Но $\partial S_{n-2r}/\partial K_p$ равна сумме произведений выражений K_1, K_2, ..., $K_{\frac{1}{2}n}$ (где K_p опускается), взятых по $\frac{1}{2}n-r-1$; а $K_q\,\partial^2 S_{n-2r}/(\partial K_p\,\partial K_q)$ состоит из тех членов этой суммы, которые содержат множитель K_q.

Следовательно,

$$\frac{\partial S_{n-2r}}{\partial K_p}-K_q\,\frac{\partial^2 S_{n-2r}}{\partial K_p\partial K_q}$$

равна сумме произведений выражений K_1, K_2, ..., $K_{\frac{1}{2}n}$ (где K_p и K_q опускаются), взятых по $\frac{1}{2}n-r-1$; а потому по симметрии имеем

$$\frac{\partial S_{n-2r}}{\partial K_p}-K_q\,\frac{\partial^2 S_{n-2r}}{\partial K_p\,\partial K_q}=\frac{\partial S_{n-2r}}{\partial K_q}-K_p\,\frac{\partial^2 S_{n-2r}}{\partial K_p\,\partial K_q},$$

так что

$$\frac{\partial^2 S_{n-2r}}{\partial K_p\,\partial K_q}=\left\{\frac{\partial S_{n-2r}}{\partial K_p}-\frac{\partial S_{n-2r}}{\partial K_q}\right\}\Big/(K_q-K_p).$$

После подстановки этого выражения для второй производной найдем, что

$$D^2S_{n-2r}=\sum_{p=1}^{\frac{1}{2}n}\frac{\partial S_{n-2r}}{\partial K_p}\left[6+8\theta_p\sum_{q=1}^{\frac{1}{2}n}{}'\frac{1}{\theta_p-\theta_q}-8\sum_{q=1}^{\frac{1}{2}n}{}'\frac{\theta_pK_p-\theta_qK_q}{(\theta_p-\theta_q)(K_p-K_q)}\right]=$$

$$=\sum_{p=1}^{\frac{1}{2}n}\frac{\partial S_{n-2r}}{\partial K_p}\left[6-8\sum_{q=1}^{\frac{1}{2}n}{}'\frac{K_q}{K_p-K_q}\right]=$$

$$=(4n-2)\sum_{p=1}^{\frac{1}{2}n}\frac{\partial S_{n-2r}}{\partial K_p}-8\sum_{p\neq q}\left\{K_p\,\frac{\partial S_{n-2r}}{\partial K_p}-K_q\,\frac{\partial S_{n-2r}}{\partial K_q}\right\}\Big/(K_p-K_q).$$

Далее, мы можем записать S_{n-2r} в форме $\bar{S}_{n-2r}+K_p\bar{S}_{n-2r-2}+K_q\bar{S}_{n-2r-2}+K_pK_q\bar{S}_{n-2r-4}$, где $\bar{S}_{2m}$ обозначает сумму произведений K_1, K_2, ..., $K_{\frac{1}{2}n}$ (где K_p и K_q опускаются), взятых по m; тогда мы увидим, что

$$K_p\,\frac{\partial S_{n-2r}}{\partial K_p}-K_q\,\frac{\partial S_{n-2r}}{\partial K_q}=(K_p-K_q)\,\bar{S}_{n-2r-2}.$$

Отсюда

$$D^2S_{n-2r}=(4n-2)\sum_{p=1}^{\frac{1}{2}n}\frac{\partial S_{n-2r}}{\partial K_p}-8\sum_{p\neq q}\overline{S}_{n-2r-2}.$$

