

Но $\partial S_{n-2r}/\partial K_p$ равна сумме произведений выражений $K_1, K_2, \dots, K_{\frac{1}{2}n}$ (где K_p опускается), взятых по $\frac{1}{2}n - r - 1$; а $K_q \partial^2 S_{n-2r}/(\partial K_p \partial K_q)$ состоит из тех членов этой суммы, которые содержат множитель K_q .

Следовательно,

$$\frac{\partial S_{n-2r}}{\partial K_p} = K_q \frac{\partial^2 S_{n-2r}}{\partial K_p \partial K_q}$$

равна сумме произведений выражений $K_1, K_2, \dots, K_{\frac{1}{2}n}$ (где K_p и K_q опускаются), взятых по $\frac{1}{2}n - r - 1$; а потому по симметрии имеем

$$\frac{\partial S_{n-2r}}{\partial K_p} = K_q \frac{\partial^2 S_{n-2r}}{\partial K_p \partial K_q} = \frac{\partial S_{n-2r}}{\partial K_q} = K_p \frac{\partial^2 S_{n-2r}}{\partial K_p \partial K_q},$$

так что

$$\frac{\partial^2 S_{n-2r}}{\partial K_p \partial K_q} = \left\{ \frac{\partial S_{n-2r}}{\partial K_p} - \frac{\partial S_{n-2r}}{\partial K_q} \right\} / (K_q - K_p).$$

После подстановки этого выражения для второй производной найдем, что

$$\begin{aligned} D^2 S_{n-2r} &= \sum_{p=1}^{\frac{1}{2}n} \frac{\partial S_{n-2r}}{\partial K_p} \left[6 + 8\theta_p \sum_{q=1}^{\frac{1}{2}n} \frac{1}{\theta_p - \theta_q} - 8 \sum_{q=1}^{\frac{1}{2}n} \frac{\theta_p K_p - \theta_q K_q}{(\theta_p - \theta_q)(K_p - K_q)} \right] = \\ &= \sum_{p=1}^{\frac{1}{2}n} \frac{\partial S_{n-2r}}{\partial K_p} \left[6 - 8 \sum_{q=1}^{\frac{1}{2}n} \frac{K_q}{K_p - K_q} \right] = \\ &= (4n-2) \sum_{p=1}^{\frac{1}{2}n} \frac{\partial S_{n-2r}}{\partial K_p} - 8 \sum_{p \neq q} \left\{ K_p \frac{\partial S_{n-2r}}{\partial K_p} - K_q \frac{\partial S_{n-2r}}{\partial K_q} \right\} / (K_p - K_q). \end{aligned}$$

Далее, мы можем записать S_{n-2r} в форме $\bar{S}_{n-2r} + K_p \bar{S}_{n-2r-2} + K_q \bar{S}_{n-2r-2} + K_p K_q \bar{S}_{n-2r-4}$, где $\bar{S}_{2,n}$ обозначает сумму произведений $K_1, K_2, \dots, K_{\frac{1}{2}n}$ (где K_p и K_q опускаются), взятых по m ; тогда мы увидим, что

$$K_p \frac{\partial S_{n-2r}}{\partial K_p} - K_q \frac{\partial S_{n-2r}}{\partial K_q} = (K_p - K_q) \bar{S}_{n-2r-2}.$$

Отсюда

$$D^2S_{n-2r} = (4n-2) \sum_{p=1}^{\frac{1}{2}n} \frac{\partial S_{n-2r}}{\partial K_p} - 8 \sum_{p \neq q} \bar{S}_{n-2r-2}.$$

Теперь ясно, что выражение справа есть однородная симметрическая функция от $K_1, K_2, \dots, K_{\frac{1}{2}n}$ степени $\frac{1}{2}n - r - 1$; кроме того, оно не содержит ни одного из выражений $K_1, K_2, \dots, K_{\frac{1}{2}n}$ в степени выше первой. Поэтому оно будет кратным выражению S_{n-2r-2} . Для определения постоянного множителя отметим, что когда S_{n-2r-2} написано в развернутом виде, то оно содержит $C_{\frac{1}{2}n}^{r+1}$ членов, тогда как число членов в

$$(4n-2) \sum_{p=1}^{\frac{1}{2}n} \frac{\partial S_{n-2r}}{\partial K_p} - 8 \sum_{p \neq q} \bar{S}_{n-2r-2}$$

равно

$$\frac{1}{2}n(4n-2) \cdot C_{\frac{1}{2}n-1}^r - 8 \cdot C_{\frac{1}{2}n}^2 \cdot C_{\frac{1}{2}n-2}^{r-1}.$$

Искомый множитель, следовательно, будет

$$\frac{\frac{1}{2}n(4n-2) \cdot C_{\frac{1}{2}n-1}^r - 8 \cdot C_{\frac{1}{2}n}^2 \cdot C_{\frac{1}{2}n-2}^{r-1}}{C_{\frac{1}{2}n}^{r+1}},$$

что равно $(2r+2)(2n-2r-1)$.

Следовательно, доказано, что

$$D^2S_{n-2r} = (2r+2)(2n-2r-1) S_{n-2r-2}.$$

По индукции непосредственно получается, что

$$S_{n-2r} = \frac{D^{2r}S_n}{2 \cdot 4 \cdots 2r \cdot (2n-1)(2n-3) \cdots (2n-2r+1)},$$

и формула

$$G_n(x, y, z) = \left[\sum_{r=0}^{\frac{1}{2}n} \frac{(-1)^r D^{2r}}{2 \cdot 4 \dots 2r (2n-1) (2n-3) \dots (2n-2r+1)} \right] H_n(x, y, z),$$

где $G_n(x, y, z)$ — эллипсоидальная гармоническая функция первого вида, теперь очевидна.

Пример 1. Доказать формулу Нивена, когда $G_n(x, y, z)$ — эллипсоидальная гармоническая функция второго, третьего или четвертого вида.

Пример 2. Получить символическую формулу

$$G_n(x, y, z) = \Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right) \left(\frac{1}{2} D\right)^{n+\frac{1}{2}} I_{-\frac{n-1}{2}}(D) \cdot H_n(x, y, z).$$

23.26. ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ СТЕПЕНИ n

Результаты, доказанные и высказанные в §§ 23.21—23.24, показывают, что когда n четное, то имеется $\frac{1}{2}n + 1$ гармонических функций первого вида и $\frac{3}{2}n$ гармонических функций третьего вида; когда n нечетное, то имеется $\frac{3}{2}(n+1)$ гармонических функций второго вида и $\frac{1}{2}(n-1)$ гармонических функций четвертого вида, так что в каждом случае имеется в общем $2n+1$ гармонических функций.

Из § 18.3 следует, что если совокупности членов степени n в этих гармонических функциях линейно независимы, то они составляют фундаментальную систему гармонических функций степени n ; любая однородная гармоническая функция степени n может быть выражена как линейная комбинация однородных гармонических функций, которые получаются отбором членов степени n из $2n+1$ эллипсоидальных гармонических функций.

Для того чтобы получить результаты о числе гармонических функций степени n и установить их линейную независимость, необходимо глубже заняться изучением уравнения Ламе, но, прежде чем приступить к этому исследованию, займемся представлением эллипсоидальных гармонических функций в эллипсоидальных координатах.

Эти выражения для эллипсоидальных гармонических функций имеют историческое значение ввиду исследований Ламе, но выражения, только что полученные методом Нивена, в некоторых отношениях более удобны для физических приложений.

О приложениях эллипсоидальных гармонических функций к исследованию фигуры Земли и о приведении гармонических функций к формам, приспособленным к численному вычислению, читатель может прочесть в мемуаре Дарвина: G. H. Darwin, Phil. Trans., 197A (1901), 461—537.

23.3. ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ

Если (X, Y, Z) обозначают текущие координаты в трехмерном пространстве и если a, b, c положительны ($a > b > c$), то уравнение

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1$$

представляет эллипсоид; уравнение любой софокусной поверхности второго порядка будет

$$\frac{X^2}{a^2 + \theta} + \frac{Y^2}{b^2 + \theta} + \frac{Z^2}{c^2 + \theta} = 1,$$

где θ называется *параметром* этой поверхности.

Поверхность второго порядка проходит через заданную точку (x, y, z) , если θ взято так, что

$$\frac{x^2}{a^2 + \theta} + \frac{y^2}{b^2 + \theta} + \frac{z^2}{c^2 + \theta} = 1.$$

Независимо от того, удовлетворяет ли θ этому уравнению, удобно писать

$$1 - \frac{x^2}{a^2 + \theta} - \frac{y^2}{b^2 + \theta} - \frac{z^2}{c^2 + \theta} = \frac{f(\theta)}{(a^2 + \theta)(b^2 + \theta)(c^2 + \theta)},$$

и так как $f(\theta)$ — кубический полином от θ , то ясно, что через каждую заданную точку (x, y, z) проходят, вообще говоря, три поверхности второго порядка софокусной системы.

Для определения характера этих трех поверхностей второго порядка составим следующую таблицу:

θ	$f(\theta)$
$-\infty$	$-\infty$
$-a^2$	$-x^2(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)$
$-b^2$	$y^2(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)$
$-c^2$	$-z^2(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)$
$+\infty$	$+\infty$

Из этой таблицы видно, что уравнение $f(\theta) = 0$ имеет три вещественных корня λ, μ, ν , и если они расположены так, что

$\lambda > \mu > \nu$, то

$$\lambda > -c^2 > \mu > -b^2 > \nu > -a^2;$$

кроме того,

$$f(\theta) \equiv (\theta - \lambda)(\theta - \mu)(\theta - \nu).$$

Из значений λ , μ , ν ясно, что поверхности, на которых θ имеет значения λ , μ , ν , суть соответственно эллипсоид, однополостный гиперболоид и двуполостный гиперболоид.

Возьмем теперь тождество относительно θ :

$$1 - \frac{x^2}{a^2 + \theta} - \frac{y^2}{b^2 + \theta} - \frac{z^2}{c^2 + \theta} \equiv \frac{(\theta - \lambda)(\theta - \mu)(\theta - \nu)}{(a^2 + \theta)(b^2 + \theta)(c^2 + \theta)},$$

умножим его последовательно на $a^2 + \theta$, $b^2 + \theta$, $c^2 + \theta$ и после этого заменим θ соответственно на $-a^2$, $-b^2$, $-c^2$. Таким образом найдем, что

$$x^2 = \frac{(a^2 + \lambda)(a^2 + \mu)(a^2 + \nu)}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)},$$

$$y^2 = -\frac{(b^2 + \lambda)(b^2 + \mu)(b^2 + \nu)}{(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)},$$

$$z^2 = \frac{(c^2 + \lambda)(c^2 + \mu)(c^2 + \nu)}{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)}.$$

Из этих уравнений ясно, что если (x, y, z) — какая-нибудь точка пространства и если λ , μ , ν обозначают параметры поверхностей второго порядка, софокусных с

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1,$$

проходящих через эту точку, то (x^2, y^2, z^2) однозначно определяются через (λ, μ, ν) , и наоборот.

Параметры (λ, μ, ν) называются *эллипсоидальными координатами* точки (x, y, z) относительно основного эллипса.

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1.$$

Легко показать, что эллипсоидальные координаты образуют ортогональную систему; в самом деле, рассмотрим направляющие косинусы касательной к кривой пересечения поверхностей (μ) и (ν) ; эти косинусы будут пропорциональны выражениям

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}, \frac{\partial y}{\partial \lambda}, \frac{\partial z}{\partial \lambda} \right),$$

и так как

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial x}{\partial \mu} + \frac{\partial y}{\partial \lambda} \frac{\partial y}{\partial \mu} + \frac{\partial z}{\partial \lambda} \frac{\partial z}{\partial \mu} = \frac{1}{4} \sum_{a, b, c} \frac{a^2 + \nu}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)} = 0,$$

то очевидно, что направления

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}, \frac{\partial y}{\partial \lambda}, \frac{\partial z}{\partial \lambda} \right), \quad \left(\frac{\partial x}{\partial \mu}, \frac{\partial y}{\partial \mu}, \frac{\partial z}{\partial \mu} \right)$$

перпендикулярны; подобным же образом каждое из этих направлений перпендикулярно направлению

$$\left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right).$$

Таким образом, показано, что три системы поверхностей, на которых λ, μ, v соответственно будут постоянными, образуют триортогональную систему.

Поэтому квадрат линейного элемента, а именно

$$(\delta x)^2 + (\delta y)^2 + (\delta z)^2,$$

может быть представлен в виде

$$(H_1 \delta \lambda)^2 + (H_2 \delta \mu)^2 + (H_3 \delta v)^2,$$

где

$$H_1^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \lambda} \right)^2;$$

подобные же выражения имеют место для H_2^2 и H_3^2 с заменой λ на μ и v .

Чтобы выразить H_1^2 через (λ, μ, v) , заметим, что

$$H_1^2 = \frac{1}{4x^2} \left(\frac{\partial x^2}{\partial \lambda} \right)^2 + \frac{1}{4y^2} \left(\frac{\partial y^2}{\partial \lambda} \right)^2 + \frac{1}{4z^2} \left(\frac{\partial z^2}{\partial \lambda} \right)^2 = \\ = \frac{1}{4} \sum_{a, b, c} \frac{(a^2 + \mu)(a^2 + v)}{(a^2 + \lambda)(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}.$$

Но если разложим

$$\frac{(\lambda - \mu)(\lambda - v)}{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)},$$

как функцию от λ , на простейшие дроби, то увидим, что она как раз равна

$$\sum_{a, b, c} \frac{(a^2 + \mu)(a^2 + v)}{(a^2 + \lambda)(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}.$$

и следовательно,

$$H_1^2 = \frac{(\lambda - \mu)(\lambda - v)}{4(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)}.$$

Значения H_2^2 и H_3^2 получаются из этого выражения круговой перестановкой (λ, μ, v) .

Формулы, эквивалентные выведенным в этом параграфе, были получены Ламе (Lamé, Journ. de Math., II (1837), 147—183).

Пример 1. В обозначениях этого параграфа показать, что

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2 + c^2 + \lambda + \mu + \nu.$$

Пример 2. Показать, что

$$4H_1^2 = \frac{x^2}{(a^2 + \lambda)^2} + \frac{y^2}{(b^2 + \lambda)^2} + \frac{z^2}{(c^2 + \lambda)^2}.$$

23.31. Униформизирующие переменные, связанные с эллипсоидальными координатами

В § 23.3 мы видели, что если выразить декартовы координаты (x, y, z) через эллипсоидальные координаты (λ, μ, ν) , то полученные таким образом выражения не будут однозначными функциями от (λ, μ, ν) . Для того чтобы избежнуть вызываемой этим неопределенности, выразим (λ, μ, ν) через три новые переменные (u, v, w) соответственно, положив

$$\varphi(u) = \lambda + \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2),$$

$$\varphi(v) = \mu + \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2),$$

$$\varphi(w) = \nu + \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2),$$

где инварианты g_2 и g_3 эллиптической функции Вейерштрасса определяются тождеством

$$4(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda) \equiv 4\varphi^3(u) - g_2\varphi(u) - g_3.$$

Дискриминант, соответствующий этим эллиптическим функциям (ср. § 20.33, пример 3), будет равен

$$16(a^2 - b^2)^2(b^2 - c^2)^2(c^2 - a^2)^2,$$

и таким образом, он будет положителен; поэтому¹⁾ первый из трех периодов $2\omega_1$, $2\omega_2$ и $2\omega_3$, а именно период $2\omega_1$, будет положительным, период же $2\omega_3$ чисто мнимым; $2\omega_2$ имеет отрицательную вещественную часть, так как $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0$; мнимая часть ω_2 будет положительной, так как $\operatorname{Im}(\omega_2/\omega_1) > 0$.

При этих обстоятельствах $e_1 > e_2 > e_3$, и таким образом, имеем

$$3e_1 = a^2 + b^2 - 2c^2, \quad 3e_2 = c^2 + a^2 - 2b^2, \quad 3e_3 = b^2 + c^2 - 2a^2.$$

¹⁾ Ср. пример 1 § 20.32.

Выразив затем (x, y, z) через (u, v, w) , получим

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{(a^2 + \lambda)(a^2 + \mu)(a^2 + \nu)}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)} = \frac{\{\wp(u) - e_3\} \{\wp(v) - e_3\} \{\wp(w) - e_3\}}{(e_1 - e_3)(e_2 - e_3)} = \\ &= \frac{\sigma_3^2(u) \sigma_3^2(v) \sigma_3^2(w)}{\sigma^2(u) \sigma^2(v) \sigma^2(w)} \frac{\sigma^2(\omega_1) \sigma^2(\omega_2)}{\sigma_3^2(\omega_1) \sigma_3^2(\omega_2)} \end{aligned}$$

согласно примеру 4 § 20.53. Поэтому по § 20.421 имеем

$$x = \pm e^{-\tau_3 \omega_3 \sigma^2(\omega_3)} \frac{\sigma_3(u) \sigma_3(v) \sigma_3(w)}{\sigma(u) \sigma(v) \sigma(w)}$$

и подобным же образом

$$y = \pm e^{-\tau_2 \omega_2 \sigma^2(\omega_2)} \frac{\sigma_2(u) \sigma_2(v) \sigma_2(w)}{\sigma(u) \sigma(v) \sigma(w)},$$

$$z = \pm e^{-\tau_1 \omega_1 \sigma^2(\omega_1)} \frac{\sigma_1(u) \sigma_1(v) \sigma_1(w)}{\sigma(u) \sigma(v) \sigma(w)}.$$

Результат увеличения каждой из переменных u, v, w на $2\omega_3$ скажется в изменении знака выражения для x , в то время как выражения для y и z остаются без изменения; подобное же утверждение имеет место при увеличении u, v, w на $2\omega_2$ и $2\omega_1$; и кроме того каждое из трех выражений изменяет знак при изменении знаков у u, v, w .

