1} \right| < \frac{K_z B_{n+1}}{2(n+1)(2n+1)|z|^{2n+1}}.$$

Очевидно, что это выражение стремится к нулю равномерно при $|z| \to \infty$, если $|\arg z| \leqslant \frac{1}{2}\pi - \Delta$, где $\frac{1}{4}\pi > \Delta > 0$, так как тогда $K_z \leqslant \operatorname{cosec} 2\Delta$. Ясно также, что если $|\arg z| \leqslant \frac{1}{4}\pi$ (так что $K_z = 1$), то, взяв сумму n первых членов ряда

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1} B_r}{2r(2r-1)} \frac{1}{z^{2r-1}}$$

---

[1]) K_z^{-2} является нижней границей выражения $\frac{\{u^2+(x^2-y^2)\}^2+4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$ и, следовательно, равно $\frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$ или 1 в зависимости от того, будет ли $x^2 < y^2$ или $x^2 \geqslant y^2$.

как приближение к $\varphi(z)$, получим погрешность, численно меньшую $(n+1)$-го члена. Но так как при $|\arg z| \leqslant \frac{1}{2}\pi - \Delta$ имеем

$$z^{2n-1}\left\{\varphi(z) - \sum_{r=1}^{n} \frac{(-1)^{r-1} B_r}{2r(2r-1)}\right\}\Bigg| < \operatorname{cosec}^2 2\Delta \frac{B_{n+1}}{2(n+1)(2n+1)} |z|^{-2} \to 0,$$

когда $z \to \infty$, то ясно, что ряд

$$\frac{B_1}{1\cdot 2\cdot z} - \frac{B_2}{3\cdot 4\cdot z^3} + \frac{B_3}{5\cdot 6\cdot z^5} - \ldots$$

представляет собою асимптотическое разложение[1]) (§ 8.2, часть I) функции $\varphi(z)$.

Таким образом, мы видим, что ряд

$$\left(z - \frac{1}{2}\right)\lg z - z + \frac{1}{2}\lg 2\pi + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1} B_r}{2r(2r-1) z^{2r-1}}$$

будет асимптотическим разложением $\lg \Gamma(z)$, когда $|\arg z| \leqslant \frac{1}{2}\pi - \Delta$.

Это выражение обычно называют *рядом Стирлинга*.

В § 13.6 оно будет распространено на более широкую область $|\arg z| \leqslant \pi - \Delta$.

В частном случае при z положительном $(= x)$ имеем

$$0 < 2\int_0^{\infty}\left\{\int_0^t \frac{u^{2n}\,du}{u^2 + x^2}\right\}\frac{dt}{e^{2\pi t} - 1} < \frac{B_{n+1}}{2(n+1)(2n+1)x^2},$$

т. е. *при $x > 0$ значение функции $\varphi(x)$ всегда лежит между суммой n и суммой $n+1$ членов ряда при всех значениях n.*

В частности, $0 < \varphi(x) < \frac{B_1}{1\cdot 2x}$, так что $\varphi(x) = \frac{\theta}{12x}$, где $0 < \theta < 1$.

Следовательно,

$$\Gamma(x) = x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x} (2\pi)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{\theta}{12x}}.$$

---

[1]) Разложение действительно является асимптотическим, ибо если бы оно сходилось при $|z| \geqslant \rho$, то по § 2.6 части I мы нашли бы такое K, что $B_n < (2n-1)\,2nK\rho^{2n}$, а тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} B_n t^{2n}}{(2n)!}$ был бы целой функцией, что противоречит § 7.2 части I.

Потенцированием ряда Стирлинга получаем

$$\Gamma(x)=e^{-x}x^{x-\frac{1}{2}}(2\pi)^{\frac{1}{2}}\left\{1+\frac{1}{12x}+\frac{1}{288x^2}-\right.$$
$$\left.-\frac{139}{51\,840x^3}-\frac{571}{2\,488\,320x^4}+O\left(\frac{1}{x^5}\right)\right\},$$

что и дает *асимптотическое выражение для гамма-функции.* В сочетании с формулой

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$$

оно весьма полезно при нахождении численного значения гамма-функции для вещественных x.