Теперь ясно, что выражение справа есть однородная симметрическая функция от $K_1, K_2, \ldots, K_{\frac{1}{2}n}$ степени $\frac{1}{2}n-r-1$; кроме того, оно не содержит ни одного из выражений $K_1, K_2, \ldots, K_{\frac{1}{2}n}$ в степени выше первой. Поэтому оно будет кратным выражению S_{n-2r-2}. Для определения постоянного множителя отметим, что когда S_{n-2r-2} написано в развернутом виде, то оно содержит $C^{r+1}_{\frac{1}{2}n}$ членов, тогда как число членов в

$$(4n-2)\sum_{p=1}^{\frac{1}{2}n}\frac{\partial S_{n-2r}}{\partial K_p}-8\sum_{p\neq q}\overline{S}_{n-2r-2}$$

равно

$$\frac{1}{2}n(4n-2)\cdot C^{r}_{\frac{1}{2}n-1}-8\cdot C^{2}_{\frac{1}{2}n}\cdot C^{r-1}_{\frac{1}{2}n-2}.$$

Искомый множитель, следовательно, будет

$$\frac{\frac{1}{2}n(4n-2)\cdot C^{r}_{\frac{1}{2}n-1}-8\cdot C^{2}_{\frac{1}{2}n}\cdot C^{r-1}_{\frac{1}{2}n-2}}{C^{r+1}_{\frac{1}{2}n}},$$

что равно $(2r+2)(2n-2r-1)$.

Следовательно, доказано, что

$$D^2S_{n-2r}=(2r+2)(2n-2r-1)S_{n-2r-2}.$$

По индукции непосредственно получается, что

$$S_{n-2r}=\frac{D^{2r}S_n}{2\cdot 4\ldots 2r\cdot(2n-1)(2n-3)\ldots(2n-2r+1)},$$

и формула

$$G_n(x, y, z) = \left[\sum_{r=0}^{\frac{1}{2}n} \frac{(-1)^r D^{2r}}{2\cdot 4 \ldots 2r\,(2n-1)(2n-3)\ldots(2n-2r+1)}\right] H_n(x, y, z),$$

где $G_n(x, y, z)$ — эллипсоидальная гармоническая функция первого вида, теперь очевидна.

Пример 1. Доказать формулу Нивена, когда $G_n(x, y, z)$ — эллипсоидальная гармоническая функция второго, третьего или четвертого вида.

Пример 2. Получить символическую формулу

$$G_n(x, y, z) = \Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right)\left(\frac{1}{2} D\right)^{n+\frac{1}{2}} I_{-n-\frac{1}{2}}(D)\cdot H_n(x, y, z).$$

23.26. Эллипсоидальные гармонические функции степени n

Результаты, доказанные и высказанные в §§ 23.21—23.24, показывают, что когда n четное, то имеется $\frac{1}{2}n+1$ гармонических функций первого вида и $\frac{3}{2}n$ гармонических функций третьего вида; когда n нечетное, то имеется $\frac{3}{2}(n+1)$ гармонических функций второго вида и $\frac{1}{2}(n-1)$ гармонических функций четвертого вида, так что в каждом случае имеется в общем $2n+1$ гармонических функций.

Из § 18.3 следует, что если совокупности членов степени n в этих гармонических функциях линейно независимы, то они составляют фундаментальную систему гармонических функций степени n; любая однородная гармоническая функция степени n может быть выражена как линейная комбинация однородных гармонических функций, которые получаются отбором членов степени n из $2n+1$ эллипсоидальных гармонических функций.

Для того чтобы получить результаты о числе гармонических функций степени n и установить их линейную независимость, необходимо глубже заняться изучением уравнения Ламе, но, прежде чем приступить к этому исследованию, займемся представлением эллипсоидальных гармонических функций в эллипсоидальных координатах.

Эти выражения для эллипсоидальных гармонических функций имеют историческое значение ввиду исследований Ламе, но выражения, только что полученные методом Нивена, в некоторых отношениях более удобны для физических приложений.

О приложениях эллипсоидальных гармонических функций к исследованию фигуры Земли и о приведении гармонических функций к формам, приспособленным к численному вычислению, читатель может прочесть в мемуаре Дарвина: G. H. Darwin, Phil. Trans., 197A (1901), 461—537.