Отсюда следует, что если взять верхние знаки в этих двузначных выражениях, то будет иметь место однозначное соответствие между всеми совокупностями значений (x, y, z) , вещественными или комплексными, и всеми совокупностями значений (u, v, w) , у которых все три представителя u, v и w лежат в любой заданной ячейке.

Униформизация, следовательно, осуществляется, если взять

$$x = e^{-\tau_3 \omega_3 \sigma^2(\omega_3)} \frac{\sigma_3(u) \sigma_3(v) \sigma_3(w)}{\sigma(u) \sigma(v) \sigma(w)},$$

$$y = e^{-\tau_2 \omega_2 \sigma^2(\omega_2)} \frac{\sigma_2(u) \sigma_2(v) \sigma_2(w)}{\sigma(u) \sigma(v) \sigma(w)},$$

$$z = e^{-\tau_1 \omega_1 \sigma^2(\omega_1)} \frac{\sigma_1(u) \sigma_1(v) \sigma_1(w)}{\sigma(u) \sigma(v) \sigma(w)}.$$

Формулы, отличающиеся от приведенных только перестановкой индексов 1 и 3, даны Альфаном (Halphen, Fonctions Elliptiques, II (1888), 459).

23.32. Уравнение Лапласа в эллипсоидальных координатах

Ламе и Томсоном¹⁾ было показано, что уравнение Лапласа, отнесенное к любой ортогональной системе координат (λ, μ, ν) , имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \left\{ \frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial V}{\partial \lambda} \right\} + \frac{\partial}{\partial \mu} \left\{ \frac{H_3 H_1}{H_2} \frac{\partial V}{\partial \mu} \right\} + \frac{\partial}{\partial \nu} \left\{ \frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial V}{\partial \nu} \right\} = 0,$$

где (H_1, H_2, H_3) определяются тем, что

$$(H_1 \delta \lambda)^2 + (H_2 \delta \mu)^2 + (H_3 \delta \nu)^2$$

является квадратом линейного элемента. Хотя доказательство этого результата, принадлежащее Томсону и основанное на рассуждениях физического характера, чрезвычайно просто, все аналитические доказательства либо весьма длинны, либо сильно ужаты.

Тем не менее Ламе²⁾ доказал, что в частном случае, когда (λ, μ, ν) — эллипсоидальные координаты, уравнение Лапласа принимает простую форму, которую можно получить без кропотливых выкладок; когда за координаты принимаются униформизирующие переменные (u, v, w) § 23.31, форма уравнения Лапласа становится еще проще.

Прямыми дифференцированием можно доказать, что если *любые* три независимые функции (λ, μ, ν) от (x, y, z) принимаются за независимые переменные, то выражение

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

преобразуется в такое:

$$\sum_{\lambda, \mu, \nu} \left[\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial z} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2} + \\ + 2 \sum_{\lambda, \mu, \nu} \left[\frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{\partial \nu}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} \frac{\partial \nu}{\partial y} + \frac{\partial \mu}{\partial z} \frac{\partial \nu}{\partial z} \right] \frac{\partial^2 V}{\partial \mu \partial \nu} + \\ + \sum_{\lambda, \mu, \nu} \left[\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial z^2} \right] \frac{\partial V}{\partial \lambda}.$$

Для того чтобы упростить это выражение, заметим, что λ удовлетворяет уравнению

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} = 1,$$

¹⁾ См. примечание на стр. 253.

²⁾ L a m é, Journ. de Math., IV (1839), 133—136.

откуда, принимая x, y, z за независимые переменные, дифференцированием получим

$$\frac{2x}{a^2 + \lambda} - \left\{ \frac{x^2}{(a^2 + \lambda)^2} + \frac{y^2}{(b^2 + \lambda)^2} + \frac{z^2}{(c^2 + \lambda)^2} \right\} \frac{\partial \lambda}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{2}{a^2 + \lambda} - \frac{4}{(a^2 + \lambda)^2} \frac{\partial \lambda}{\partial x} + 2 \left\{ \frac{x^2}{(a^2 + \lambda)^3} + \frac{y^2}{(b^2 + \lambda)^3} + \frac{z^2}{(c^2 + \lambda)^3} \right\} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} \right)^2 - \left\{ \frac{x^2}{(a^2 + \lambda)^2} + \frac{y^2}{(b^2 + \lambda)^2} + \frac{z^2}{(c^2 + \lambda)^2} \right\} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} = 0.$$

Отсюда находим

$$\frac{2x}{a^2 + \lambda} = 4H_1^2 \frac{\partial \lambda}{\partial x},$$

$$\frac{2}{a^2 + \lambda} - \frac{2x^2}{(a^2 + \lambda)^3 H_1^2} + \frac{x^2}{2H_1^4 (a^2 + \lambda)^2} \sum_{(x, y, z)} \frac{x^2}{(a^2 + \lambda)^3} = 4H_1^2 \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2}$$

и подобные же соотношения для μ, ν и y, z .

Из соотношения первого типа видно, что коэффициент при $\frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2}$ равен $\frac{1}{H_1^2}$, а коэффициент при $\frac{\partial^2 V}{\partial \mu \partial \nu}$ равен нулю; если сложить соотношения второго типа, получаемые круговой перестановкой x, y, z , то получим

$$4H_1^2 \left\{ \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial z^2} \right\} = \sum_{a, b, c} \frac{2}{a^2 + \lambda}$$

и подобные же соотношения для μ и ν .

Если для краткости положим

$$\sqrt{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)} \equiv \Delta_\lambda$$

и аналогично определим Δ_μ и Δ_ν , то увидим, что

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial z^2} = \frac{\Delta_\lambda^2}{(\lambda - \mu)(\lambda - \nu)} \left\{ \frac{2}{a^2 + \lambda} + \frac{2}{b^2 + \lambda} + \frac{2}{c^2 + \lambda} \right\} =$$

$$= \frac{4\Delta_\lambda}{(\lambda - \mu)(\lambda - \nu)} \frac{d\Delta_\lambda}{d\lambda},$$

и таким образом, уравнение Лапласа примет вид

$$\sum_{\lambda, \mu, \nu} \frac{4}{(\lambda - \mu)(\lambda - \nu)} \left[\Delta_\lambda^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2} + \Delta_\lambda \frac{d\Delta_\lambda}{d\lambda} \frac{\partial V}{\partial \lambda} \right] = 0$$

или

$$(\mu - \nu) \Delta_\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \left\{ \Delta_\lambda \frac{\partial V}{\partial \lambda} \right\} + (\nu - \lambda) \Delta_\mu \frac{\partial}{\partial \mu} \left\{ \Delta_\mu \frac{\partial V}{\partial \mu} \right\} +$$

$$+ (\lambda - \mu) \Delta_\nu \frac{\partial}{\partial \nu} \left\{ \Delta_\nu \frac{\partial V}{\partial \nu} \right\} = 0.$$

23.33. ЭЛЛИПСОИД. ГАРМ. ФУНКЦИИ В ЭЛЛИПСОИД. КООРДИНАТАХ 461

Эквивалентное уравнение с независимыми переменными (u , v , w) имеет вид

$$\{\varphi(v) - \varphi(w)\} \frac{\partial^2 V}{\partial u^2} + \{\varphi(w) - \varphi(u)\} \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} + \{\varphi(u) - \varphi(v)\} \frac{\partial^2 V}{\partial w^2} = 0$$

или, короче,

$$(\mu - \nu) \frac{\partial^2 V}{\partial u^2} + (\nu - \lambda) \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} + (\lambda - \mu) \frac{\partial^2 V}{\partial w^2} = 0.$$

Последние три уравнения будем рассматривать в дальнейшем исследовании как канонические формы уравнения Лапласа.

23.33. ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ В ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫХ КООРДИНАТАХ

Если функцию Θ_p Нивена, определяемую как

$$\frac{x^2}{a^2 + \theta_p} + \frac{y^2}{b^2 + \theta_p} + \frac{z^2}{c^2 + \theta_p} = 1,$$

выразим через эллипсоидальные координаты (λ , μ , ν) точки (x , y , z), то она примет вид

$$-\frac{(\lambda - \theta_p)(\mu - \theta_p)(\nu - \theta_p)}{(a^2 + \theta_p)(b^2 + \theta_p)(c^2 + \theta_p)},$$

и следовательно, если опустим постоянные множители вида

$$-(a^2 + \theta_p)(b^2 + \theta_p)(c^2 + \theta_p),$$

эллипсоидальные гармонические функции примут вид

$$\left\{ \begin{array}{cccc} x & yz \\ 1 & y & zx & xyz \\ & z & xy \end{array} \right\} \prod_{p=1}^m (\lambda - \theta_p) \prod_{p=1}^m (\mu - \theta_p) \prod_{p=1}^m (\nu - \theta_p).$$

Если теперь мы заменим x , y , z их выражениями через λ , μ , ν , то увидим, что любая эллипсоидальная функция выражается, с точностью до постоянного множителя, в виде ΛMN , где Λ — функция только от λ , а M и N — такие же функции от μ и ν , как Λ от λ . Далее, Λ есть полином степени m относительно λ , умноженный в случае гармонических функций второго, третьего или четвертого вида на одно, два или три из выражений

$$\sqrt{a^2 + \lambda}, \quad \sqrt{b^2 + \lambda}, \quad \sqrt{c^2 + \lambda}.$$

Так как полином, содержащийся в Λ , равен $\prod_{p=1}^m (\lambda - \theta_p)$, то из рассмотрения §§ 23.21—23.24 вытекает, что Λ является решением

дифференциального уравнения Ламе

$$4V(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda) \frac{d}{d\lambda} \left[V(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda) \frac{d\Lambda}{d\lambda} \right] = \\ = [n(n+1)\lambda + C]\Lambda,$$

где n — степень рассматриваемой гармонической функции относительно x, y, z . К этому результату можно прийти также, рассматривая решения уравнения Лапласа, которые имеют вид¹⁾:

$$V = \Lambda MN,$$

где Λ, M, N — функции соответственно только от λ, μ, ν .

Ибо если подставить это выражение в уравнение Лапласа в форме § 23.32, то после деления на V найдем, что

$$\frac{\wp(v) - \wp(w)}{\Lambda} \frac{d^2\Lambda}{du^2} + \frac{\wp(w) - \wp(u)}{M} \frac{d^2M}{dv^2} + \frac{\wp(u) - \wp(v)}{N} \frac{d^2N}{dw^2} = 0.$$

Последние два члена, рассматриваемые как функции от u , являются линейными функциями от $\wp(u)$, и следовательно, $\frac{1}{\Lambda} \frac{d^2\Lambda}{du^2}$ также должно быть линейной функцией от $\wp(u)$; так как оно не зависит от координат v и w , то имеем

$$\frac{1}{\Lambda} \frac{d^2\Lambda}{du^2} = \{K\wp(u) + B\},$$

где K и B — постоянные.

Если подставить это выражение в дифференциальное уравнение, то получим (тождественное) равенство нулю линейной функции от $\wp(u)$, и таким образом, коэффициенты в этой линейной функции должны равняться нулю; отсюда найдем уравнения

$$K\{\wp(v) - \wp(w)\} - \frac{1}{M} \frac{d^2M}{dv^2} + \frac{1}{N} \frac{d^2N}{dw^2} = 0, \\ B\{\wp(v) - \wp(w)\} + \frac{\wp(w)}{M} \frac{d^2M}{dv^2} - \frac{\wp(v)}{N} \frac{d^2N}{dw^2} = 0;$$

разрешая их (и замечая при этом, что $\wp(v) - \wp(w)$ не равно нулю тождественно), получим три уравнения:

$$\frac{d^2\Lambda}{du^2} = \{K\wp(u) + B\}\Lambda,$$

$$\frac{d^2M}{dv^2} = \{K\wp(v) + B\}M,$$

$$\frac{d^2N}{dw^2} = \{K\wp(w) + B\}N.$$

¹⁾ Гармоническую функцию, являющуюся произведением трех функций, каждая из которых зависит только от одной координаты, иногда называют *нормальным решением* уравнения Лапласа. Так, нормальными решениями в полярных координатах (§ 18.31) будут $r^n P_n^m(\cos \theta) \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi}$.

Когда за независимую переменную принимается λ , первое уравнение принимает вид

$$4\Delta_\lambda \frac{d}{d\lambda} \left\{ \Delta_\lambda \frac{d\Lambda}{d\lambda} \right\} = \left\{ K\lambda + B + \frac{1}{3} K(a^2 + b^2 + c^2) \right\} \Lambda,$$

а это и есть уравнение, уже полученное для Λ ; степень n гармонической функции дается формулой

$$n(n+1) = K.$$

Мы продвинулись теперь в изучении эллипсоидальных гармонических функций настолько далеко, насколько было возможно, не прибегая к использованию свойств уравнения Ламе.

Теперь мы приступим к подробному рассмотрению этого уравнения.

23.4. Различные формы дифференциального уравнения Ламе

Мы уже встречались с двумя формами уравнения Ламе, а именно:

$$4\Delta_\lambda \frac{d}{d\lambda} \left\{ \Delta_\lambda \frac{d\Lambda}{d\lambda} \right\} = [n(n+1)\lambda + C] \Lambda,$$

или

$$\frac{d^2\Lambda}{d\lambda^2} + \left\{ \frac{\frac{1}{2}}{a^2 + \lambda} + \frac{\frac{1}{2}}{b^2 + \lambda} + \frac{\frac{1}{2}}{c^2 + \lambda} \right\} \frac{d\Lambda}{d\lambda} = \frac{\{n(n+1)\lambda + C\} \Lambda}{4(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)},$$

которая может быть названа алгебраической формой, и

$$\frac{d^2\Lambda}{du^2} = \{n(n+1)\wp(u) + B\} \Lambda,$$

которая может быть названа формой Вейерштрасса, так как она содержит эллиптическую функцию Вейерштрасса $\wp(u)$; постоянные B и C связаны соотношением

$$B + \frac{1}{3} n(n+1)(a^2 + b^2 + c^2) = C.$$

Если примем функцию $\wp(u)$ за новую независимую переменную, которую обозначим через ξ , то получим несколько видоизмененную алгебраическую форму (ср. § 10.6):

$$\frac{d^2\Lambda}{d\xi^2} + \left\{ \frac{\frac{1}{2}}{\xi - e_1} + \frac{\frac{1}{2}}{\xi - e_2} + \frac{\frac{1}{2}}{\xi - e_3} \right\} \frac{d\Lambda}{d\xi} = \frac{\{n(n+1)\xi + B\} \lambda}{4(\xi - e_1)(\xi - e_2)(\xi - e_3)}.$$

Это дифференциальное уравнение имеет особые точки в e_1 , e_2 , e_3 , в каждой из которых показатели равны 0, $\frac{1}{2}$, и особую точку на бесконечности, показатели в которой равны $-\frac{1}{2}n$, $\frac{1}{2}(n+1)$.

Вейерштрассовская форма уравнения была изучена Альфаном (Halphen, *Fonctions Elliptiques*, II (Paris, 1888), 457—531).

Алгебраическая форма была изучена Стильтесом (Stieltjes, *Acta Math.*, VI (1885), 321—326), Клейном (Klein, *Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen* (литографировано, Göttingen, 1894)) и Бочером (Böcher, *Ueber die Reihenentwicklungen der Potentialtheorie* (Leipzig, 1894)).

Более общее дифференциальное уравнение с четырьмя особыми точками, в которых показатели произвольны (за исключением того, что сумма всех показателей во всех особых точках равна 2), было исследовано Хейном (Heun, *Math. Ann.*, XXXIII (1889), 161—179); произвольное расположение особых точек приводит только к кажущемуся выигрышу в общности, так как при помощи дроболинейного преобразования независимой переменной одну из особых точек можно перевести в точку на бесконечности, а тогда перенос начала координат достаточен для того, чтобы сделать сумму комплексных координат трех конечных особых точек равной нулю.

Другая важная форма уравнения Ламе получается, если перейти к эллиптическим функциям Якоби; если положить

$$z_1 = u \sqrt{e_1 - e_3},$$

то форма Вейерштрасса примет вид

$$\frac{d^2\Lambda}{dz_1^2} = \left[n(n+1) \left\{ \frac{e_3}{e_1 - e_3} + ns^2 z_1 \right\} + \frac{B}{e_1 - e_3} \right] \Lambda,$$

а положив $z_1 = \alpha - iK'$, где $2iK'$ — мнимый период функции $\operatorname{sn} z_1$, получим простую форму

$$\frac{d^2\Lambda}{d\alpha^2} = \{n(n+1)k^2 \operatorname{sn}^2 \alpha + A\} \Lambda,$$

где A — постоянная, связанная с B соотношением

$$B + e_3 n(n+1) = A(e_1 - e_3).$$

Форма Якоби была изучена Эрмитом в мемуаре «Sur quelques applications des fonctions elliptiques», *Comptes Rendus*, LXXXV (1887), опубликован отдельно, Paris, 1885.

При изучении свойств уравнения Ламе лучше пользоваться не одной только формой, а брать ту форму, которая является наиболее удобной для данной цели. Для практических приложений форма Якоби, приводящая к тэта-функциям, является наиболее подходящей.