Этим способом Лежандр составил таблицы функции $\lg_{10}\Gamma(x)$ с 12 десятичными знаками для значений x от 1 до 2; они напечатаны в его «Exercices de Calcul Intégral», II, (1817), 85 и в его «Traité des fonctions elliptiques» (1826), 489.

Заметим, что $\Gamma(x)$ имеет один минимум для положительных значений x, а именно при $x=1{,}4616321\ldots$; значение же $\lg\Gamma(x)$ тогда будет равно $\bar{1}{,}9472391\ldots$

Пример. Получить разложение

$$\lg\Gamma(z)=\left(z-\frac{1}{2}\right)\lg z-z+\frac{1}{2}\lg 2\pi+J(z),$$

сходящееся при $\operatorname{Re} z>0$, где

$$J(z)=\frac{1}{2}\left\{\frac{c_1}{z+1}+\frac{c_2}{2(z+1)(z+2)}+\frac{c_3}{3(z+1)(z+2)(z+3)}+\ldots\right\},$$

причем

$$c_1=\frac{1}{6},\quad c_2=\frac{1}{3},\quad c_3=\frac{59}{60},\quad c_4=\frac{227}{60}$$

и вообще

$$c_n=\int_0^1(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1)(2x-1)\,x\,dx.$$

(Binet)

12.4. Интеграл Эйлера первого рода

Название *интеграл Эйлера первого рода* было дано Лежандром интегралу

$$\mathrm{B}(p,\ q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx,$$

изученному впервые Эйлером и Лежандром[1]). В этом интеграле вещественные части p и q предполагаются положительными, а под x^{p-1}, $(1-x)^{q-1}$ понимаются те значения величин $e^{(p-1)\lg x}$ и $e^{(q-1)\lg(1-x)}$, которые соответствуют вещественным значениям логарифмов. При этих условиях легко видеть, что интеграл $\mathrm{B}(p, q)$ (возможно, несобственный) имеет смысл (§ 4.5, часть I, пример 2).

Заменяя x на $1-x$, получим

$$\mathrm{B}(p, q)=\mathrm{B}(q, p).$$

Далее, интегрируя по частям, находим

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^q\,dx=\left[\frac{x^p(1-x)^q}{p}\right]_0^1+\frac{q}{p}\int_0^1 x^p(1-x)^{q-1}\,dx,$$

так что

$$\mathrm{B}(p, q+1)=\frac{q}{p}\mathrm{B}(p+1, q).$$

Пример 1. Показать, что

$$\mathrm{B}(p, q)=\mathrm{B}(p+1, q)+\mathrm{B}(p, q+1).$$

Пример 2. Исходя из примера 1, доказать, что

$$\mathrm{B}(p, q+1)=\frac{q}{p+q}\mathrm{B}(p, q).$$

Пример 3. Доказать, что при целом положительном n

$$\mathrm{B}(p, n+1)=\frac{1\cdot 2\ldots n}{p(p+1)\ldots(p+n)}.$$

Пример 4. Доказать, что

$$\mathrm{B}(x, y)=\int_0^\infty \frac{a^{x-1}}{(1+a)^{x+y}}\,da.$$

Пример 5. Доказать, что

$$\Gamma(z)=\lim_{n\to\infty} n^z\mathrm{B}(z, n).$$

---

[1]) Euler, Nov. Comm. Petrop., XVI (1772); Legendre, Exercices, I, 221.