23.3. Эллипсоидальные координаты

Если (X, Y, Z) обозначают текущие координаты в трехмерном пространстве и если a, b, c положительны $(a > b > c)$, то уравнение

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=1$$

представляет эллипсоид; уравнение любой софокусной поверхности второго порядка будет

$$\frac{X^2}{a^2+\theta}+\frac{Y^2}{b^2+\theta}+\frac{Z^2}{c^2+\theta}=1,$$

где θ называется *параметром* этой поверхности.

Поверхность второго порядка проходит через заданную точку (x, y, z), если θ взято так, что

$$\frac{x^2}{a^2+\theta}+\frac{y^2}{b^2+\theta}+\frac{z^2}{c^2+\theta}=1.$$

Независимо от того, удовлетворяет ли θ этому уравнению, удобно писать

$$1-\frac{x^2}{a^2+\theta}-\frac{y^2}{b^2+\theta}-\frac{z^2}{c^2+\theta}\equiv\frac{f(\theta)}{(a^2+\theta)(b^2+\theta)(c^2+\theta)},$$

и так как $f(\theta)$ — кубический полином от θ, то ясно, что через каждую заданную точку (x, y, z) проходят, вообще говоря, три поверхности второго порядка софокусной системы.

Для определения характера этих трех поверхностей второго порядка составим следующую таблицу:

θ	$f(\theta)$
$-\infty$	$-\infty$
$-a^2$	$-x^2(a^2-b^2)(a^2-c^2)$
$-b^2$	$y^2(a^2-b^2)(b^2-c^2)$
$-c^2$	$-z^2(a^2-c^2)(b^2-c^2)$
$+\infty$	$+\infty$

Из этой таблицы видно, что уравнение $f(\theta)=0$ имеет три вещественных корня λ, μ, ν, и если они расположены так, что

$\lambda > \mu > \nu$, то

$$\lambda > -c^2 > \mu > -b^2 > \nu > -a^2;$$

кроме того,

$$f(\theta) \equiv (\theta - \lambda)\ (\theta - \mu)\ (\theta - \nu).$$

Из значений λ, μ, ν ясно, что поверхности, на которых θ имеет значения λ, μ, ν, суть соответственно эллипсоид, однополостный гиперболоид и двуполостный гиперболоид.

Возьмем теперь тождество относительно θ:

$$1 - \frac{x^2}{a^2+\theta} - \frac{y^2}{b^2+\theta} - \frac{z^2}{c^2+\theta} \equiv \frac{(\theta-\lambda)(\theta-\mu)(\theta-\nu)}{(a^2+\theta)(b^2+\theta)(c^2+\theta)},$$

умножим его последовательно на $a^2+\theta$, $b^2+\theta$, $c^2+\theta$ и после этого заменим θ соответственно на $-a^2$, $-b^2$, $-c^2$. Таким образом найдем, что

$$x^2 = \frac{(a^2+\lambda)(a^2+\mu)(a^2+\nu)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)},$$

$$y^2 = -\frac{(b^2+\lambda)(b^2+\mu)(b^2+\nu)}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)},$$

$$z^2 = \frac{(c^2+\lambda)(c^2+\mu)(c^2+\nu)}{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}.$$

Из этих уравнений ясно, что если (x, y, z) — какая-нибудь точка пространства и если λ, μ, ν обозначают параметры поверхностей второго порядка, софокусных с

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1,$$

проходящих через эту точку, то (x^2, y^2, z^2) однозначно определяются через (λ, μ, ν), и наоборот.