Для получения свойств решений уравнения наилучшей формой является, вообще говоря, вторая алгебраическая форма, хотя в некоторых задачах более простое исследование получается при форме Вейерштрасса.

23.41. Решения уравнения Ламе в виде рядов

Допустим, что уравнение Ламе, которое можно написать так

$$4(\xi - e_1)(\xi - e_2)(\xi - e_3) \frac{d^2\Lambda}{d\xi^2} + \left(6\xi^2 - \frac{1}{2}g_2\right) \frac{d\Lambda}{d\xi} - [n(n+1)\xi + B]\Lambda = 0,$$

имеет решение вида

$$\Lambda = \sum_{r=0}^{\infty} b_r (\xi - e_2)^{\frac{1}{2}n-r}.$$

Ряд справа, если он является решением, будет сходиться (§ 10.31, часть I) при достаточно больших значениях $|\xi - e_2|$; но нашей целью является не изучение сходимости, а выбор такого B , чтобы ряд обрывался на конечном числе членов, так что исследование сходимости окажется излишним.

Результатом подстановки этого ряда для Λ в левую часть уравнения Ламе и расположения его по степеням $\xi - e_2$ будет ряд

$$4 \sum_{r=0}^{\infty} (\xi - e_2)^{\frac{1}{2}n-r+1} \left[r \left(n - r + \frac{1}{2} \right) b_r - \left\{ 3e_2 \left(\frac{1}{2}n - r + 1 \right)^2 - \frac{1}{4}n(n+1)e_2 - \frac{1}{4}B \right\} b_{r-1} + (e_1 - e_2)(e_2 - e_3) \left(\frac{1}{2}n - r + 2 \right) \left(\frac{1}{2}n - r + \frac{3}{2} \right) b_{r-2} \right]$$

со знаком минус, причем коэффициенты b_r с отрицательными индексами следует считать равными нулю.

Поэтому, если ряд является решением, зависимость, связывающая последовательные коэффициенты, должна быть следующей:

$$r \left(n - r + \frac{1}{2} \right) b_r = \left\{ 3e_2 \left(\frac{1}{2}n - r + 1 \right)^2 - \frac{1}{4}n(n+1)e_2 - \frac{1}{4}B \right\} b_{r-1} - (e_1 - e_2)(e_2 - e_3) \left(\frac{1}{2}n - r + 2 \right) \left(\frac{1}{2}n - r + \frac{3}{2} \right) b_{r-2}$$

и

$$\left(n - \frac{1}{2} \right) b_1 = \left\{ \frac{3}{4}n^2e_2 - \frac{1}{4}n(n+1)e_2 - \frac{1}{4}B \right\} b_0.$$

Если взять $b_0 = 1$, что мы можем сделать, не теряя общности, то коэффициенты b_r окажутся функциями от B со следующими свойствами:

(I) b_r — полином относительно B степени r ;
 (II) — знак коэффициента при B^r в выражении для b_r будет $(-1)^r$ в предположении, что $r \leq n$; сам коэффициент при B^r равен

$$\frac{(-1)^r}{2 \cdot 4 \dots 2r (2n-1)(2n-3) \dots (2n-2r+1)};$$

(III) если e_1, e_2, e_3 и B вещественны и $e_1 > e_2 > e_3$, то при $b_{r-1} = 0$ значения b_r и b_{r-2} противоположны по знаку в предположении, что $r < \frac{1}{2}(n+3)$ и $r < n$.

Теперь предположим, что n четное и что мы взяли такое B , что

$$b_{\frac{1}{2}n+1} = 0.$$

Если сделан этот выбор, то рекуррентная формула показывает, что

$$b_{\frac{1}{2}n+2} = 0,$$

если положить в ней $r = \frac{1}{2}n+2$, а если как $b_{\frac{1}{2}n+1}$, так и $b_{\frac{1}{2}n+2}$ — нули, то дальнейшие рекуррентные формулы удовлетворяются, если взять

$$b_{\frac{1}{2}n+3} = b_{\frac{1}{2}n+4} = \dots = 0.$$

Таким образом, условие, чтобы уравнение Ламе имело в качестве решения полином от ξ , заключается в том, что B должно быть корнем определенного алгебраического уравнения степени $\frac{1}{2}n+1$, если n четное.

Когда же n нечетное, мы берем $b_{\frac{1}{2}(n+1)}$ равным нулю, тогда $b_{\frac{1}{2}(n+3)}$ также будет равняться нулю, и то же будет с дальнейшими коэффициентами; так что, когда n нечетное, условие заключается в том, что B должно быть корнем определенного алгебраического уравнения степени $\frac{1}{2}(n+1)$.

Легко показать, что при $e_1 > e_2 > e_3$ все корни этих алгебраических уравнений вещественны. В самом деле, свойства (II) и (III) показывают, что выражения $b_0, b_1, b_2, \dots, b_r$, как функции от B , образуют ряд функций Штурма¹⁾, когда $r < \frac{1}{2}(n+3)$, и таким образом, у уравнения

$$b_{\frac{1}{2}n+1} = 0 \quad \text{или} \quad b_{\frac{1}{2}(n+1)} = 0$$

все корни вещественные²⁾ и неравные.

Таким образом, если постоянные e_1, e_2, e_3 вещественны (случай, который является практически важным, как было видно в § 23.31),

¹⁾ Sturm, Mém. présentés par les Savants Étrangers, VI (1835), 271—318.

²⁾ Этот способ рассуждения принадлежит Лиувиллю (Liouville, Journ. de Math., XI (1846), 221).

то при n четном имеется $\frac{1}{2}n+1$ вещественных и различных значений B , для которых уравнение Ламе имеет решение вида

$$\sum_{r=0}^{\frac{1}{2}n} b_r (\xi - e_2)^{\frac{1}{2}n-r},$$

а при n нечетном имеется $\frac{1}{2}(n+1)$ вещественных и различных значений B , для которых уравнение Ламе имеет решение вида

$$\sum_{r=0}^{\frac{1}{2}(n-1)} b_r (\xi - e_2)^{\frac{1}{2}n-r}.$$

Когда *не все* постоянные e_1, e_2, e_3 вещественны, уравнение, которому удовлетворяет величина B , может иметь равные корни; решения уравнения Ламе в таких случаях были исследованы Коном (Cohn) в Кенигсбергской диссертации (1888 г.).

При мер 1. Исследовать решения уравнения Ламе типа

$$(I) \quad (\xi - e_1)^{\frac{1}{2}} \sum_{r=0}^{\infty} b'_r (\xi - e_2)^{\frac{1}{2}n-r-\frac{1}{2}},$$

$$(II) \quad (\xi - e_3)^{\frac{1}{2}} \sum_{r=0}^{\infty} b''_r (\xi - e_2)^{\frac{1}{2}n-r-\frac{1}{2}},$$

$$(III) \quad (\xi - e_1)^{\frac{1}{2}} (\xi - e_3)^{\frac{1}{2}} \sum_{r=0}^{\infty} b'''_r (\xi - e_2)^{\frac{1}{2}n-r-1},$$

получив рекуррентные соотношения

$$(I) \quad r \left(n - r + \frac{1}{2} \right) b'_r = \\ = \left\{ 3e_2 \left(\frac{1}{2}n - r + \frac{1}{2} \right)^2 + (e_2 - e_3) \left(\frac{1}{2}n - r + \frac{3}{4} \right) - \frac{1}{4}n(n+1)e_2 - \frac{1}{4}B \right\} b'_{r-1} - \\ - (e_1 - e_2)(e_2 - e_3) \left(\frac{1}{2}n - r + \frac{3}{2} \right) \left(\frac{1}{2}n - r + 1 \right) b'_{r-2},$$

$$(II) \quad r \left(n - r + \frac{1}{2} \right) b''_r = \\ = \left\{ 3e_2 \left(\frac{1}{2}n - r + \frac{1}{2} \right)^2 - (e_1 - e_2) \left(\frac{1}{2}n - r + \frac{3}{4} \right) - \frac{1}{4}n(n+1)e_2 - \frac{1}{4}B \right\} b''_{r-1} - \\ - (e_1 - e_2)(e_2 - e_3) \left(\frac{1}{2}n - r + \frac{3}{2} \right) \left(\frac{1}{2}n - r + 1 \right) b''_{r-2},$$

$$(III) \quad r \left(n - r + \frac{1}{2} \right) b'''_r = \left\{ 3e_2 \left(\frac{1}{2}n - r + \frac{1}{2} \right)^2 - \right. \\ \left. - \frac{1}{4}e_2(n^2 + n + 1) - \frac{1}{4}B \right\} b'''_{r-1} - \\ - (e_1 - e_2)(e_2 - e_3) \left(\frac{1}{2}n - r + 1 \right) \left(\frac{1}{2}n - r + \frac{1}{2} \right) b'''_{r-2}.$$

Пример 2. В обозначении примера 1 показать, что число вещественных различных значений B , при которых уравнению Ламе удовлетворяют обывающиеся ряды различного вида, равно

$$(I) \frac{1}{2}(n-1) \text{ или } \frac{1}{2}(n-2), \quad (II) \frac{1}{2}(n-1) \text{ или } \frac{1}{2}(n-2), \\ (III) \frac{1}{2}(n-2) \text{ или } \frac{1}{2}(n-3).$$

23.42. Определение функций Ламе

Если собрать результаты, полученные в § 23.41, то будет ясно, что для уравнения

$$\frac{d^2\Lambda}{du^2} = [n(n+1)\varphi(u) + B]\Lambda$$

с целым положительным n имеется $2n+1$ значений B , при которых уравнение имеет решение одного из четырех видов, описанных в §§ 23.21—23.24.

Если при разложении такого решения по убывающим степеням ξ коэффициент при высшем члене $\xi^{\frac{1}{2}n}$ берется равным единице, как это было сделано в § 23.41, то полученная таким образом функция называется *функцией Ламе степени n первого рода* первого (второго, третьего или четвертого) вида. Полученные таким образом $2n+1$ функций обозначаются символом

$$E_n^m(\xi) \quad (m = 1, 2, \dots, 2n+1);$$

когда же имеем дело лишь с одной такой функцией, то она может быть обозначена символом

$$E_n(\xi).$$

Таблицы выражений, дающих функции Ламе для $n = 1, 2, \dots, 10$ были составлены Герриторе (Guerritore, Giornale di Math. (2), XVI (1909), 164—172). Пример 1. Получить пять функций Ламе второй степени, а именно:

$$\lambda + \frac{1}{3} \sum a^2 \pm \frac{1}{3} \sqrt{\sum a^4 - \sum b^2 c^2}, \\ \sqrt{\lambda + b^2} \sqrt{\lambda + c^2}, \quad \sqrt{\lambda + c^2} \sqrt{\lambda + a^2}, \quad \sqrt{\lambda + a^2} \sqrt{\lambda + b^2}.$$

Пример 2. Получить семь функций Ламе третьей степени, а именно:

$$\sqrt{(\lambda + a^2)(\lambda + b^2)(\lambda + c^2)},$$

и шесть функций, получаемых перестановкой a, b, c в выражениях

$$\sqrt{\lambda + a^2} \left[\lambda + \frac{1}{5}(a^2 + 2b^2 + 2c^2) \pm \frac{1}{5} \sqrt{a^4 + 4b^4 + 4c^4 - 7b^2c^2 - c^2a^2 - a^2b^2} \right].$$

23.43. Об отсутствии кратных корней у функций Ламе

Покажем теперь, что все линейные множители, на которые разлагается функция $E_n^m(\xi)$, различны. Этот результат легче всего получается из дифференциального уравнения, которому удовлетворяет функция $E_n^m(\xi)$; ибо если $\xi = \xi_1$ — какой-нибудь множитель функции $E_n^m(\xi)$, где ξ_1 не равно ни одному из чисел e_1, e_2, e_3 , то ξ_1 будет правильной точкой уравнения (§ 10.3, часть I), и любое решение, разложение которого по степеням $\xi - \xi_1$ не начинается с члена $(\xi - \xi_1)^0$ или $(\xi - \xi_1)^1$, должно тождественно равняться нулю.

Точно так же, если бы ξ_1 было одним из чисел e_1, e_2 или e_3 , то определяющее уравнение, соответствующее особой точке ξ_1 , имело бы корни 0 и $\frac{1}{2}$; таким образом, разложение функции $E_n^m(\xi)$ по воз-

растающим степеням $\xi - \xi_1$ начиналось бы с члена $(\xi - \xi_1)^0$ или $(\xi - \xi_1)^{\frac{1}{2}}$.

Таким образом, ни при каких обстоятельствах $E_n^m(\xi)$, как функция от ξ , не имеет равных корней.

Определение чисел $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$, введенных в §§ 23.21—23.24, можно считать теперь законченным, ибо мы видели, что решения уравнения Ламе могут быть составлены из неравных множителей и значения $\theta_1, \theta_2, \dots$, соответствующие корням функции $E_n^m(\xi) = 0$, удовлетворяют уравнениям, необходимым для обеспечения того, чтобы произведения Нивена были решениями уравнения Лапласа.

Остается еще показать, что $2n + 1$ эллипсоидальных гармонических функций, построенных таким образом, образуют фундаментальную систему решений степени n уравнения Лапласа.

23.44. Линейная независимость функций Ламе

Покажем теперь, что $2n + 1$ функций Ламе $E_n^m(\xi)$ степени n линейно независимы, т. е. что между ними не существует линейных соотношений, имеющих место тождественно относительно ξ .

Во-первых, если бы существовало линейное соотношение, в которое входили бы функции различных видов, то очевидно, что надлежащим изменением знака радикалов $\sqrt{\xi - e_1}, \sqrt{\xi - e_2}, \sqrt{\xi - e_3}$ можно было бы получить другие соотношения, которые при сложении с первоначальным соотношением и вычитанием из него дали бы два (или более) новых линейных соотношения, каждое из которых связывало бы функции не только одного и того же вида, но даже одного и того же типа.

Пусть одно из таких соотношений, если они существуют, будет

$$\sum a_m E_n^m(\xi) \equiv 0 \quad (a_m \neq 0),$$

и пусть это соотношение содержит r функций.

Подействуем на это тождество оператором

$$\frac{d^2}{du^2} - n(n+1)\xi$$

$r-1$ раз.

Результаты последовательных действий будут

$$\sum a_m (B_n^m)^s E_n^m(\xi) \equiv 0 \quad (s = 1, 2, \dots, r-1),$$

где B_n^m — значение B , соответствующее функции $E_n^m(\xi)$.

Исключим a_1, a_2, \dots, a_r из r полученных уравнений; тогда найдем, что

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ B_n^1 & B_n^2 & B_n^3 & \dots & B_n^r \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (B_n^1)^{r-1} & (B_n^2)^{r-1} & (B_n^3)^{r-1} & \dots & (B_n^r)^{r-1} \end{vmatrix} = 0.$$

Но определитель слева равен произведению разностей чисел B_n^m , а эти разности не могут равняться нулю по § 23.41. Поэтому определитель не может равняться нулю, и таким образом, предполагаемого соотношения не существует.

Линейная независимость $2n+1$ функций Ламе степени n , таким образом, доказана.

23.45. Линейная независимость эллипсоидальных гармонических функций

Пусть $G_n^m(x, y, z)$ — эллипсоидальная гармоническая функция степени n , соответствующая функции $E_n^m(\xi)$, и пусть $H_n^m(x, y, z)$ — соответствующая однородная гармоническая функция.

Теперь легко показать не только линейную независимость $2n+1$ гармонических функций $G_n^m(x, y, z)$, но и линейную независимость $2n+1$ гармонических функций $H_n^m(x, y, z)$.

Во-первых, если бы существовало линейное соотношение между гармоническими функциями $G_n^m(x, y, z)$, то, выразив эти гармонические функции через эллипсоидальные координаты (λ, μ, ν) , мы должны были бы получить линейное соотношение между функциями Ламе $E_n^m(\xi)$, где $\xi = \lambda + \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$, а мы видели, что такого соотношения не существует.

Затем, если бы существовало линейное соотношение между однородными гармоническими функциями $H_n^m(x, y, z)$, то, действуя на

него оператором Нивена (§ 23.25)

$$1 - \frac{D^2}{2(2n-1)} + \frac{D^4}{2 \cdot 4 (2n-1)(2n-3)} - \dots$$

мы получили бы из него линейное соотношение, связывающее функции $G_n^m(x, y, z)$, а так как только что было показано, что такого соотношения не существует, то заключаем, что и однородные гармонические функции степени n линейно независимы.

23.46. Теорема Стильеса о нулях функций Ламе

Мы видели, что любая функция Ламе степени n может быть представлена в виде

$$(\theta + a^2)^{x_1} (\theta + b^2)^{x_2} (\theta + c^2)^{x_3} \prod_{p=1}^m (\theta - \theta_p),$$

где x_1, x_2, x_3 равны 0 или $\frac{1}{2}$, а числа $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$ вещественны и не равны друг другу и числам $-a^2, -b^2, -c^2$; кроме того, $\frac{1}{2}n = m + x_1 + x_2 + x_3$. Когда x_1, x_2, x_3 заданы, число функций Ламе этой степени и типа равно $m+1$.

Стильесом¹⁾ была доказана замечательная теорема, утверждающая, что эти $m+1$ функций могут быть расположены таким образом, что r -я функция имеет $r-1$ нулей²⁾ между $-a^2$ и $-b^2$, а остающиеся $m-r+1$ нулей между $-b^2$ и $-c^2$, так что, между прочим, все корни $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$ всех $m+1$ функций лежат между $-a^2$ и $-c^2$.