12.41. Выражение интеграла Эйлера первого рода через гамма-функцию

Докажем теперь важную теорему, выражаемую равенством

$$B(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}.$$

Пусть сначала вещественные части m и n больше $\frac{1}{2}$. Тогда

$$\Gamma(m)\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-x} x^{m-1}\,dx \times \int_0^\infty e^{-y} y^{n-1}\,dy.$$

Заменяя x на x^2 и y на y^2, получим

$$\Gamma(m)\Gamma(n) = 4 \lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-x^2} x^{2m-1}\,dx \int_0^R e^{-y^2} y^{2n-1}\,dy =$$

$$= 4 \lim_{R\to\infty} \int_0^R \int_0^R e^{-(x^2+y^2)} x^{2m-1} y^{2n-1}\,dx\,dy.$$

Но для рассматриваемых значений m и n подинтегральная функция непрерывна во всей области интегрирования, а потому интеграл можно рассматривать как двойной интеграл, взятый по квадрату S_R. Обозначая через $f(x, y)$ подинтегральную функцию, через Q_R — четверть круга с центром в начале координат и с радиусом R и через T_R — часть S_R вне Q_R, получим

$$\left| \iint_{S_R} f(x, y)\,dx\,dy - \iint_{Q_R} f(x, y)\,dx\,dy \right| =$$

$$= \left| \iint_{T_R} f(x, y)\,dx\,dy \right| \leqslant \iint_{T_R} |f(x, y)|\,dx\,dy \leqslant$$

$$\leqslant \iint_{S_R} |f(x, y)|\,dx\,dy - \iint_{S_{\frac{1}{2}R}} |f(x, y)|\,dx\,dy \to 0, \text{ когда } R \to \infty,$$

так как $\iint_{S_R} |f(x, y)|\,dx\,dy$ стремится к следующему пределу:

$$2\int_0^\infty e^{-x^2} |x^{2m-1}|\,dx \times 2\int_0^\infty e^{-y} |y^{2n-1}|\,dy.$$

Поэтому

$$\lim_{R\to\infty} \iint_{S_R} f(x, y)\,dx\,dy = \lim_{R\to\infty} \iint_{Q_R} f(x, y)\,dx\,dy.$$

Переходя к полярным координатам[1] ($x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$), имеем

$$\iint\limits_{Q_R} f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_0^R \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2}(r\cos\theta)^{2m-1}(r\sin\theta)^{2n-1}\,r\,dr\,d\theta.$$

Следовательно,

$$\Gamma(m)\Gamma(n) = 4\int\limits_0^\infty e^{-r^2}r^{2(m+n)-1}\,dr\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2m-1}\theta\sin^{2n-1}\theta\,d\theta =$$

$$= 2\Gamma(m+n)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2m-1}\theta\sin^{2n-1}\theta\,d\theta.$$

Положив $\cos^2\theta = u$, окончательно получаем

$$\Gamma(m)\Gamma(n) = \Gamma(m+n)\,\mathrm{B}(m, n).$$

Мы доказали справедливость этой формулы только для случая, когда вещественные части m и n больше $\frac{1}{2}$, но, пользуясь результатом примера 2 § 12.4, ее легко доказать и для случая, когда они меньше $\frac{1}{2}$.

Этот результат, найденный Эйлером, устанавливает связь между интегралом Эйлера первого рода и гамма-функцией.

Пример 1. Показать, что

$$\int\limits_{-1}^{1}(1+x)^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx = 2^{p+q-1}\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Пример 2. Показать, что для функции

$$f(x, y) = \frac{1}{x} - y\frac{1}{x+1} + \frac{y(y-1)}{2!}\frac{1}{x+2} - \frac{y(y-1)(y-2)}{3!}\frac{1}{x+3} + \ldots$$

имеет место соотношение

$$f(x, y) = f(y+1, x-1),$$

если значения x и y такие, что оба ряда сходятся.

(Jesus, 1901)

---

[1]) Способом § 4.11 части I легко показать, что площади $A_{m,\mu}$ § 4.3 не обязательно должны быть прямоугольными; требуется лишь, чтобы их наибольший поперечник мог быть сделан произвольно малым, когда число площадей будет взято достаточно большим, так что за эти площади могут быть приняты и области, ограниченные радиусами-векторами и дугами окружностей.