Параметры (λ, μ, ν) называются *эллипсоидальными координатами* точки (x, y, z) относительно основного эллипсоида

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1.$$

Легко показать, что эллипсоидальные координаты образуют ортогональную систему; в самом деле, рассмотрим направляющие косинусы касательной к кривой пересечения поверхностей (μ) и (ν); эти косинусы будут пропорциональны выражениям

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}, \frac{\partial y}{\partial \lambda}, \frac{\partial z}{\partial \lambda}\right),$$

и так как

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda}\frac{\partial x}{\partial \mu} + \frac{\partial y}{\partial \lambda}\frac{\partial y}{\partial \mu} + \frac{\partial z}{\partial \lambda}\frac{\partial z}{\partial \mu} = \frac{1}{4}\sum_{a,\,b,\,c} \frac{a^2+\nu}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)} = 0,$$

то очевидно, что направления

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}, \frac{\partial y}{\partial \lambda}, \frac{\partial z}{\partial \lambda}\right), \quad \left(\frac{\partial x}{\partial \mu}, \frac{\partial y}{\partial \mu}, \frac{\partial z}{\partial \mu}\right)$$

перпендикулярны; подобным же образом каждое из этих направлений перпендикулярно направлению

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \nu}, \frac{\partial y}{\partial \nu}, \frac{\partial z}{\partial \nu}\right).$$

Таким образом, показано, что три системы поверхностей, на которых λ, μ, ν соответственно будут постоянными, образуют триортогональную систему.

Поэтому квадрат линейного элемента, а именно

$$(\delta x)^2 + (\delta y)^2 + (\delta z)^2,$$

может быть представлен в виде

$$(H_1\,\delta\lambda)^2 + (H_2\,\delta\mu)^2 + (H_3\,\delta\nu)^2,$$

где

$$H_1^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \lambda}\right)^2;$$

подобные же выражения имеют место для H_2^2 и H_3^2 с заменой λ на μ и ν.

Чтобы выразить H_1^2 через (λ, μ, ν), заметим, что

$$H_1^2 = \frac{1}{4x^2}\left(\frac{\partial x^2}{\partial \lambda}\right)^2 + \frac{1}{4y^2}\left(\frac{\partial y^2}{\partial \lambda}\right)^2 + \frac{1}{4z^2}\left(\frac{\partial z^2}{\partial \lambda}\right)^2 = \\ = \frac{1}{4}\sum_{a,\,b,\,c} \frac{(a^2+\mu)(a^2+\nu)}{(a^2+\lambda)(a^2-b^2)(a^2-c^2)}.$$

Но если разложим

$$\frac{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)},$$

как функцию от λ, на простейшие дроби, то увидим, что она как раз равна

$$\sum_{a,\,b,\,c} \frac{(a^2+\mu)(a^2+\nu)}{(a^2+\lambda)(a^2-b^2)(a^2-c^2)},$$

и следовательно,

$$H_1^2 = \frac{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}{4(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}.$$

Значения H_2^2 и H_3^2 получаются из этого выражения круговой перестановкой (λ, μ, ν).

Формулы, эквивалентные выведенным в этом параграфе, были получены Ламе (Lamé, Journ. de Math., II (1837), 147—183).

Пример 1. В обозначениях этого параграфа показать, что

$$x^2+y^2+z^2=a^2+b^2+c^2+\lambda+\mu+\nu.$$

Пример 2. Показать, что

$$4H_1^2=\frac{x^2}{(a^2+\lambda)^2}+\frac{y^2}{(b^2+\lambda)^2}+\frac{z^2}{(c^2+\lambda)^2}.$$

23.31. Униформизирующие переменные, связанные с эллипсоидальными координатами

В § 23.3 мы видели, что если выразить декартовы координаты (x, y, z) через эллипсоидальные координаты (λ, μ, ν), то полученные таким образом выражения не будут однозначными функциями от (λ, μ, ν). Для того чтобы избегнуть вызываемой этим неопределенности, выразим (λ, μ, ν) через три новые переменные (u, v, w) соответственно, положив

$$\wp(u)=\lambda+\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2),$$

$$\wp(v)=\mu+\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2),$$

$$\wp(w)=\nu+\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2),$$

где инварианты g_2 и g_3 эллиптической функции Вейерштрасса определяются тождеством

$$4(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)\equiv 4\wp^3(u)-g_2\wp(u)-g_3.$$