Чтобы доказать эту теорему, предположим, что $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ — любые вещественные переменные, такие, что

$$\begin{cases} -a^2 \leq \varphi_p \leq -b^2 & (p = 1, 2, \dots, r-1), \\ -b^2 \leq \varphi_p \leq -c^2 & (p = r, r+1, \dots, m), \end{cases}$$

и рассмотрим произведение

$$\Pi = \prod_{p=1}^m \left[|\varphi_p + a^2|^{x_1 + \frac{1}{4}} |\varphi_p + b^2|^{x_2 + \frac{1}{4}} |\varphi_p + c^2|^{x_3 + \frac{1}{4}} \right] \prod_{p \neq q} |\varphi_p - \varphi_q|.$$

Это произведение равно нулю, когда все переменные φ_p имеют свои наименьшие значения, а также когда они имеют свои наибольшие значения; когда переменные φ_p не равны друг другу и числом

¹⁾ S t i e l t j e s, Acta Mathematica, VI (1885), 321—326.

²⁾ Нули $-a^2, -b^2, -c^2$ опускаются из перечисления, принимаются во внимание только $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$.

$-a^2$, $-b^2$, $-c^2$, произведение Π положительно и, очевидно, является непрерывной ограниченной функцией переменных φ_p .

Отсюда заключаем, что имеется система значений переменных, для которых Π достигает своей верхней грани, которая строго положительна (см. § 3.62, часть I). Для этой системы значений переменных условия максимума дают

$$\frac{\partial \ln \Pi}{\partial \varphi_1} = \frac{\partial \ln \Pi}{\partial \varphi_2} = \dots = 0,$$

т. е.

$$\frac{x_1 + \frac{1}{4}}{\varphi_p + a^2} + \frac{x_2 + \frac{1}{4}}{\varphi_p + b^2} + \frac{x_3 + \frac{1}{4}}{\varphi_p + c^2} + \sum_{q=1}^m \frac{1}{\varphi_p - \varphi_q} = 0,$$

где p принимает последовательно значения 1, 2, ..., m .

Но эта система уравнений представляет собой как раз систему, посредством которой определяются $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p$ (см. §§ 23.21—23.24); таким образом, система уравнений, определяющих $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$, имеет решение, удовлетворяющее неравенствам

$$\begin{cases} -a^2 < \theta_p < -b^2 & (p = 1, 2, \dots, r-1), \\ -b^2 < \theta_p < -c^2 & (p = r, r+1, \dots, m). \end{cases}$$

Следовательно, если r — какое-нибудь из значений 1, 2, ..., $m+1$, то существует функция Ламе с $r-1$ нулем между $-a^2$ и $-b^2$ и с оставшимися $m-r+1$ нулями между $-b^2$ и $-c^2$.

Так как имеется всего $m+1$ функция Ламе определенного типа, то они получаются все, если дать r последовательно значения 1, 2, ..., $m+1$, а это и есть теорема Стильеса.

Стильес дал интересную статическую интерпретацию теоремы, а именно: пусть $m+3$ частицы, притягивающиеся друг к другу по закону обратной пропорциональности расстояниям, расположены на прямой, причем три из этих частиц, массы которых равны $x_1 + \frac{1}{4}, x_2 + \frac{1}{4}, x_3 + \frac{1}{4}$, закреплены в точках с координатами $-a^2, -b^2, -c^2$, а остальные частицы имеют единичную массу и могут свободно перемещаться по прямой, тогда $\ln \Pi$ будет потенциалом тяготения системы и положениями равновесия системы будут такие положения, в которых координаты подвижных частиц равны $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$, т. е. имеют значения, для которых какая-либо из функций Ламе степени $2(m+x_1+x_2+x_3)$ будет равна нулю.

Пример. Рассмотреть положения нулей полиномов, удовлетворяющих уравнению типа

$$\frac{d^2 \Lambda}{d\theta^2} + \sum_{s=1}^s \frac{1-a_s}{\theta-a_s} \frac{d\Lambda}{d\theta} + \frac{\varphi_{r-2}(\theta)}{\prod_{s=1}^r (\theta-a_s)} \Lambda = 0,$$

где $\varphi_{r-2}(\theta)$ — полином степени $r-2$ относительно θ , в котором коэффициент при θ^{r-2} равен

$$-m \left\{ m+r-1 - \sum_{s=1}^r a_s \right\},$$

где m — положительное целое число, а остальные коэффициенты в функции $\varphi_{r-2}(\theta)$ определяются из того соображения, что уравнение имеет решение в виде полинома.

(Stieltjes)

23.47. Функции Ламе второго рода

Рассмотренные до сего времени функции $E_n^m(\xi)$ известны как функции Ламе *первого рода*. Легко убедиться в том, что вторым независимым решением уравнения Ламе

$$\frac{d^2 \Lambda}{du^2} = \{n(n+1)\xi + B_n^m\} \Lambda$$

будет функция $F_n^m(\xi)$, определяемая равенством¹⁾

$$F_n^m(\xi) = (2n+1) E_n^m(\xi) \int_0^u \frac{du}{\{E_n^m(\xi)\}^2};$$

эта функция $F_n^m(\xi)$ называется функцией Ламе *второго рода*.

Из этой формулы ясно, что вблизи $u=0$

$$F_n^m(\xi) = (2n+1) u^{-n} \{1+O(u)\} \int_0^u u^{2n} \{1+O(u)\} du = u^{n+1} \{1+O(u)\},$$

а мы, очевидно, имеем $E_n^m(\xi) = u^{-n} \{1+O(u)\}$.

Из этих результатов ясно, что $F_n^m(\xi)$ никогда не может быть функцией Ламе первого рода, и таким образом, не имеется значений B_n^m , для которых уравнение Ламе удовлетворялось бы двумя функциями Ламе первого рода различных видов или типов.

Можно получить выражение для $F_n^m(\xi)$, свободное от квадратур, аналогично формуле Кристоффеля для $Q_n(z)$, данной на стр. 155 (пример 29). Сделаем это для случая, когда $E_n^m(\xi)$ есть функция первого вида. Единственными неприводимыми полюсами выражения $\frac{1}{\{E_n^m(\xi)\}^2}$, как функции от u , являются точки u_1, u_2, \dots, u_n , которые не будут ни периодами, ни половинами периодов.

¹⁾ Это определение функции $F_n^m(\xi)$ принадлежит Гейне (Heine, Journ. für Math., XXIX (1845), 194).

Вблизи любой из этих точек мы имеем разложение вида

$$E_n^m(\xi) = k_1(u - u_r) + k_2(u - u_r)^2 + k_3(u - u_r)^3 + \dots$$

и после подстановки этого ряда в дифференциальное уравнение найдем, что k_2 равно нулю.

Отсюда заключаем, что главная часть разложения $\frac{1}{\{E_n^m(\xi)\}^2}$ вблизи u_r равняется $\frac{1}{k_1^2(u - u_r)^2}$, и следовательно, вычет равен нулю.

Поэтому можно найти такие постоянные A_r , что функция

$$\{E_n^m(\xi)\}^{-2} = \sum_{r=1}^n A_r \wp(u - u_r)$$

не будет иметь полюсов в точках, сравнимых с точками u_r ; и значит по теореме Лиувилля она равна некоторой постоянной A , так как она является двоякопериодической функцией от u .

Отсюда

$$\int_0^u \frac{du}{\{E_n^m(\xi)\}^2} = Au - \sum_{r=1}^n A_r [\zeta(u - u_r) + \zeta(u_r)].$$

Но точки u_r могут быть сгруппированы в пары, суммы которых равны нулю, так как $E_n^m(\xi)$ — четная функция от u .

Если взять $u_{n-r} = -u_{r+1}$, то получим

$$\begin{aligned} \int_0^u \frac{du}{\{E_n^m(\xi)\}^2} &= Au - \sum_{r=1}^{\frac{1}{2}n} A_r [\zeta(u - u_r) + \zeta(u + u_r)] = \\ &= Au - 2\zeta(u) \sum_{r=1}^{\frac{1}{2}n} A_r - \sum_{r=1}^{\frac{1}{2}n} \frac{A_r \wp'(u)}{\wp(u) - \wp(u_r)}, \end{aligned}$$

и следовательно,

$$F_n^m(\xi) = (2n+1) \left\{ Au - 2\zeta(u) \sum_{r=1}^{\frac{1}{2}n} A_r \right\} E_n^m(\xi) + \wp'(u) w_{\frac{1}{2}n-1}(\xi),$$

где $w_{\frac{1}{2}n-1}(\xi)$ — полином относительно ξ степени $\frac{1}{2}n - 1$.

Пример. Получить формулы, аналогичные этому выражению для $F_n^m(\xi)$, когда $E_n^m(\xi)$ второго, третьего или четвертого вида.

23.5. Уравнение Ламе в связи с эллиптическими функциями Якоби

Все результаты, полученные до сих пор в связи с функциями Ламе, конечно, имеют свои аналоги в обозначениях через эллиптические функции Якоби, и в руках Эрмита (ср. § 23.71) применение эллиптических функций Якоби в исследовании обобщений уравнения Ламе дало чрезвычайно интересные результаты.

К сожалению, невозможно без потери симметрии применить эллиптические функции Якоби, в которых все переменные были бы вещественны.

Симметричные формулы могут быть получены, если взять новые переменные α, β, γ , определяемые равенствами

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = iK' + u \sqrt{e_1 - e_3}, \\ \beta = iK' + v \sqrt{e_1 - e_3}, \\ \gamma = iK' + w \sqrt{e_1 - e_3}, \end{array} \right.$$

и тогда формулы § 23.31 будут эквивалентны формулам

$$\begin{aligned} x &= k^2 \sqrt{a^2 - c^2} \cdot \operatorname{sn} \alpha \operatorname{sn} \beta \operatorname{sn} \gamma, \\ y &= -\frac{k^2}{k'} \sqrt{a^2 - c^2} \cdot \operatorname{cn} \alpha \operatorname{cn} \beta \operatorname{cn} \gamma, \\ z &= \frac{i}{k'} \sqrt{a^2 - c^2} \cdot \operatorname{dn} \alpha \operatorname{dn} \beta \operatorname{dn} \gamma, \end{aligned}$$

причем модуль эллиптических функций равен

$$\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}.$$

Уравнение поверхности второго порядка софокусной системы, на которой α постоянно, будет

$$\frac{X^2}{(a^2 - b^2) \operatorname{sn}^2 \alpha} - \frac{Y^2}{(a^2 - b^2) \operatorname{cn}^2 \alpha} - \frac{Z^2}{(a^2 - c^2) \operatorname{dn}^2 \alpha} = 1.$$

Это уравнение представляет эллипсоид, если α лежит между iK' и $K + iK'$; поверхность второго порядка, на которой β постоянно, будет однополостным гиперболоидом, если β лежит между $K + iK'$ и K ; поверхность второго порядка, на которой постоянно γ , будет двуполостным гиперболоидом, если γ лежит между 0 и K ; при этом определении (α, β, γ) точка (x, y, z) лежит в положительном октанте.

Мы уже видели (§ 23.4), что в этих обозначениях уравнение Ламе принимает форму

$$\frac{d^2 \Lambda}{d\alpha^2} = \{n(n+1)k^2 \operatorname{sn}^2 \alpha + A\} \Lambda$$

и решения, которые можно выразить как периодические функции от α , обозначаются¹⁾ через $E_n^m(\alpha)$. Функции Ламе первого вида будут тогда полиномами относительно $\operatorname{sn}^2 \alpha$, и вообще вид может быть определен схемой, аналогичной схеме § 23.2:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{sn} \alpha, & \operatorname{cn} \alpha \operatorname{dn} \alpha, \\ 1, & \operatorname{cn} \alpha, \quad \operatorname{dn} \alpha \operatorname{sn} \alpha, \quad \operatorname{sn} \alpha \operatorname{cn} \alpha \operatorname{dn} \alpha \\ & \operatorname{dn} \alpha, \quad \operatorname{sn} \alpha \operatorname{cn} \alpha \end{array} \right\} \prod_p (\operatorname{sn}^2 \alpha - \operatorname{sn}^2 \alpha_p).$$

23.6. Интегральное уравнение, которому удовлетворяют функции Ламе первого и второго вида²⁾

Покажем теперь, что если $E_n^m(\alpha)$ — какая-нибудь функция Ламе первого вида (n четное) или второго вида (n нечетное) с множителем $\operatorname{sn} \alpha$, то $E_n^m(\alpha)$ будет решением интегрального уравнения

$$E_n^m(\alpha) = \lambda \int_{-2K}^{2K} P_n(k \operatorname{sn} \alpha \operatorname{sn} \theta) E_n^m(\theta) d\theta,$$

где λ — одно из «характеристических чисел» (§ 11.23, часть I).

Для доказательства этого результата нам нужна лемма: *дифференциальный оператор с частными производными*

$$\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - n(n+1)k^2(\operatorname{sn}^2 \alpha - \operatorname{sn}^2 \theta)$$

аннулирует функцию $P_n(k \operatorname{sn} \alpha \operatorname{sn} \theta)$.

Для доказательства леммы заметим, что, обозначая для краткости $k \operatorname{sn} \alpha \operatorname{sn} \theta$ через μ , имеем, если воспользуемся дифференциальным уравнением Лежандра (§ 15.13),

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right\} P_n(k \operatorname{sn} \alpha \operatorname{sn} \theta) &= \\ &= k^2 \{ \operatorname{cn}^2 \alpha \operatorname{dn}^2 \alpha \operatorname{sn}^2 \theta - \operatorname{cn}^2 \theta \operatorname{dn}^2 \theta \operatorname{sn}^2 \alpha \} P_n''(\mu) + \\ &+ 2k^3 \operatorname{sn} \alpha \operatorname{sn} \theta (\operatorname{sn}^2 \alpha - \operatorname{sn}^2 \theta) P_n'(\mu) = \\ &= k^2 (\operatorname{sn}^2 \alpha - \operatorname{sn}^2 \theta) [(\mu^2 - 1) P_n''(\mu) + 2\mu P_n'(\mu)] = \\ &= k^2 (\operatorname{sn}^2 \alpha - \operatorname{sn}^2 \theta) n(n+1) P_n(\mu). \end{aligned}$$

Лемма тем самым доказана.

¹⁾ Опасности смешения их с соответствующими функциями $E_n^m(\xi)$ не существует.

²⁾ Это интегральное уравнение и соответствующие формулы § 23.62 для эллипсоидальных гармонических функций даны Уиттекером (Whittaker, Proc. London Math. Soc (2), XIV (1915), 260—268). Доказательства формул, содержащих функции третьего и четвертого видов, даны в этой работе впервые.

Результат применения оператора

$$\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - n(n+1)k^2 \operatorname{sn}^2 \alpha - A_n^m$$

к интегралу

$$\int_{-2K}^{2K} P_n(k \operatorname{sn} \alpha \operatorname{sn} \theta) E_n^m(\theta) d\theta$$

будет поэтому

$$\begin{aligned} & \int_{-2K}^{2K} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - n(n+1)k^2 \operatorname{sn}^2 \alpha - A_n^m \right\} P_n(k \operatorname{sn} \alpha \operatorname{sn} \theta) E_n^m(\theta) d\theta = \\ & = \int_{-2K}^{2K} \left[\left\{ \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - n(n+1)k^2 \operatorname{sn}^2 \theta - A_n^m \right\} P_n(k \operatorname{sn} \alpha \operatorname{sn} \theta) \right] E_n^m(\theta) d\theta, \end{aligned}$$

откуда, интегрируя два раза по частям, получим

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial P_n(k \operatorname{sn} \alpha \operatorname{sn} \theta)}{\partial \theta} E_n^m(\theta) - P_n(k \operatorname{sn} \alpha \operatorname{sn} \theta) \frac{dE_n^m(\theta)}{d\theta} \right]_{-2K}^{2K} + \\ & + \int_{-2K}^{2K} P_n(k \operatorname{sn} \alpha \operatorname{sn} \theta) \left\{ \frac{d^2}{d\theta^2} - n(n+1)k^2 \operatorname{sn}^2 \theta - A_n^m \right\} E_n^m(\theta) d\theta = 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что оператор

$$\frac{d^2}{d\alpha^2} - n(n+1)k^2 \operatorname{sn}^2 \alpha - A_n^m$$

аннулирует интеграл

$$\int_{-2K}^{+2K} P_n(k \operatorname{sn} \alpha \operatorname{sn} \theta) E_n^m(\theta) d\theta;$$

кроме того, этот интеграл есть, очевидно, полином степени n относительно $\operatorname{sn}^2 \alpha$. Так как уравнение Ламе имеет только один интеграл этого типа¹⁾, то заключаем, что интеграл будет кратным функции $E_n^m(\alpha)$, если он не нуль; таким образом, результат установлен.

Оказывается, что *всякое* характеристическое число уравнения

$$f(\alpha) = \lambda \int_{-2K}^{2K} P_n(k \operatorname{sn} \alpha \operatorname{sn} \theta) f(\theta) d\theta$$

приводит к решению уравнения Ламе (см. Ince, Proc. Royal Soc. Edin., XLII (1922), 43—53).

¹⁾ Второе решение, будучи разложено по нисходящим степеням $\operatorname{sn} \alpha$, начинается с члена $(\operatorname{sn} \alpha)^{-n-1}$.