Пример 3. Доказать, что

$$\int_0^1 \int_0^1 f(xy)(1-x)^{\mu-1} y^{\mu} (1-y)^{\nu-1}\, dx\, dy =$$

$$= \frac{\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)}{\Gamma(\mu+\nu)} \int_0^1 f(z)(1-z)^{\mu+\nu-1}\, dz.$$

(Math. Trip., 1894)

12.42. Выражение интегралов от тригонометрических функций через гамма-функции

Мы можем вычислить теперь интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m-1} x \sin^{n-1} x\, dx$, где m и n не обязательно целые, но имеют положительные вещественные части.

Положив $\cos^2 x = t$, имеем, как в § 12.41,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m-1} x \sin^{n-1} x\, dx = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}.$$

Отсюда легко могут быть выведены обычные элементарные формулы для случаев, когда m и n — целые числа.

Пример. Доказать, что при $|k| < 1$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^m \theta \sin^n \theta\, d\theta}{(1-k\sin^2\theta)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+n+1}{2}\right)\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{m+n}\theta\, d\theta}{(1-k\sin^2\theta)^{\frac{n+1}{2}}}.$$

(Trinity, 1898)

12.43. Обобщение интеграла Эйлера первого рода (Похгаммер)

В § 12.22 мы видели, что интеграл Эйлера второго рода для $\Gamma(z)$ можно заменить интегралом по контуру, сходящимся для всех значений z. Для интегралов первого рода аналогичный результат был получен Похгаммером. Пусть P — какая-нибудь точка на веществен-

ной оси между 0 и 1; рассмотрим интеграл[1])

$$e^{-\pi i(\alpha+\beta)} \int\limits_{P}^{(1+,\,0+,\,1-,\,0-)} t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,dt = \varepsilon(\alpha,\beta).$$

Применяемое здесь обозначение введено в конце § 12.22, оно означает, что путь интегрирования начинается в точке P, обходит точку 1 в положительном направлении (против часовой стрелки), возвращается к P, затем обходит начало координат в положительном направлении и возвращается опять в P и т. д.

В исходной точке аргументы обеих величин t и $1-t$ равны нулю. После обхода $(1+)$ они будут 0 и 2π; после обхода $(0+)$ эти аргументы станут 2π и 2π; после обхода $(1-)$ значения их будут 2π и 0, и, наконец, после обхода $(0-)$ оба аргумента будут равны нулю, так что конечное значение подинтегральной функции будет такое же, как и начальное.

Легко видеть, что, поскольку путь интегрирования можно деформировать любым образом, лишь бы только он не переходил через точки ветвления 0, 1 подинтегральной функции, этот путь можно

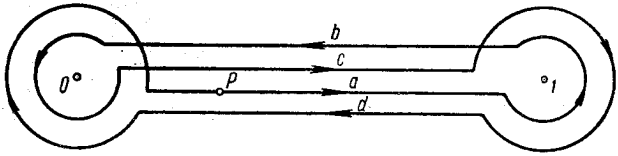

Рис. 2.

взять, как показано на рисунке, где четыре параллельные прямые подразумеваются совпадающими с вещественной осью.

Если вещественные части α и β положительны, то интегралы по окружностям стремятся к нулю, когда радиусы окружностей стремятся к нулю[2]). На путях же a, b, c, d подинтегральная функция равна соответственно

$$t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1},\quad t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}e^{2\pi i(\beta-1)},$$
$$t^{\alpha-1}e^{2\pi i(\alpha-1)}(1-t)^{\beta-1}e^{2\pi i(\beta-1)},\quad t^{\alpha-1}e^{2\pi i(\alpha-1)}(1-t)^{\beta-1},$$

где *аргументы величин t и $1-t$ теперь равны нулю на всех путях.*

---

[1]) Pochhammer, Math. Ann., XXXV (1890), 495. Применение интегралов по двойным петлям принадлежит, по-видимому, Жордану (Jordan, Cours d'Analyse, III (1887)).