Дискриминант, соответствующий этим эллиптическим функциям (ср. § 20.33, пример 3), будет равен

$$16(a^2-b^2)^2(b^2-c^2)^2(c^2-a^2)^2,$$

и таким образом, он будет положителен; поэтому[1]) первый из трех периодов $2\omega_1$, $2\omega_2$ и $2\omega_3$, а именно период $2\omega_1$, будет положительным, период же $2\omega_3$ чисто мнимым; $2\omega_2$ имеет отрицательную вещественную часть, так как $\omega_1+\omega_2+\omega_3=0$; мнимая часть ω_2 будет положительной, так как $\operatorname{Im}(\omega_2/\omega_1)>0$.

При этих обстоятельствах $e_1>e_2>e_3$, и таким образом, имеем

$$3e_1=a^2+b^2-2c^2,\quad 3e_2=c^2+a^2-2b^2,\quad 3e_3=b^2+c^2-2a^2.$$

---

[1]) Ср. пример 1 § 20.32.

Выразив затем (x, y, z) через (u, v, w), получим

$$x^2 = \frac{(a^2+\lambda)(a^2+\mu)(a^2+\nu)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)} = \frac{\{\wp(u)-e_3\}\{\wp(v)-e_3\}\{\wp(w)-e_3\}}{(e_1-e_3)(e_2-e_3)} =$$

$$= \frac{\sigma_3^2(u)\,\sigma_3^2(v)\,\sigma_3^2(w)}{\sigma^2(u)\,\sigma^2(v)\,\sigma^2(w)}\,\frac{\sigma^2(\omega_1)\,\sigma^2(\omega_2)}{\sigma_3^2(\omega_1)\,\sigma_3^2(\omega_2)}$$

согласно примеру 4 § 20.53. Поэтому по § 20.421 имеем

$$x = \pm e^{-\eta_3\omega_3}\sigma^2(\omega_3)\,\frac{\sigma_3(u)\,\sigma_3(v)\,\sigma_3(w)}{\sigma(u)\,\sigma(v)\,\sigma(w)}$$

и подобным же образом

$$y = \pm e^{-\eta_2\omega_2}\sigma^2(\omega_2)\,\frac{\sigma_2(u)\,\sigma_2(v)\,\sigma_2(w)}{\sigma(u)\,\sigma(v)\,\sigma(w)},$$

$$z = \pm e^{-\eta_1\omega_1}\sigma^2(\omega_1)\,\frac{\sigma_1(u)\,\sigma_1(v)\,\sigma_1(w)}{\sigma(u)\,\sigma(v)\,\sigma(w)}.$$

Результат увеличения каждой из переменных u, v, w на $2\omega_3$ скажется в изменении знака выражения для x, в то время как выражения для y и z остаются без изменения; подобное же утверждение имеет место при увеличении u, v, w на $2\omega_2$ и $2\omega_1$; и кроме того каждое из трех выражений изменяет знак при изменении знаков у u, v, w.

Отсюда следует, что если взять верхние знаки в этих двузначных выражениях, то будет иметь место однозначное соответствие между всеми совокупностями значений (x, y, z), вещественными или комплексными, и всеми совокупностями значений (u, v, w), у которых все три представителя u, v и w лежат в любой заданной ячейке.

Униформизация, следовательно, осуществляется, если взять

$$x = e^{-\eta_3\omega_3}\sigma^2(\omega_3)\,\frac{\sigma_3(u)\,\sigma_3(v)\,\sigma_3(w)}{\sigma(u)\,\sigma(v)\,\sigma(w)},$$

$$y = e^{-\eta_2\omega_2}\sigma^2(\omega_2)\,\frac{\sigma_2(u)\,\sigma_2(v)\,\sigma_2(w)}{\sigma(u)\,\sigma(v)\,\sigma(w)},$$

$$z = e^{-\eta_1\omega_1}\sigma^2(\omega_1)\,\frac{\sigma_1(u)\,\sigma_1(v)\,\sigma_1(w)}{\sigma(u)\,\sigma(v)\,\sigma(w)}.$$

Формулы, отличающиеся от приведенных только перестановкой индексов 1 и 3, даны Альфаном (Halphen, Fonctions Elliptiques, II (1888), 459).