Пример 1. Показать, что ядро интегрального уравнения, которому удовлетворяет функция Ламе первого вида (с четным n) или второго вида (с нечетным n) с множителем $\operatorname{sn} \alpha$, может быть взято равным

$$P_n\left(\frac{ik}{k'} \operatorname{cn} \alpha \operatorname{sn} \theta\right).$$

Пример 2. Показать, что ядро интегрального уравнения, которому удовлетворяет функция Ламе первого вида (с четным n) или второго вида (с нечетным n) с множителем $\operatorname{dn} \alpha$, может быть взято равным

$$P_n\left(\frac{1}{k'} \operatorname{dn} \alpha \operatorname{dn} \theta\right).$$

23.61. Интегральное уравнение, которому удовлетворяют функции Ламе третьего и четвертого вида

Теорема, аналогичная теореме § 23.6 в случае функций Ламе третьего или четвертого вида, заключается в том, что функция Ламе четвертого вида (с нечетным n) или третьего вида (с четным n) с множителем $\operatorname{sn} \alpha \operatorname{dn} \alpha$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$E_n^m(\alpha) = \lambda \int_{-2K}^{2K} \operatorname{cn} \alpha \operatorname{dn} \alpha \operatorname{cn} \theta \operatorname{dn} \theta P_n''(k \operatorname{sn} \alpha \operatorname{sn} \theta) E_n^m(\theta) d\theta.$$

Аналогично § 23.6 необходима предварительная лемма, заключающаяся в том, что оператор

$$\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - n(n+1)k^2 (\operatorname{sn}^2 \alpha - \operatorname{sn}^2 \theta)$$

аннулирует ядро

$$\operatorname{cn} \alpha \operatorname{dn} \alpha \operatorname{cn} \theta \operatorname{dn} \theta P_n''(k \operatorname{sn} \alpha \operatorname{sn} \theta).$$

В самом деле, имеем

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \{ \operatorname{cn} \alpha \operatorname{dn} \alpha P_n''(k \operatorname{sn} \alpha \operatorname{sn} \theta) \} = \\ & = k^2 \operatorname{cn}^3 \alpha \operatorname{dn}^3 \alpha \operatorname{sn}^2 \theta P_n^{IV}(\mu) - 3k \operatorname{sn} \alpha \operatorname{cn} \alpha \operatorname{dn} \alpha \operatorname{sn} \theta (\operatorname{dn}^2 \alpha + k^2 \operatorname{cn}^2 \alpha) P_n'''(\mu) - \\ & \quad - \operatorname{cn} \alpha \operatorname{dn} \alpha (\operatorname{dn}^2 \alpha + k^2 \operatorname{cn}^2 \alpha - 4k^2 \operatorname{sn}^2 \alpha) P_n''(\mu), \end{aligned}$$

и следовательно,

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right\} \{ \operatorname{cn} \alpha \operatorname{dn} \alpha \operatorname{cn} \theta \operatorname{dn} \theta P_n''(k \operatorname{sn} \alpha \operatorname{sn} \theta) \} = \\ & = k \operatorname{cn} \alpha \operatorname{dn} \alpha \operatorname{cn} \theta \operatorname{dn} \theta (\operatorname{sn}^2 \alpha - \operatorname{sn}^2 \theta) \{ (\mu^2 - 1) P_n^{IV}(\mu) + 6\mu P_n'''(\mu) + \\ & \quad + 6P_n''(\mu) \} = k^2 \operatorname{cn} \alpha \operatorname{dn} \alpha \operatorname{cn} \theta \operatorname{dn} \theta (\operatorname{sn}^2 \alpha - \operatorname{sn}^2 \theta) \frac{d^3}{d\mu^3} \{ (\mu^2 - 1) P_n'(\mu) \} = \\ & = k^2 n(n+1) \operatorname{cn} \alpha \operatorname{dn} \alpha \operatorname{cn} \theta \operatorname{dn} \theta (\operatorname{sn}^2 \alpha - \operatorname{sn}^2 \theta) P_n''(\mu), \end{aligned}$$

что и доказывает лемму. Доказательство того, что $E_n^m(\alpha)$ удовлетворяет интегральному уравнению, получается теперь точно так же, как и в случае интегрального уравнения § 23.6.

Пример 1. Показать, что ядро интегрального уравнения, которому удовлетворяют функции Ламе четвертого вида (с нечетным n) или третьего вида (с четным n) с множителем $\operatorname{sn} \alpha \operatorname{dn} \alpha$, может быть взято равным

$$\operatorname{sn} \alpha \operatorname{dn} \alpha \operatorname{sn} \theta \operatorname{dn} \theta P_n''\left(\frac{ik}{k'} \operatorname{cn} \alpha \operatorname{cn} \theta\right).$$

Пример 2. Показать, что ядро интегрального уравнения, которому удовлетворяют функции Ламе четвертого вида (с нечетным n) или третьего вида (с четным n) с множителем $\operatorname{sn} \alpha \operatorname{cn} \alpha$, может быть взято равным

$$\operatorname{sn} \alpha \operatorname{cn} \alpha \operatorname{sn} \theta \operatorname{cn} \theta P_n''\left(\frac{1}{k'} \operatorname{dn} \alpha \operatorname{dn} \theta\right).$$

Пример 3. Получить три следующих интегральных уравнения, которым удовлетворяют функции Ламе четвертого вида (с нечетным n) и третьего вида (с четным n):

$$(I) k^2 \operatorname{sn}^2 \alpha E_n^m(\alpha) =$$

$$= \lambda \operatorname{cn} \alpha \operatorname{dn} \alpha \int_{-2K}^{2K} P_n(k \operatorname{sn} \alpha \operatorname{sn} \theta) \frac{d}{d\theta} \left\{ \frac{1}{\operatorname{cn} \theta \operatorname{dn} \theta} \frac{dE_n^m(\theta)}{d\theta} \right\} d\theta,$$

$$(II) -k^2 \operatorname{cn}^2 \alpha E_n^m(\alpha) =$$

$$= \lambda k'^2 \operatorname{sn} \alpha \operatorname{dn} \alpha \int_{-2K}^{2K} P_n\left(\frac{ik}{k'} \operatorname{cn} \alpha \operatorname{cn} \theta\right) \frac{d}{d\theta} \left\{ \frac{1}{\operatorname{sn} \theta \operatorname{dn} \theta} \frac{dE_n^m(\theta)}{d\theta} \right\} d\theta,$$

$$(III) k^2 \operatorname{dn}^2 \alpha E_n^m(\alpha) =$$

$$= \lambda k'^2 \operatorname{sn} \alpha \operatorname{cn} \alpha \int_{-2K}^{2K} P_n\left(\frac{1}{k'} \operatorname{dn} \alpha \operatorname{dn} \theta\right) \frac{d}{d\theta} \left\{ \frac{1}{\operatorname{sn} \theta \operatorname{cn} \theta} \frac{dE_n^m(\theta)}{d\theta} \right\} d\theta;$$

в случае функций четного порядка каждая из функций различных типов удовлетворяет только одному из этих уравнений.

23.62. Интегральные формулы для эллипсоидальных гармонических функций

Рассмотренные интегральные уравнения позволяют получить изящное представление эллипсоидальной гармонической функции $G_n^m(x, y, z)$ и соответствующей однородной гармонической функции $H_n^m(x, y, z)$ через определенные интегралы.

По общей формуле § 18.3 очевидно, что $H_n^m(x, y, z)$ может быть представлена в форме

$$H_n^m(x, y, z) = \int_{-\pi}^{\pi} (x \cos t + y \sin t + iz)^n f(t) dt,$$

где $f(t)$ — периодическая функция, подлежащая определению.

Но результат применения оператора Нивена D^2 к функции $(x \cos t + y \sin t + iz)^n$ будет

$$n(n-1)(a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t - c^2)(x \cos t + y \sin t + iz)^{n-2},$$

и, таким образом, по формуле Нивена (§ 23.25) найдем, что $G_n^m(x, y, z)$ может быть представлена в виде

$$G_n^m(x, y, z) = \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \mathfrak{A}^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} \mathfrak{A}^{n-2} \mathfrak{B}^2 + \right. \\ \left. + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4 \cdot (2n-1)(2n-3)} \mathfrak{A}^{n-4} \mathfrak{B}^4 - \dots \right\} f(t) dt,$$

где

$$\mathfrak{A} \equiv x \cos t + y \sin t + iz,$$

$$\mathfrak{B} \equiv \sqrt{(a^2 - c^2) \cos^2 t + (b^2 - c^2) \sin^2 t},$$

так что

$$G_n^m(x, y, z) = \\ = \frac{2^n \cdot (n!)^2}{(2n)!} \int_{-\pi}^{\pi} \mathfrak{B}^n P_n \left(\frac{x \cos t + y \sin t + iz}{\sqrt{(a^2 - c^2) \cos^2 t + (b^2 - c^2) \sin^2 t}} \right) f(t) dt.$$

Положим теперь $\sin t \equiv cd \theta$, причем модуль эллиптических функций, как обычно, дается равенством

$$k^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}.$$

Новыми пределами интегрирования будут $-3K$ и K , но они могут быть заменены $-2K$ и $2K$ вследствие периодичности подинтегрального выражения.

Таким путем найдем, что

$$G_n^m(x, y, z) = \int_{-2K}^{2K} P_n \left(\frac{k' x \operatorname{sn} \theta + y \operatorname{cn} \theta + iz \operatorname{dn} \theta}{\sqrt{b^2 - c^2}} \right) \varphi(\theta) d\theta,$$

где $\varphi(\theta)$ — периодическая функция от θ , не зависящая от x, y, z и все еще подлежащая определению.

Если выразить эллипсоидальную гармоническую функцию как произведение трех функций Ламе, то с помощью формул § 23.5 найдем, что

$$E_n^m(\alpha) E_n^m(\beta) E_n^m(\gamma) = C \int_{-2K}^{2K} P_n(\mu) \varphi(\theta) d\theta,$$

где C — известная постоянная и

$$\mu = k^2 \operatorname{sn} \alpha \operatorname{sn} \beta \operatorname{sn} \gamma \operatorname{sn} \theta - \frac{k^2}{k'^2} \operatorname{cn} \alpha \operatorname{cn} \beta \operatorname{cn} \gamma \operatorname{cn} \theta - \frac{1}{k'^2} \operatorname{dn} \alpha \operatorname{dn} \beta \operatorname{dn} \gamma \operatorname{dn} \theta.$$

Если рассматриваемая эллипсоидальная гармоническая функция — первого вида или второго вида и первого типа, то, дав β и γ частные значения

$$\beta = K, \quad \gamma = K + iK',$$

видим, что

$$C \int_{-2K}^{2K} P_n(k \operatorname{sn} \alpha \operatorname{sn} \theta) \varphi(\theta) d\theta$$

есть решение уравнения Ламе, и следовательно, по § 23.6 $\varphi(\theta)$ есть решение уравнения Ламе, которое не может быть не чем иным¹⁾, как кратным функции $E_n^m(\theta)$.

Отсюда получается, что

$$G_n^m(x, y, z) = \lambda \int_{-2K}^{2K} P_n\left(\frac{k'x \operatorname{sn} \theta + y \operatorname{cn} \theta + iz \operatorname{dn} \theta}{\sqrt{b^2 - c^2}}\right) E_n^m(\theta) d\theta,$$

где λ — постоянная.

Если $G_n^m(x, y, z)$ — второго вида и второго или третьего типа, то положим

$$\beta = 0, \quad \gamma = K + iK'$$

или

$$\beta = 0, \quad \gamma = K$$

соответственно и получим снова ту же самую формулу.

¹⁾ Если бы $\varphi(\theta)$ содержала второе решение, то интеграл не сходился бы.

Таким образом, получается, что если $G_n^m(x, y, z)$ — какая-нибудь эллипсоидальная гармоническая функция первого или второго вида, то

$$G_n^m(x, y, z) = \lambda \int_{-2K}^{2K} P_n(\mu) E_n^m(\theta) d\theta,$$

$$H_n^m(x, y, z) = \lambda \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2 (b^2 - c^2)^{\frac{1}{2} n}} \times$$

$$\times \int_{-\pi}^{\pi} (k' x \operatorname{sn} \theta + y \operatorname{cn} \theta + iz \operatorname{dn} \theta)^n E_n^m(\theta) d\theta,$$

где

$$\mu \equiv \frac{k' x \operatorname{sn} \theta + y \operatorname{cn} \theta + iz \operatorname{dn} \theta}{\sqrt{b^2 - c^2}}.$$

23.63. Интегральные формулы для эллипсоидальных гармонических функций третьего и четвертого вида

Чтобы получить интегральные представления для гармонических функций третьего и четвертого вида, обратимся к уравнению § 23.62, а именно:

$$E_n^m(\alpha) E_n^m(\beta) E_n^m(\gamma) = C \int_{-2K}^{2K} P_n(\mu) \varphi(\theta) d\theta,$$

где

$$\mu \equiv k^2 \operatorname{sn} \alpha \operatorname{sn} \beta \operatorname{sn} \gamma \operatorname{sn} \theta - \frac{k^2}{k'^2} \operatorname{cn} \alpha \operatorname{cn} \beta \operatorname{cn} \gamma \operatorname{cn} \theta - \frac{1}{k'^2} \operatorname{dn} \alpha \operatorname{dn} \beta \operatorname{dn} \gamma \operatorname{dn} \theta;$$

этому уравнению удовлетворяют гармонические функции *всех* видов.

Предположим теперь, что $E_n^m(\alpha)$ — четвертого вида или первого типа третьего вида, так что она имеет множителем $\operatorname{sn} \alpha \operatorname{dn} \alpha$.

Продифференцируем уравнение по β и γ и затем положим $\beta = K$, $\gamma = K + iK'$.

Таким путем найдем, что

$$E_n^m(\alpha) \left[\frac{d}{d\beta} E_n^m(\beta) \right]_{\beta=K} \left[\frac{d}{d\gamma} E_n^m(\gamma) \right]_{\gamma=K+iK'} =$$

$$= C \int_{-2K}^{2K} \left[\frac{\partial^2 P_n(\mu)}{\partial \beta \partial \gamma} \right]_{\beta=K, \gamma=K+iK'} \varphi(\theta) d\theta.$$

Но

$$\left[\frac{\partial P_n(\mu)}{\partial \gamma} \right]_{\gamma=K+iK'} = -\frac{i}{k} \operatorname{dn} \alpha \operatorname{dn} \beta \operatorname{dn} \theta P'_n(\mu),$$

так что

$$\left[\frac{\partial^2 P_n(\mu)}{\partial \beta \partial \gamma} \right]_{\beta=K, \gamma=K+iK'} = -k \operatorname{cn} \alpha \operatorname{dn} \alpha \operatorname{cn} \beta \operatorname{dn} \theta P''_n(k \operatorname{sn} \alpha \operatorname{sn} \theta).$$

Поэтому

$$\int_{-2K}^{2K} \operatorname{cn} \alpha \operatorname{dn} \alpha \operatorname{cn} \beta \operatorname{dn} \theta P''_n(k \operatorname{sn} \alpha \operatorname{sn} \theta) \varphi(\theta) d\theta$$

есть решение уравнения Ламе с множителем $\operatorname{sp} \alpha \operatorname{dn} \alpha$, и таким образом, по § 23.61 $\varphi(\theta)$ не может быть не чем иным, как кратным функции $E_n^m(\alpha)$.

Таким образом, мы нашли, что формула

$$G_n^m(x, y, z) = \lambda \int_{-2K}^{2K} P_n(\mu) E_n^m(\theta) d\theta$$

имеет место для любой эллипсоидальной гармонической функции, имеющей множителем $\operatorname{sp} \alpha \operatorname{dn} \alpha$; соответствующая формула для однородной гармонической функции будет

$$H_n^m(x, y, z) = \lambda \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2 (b^2 - c^2)^{\frac{1}{2} n}} \times \\ \times \int_{-2K}^{2K} (k' x \operatorname{sn} \theta + y \operatorname{cn} \theta + iz \operatorname{dn} \theta)^n E_n^m(\theta) d\theta.$$

Пример. Показать, что формула этого параграфа имеет место для эллипсоидальных гармонических функций, имеющих множителем $\operatorname{sn} \alpha \operatorname{dn} \alpha$ или $\operatorname{sn} \alpha \operatorname{cn} \alpha$.

23.7. Обобщения уравнения Ламе

Два обобщения уравнения Ламе напрашиваются сами собою. В первом постоянная B не равна ни одному из характеристических значений B_n^m , для которых одно из решений выражается как алгебраическая функция от $\beta(u)$; во втором степень n не предполагается более целым числом. Первое обобщение полностью было разработано Эрмитом¹⁾ и Альфаном²⁾; единственный случай второго обобщения, привлекший некоторое внимание, это тот, когда n равно половине

¹⁾ Hermite, Comptes Rendus, LXXXV (1877), 689—695, 728—732, 821—826.

²⁾ Halphen, Fonctions Elliptiques, II (Paris, 1888), 494—502.

нечетного целого числа; этот случай был рассмотрен Бриоски¹⁾, Альфаном²⁾ и Кроуфордом³⁾.