[2]) Доказательство этого не затруднит читателя.

Отсюда следует, что $\varepsilon(\alpha, \beta)$ можно представить как сумму четырех (возможно, несобственных) интегралов, именно:

$$\varepsilon(\alpha, \beta) = e^{-\pi i(\alpha+\beta)}\left[\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,dt + \right.$$

$$+\int_1^0 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}e^{2\pi i\beta}\,dt + \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}e^{2\pi i(\alpha+\beta)}\,dt +$$

$$\left. + \int_1^0 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}e^{2\pi i\alpha}\,dt\right]$$

или

$$\varepsilon(\alpha, \beta) = e^{-\pi i(\alpha+\beta)}\left(1-e^{2\pi i\alpha}\right)\left(1-e^{2\pi i\beta}\right)\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,dt =$$

$$= -4\sin(\alpha\pi)\sin(\beta\pi)\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} = \frac{-4\pi^2}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

Но $\varepsilon(\alpha, \beta)$ и это последнее выражение являются аналитическими функциями от α и β для *всех* значений α и β. Поэтому, по теории аналитического продолжения, это равенство, доказанное для случая, когда вещественные части α и β положительны, сохраняет силу для всех значений α и β. *Итак, мы доказали, что для всех значений α и β*

$$\varepsilon(\alpha, \beta) = \frac{-4\pi^2}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

12.5. Интеграл Дирихле[1])

Покажем теперь, как кратный интеграл

$$I = \int\int\ldots\int f(t_1+t_2+\ldots+t_n)\,t_1^{\alpha_1-1}t_2^{\alpha_2-1}\ldots t_n^{\alpha_n-1}\,dt_1\,dt_2\ldots dt_n$$

может быть преобразован в простой, если предположить, что f — непрерывная функция, $\alpha_r > 0$ $(r = 1, 2, \ldots, n)$ и что интегрирование распространяется на все положительные значения переменных такие, что $t_1+t_2+\ldots+t_n \leqslant 1$.

Чтобы упростить выражение

$$\int_0^{1-\lambda}\int_0^{1-\lambda-T} f(t+T+\lambda)\,t^{\alpha-1}T^{\beta-1}\,dt\,dT$$

---

[1]) Dirichlet, Werke, I, 375, 391.

(где мы написали t, T, α, β вместо t_1, t_2, α_1, α_2 и λ вместо $t_3+t_4+\ldots+t_n$), положим $t=\frac{T(1-v)}{v}$. Тогда получим (при $\lambda\neq 0$)

$$\int_0^{1-\lambda}\int_{\frac{T}{1-\lambda}}^{1} f\left(\lambda+\frac{T}{v}\right)(1-v)^{\alpha-1}v^{-\alpha-1}T^{\alpha+\beta-1}\,dv\,dT$$

или, изменив порядок интегрирования (§ 4.51, часть I),

$$\int_0^1\int_0^{(1-\lambda)v} f\left(\lambda+\frac{T}{v}\right)(1-v)^{\alpha-1}v^{-\alpha-1}T^{\alpha+\beta-1}\,dT\,dv.$$

Положив $T=v\tau_2$, получим

$$\int_0^1\int_0^{1-\lambda} f(\lambda+\tau_2)(1-v)^{\alpha-1}v^{\beta-1}\tau_2^{\alpha+\beta-1}\,d\tau_2\,dv=$$

$$=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^{1-\lambda} f(\lambda+\tau_2)\tau_2^{\alpha+\beta-1}\,d\tau_2.$$

Отсюда

$$I=\frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}\int\int\ldots\int f(\tau_2+t_3+\ldots+t_n)\tau_2^{\alpha_1+\alpha_2-1}t_3^{\alpha_3-1}\ldots$$
$$\ldots t_n^{\alpha_n-1}\,d\tau_2\,dt_3\ldots dt_n,$$

причем интегрирование распространяется на все такие положительные значения переменных, что $\tau_2+t_3+\ldots+t_n\leqslant 1$.

Редуцируя таким же образом дальше, найдем:

$$I=\frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\ldots\Gamma(\alpha_n)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)}\int_0^1 f(\tau)\tau^{\Sigma\alpha-1}\,d\tau,$$

что и представляет собой результат, полученный Дирихле.

Пример 1. Привести интеграл

$$\int\int\int f\left\{\left(\frac{x}{a}\right)^{\alpha}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\beta}+\left(\frac{z}{c}\right)^{\gamma}\right\}x^{p-1}y^{q-1}z^{r-1}\,dx\,dy\,dz$$

к простому интегралу; область интегрирования распространяется на все такие положительные значения переменных, что

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\alpha}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\beta}+\left(\frac{z}{c}\right)^{\gamma}\leqslant 1,$$

причем предполагается, что a, b, c, α, β, γ, p, q, r положительны.

(Dirichlet)

Пример 2. Вычислить $\int\int x^p y^q\, dx\, dy$, где область интегрирования определяется неравенствами: $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x^m + y^n \leqslant 1$, m и n положительны.

(Pembroke, 1907)

Пример 3. Показать, что момент инерции однородного эллипсоида плотности 1, взятый относительно оси z, равен $\frac{4}{15}(a^2+b^2)\pi abc$, где a, b, c — полуоси.

Пример 4. Показать, что площадь астроиды $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = l^{\frac{2}{3}}$ равна $\frac{3}{8}\pi l^2$.

ЛИТЕРАТУРА

N. Nielsen, Handbuch der Theorie der Gamma-funktion[1]) (Leipzig, 1906).
O. Schlömilch, Compendium der höheren Analysis, II (Brunswick, 1874).
E. L. Lindelöf, Le Calcul des Résidus, Ch. IV (Paris, 1905).
A Pringsheim, Math. Ann.. XXXI (1888), 455—481.
Hj. Mellin, Math. Ann., LXVIII (1910), 305—337.
Н. Н. Лебедев, Специальные функции и их приложения, Гостехиздат (1953).

Примеры

1. Показать, что

$$(1-z)\left(1+\frac{z}{2}\right)\left(1-\frac{z}{3}\right)\left(1+\frac{z}{4}\right)\ldots = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(1+\frac{1}{2}z\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}z\right)}.$$

(Trinity, 1897)

2. Показать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+x}\,\frac{1}{1+\frac{1}{2}x}\,\frac{1}{1+\frac{1}{3}x}\cdots\frac{1}{1+\frac{1}{n}x}\,n^x = \Gamma(x+1).$$

(Trinity, 1885)

3. Показать, что

$$\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} - \frac{\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = 2\lg 2.$$

(Jesus, 1903)

4. Показать, что

$$\frac{\left\{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right\}^4}{16\pi^2} = \frac{3^2}{3^2-1}\cdot\frac{5^2-1}{5^2}\cdot\frac{7^2}{7^2-1}\cdot\frac{9^2-1}{9^2}\cdot\frac{11^2}{11^2-1}\cdots$$

(Trinity, 1891)

---

[1]) Этот труд содержит полную библиографию.

5. Показать, что

$$\prod_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{(n-\alpha)(n+\beta+\gamma)}{(n+\beta)(n+\gamma)}\left(1+\frac{\alpha}{n+1}\right)\right\}=-\frac{1}{\pi}\sin(\alpha\pi)\,\mathrm{B}(\beta,\gamma).$$

(Trinity, 1905)

6. Показать, что

$$\prod_{r=1}^{8}\Gamma\left(\frac{r}{3}\right)=\frac{640}{3^6}\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)^3.$$

(Peterhouse, 1906)