Рассмотрим теперь решение уравнения

$$\frac{d^2\Lambda}{du^2} = \{n(n+1)\varphi(u) + B\}\Lambda,$$

где B — произвольное, а n — положительное целое число, методом Линдемана — Стильеса, уже объясненным в связи с уравнением Матье (§§ 19.5—19.52). Произведение какой-либо пары решений этого уравнения является решением уравнения

$$\frac{d^3X}{du^3} - 4\{n(n+1)\varphi(u) + B\}\frac{dX}{du} - 2n(n+1)\varphi'(u)X = 0$$

по § 19.52. Алгебраическая форма этого уравнения будет

$$4(\xi - e_1)(\xi - e_2)(\xi - e_3)\frac{d^3X}{d\xi^3} + 3\left(6\xi^2 - \frac{1}{2}g_2\right)\frac{d^2X}{d\xi^2} - \\ - 4\{(n^2+n-3)\xi + B\}\frac{dX}{d\xi} - 2n(n+1)X = 0.$$

Если искать решение этого уравнения в виде ряда по убывающим степеням $\xi - e_2$:

$$X = \sum_{r=0}^{\infty} c_r (\xi - e_2)^{n-r} \quad (c_0 = 1),$$

то рекуррентная формула для коэффициентов c_r будет

$$4r\left(n-r+\frac{1}{2}\right)(2n-r+1)c_r = \\ = (n-r+1)\{12e_2(n-r)(n-r+2) - 4e_2(n^2+n-3) - 4B\}c_{r-1} - \\ - 2(n-r+1)(n-r+2)(e_1 - e_2)(e_2 - e_3)(2n-2r+3)c_{r-2}.$$

Положим $r = n+1$; тогда увидим, что $c_{n+1} = 0$, затем положим $r = n+2$ и получим $c_{n+2} = 0$; рекуррентные формулы при $r > n+2$ удовлетворяются, если положим

$$c_{n+3} = c_{n+4} = \dots = 0.$$

Следовательно, обобщенное уравнение Ламе всегда имеет два решения, произведение которых имеет вид

$$\sum_{r=0}^n c_r (\xi - e_2)^{n-r}.$$

¹⁾ Brioschi, Comptes Rendus, LXXXVI (1878), 313—315.

²⁾ Halphen, Fonctions Elliptiques, II (Paris, 1888) 471—473.

³⁾ Crawford, Quarterly Journal, XXVII (1895), 93—98.

Этот полином может быть переписан в виде

$$\prod_{r=1}^n \{\varphi(u) - \varphi(a_r)\},$$

где a_1, a_2, \dots, a_n пока определены с точностью до знаков; эти два решения уравнения Ламе назовем Λ_1, Λ_2 .

Можно различить два случая: (I) когда $\frac{\Lambda_1}{\Lambda_2}$ постоянно, (II) когда $\frac{\Lambda_1}{\Lambda_2}$ не постоянно.

(I) Первый случай рассмотреть легко; ибо если полином

$$\prod_{r=1}^n \{\xi - \varphi(a_r)\}$$

не есть полный квадрат относительно ξ , возможно умноженный на выражения типа $\xi - e_1, \xi - e_2, \xi - e_3$, то алгебраическая форма уравнения Ламе имеет определяющее уравнение, один из корней которого равен $\frac{1}{2}$, в одной или нескольких точках $\xi = \varphi(a_r)$, а в данном случае это не имеет места (§ 23.43).

Следовательно, полином должен быть квадратом, умноженным, возможно, на одно или более из выражений $\xi - e_1, \xi - e_2, \xi - e_3$, и тогда Λ_1 является функцией Ламе, так что B равно одному из характеристических значений B_n^m ; но это — случай, подробно рассмотренный в §§ 23.1—23.47.

(II) Во втором случае имеем (§ 19.53)

$$\Lambda_1 \frac{d\Lambda_2}{du} - \Lambda_2 \frac{d\Lambda_1}{du} = 2\mathfrak{C},$$

где \mathfrak{C} — постоянная, не равная нулю. Тогда

$$\begin{cases} \frac{d \ln \Lambda_2}{du} - \frac{d \ln \Lambda_1}{du} = \frac{2\mathfrak{C}}{X}, \\ \frac{d \ln \Lambda_2}{du} + \frac{d \ln \Lambda_1}{du} = \frac{1}{X} \frac{dX}{du}, \end{cases}$$

так что

$$\frac{d \ln \Lambda_1}{du} = \frac{1}{2X} \frac{dX}{du} - \frac{\mathfrak{C}}{X}, \quad \frac{d \ln \Lambda_2}{du} = \frac{1}{2X} \frac{dX}{du} + \frac{\mathfrak{C}}{X}.$$

Проинтегрировав, увидим, что можно взять

$$\Lambda_1 = V \bar{X} \exp \left\{ -\mathfrak{C} \int \frac{du}{X} \right\}.$$

С другой стороны, если продифференцируем уравнение

$$\frac{1}{\Lambda_1} \frac{d\Lambda_1}{du} = \frac{1}{2X} \frac{dX}{du} - \frac{\mathfrak{C}}{X},$$

то найдем, что

$$\frac{1}{\Lambda_1} \frac{d^2\Lambda_1}{du^2} - \left\{ \frac{1}{\Lambda_1} \frac{d\Lambda_1}{du} \right\}^2 = \frac{1}{2X} \frac{d^2X}{du^2} - \frac{1}{2X^2} \left(\frac{dX}{du} \right)^2 + \frac{\mathfrak{C}}{X^2} \frac{dX}{du},$$

отсюда при помощи уравнения Ламе получим интересную формулу

$$n(n+1)\varphi(u) + B = \frac{1}{2X} \frac{d^2X}{du^2} - \left(\frac{1}{2X} \frac{dX}{du} \right)^2 + \frac{\mathfrak{C}^2}{X^2}.$$

Если теперь $\xi_r \equiv \varphi(a_r)$, то по этой формуле (умноженной на X^2) найдем, давая u частное значение a_r , что

$$\left(\frac{dX}{d\xi} \right)_{\xi=\xi_r}^2 = \frac{4\mathfrak{C}^2}{\varphi'^2(a_r)}.$$

Фиксируем теперь знаки a_1, a_2, \dots, a_n , взяв

$$\left(\frac{dX}{d\xi} \right)_{\xi=\xi_r} = \frac{2\mathfrak{C}}{+\varphi'(a_r)}.$$

Тогда, если разложим $\frac{2\mathfrak{C}}{X}$, как функцию от ξ , на простейшие дроби, то увидим, что

$$\frac{2\mathfrak{C}}{X} = \sum_{r=1}^n \frac{\varphi'(a_r)}{\xi - \varphi(a_r)} = \sum_{r=1}^n [\zeta(u - a_r) - \zeta(u + a_r) + 2\zeta(a_r)],$$

и следовательно,

$$\Lambda_1 = \left[\prod_{r=1}^n \{\varphi(u) - \varphi(a_r)\} \right]^{\frac{1}{2}} \times \\ \times \exp \left[\frac{1}{2} \sum_{r=1}^n [\lg \sigma(a_r + u) - \lg \sigma(a_r - u) - 2u\zeta(a_r)] \right],$$

откуда следует, что (§ 20.53, пример 1)

$$\Lambda_1 = \prod_{r=1}^n \left\{ \frac{\sigma(a_r + u)}{\sigma(u) \sigma(a_r)} \right\} \exp \left\{ -u \sum_{r=1}^n \zeta(a_r) \right\}$$

и

$$\Lambda_2 = \prod_{r=1}^n \left\{ \frac{\sigma(a_r - u)}{\sigma(u) \sigma(a_r)} \right\} \exp \left\{ u \sum_{r=1}^n \zeta(a_r) \right\}.$$

Таким образом, получено полное решение для произвольных значений постоянной B .

23.71. Форма Якоби обобщенного уравнения Ламе

Мы построим теперь решение уравнения

$$\frac{d^2\Lambda}{d\alpha^2} = \{n(n+1)k^2 \operatorname{sn}^2 \alpha + A\} \Lambda$$

для любых значений A в форме, похожей на форму § 23.6.

Решение, соответствующее решению § 23.6, будет¹⁾

$$\Lambda = \prod_{r=1}^n \left\{ \frac{H(\alpha + \alpha_r)}{\Theta(\alpha)} \right\} e^{\rho \alpha},$$

где $\rho, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ — постоянные, подлежащие определению.

Дифференцируя это равенство, найдем, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Lambda} \frac{d\Lambda}{d\alpha} &= \sum_{r=1}^n \left\{ \frac{H'(\alpha + \alpha_r)}{H(\alpha + \alpha_r)} - \frac{\Theta'(\alpha)}{\Theta(\alpha)} \right\} + \rho = \\ &= \sum_{r=1}^n \{Z(\alpha + \alpha_r + iK') - Z(\alpha)\} + \rho + \frac{1}{2} n\pi i/K, \end{aligned}$$

так что

$$\frac{1}{\Lambda} \frac{d^2\Lambda}{d\alpha^2} - \left\{ \frac{1}{\Lambda} \frac{d\Lambda}{d\alpha} \right\}^2 = \sum_{r=1}^n \{dn^2(\alpha + \alpha_r + iK') - dn^2 \alpha\}.$$

и следовательно, так как Λ является решением уравнения Ламе, постоянные $\rho, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ определяются из условия, что равенство

$$\begin{aligned} n(n+1)k^2 \operatorname{sn}^2 \alpha + A &= \sum_{r=1}^n \{dn^2(\alpha + \alpha_r + iK') - dn^2 \alpha\} + \\ &+ \left[\sum_{r=1}^n \{Z(\alpha + \alpha_r + iK') - Z(\alpha)\} + \rho + \frac{1}{2} n\pi i/K \right]^2 \end{aligned}$$

должно быть тождеством, т. е. из условия

$$\begin{aligned} n^2 k^2 \operatorname{sn}^2 \alpha + n + A + \sum_{r=1}^n \operatorname{cs}^2(\alpha + \alpha_r) &\equiv \\ &\equiv \left[\sum_{r=1}^n \{Z(\alpha + \alpha_r + iK') - Z(\alpha)\} + \rho + \frac{1}{2} n\pi i/K \right]^2. \end{aligned}$$

¹⁾ Это решение было опубликовано в 1872 г. в литографированных записках лекций Эрмита, читанных в Политехнической школе.

Но обе части предположенного тождества суть двоякопериодические функции от α с периодами $2K$, $2iK'$, и их особые точки суть двойные полюсы в точках, сравнимых с $-iK'$, $-\alpha_1$, $-\alpha_2, \dots, -\alpha_n$; главные части их вблизи $-iK'$ и $-\alpha_r$ будут соответственно

$$\frac{h^2}{(\alpha + iK')^2}, \quad -\frac{1}{(\alpha + \alpha_r)^2}.$$

Все вычеты выражения слева равны нулю, и таким образом, если возьмем $\rho, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ так, что вычеты выражения справа будут нулями, то по теореме Лиувилля эти два выражения будут отличаться друг от друга только на постоянную, которую можно сделать равной нулю надлежащим выбором A .

Мы получаем, таким образом, $n+2$ уравнения, связывающих $\rho, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ с A , но эти уравнения не все независимы.

Легко доказать, что вблизи $-\alpha_r$

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^n \{Z(\alpha + \alpha_r + iK') - Z(\alpha)\} + \rho + \frac{1}{2} n\pi i/K = \\ = \frac{1}{\alpha + \alpha_r} + \sum_{p=1}^n' Z(\alpha_p - \alpha_r + iK') + nZ(\alpha_r) + \rho + \\ + \frac{1}{2} (n-1)\pi i/K + O(\alpha + \alpha_r), \end{aligned}$$

где штрих обозначает, что член, для которого $p=r$, опускается; точно так же вблизи $-iK'$ имеем

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^n \{Z(\alpha + \alpha_r + iK') - Z(\alpha)\} + \rho + \frac{1}{2} n\pi i/K = \\ = -\frac{n}{\alpha + iK'} + \sum_{r=1}^n Z(\alpha_r) + \rho + O(\alpha + iK'). \end{aligned}$$

Следовательно, вычеты выражения

$$\left[\sum_{r=1}^n \{Z(\alpha + \alpha_r + iK') - Z(\alpha)\} + \rho + \frac{1}{2} n\pi i/K \right]^2$$

равняются нулю, если $\rho, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ выбраны так, что все уравнения

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{p=1}^n' Z(\alpha_p - \alpha_r + iK') + nZ(\alpha_r) + \rho + \frac{1}{2} (n-1)\pi i/K = 0, \\ \sum_{r=1}^n Z(\alpha_r) + \rho = 0 \end{array} \right.$$

удовлетворяются.

Последнее уравнение дает просто значение величины ρ , а именно:

$$-\sum_{r=1}^n Z(\alpha_r),$$

и, подставив это значение в систему первых уравнений, найдем, что

$$\sum_{p=1}^n \left[Z(\alpha_p - \alpha_r + iK') + Z(\alpha_r) - Z(\alpha_p) + \frac{1}{2}\pi i/K \right] = 0,$$

где $r = 1, 2, \dots, n$. Согласно примеру 2 § 22.735 сумма левых частей этих уравнений равна нулю, так что система эквивалентна самое большое $n - 1$ уравнению; если $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ имеют какие-либо значения, которые удовлетворяют этим уравнениям, то разность

$$\left[n^2 k^2 \operatorname{sn}^2 \alpha + n + A + \sum_{r=1}^n \operatorname{cs}^2(\alpha + \alpha_r) \right] - \left[\sum_{r=1}^n \left\{ Z(\alpha + \alpha_r + iK') - Z(\alpha) - Z(\alpha_r) + \frac{1}{2}\pi i/K \right\} \right]^2$$

будет постоянной. Взяв $\alpha = 0$, видим, что эта постоянная равна нулю, если

$$n + A + \sum_{r=1}^n \operatorname{cs}^2 \alpha_r = \left[\sum_{r=1}^n \left\{ Z(\alpha_r + iK') - Z(\alpha_r) + \frac{1}{2}\pi i/K \right\} \right]^2,$$

т. е. если

$$\left\{ \sum_{r=1}^n \operatorname{cn} \alpha_r \operatorname{ds} \alpha_r \right\}^2 - \sum_{r=1}^n \operatorname{ns}^2 \alpha_r = A.$$

Сделаем теперь приведение системы n уравнений; при обозначении § 22.2, отмечая функции от α_p, α_r значками 1 и 2, легко видеть, что

$$\begin{aligned} Z(\alpha_p - \alpha_r + iK') + Z(\alpha_r) - Z(\alpha_p) + \frac{1}{2}\pi i/K &= \\ &= Z(\alpha_p - \alpha_r + iK') + Z(\alpha_r) - Z(\alpha_p + iK') + c_1 d_1 / s_1 = \\ &= k^2 \operatorname{sn}(\alpha_p + iK') \operatorname{sn} \alpha_r \operatorname{sn}(\alpha_p + iK' - \alpha_r) + c_1 d_1 / s_1 = \frac{s_2}{s_1 \operatorname{sn}(\alpha_p - \alpha_r)} + \frac{c_1 d_1}{s_1} = \\ &= \frac{s_2(s_1 c_2 d_2 + s_2 c_1 d_1) + c_1 d_1(s_1^2 - s_2^2)}{s_1(s_1^2 - s_2^2)} = \frac{s_1 c_1 d_1 + s_2 c_2 d_2}{s_1^2 - s_2^2}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\Lambda = \prod_{r=1}^n \left[\frac{\operatorname{H}(\alpha + \alpha_r)}{\Theta(\alpha)} \exp \{-\alpha Z(\alpha_r)\} \right]$$

будет решением уравнения Ламе

$$\frac{d^2\Lambda}{d\alpha^2} = \{n(n+1)k^2 \operatorname{sn}^2 \alpha + A\} \Lambda$$

в предположении, что $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ выбраны так, что они удовлетворяют n независимым уравнениям, содержащимся в системе

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{p=1}^n \left[\frac{\operatorname{sn} \alpha_p \operatorname{cn} \alpha_p \operatorname{dn} \alpha_p + \operatorname{sn} \alpha_r \operatorname{cn} \alpha_r \operatorname{dn} \alpha_r}{\operatorname{sn}^2 \alpha_p - \operatorname{sn}^2 \alpha_r} \right] \\ \quad \left[\sum_{r=1}^n \operatorname{cn} \alpha_r \operatorname{ds} \alpha_r \right]^2 - \sum_{r=1}^n n \operatorname{sn}^2 \alpha_r = A, \end{array} \right.$$

и если это решение уравнения Ламе не является двоякоперiodическим, то

$$\prod_{r=1}^n \left[\frac{\operatorname{H}(\alpha - \alpha_r)}{\Theta(\alpha)} \exp \{ \alpha Z(\alpha_r) \} \right]$$

будет вторым решением.

Существование решения системы $n+1$ уравнений вытекает из § 23.7.

ЛИТЕРАТУРА

- G. Lamé, Journ. de Math., II (1837), 147—188; IV (1839), 100—125, 126—163, 351—385; VIII (1843), 397—434; Leçons sur les fonctions inverses des transcendantes et les surfaces isothermes (Paris, 1857). Leçons sur les coordonnées curvilignes (Paris, 1859).
- E. Heine, Journ. für Math., XXIX (1845), 185—208 Theorie der Kugelfunktionen, II (Berlin, 1880).
- C. Hermite, Comptes Rendus, LXXXV (1877), 689—695, 728—732, 821—826; Ann. di Mat. (2) IX (1878), 21—24; Œuvres Mathématiques (Paris, 1905—1917).
- G. H. Halphen, Fonctions Elliptiques, II (Paris, 1888);
- F. Lindemann, Math. Ann., XIX (1882), 323—386.
- К. Нейн, Math. Ann., XXXIII (1889), 161—179, 180—196.
- L. Crawford, Quarterly Journal, XXVII (1895), 93—98; XXIX (1898), 196—201.
- W. D. Niven, Phil. Trans. of the Royal Society, 182A (1891), 231—278.
- A. Cayley, Phil. Trans. of the Royal Society., 165 (1875), 675—774.
- G. H. Darwin, Phil. Trans. of the Royal Society, 197A (1901), 461—557; 198A (1901), 301—331.
- Е. В. Гобсон, Теория сферических и эллипсоидальных функций, ИЛ, 1952.

Примеры

1. Получить формулу

$$G_n(x, y, z) = \frac{2^n \cdot n}{(2n)!} \int_0^\infty D^{2n} P_n \left(\frac{u}{D} \right) e^{-u} du \cdot H_n(x, y, z).$$

(Niven, Phil. Trans. 182A (1891), 245)

2. Показать, что

$$H_n\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{(-1)^n \cdot (2n)!}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{H_n(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{n+1}{2}}}.$$

(Hobson, Proc. London Math. Soc., XXIV)

3. Показать, что «внешняя эллипсоидальная гармоническая функция» $F_n^m(\xi) E_n^m(\eta) E_n^m(\zeta)$ есть постоянное кратное выражение

$$H_n\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \left(1 + \frac{D^2}{2 \cdot (2n+3)} + \frac{D^4}{2 \cdot 4 \cdot (2n+3)(2n+5)} + \dots\right) \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

(Niven; Hobson, Proc. London Math. Soc., XXIV)

4. Рассмотреть предельную форму уравнения Ламе, когда инварианты g_2 и g_3 эллиптической функции Вейерштрасса стремятся к нулю; выразить решение через функции Бесселя.

(Haentzschel, Zeitschrift für Math. und Phys., XXXI)

5. Пусть v означает

$$\frac{H(\alpha + \mu)}{\Theta(\alpha)} \exp [(\lambda - Z(\mu)) \alpha],$$

где λ и μ — постоянные; показать, что уравнение Ламе имеет решение, которое выражается как линейная комбинация производных

$$\frac{d^{n-1}v}{d\alpha^{n-1}}, \quad \frac{d^{n-3}v}{d\alpha^{n-3}}, \quad \frac{d^{n-5}v}{d\alpha^{n-5}}, \dots,$$

где λ^2 и $\operatorname{sn}^2 \mu$ — алгебраические функции постоянной A .

(Hermite)

6. Получить решения уравнения

$$\frac{1}{w} \frac{d^2w}{dz^2} = 12k^2 \operatorname{sn}^2 z - 4(1+k^2) \pm 5\sqrt{1-k^2+k^4}.$$

(Stenberg, Acta Math., X)

7. Рассмотреть решение уравнения

$$z(z-1)(z-a) \frac{d^2y}{dz^2} + \\ + [(\alpha + \beta + 1)z^2 - \{\alpha + \beta - \delta + 1 + (\gamma + \delta)a\}z + \alpha\gamma] \frac{dy}{dz} + \alpha\beta(z-q)y = 0$$

в виде ряда,

$$1 + \alpha\beta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G_n(q)(z/a)^n}{n! \gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n)},$$

где

$$\begin{aligned} G_1(q) &= q, \quad G_2(q) = \alpha\beta q^2 + \{(\alpha + \beta - \delta + 1) + (\gamma + \delta) a\} q - \alpha\gamma, \\ G_{n+1}(q) &= [n \{(\alpha + \beta - \delta + n) + (\gamma + \delta + n - 1) a\} + \alpha\beta q] G_n(q) - \\ &\quad - (\alpha + n - 1)(\beta + n - 1)(\gamma + n - 1) n a G_{n-1}(q). \end{aligned}$$

(Heun, Math. Ann., XXXIII)

8. Показать, что показатели в особых точках 0, 1, a , ∞ уравнения Хейна будут

$$(0, 1 - \gamma), \quad (0, 1 - \delta), \quad (0, 1 - \varepsilon), \quad (\alpha, \beta),$$

где

$$\gamma + \delta + \varepsilon = \alpha + \beta + 1.$$

(Heun, Math., Ann., XXXIII)

9. Получить следующую группу подстановок для уравнения Хейна, соответствующую группе

$$z, \quad 1-z, \quad \frac{1}{z}, \quad \frac{1}{1-z}, \quad \frac{z}{z-1}, \quad \frac{z-1}{z},$$

для гипергеометрического уравнения:

$$\begin{aligned} z, \quad 1-z, \quad \frac{1}{z}, \quad \frac{1}{1-z}, \quad \frac{z}{z-1}, \quad \frac{z-1}{z}, \\ \frac{z}{a}, \quad \frac{a-z}{a}, \quad \frac{a}{z}, \quad \frac{a}{a-z}, \quad \frac{z}{z-a}, \quad \frac{z-a}{z}, \\ \frac{z-a}{1-a}, \quad \frac{z-1}{a-1}, \quad \frac{1-a}{z-a}, \quad \frac{a-1}{z-1}, \quad \frac{z-a}{z-1}, \quad \frac{z-1}{z-a}, \\ \frac{z-a}{a(z-1)}, \quad \frac{(a-1)z}{a(z-1)}, \quad \frac{a(z-1)}{z-a}, \quad \frac{a(z-1)}{(a-1)z}, \quad \frac{z-a}{(1-a)z}, \quad \frac{(1-a)z}{z-a}. \end{aligned}$$

(Heun, Math. Ann., XXXIII)

10. Обозначая ряд примера 7 через

$$F(a, q; \alpha, \beta, \gamma, \delta; z),$$

получить 192 решения дифференциального уравнения в форме степеней z , $z-1$ и $z-a$, умноженных на функции типа F .

[Хейн дает 48 этих решений.]

11. При $u = 2v$ показать, что уравнение Ламе

$$\frac{d^2\Lambda}{du^2} = \{n(n+1)\wp(u) + B\}\Lambda$$

может быть преобразовано в уравнение

$$\frac{d^2L}{dv^2} - 2n \frac{\wp''(v)}{\wp'(v)} \frac{dL}{dv} + 4\{n(2n-1)\wp(v) - B\}L = 0$$

при помощи подстановки

$$\Lambda = \{\wp'(v)\}^{-n}L.$$

12. Полагая $\zeta = \wp(v)$, показать, что

$$L = \sum_{r=0}^{\infty} b_r (\zeta - e_r)^{\alpha-r}$$

есть формальное решение уравнения примера 11, причем α и b_r , определяются уравнениями

$$(\alpha - 2n) \left(\alpha - n + \frac{1}{2} \right) = 0$$

и

$$\begin{aligned} 4(\alpha - r - 2n) \left(\alpha - r - n + \frac{1}{2} \right) b_r + [12e_2(\alpha - r + 1)(\alpha - r - 2n + 1) + \\ + 4e_2n(2n - 1) - 4B] b_{r-1} - \\ - 4(e_1 - e_2)(e_2 - e_3)(\alpha - r + 2) \left(\alpha - r - n + \frac{3}{2} \right) b_{r-2} = 0. \end{aligned}$$

(Brioschi, Comptes Rendus, LXXXVI (1878), 313—315 и Halphen)

13. Показать, что если n равно половине нечетного положительного целого числа, то решение уравнения примера 11, которое выражается в конечной форме, имеет вид:

$$L = \sum_{r=0}^{n-\frac{1}{2}} b_r (\zeta - e_2)^{2n-r},$$

причем b_r определяются уравнениями

$$\begin{aligned} 4r \left(n - r + \frac{1}{2} \right) b_r + [12e_2(2n - r + 1)(r - 1) - 4e_2n(2n - 1) + 4B] b_{r-1} + \\ + 4(e_1 - e_2)(e_2 - e_3)(2n - r + 2) \left(n - r + \frac{3}{2} \right) b_{r-2} = 0, \end{aligned}$$

а B определяется так, чтобы $b_{n+\frac{1}{2}} = 0$.

(Brioschi и Halphen)

14. Показать, что если n равно половине нечетного целого числа, то решение уравнения примера 11, которое выражается в конечной форме, имеет вид:

$$L' = \sum_{p=0}^{n-\frac{1}{2}} b'_p (\zeta - e_2)^{n-p-\frac{1}{2}},$$

причем b'_p определяются уравнениями

$$\begin{aligned} 4p \left(n + p + \frac{1}{2} \right) b'_p - \\ - [12e_2 \left(n - p + \frac{1}{2} \right) \left(n + p - \frac{1}{2} \right) - 4e_2n(2n - 1) + 4B] b'_{p-1} + \\ + 4(e_1 - e_2)(e_2 - e_3) \left(n - p + \frac{3}{2} \right) (p - 1) b'_{p-2} = 0, \end{aligned}$$

а $b'_{n+\frac{1}{2}} = 0$ есть уравнение, которое определяет B .

(Crawford)

15. Сохраняя обозначения примеров 13 и 14, показать, что если

$$b'_p = (-1)^p (e_1 - e_2)^p (e_2 - e_3)^p c_{n-p-\frac{1}{2}},$$

то уравнения, которые определяют $c_0, c_1, \dots, c_{n-\frac{1}{2}}$, тождественны с уравнениями, определяющими $b_0, b_1, \dots, b_{n-\frac{1}{2}}$, и вывести отсюда, что если одно из решений уравнения Ламе (в котором n равно половине нечетного целого числа) выражается как алгебраическая функция от $\rho(v)$, то тем же свойством обладает и второе.

(Crawford)

16. Доказать, что значения B , определяемые в примере 13, вещественны, когда e_1, e_2, e_3 вещественны.

17. Показать, что общим решением уравнения

$$\frac{1}{\Lambda} \frac{d^2 \Lambda}{du^2} = \frac{3}{4} \rho(u)$$

будет

$$\Lambda = \left\{ \rho' \left(\frac{1}{2} u \right) \right\}^{-\frac{1}{2}} \left\{ A \rho \left(\frac{1}{2} u \right) + B \right\},$$

где A и B — произвольные постоянные.

(Halphen, Mém. par divers savants,
XXVIII (I), 1880, 105)

18. Показать, что общим решением уравнения

$$\frac{1}{\Lambda} \frac{d^2 \Lambda}{dz^2} = \frac{3}{4} k^2 \operatorname{sn}^2 z - \frac{1}{4} (1 + k^2)$$

будет

$$\Lambda = \left\{ \operatorname{sn} \frac{1}{2} (C - \alpha) \operatorname{cn} \frac{1}{2} (C - \alpha) \operatorname{dn} \frac{1}{2} (C - \alpha) \right\}^{-\frac{1}{2}} \left\{ A + B \operatorname{sn}^2 \frac{1}{2} (C - \alpha) \right\},$$

где A и B — произвольные постоянные и $C = 2K + iK'$.

(Jinet, Comptes Rendus, CXI)

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ¹⁾

- Абель (Abel N. H.) I 29, 30, 73, 83, 84, 297, 324; II 184, 277, 291, 307, 374, 381, 394, 404—405, 422
Адамар (Hadamard J.) I 152, 299
Адамов А. II 182, 186, 187
Адамс (Adams J. C.) I 177; II 152, 260
Аити (Aichi K.) II 286
Айнс (Ince E. Lindsay) II 261, 284, 286, 288, 477
Александров П. С. I 65
Алексеевский II 56
Альфен (Halphen G. H.) II 320, 368, 458, 464, 483, 484, 490, 493, 494
Амигес (Amigues E. P. M.) I 173
Андинг (Aning E.) II 221
Аппель (Appel P. E.) II 102, 106, 161, 252, 275
Арган (Argand J. R.) I 20
Ахиезер Н. И. II 325, 369, 427

Барнс (Barnes E. W.) I 179, 222; II 15, 57, 78, 88, 101, 105, 108, 150, 163, 175, 176, 182, 208
Бассет (Basset A. B.) II 213, 214, 230
Бауэр (Bauer G.) II 155, 252
Бахман (Bachmann P.) I 23
Бейкер (Baker H. F.) I 78
Берже (Berger A.) I 270
Бернсайд (Burnside W. S.) I 299; II 196, 321, 327
Бернуlli Д. (Bernoulli Daniel) I 224; II 190
Бернуlli И. (Bernoulli Johann) I 335
Бернуlli Н. (Bernoulli Nicolas) I 29
Бернуlli Я. (Bernoulli Jacob) I 177, 179; II 190, 290, 335
Берtrand (Bertrand, G. L. F.) I 103; II 253

Бессель (Bessel F. W.) II 168, 169, 189, 205
Бессо (Besso D.) II 184
Бинé (Binet J. P. M.) II 32, 40, 51, 52, 54, 55, 126
Бо (Beau O.) I 274
Бобек (Bobek K.) II 434
Больцано (Bolzano B.) I 24
Бонне (Bonnet P.) I 94, 225, 248
Борель (Borel É.) I 78, 142, 153, 196, 202, 216, 217, 222, 223
Борхардт (Borchardt C. W.) I 149; II 325, 335
Бохер (Böcher M.) I 119, 287, 298, 311, 323, 324, 325; II 196, 464
Браункер (Brouncker W.) I 28
Брио (Briot C.) II 325, 334, 368
Бриоски (Brioschi F.) II 484, 493
Бромуич (Bromwich T. J. I'a) I 21, 39, 41, 50, 57, 67, 73, 85, 109, 117, 202, 219, 222, 328; II 24, 93
Брунс (Brunn H.) II 286
Буке (Bouquet C.) II 325, 334, 368
Бурге (Bourguet J.) II 29, 50, 52, 56, 222, 246
Буркгардт (Burkhardt H. F. K. L.) I 268; II 140, 250
Бьёrlинг (Björling E. G.) I 339
Бэйтмен (Bateman H.) I 184, 324; II 185, 250, 254, 255
Бэрджесс (Burgess J.) II 169
Бюрман (Bürmann H.) I 181

Валле-Пуссен (Vallée Poussin Ch. J. de la) I 58, 85, 104, 117, 153, 226, 243, 252, 255, 268
Валлис (Wallis J.) I 22, 48, 331, 334; II 81

¹⁾ Римские цифры обозначают I или II часть книги, арабские — страницы.

- Ватсон (Watson G. N.) I 65, 78, 85, 113, 153, 222; II 103, 183, 186, 221, 286, 335
 Вебер (Weber H.) II 176, 182, 210, 226, 228, 325, 368
 Вейерштрас (Weierstrass K. T. W.) I 14, 24, 62, 66, 72, 142, 153, 156, 192, 327; II 296, 320, 323, 325, 367, 368
 Вессель (Wessel C.) I 20
 Вольстенхольм (Wolstenholme J.) I 174
 Вольтерра (Volterra V.) I 300, 307, 324
 Вронский (Wronski J. Hoëné) I 206
 Гамбургер (Hamburger M.) II 268
 Гамбьоли (Gambioli D.) I 206
 Гамильтон (Hamilton Sir William Rowan) I 18, 243
 Ганзен (Hansen P. A.) II 221
 Гантмахер Ф. Р. I 299
 Гаусс (Gauss K. F.) I 18, 20; II 20, 29, 32, 82, 83, 98, 101, 133, 291, 334, 405, 420, 435
 Гегенбауэр (Gegenbauer L.) II 149, 159, 196, 232
 Гейне (Heine H. E.) I 78, 79; II 128, 133, 136, 149, 150, 205, 221, 253, 335, 473, 490
 Гентцшель (Haentzschel E.) II 491
 Герриторе (Guerritore G.) II 468
 Гёльдер (Hölder O.) I 94; II 15
 Гиббс (Gibbs J. W.) I 274
 Гильберт (Hilbert D.) I 300, 319, 324; II 250
 Гишар (Guichard C.) I 207
 Глешер (Glaisher J.) I 177; II 153, 169, 374, 378, 381, 383, 384, 396, 409, 410, 415, 419, 425, 430
 Гмайнер (Gmeiner J. A.) I 26
 Гобсон (Hobson E. W.) I 13, 21, 78, 82, 97, 109, 117, 225, 226, 268, 328, 336, 341; II 96, 140, 149, 150, 156, 200, 217, 225, 228, 256, 449, 490, 491
 Голубев В. В. I 294; II 304
 Грегори (Gregory J.) I 29
 Грейс (Grace J. H.) I 173
 Грэй (Gray A.) II 214, 221
 Гудерман (Gudermann C.) II 374, 378, 430
 Гурвиц (Hurwitz A.) I 110, 225, 332; II 58, 325, 369, 427
 Гурсат (Goursat E.) I 78, 85, 88, 117, 123, 124, 152, 202, 294, 324
 Гутцмер (Gutzmer C. F. A.) I 155
 Даламбер (D'Alembert J. le Rond) I 36, 224, 225
 Даниэльс (Daniels A. L.) II 325
 Данчер (Dantscher V. von) I 21
 Дарбу (Darboux J. G.) I 64, 88, 138, 176; II 108, 128
 Дарвин (Darwin G. A.) II 454, 490
 Дауголл (Dougall J.) II 107, 251, 286
 Дебай (Debye P.) II 208
 Дедекинд (Dedekind J. W.) I 14, 15, 21
 Де Морган (De Morgan A.) I 37, 338
 Джифри (Jeffery G. B.) II 256
 Диксон (Dixon A. C.) I 181; II 107, 108, 434
 Дини (Dini U.) I 252; II 225
 Дирихле (Dirichlet P. G. L.) I 30, 39, 73, 102, 112, 117, 225, 248; II 32, 46, 47, 78, 127
 Дирксен (Dirksen E. H.) I 243
 Долбня II 332
 Донкин (Donkin W. F.) II 256
 Дынник II 221
 Дю Буа Реймон (Du Bois Reymond P. D. G.) I 96, 117, 156, 263
 Ежек (Ježek O.) I 206
 Жаме (Jame E. V.) II 494
 Жордан (Jordan M. E. C.) I 162, 171, 252; II 45, 368
 Залшютц (Saalschütz L.) II 25, 26, 107
 Зейдель (Seidel P. L.) I 66
 Зейферт (Seiffert L. G. A.) II 426
 Зигмунд А. I 268
 Зоммерфельд (Sommerfeld A. J. W.) II 221
 Иннес (Innes R. T. A.) II 364
 Ишервуд (Isherwood J. G.) II 221
 Йенсен (Jensen J. L. W. V.) II 65, 78
 Калландро (Callandreau O.) II 200
 Кантор (Cantor G. F. L. P.) I 14, 225, 258, 263, 264
 Карда (Carda K.) I 177
 Карлинни (Carlini F.) II 208
 Карс (Carse G. A.) I 268
 Карслоу (Carslaw H. S.) I 274
 Кельвин (Kelvin Sir William Thomson, Lord) II 221, 242, 244, 250, 253, 438, 459
 Керзон (Curzon H. E. J.) I 296; II 183
 Киперт (Kiepert L.) II 327, 329, 332