7. Показать, что при $z=i\zeta$, где ζ вещественно,

$$|\Gamma(z)|=\sqrt{\frac{\pi}{\zeta\,\mathrm{sh}\,\pi\zeta}}.$$

(Trinity, 1904)

8. Показать, что при x положительном [1])

$$\frac{\Gamma(x)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n!}{2^{2n}\cdot n!\,n!}\,\frac{1}{x+n}.$$

(Math. Trip., 1897)

9. Показать, что при a положительном

$$\frac{\Gamma(z)\,\Gamma(a+1)}{\Gamma(z+a)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n a\cdot(a-1)(a-2)\ldots(a-n)}{n!}\,\frac{1}{z+n}.$$

10. Показать, что при $x>0$ для $P(x)=\int\limits_0^1 e^{-t}t^{x-1}\,dt$ имеют место соотношения

$$P(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{1!}\,\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2!}\,\frac{1}{x+2}-\frac{1}{3!}\,\frac{1}{x+3}+\ldots$$

и

$$P(x+1)=xP(x)-e^{-1}.$$

11. Показать, что при $\lambda>0$, $x>0$, $-\frac{1}{2}\pi<\alpha<\frac{1}{2}\pi$

$$\int\limits_0^{\infty}t^{x-1}e^{-\lambda t\cos\alpha}\cos(\lambda t\sin\alpha)\,dt=\lambda^{-x}\Gamma(x)\cos\alpha x,$$

$$\int\limits_0^{\infty}t^{x-1}e^{-\lambda t\cos\alpha}\sin(\lambda t\sin\alpha)\,dt=\lambda^{-x}\Gamma(x)\sin\alpha x.$$

(Euler)

---

[1]) Этот и некоторые другие примеры легче всего решить, пользуясь результатом § 14.11.

12. Доказать, что при $b > 0$

$$\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x^z}\,dx = \frac{1}{2}\pi b^{z-1}\,\frac{\operatorname{cosec}\left(\frac{1}{2}\pi z\right)}{\Gamma(z)} \quad \text{при} \quad 0 < z < 2,$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos bx}{x^z}\,dx = \frac{1}{2}\pi b^{z-1}\,\frac{\sec\left(\frac{1}{2}\pi z\right)}{\Gamma(z)} \quad \text{при} \quad 0 < z < 1.$$

(Euler)

13. Доказать, что при $0 < n < 1$

$$\int_0^\infty (1+x)^{n-1}\cos x\,dx = \Gamma(n)\left\{\cos\left(\frac{n\pi}{2}-1\right) - \frac{1}{\Gamma(n+1)} + \frac{1}{\Gamma(n+3)} + \ldots\right\}.$$

(Peterhouse, 1895)

14. Взяв за контур интегрирования параболу с вершиной в начале координат, вывести из формулы

$$\Gamma(\alpha) = -\frac{1}{2i\sin\alpha\pi}\int_\infty^{(0+)} (-z)^{\alpha-1}e^{-z}\,dz$$

формулу

$$\Gamma(\alpha) = \frac{1}{2\sin\alpha\pi}\int_0^\infty e^{-x^2}x^{\alpha-1}(1+x^2)^{\frac{1}{2}\alpha}\,[3\sin\{x+\alpha\operatorname{arcctg}(-x)\} + \\ + \sin\{x+(\alpha-2)\operatorname{arcctg}(-x)\}]\,dx,$$

где arcctg обозначает тупой угол.

(Bourguet, Acta Math., I, 367)

15. Показать, что если вещественные части a_n положительны и ряд $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{a_n^2}$ сходится, то бесконечное произведение

$$\prod_{n=1}^\infty \left[\frac{\Gamma(a_n)}{\Gamma(z+a_n)}\exp\left\{\sum_{s=1}^m \frac{z^s}{s!}\psi^{(s)}(a_n)\right\}\right],$$

где

$$\psi^{(s)}(z) = \frac{d^s}{dz^s}\lg\Gamma(z),$$

будет сходящимся при $m > 2$.

(Math. Trip., 1907)