- Клаузен (Clausen T.) II 103
 Клебш (Clebsch R. F. A.) II 242, 324
 Клейн (Klein G. F.) I 287, 289, 294,
 295; II 84, 361, 368, 398, 464
 Клеро (Clairaut A. C.) I 232
 Клайвер (Kluyver J. C.) I 199
 Кнезер (Knezer J. C. A.) I 314
 Коддингтон Э. А. I 294
 Кори (Corey S. A.) I 153
 Кох (Koch N. F. H. von) I 54, 57
 Коши (Cauchy A. L.) I 25, 35, 39, 42,
 43, 44, 45, 60, 64, 86, 103, 112, 123,
 124, 134, 149, 172, 225, 339; II 25,
 54, 55, 228, 334
 Кристел (Chrystal G.) I 37
 Кристоффель (Christoffel E. B.) II
 155
 Кронекер (Kronecker L.) I 173, 204;
 II 342, 422
 Кроуфорд (Crawford L.) II 484, 490,
 493, 494
 Крэг (Craig T.) I 294
 Кузьмин Р. О. II 221
 Куммер (Kummer E. E.) II 35, 53, 81,
 86, 101, 103, 163
 Купрадзе В. II 264, 282
 Курант (Courant R.) I 324; II 250
 Кэджори (Cajori F.) I 86
 Кэли (Cayley A.) I 206, 280; II 104,
 296, 303, 324, 368, 381, 383, 398,
 427, 430, 434, 490
 Кэннингхем (Cunningham E.) I 296
 Кептейн (Kapteyn W.) I 205; II 219
 Лагер (Laguerre E. N.) II 168
 Лагранж (Lagrange C.) I 206, 232
 Лагранж Ж. Л. (Lagrange J. L.)
 I 138, 186; II 117, 163, 184, 189
 Лалеско (Lalesco T.) I 324
 Ламе (Lame G.) II 253, 254, 258, 440,
 457, 459, 490
 Ландау (Landau E. G. H.) I 13, 23;
 II 74, 78, 80, 168
 Ланден (Landen J.) II 354, 396, 397
 Ландсберг (Landsberg G.) I 175;
 II 351
 Лаплас (Laplace P. S.) I 297; II 29,
 123, 208
 Лебедев Н. Н. II 48, 101, 150, 183
 Лебег (Lebesgue H.) I 78, 90, 229,
 252, 268
 Левинсон Н. И 294
 Леви-Чивита (Levi-Civita T.) I 202
 Лежандр (Legendre A. M.) I 172, 223;
 II 13, 20, 22, 40, 41, 51, 110, 113,
 120, 145, 150, 158, 168, 290, 379,
 385, 394, 404—405, 408, 412, 415,
 416, 418, 419, 421, 423, 425, 426
 Лейбниц (Leibniz G. W.) I 28, 96,
 331; II 190
 Лерх (Lerch M.) I 118, 153, 155, 156,
 208; II 67, 79
 Ли (Lie S.) I 62
 Лизем (Leathem J. G.) I 22
 Линделёф (Lindelöf E. L.) I 152, 171,
 204; II 48, 78, 84
 Линдеман (Lindemann C. L. F.)
 I 296; II 274, 286, 490
 Линдштедт (Lindstedt A.) II 286
 Липшиц (Lipschitz R. O. S.) I 252;
 II 221
 Литлавуд (Littlewood J. E.) I 129, 222;
 II 78, 80
 Лиувиль (Liouville J.) I 149, 297,
 311; II 293, 325, 334, 466
 Ломмель (Lommel E. C. J. von)
 II 191, 201, 221, 224, 225, 228
 Лондон (London F.) I 41
 Лоран (Laurent R. A.) I 142, 173;
 II 136
 Лэмб (Lamb H.) I 90; II 253
 Ляв (Love A. E. H.) II 250
 Ляпунов I 255
 Мазерес (Maseres F.) I 14
 Макдональд (Macdonald H. M.) I 170;
 II 158, 214, 227, 229, 232
 Мак Клинток (McClintock E.) I 187
 Мак-Лахлан Н. В. II 286
 Маклорен (Maclaurin R. C.) I 103,
 112, 135, 179, 212; II 260, 286, 290
 Мальмстен (Malmstén C. J.) II 34
 Манжо (Mangeot S.) I 206
 Матье (Mathieu E. L.) II 258, 266,
 286, 287, 288
 Мейер (Meyer F. G.) I 117
 Мейсель (Meissel D. F. E.) II 221
 Меллер (Mehler F. G.) II 127, 206, 228
 Меллин (Mellin R. H.) I 222; II 48,
 88, 101
 Меншен (Mansion P.) I 64
 Мерфи (Murphy R.) I 315; II 121, 123
 Мерц (Merz J. T.) I 327
 Милднер (Mildner R.) I 208
 Милн (Milne A.) I 325; II 183, 187
 Миндинг (Minding E. F. A.) I 167
 Миттаг-Леффлер (Mittag-Leffler
 M. G.) I 187
 Мольк (Molk C. F. J.) I 29, 328;
 II 325, 337, 368, 427
 Морера (Morera G.) I 127, 156
 Морли (Morley F.) II 107, 368

- Мур (Moore E. H.) II 15
 Мэтьюс (Mathews G. B.) I 327; II 214, 221
Невиль (Neville E. H.) II 253
Нейман (Neumann K.) I 311; II 138, 149, 191, 212, 215, 219, 221, 222, 224, 230, 231, 232
Нейман (Neumann F.) II 135
Нетто (Netto E.) I 92
Нёрлунд (Nörlund N. E.) I 199
Нивен (Niven W. D.) II 253, 440, 449, 490, 491
Николсон (Nicholson J. W.) II 208, 221, 226, 228
Николь (Nicole F.) I 199
Нильсен (Nielsen N.) I 199; II 48, 150, 183, 210, 221, 225, 231
Ньюман (Newmann E. W.) II 14
Ньютон (Newton Sir Isaak) I 29, 331, 334
Олбрихт (Olbricht R.) II 150, 157, 221
Олдис (Aldis W. S.) II 221
Ольденбург (Oldenburg H.) I 331
Ор (Orr W. Mc. F.) II 104
Огсруд (Osgood W. F.) I 67, 72, 85, 104, 127
Папперитц (Papperitz J. E.) I 291; II 101
Парсеваль (Parseval M. A.) I 257
Пенлеве (Painleve P.) II 330
Пинкерле (Pincherle S.) I 155, 199, 209; II 88, 101, 159
Пирпонт (Pierpont J.) I 109
Пирс (Peirce B. O.) II 221
Плана (Plana G. A. A.) I 204
Полиа (Pólya G.) I 171
Портер (Porter M. B.) II 196
Похгаммер (Pochhammer L.) II 44, 96, 104
Прингслейм (Pringsheim A.) I 29, 30, 41, 42, 50, 57, 156, 328; II 33, 48
Пуанкаре (Poincaré J. Henri) I 54, 212, 222
Пуассон (Poisson S. D.) I 175, 225; II 207, 227, 246, 351
Пэнтон (Panton A. W.) I 299; II 196, 321
Раабе (Raabe J. L.) I 178; II 51
Равю (Ravut L.) I 127
Райф (Reiff R. A.) I 29
Рассел (Russel H. B. A. W.) I 16, 21, 327
Релей (Rayleigh J. W. Strutt, Lord) I 268; II 246, 250, 286
Риман (Riemann G. F. B.) I 41, 57, 90, 117, 123, 124, 225, 226, 243, 252, 258, 262, 268, 291, 294, 295; II 58, 60, 68, 78, 98, 101, 214
Рисс (Riesz M.) I 219
Ритт (Ritt J. F.) I 215
Родриг (Rodrigues O.) II 111
Салмон (Salmon G.) II 324
Селлерье (Sellerier C.) I 156
Сильва (Silva J. A. Martins da) II 153
Сильвестр (Sylvester J. J.) I 54, 327; II 251, 276
Симон (Simon H.) I 58
Смирнов В. И. II 101, 150, 221, 250
Смит (Smith B. A.) II 221, 341, 342, 368, 431
Солднер (Soldner J. von) II 169
Сонин Н. И. II 199, 226, 229
Стенберг (Stenberg O. A.) II 491
Стилтъес (Stieltjes T. J.) II 52, 155, 168, 274, 278, 286, 464, 471, 472, 473
Стирлинг (Stirling J.) I 135, 179, 199, 212; II 87
Стокс (Stokes G. G.) I 66, 106, 112, 118, 213, 234, 243, 288; II 221, 227
Стретт Дж. — см. Релей
Стоарт (Stewart C. A.) II 368
Сушкевич А. К. II 321
Сэвидж (Savidge H. G.) II 221
Таннери (Tannery J.) I 328, 331; II 325, 337, 368, 427
Тейлор (Taylor B.) I 133
Тейт (Tait P. G.) II 242, 244, 250, 438
Тейшейра (Teixeira F. G.) I 184, 186, 204, 205; II 155
Титчмарш (Titchmarsh E. C.) I 266, 268
Тодгунтер (Todhunter I.) I 289; II 150
Томé (Thomé L. W.) I 279, 294; II 138
Томсон (Thomson Sir William) — см. Кельвин
Трансон (Transon A. E. L.) I 206
Туиди (Tweedie C.) I 179, 199
Уайтхед (Whitehead A. N.) I 21, 327
Уилбрэм (Wilbraham H.) I 274
Уилсон (Willson R. W.) II 221
Уиттекер (Whittaker E. T.) I 298, 325; II 162, 165, 167, 176, 182, 183, 185, 236, 250, 261, 266, 284, 286, 325, 390, 476

- Фабер (Faber G.) I 328
 Фаньяно (Fagnano Giulio Carlo de Toschi di) II 290
 Фату (Fatou P.) I 229
 Фейер (Fejér L.) I 225, 238
 Феррерс (Ferrers N. M.) II 140, 150
 Филон (Filon L. N. G.) II 250
 Флоке (Floquet A. M. G.) II 268, 286
 Фо (Féaux B.) II 35
 Форсайт (Forsyth A. R.) I 275, 284,
 286, 289, 294; II 86, 235, 238, 239,
 251, 298, 324, 413, 430, 436
 Фредгольм (Fredholm E. I.) I 300, 324
 Френд (Frend W.) I 14
 Фреше (Fréchet M.) I 324
 Фрике (Fricke R.) II 361
 Фробениус (Frobenius F. G.) I 279,
 284, 294; II 133, 140, 279, 313, 329
 Фукс (Fuchs I. L.) I 279, 294; II 268
 Фурье (Fourier J. B. J.) I 225, 266;
 II 250, 335
 Фусс (Fuss P. H.) II 16
 Фюрстенай (Fürstenau E.) I 54
 Халм (Halm J. K. E.) I 296
 Ханкель (Hankel H.) I 21; II 26, 202,
 208, 209, 211, 214, 221, 225, 231
 Харгрив (Hargrave C. J.) II 227
 Харгривз (Hargreaves R.) II 119
 Харди (Hardy G. H.) I 21, 30, 57, 73,
 74, 85, 100, 118, 196, 219, 222, 243,
 329; II 68, 78, 80, 102, 408
 Харкнесс (Harkness J.) II 368
 Харнак (Harnack A.) I 225
 Хейвуд (Heywood H. B.) I 324
 Хейман (Heymann K. W.) II 103
 Хайн (Heun K.) II 153, 464, 490, 492
 Хеффтер (Heffter L. W.) I 63
 Хикс (Hicks W. M.) II 253
 Хилл (Hill G. W.) I 54, 61, 139;
 II 102, 260, 261, 273, 286
 Ходжкинсон (Hodgkinson J.) II 123
 Хэнкок (Hancock H.) II 360, 368, 376
 Чапмен (Chapman S.) I 222
 Чезаро (Cesàro E.) I 58, 84, 217, 219
 Шайбнер (Scheibner W.) I 154, 155
 Шарпі (Charpit P.) II 239
 Шартье (Chartier J.) I 104, 112
 Шафхайтлин (Schafheitlin P.) II 232
 Шварц (Schwarz K. H. A.) I 327;
 II 296, 320, 325
 Шендель (Schendel L.) II 159
 Шёнгольцер (Schönholzer J. J.) II 223
 Ширер (Shearer G.) I 268
 Шлезингер (Schlesinger L.) I 294
 Шлефли (Schläfli L.) II 111, 150, 155,
 156, 191, 198, 199, 210, 213, 223,
 225
 Шлёмильх (Schlömilch O. X.) I 199,
 201, 202, 223, 323, 329, 331; II 24,
 48, 56, 168, 188, 219
 Шмидт (Schmidt O. J. E.) I 319, 324
 Штикельбергер (Stickelberger L.) II
 313, 329
 Штолыц (Stoltz O.) I 21, 26, 42
 Штрёмер (Strömer F. C. M.) I 172
 Штурм (Sturm J. C. F.) II 466
 Шумахер (Schumacher H. C.) II 404
 Эйзенштейн (Eisenstein F. G. M.)
 I 77
 Эйлер (Euler L.) I 29, 100, 168, 179,
 212, 217, 223, 225, 229, 335; II 13,
 16, 41, 43, 49, 50, 52, 54, 58, 81,
 168, 189, 212, 246, 335, 368, 379,
 404
 Эйри (Airey J. R.) II 221
 Эмбер (Humbert P.) II 286
 Эмде (Emde F.) II 169, 221
 Эннепер (Ennepen A.) II 325, 427
 Эрмит (Hermite C.) II 106, 107, 155,
 181, 274, 327, 329, 333, 368, 464, 483,
 487, 490, 491
 Юнг (Young W. H.) I 82; II 225, 260,
 286
 Яакоби (Jacobi K. G. J.) I 60, 154, 155,
 175; II 126, 207, 290, 291, 334, 335,
 337, 341, 343, 345, 351, 356, 358,
 368, 369, 370, 374, 378, 379, 381,
 383, 394, 398, 400, 401, 404—405,
 407, 410, 415, 418, 419, 426, 427,
 428, 437
 Якобсталь (Jacobsthal W.) II 163, 182
 Янке (Jahnke P. R. E.) II 169, 221

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ¹⁾

- Абеля неравенство** I 29
 ~, следствие Харди I 30
Абсолютная сходимость | двойных рядов I 43
 ~, признак Даламбера I 36
 ~, — Де Моргана I 37
 ~, — Коши I 35
 ~ ряда I 32
Абсолютно сходящиеся | бесконечные произведения I 48
 ~ двойные ряды I 43
 ~ ряды I 32
 ~, основные свойства I 40, 41
 ~, умножение I 44
Абсолютное значение — см. Модуль
Автоморфные функции II 325
Аксиомы арифметики и геометрии I 327
Алгебраическая лемма Адамара I 299
Амплитуда I 20
Аналитическая функциональная зависимость I 62, 122
Аналитические выражения I 120
 — функции I 120—156
 ~, значение в точке, лежащей внутри контура I 127, 128
 ~, Коши теорема I 124
 ~, неравенство Коши I 130
 ~, обращение Морера теоремы Коши I 156
 ~, определение I 121
 ~, отличие от моногенной функции (по Борелю) I 142
 ~, представляемые интегралами I 132
 ~, представляемые равномерно сходящимися рядами I 131
 ~, производные I 129
- Аналитические функции, уравнения Римана** I 123
Аналитическое продолжение I 138, 139
 ~ гипергеометрического ряда (функции) II 90
 ~, невозможность I 140
 ~ по двум различным путям I 139
 ~, формула I 140, 197, 198
Аналитичность суммы степенного ряда I 132
 — функции | в области I 122
 ~ во всей области I 126
 ~ в смысле Коши I 121, 141
 ~ ~, эквивалентность определению Вейерштрасса I 141
 ~ в точке I 122, 127
 ~ по Вейерштрассу I 141
Аналог параллелограмма периодов II 325
Аргана диаграмма I 20
Аргумент I 20, 339
 —, главное значение I 339
 —, непрерывность I 339
 — суммы комплексных чисел I 21
Асимптотические разложения I 210—223
 ~, дифференцирование I 215
 ~, интегрирование I 214
 ~, умножение I 213
Асимптотическое равенство для функций параболического цилиндра большого порядка II 187
Асимптотическое разложение | бессвязевых функций II 206—208, 210, 214
 ~ ~ при большом $|z|$ II 206—207
 ~ ~ Ханкеля для комплексной области II 208

¹⁾ Римские цифры обозначают I или II часть книги, арабские — страницы. Тире (—) заменяет слово, тильда (~) — группу слов (если заменяется не весь предыдущий термин, то конец заменяемой группы слов отмечен вертикальной черточкой).