23.32. Уравнение Лапласа в эллипсоидальных координатах

Ламе и Томсоном[1]) было показано, что уравнение Лапласа, отнесенное к любой ортогональной системе координат (λ, μ, ν), имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left\{\frac{H_2H_3}{H_1}\frac{\partial V}{\partial\lambda}\right\}+\frac{\partial}{\partial\mu}\left\{\frac{H_3H_1}{H_2}\frac{\partial V}{\partial\mu}\right\}+\frac{\partial}{\partial\nu}\left\{\frac{H_1H_2}{H_3}\frac{\partial V}{\partial\nu}\right\}=0,$$

где (H_1, H_2, H_3) определяются тем, что

$$(H_1\,\delta\lambda)^2+(H_2\,\delta\mu)^2+(H_3\,\delta\nu)^2$$

является квадратом линейного элемента. Хотя доказательство этого результата, принадлежащее Томсону и основанное на рассуждениях физического характера, чрезвычайно просто, все аналитические доказательства либо весьма длинны, либо сильно ужаты.

Тем не менее Ламе[2]) доказал, что в частном случае, когда (λ, μ, ν) — эллипсоидальные координаты, уравнение Лапласа принимает простую форму, которую можно получить без кропотливых выкладок; когда за координаты принимаются униформизирующие переменные (u, v, w) § 23.31, форма уравнения Лапласа становится еще проще.

Прямым дифференцированием можно доказать, что если *любые* три независимые функции (λ, μ, ν) от (x, y, z) принимаются за независимые переменные, то выражение

$$\frac{\partial^2V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2V}{\partial z^2}$$

преобразуется в такое:

$$\sum_{\lambda,\mu,\nu}\left[\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)^2\right]\frac{\partial^2V}{\partial\lambda^2}+$$
$$+2\sum_{\lambda,\mu,\nu}\left[\frac{\partial\mu}{\partial x}\frac{\partial\nu}{\partial x}+\frac{\partial\mu}{\partial y}\frac{\partial\nu}{\partial y}+\frac{\partial\mu}{\partial z}\frac{\partial\nu}{\partial z}\right]\frac{\partial^2V}{\partial\mu\,\partial\nu}+$$
$$+\sum_{\lambda,\mu,\nu}\left[\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\lambda}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\lambda}{\partial z^2}\right]\frac{\partial V}{\partial\lambda}.$$

Для того чтобы упростить это выражение, заметим, что λ удовлетворяет уравнению

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}=1,$$

---

[1]) См. примечание на стр. 253.
[2]) L a m é, Journ. de Math., IV (1839), 133—136.

откуда, принимая x, y, z за независимые переменные, дифференцированием получим

$$\frac{2x}{a^2+\lambda}-\left\{\frac{x^2}{(a^2+\lambda)^2}+\frac{y^2}{(b^2+\lambda)^2}+\frac{z^2}{(c^2+\lambda)^2}\right\}\frac{\partial\lambda}{\partial x}=0,$$

$$\frac{2}{a^2+\lambda}-\frac{4}{(a^2+\lambda)^2}\frac{\partial\lambda}{\partial x}+2\left\{\frac{x^2}{(a^2+\lambda)^3}+\frac{y^2}{(b^2+\lambda)^3}+\frac{z^2}{(c^2+\lambda)^3}\right\}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^2-$$
$$-\left\{\frac{x^2}{(a^2+\lambda)^2}+\frac{y^2}{(b^2+\lambda)^2}+\frac{z^2}{(c^2+\lambda)^2}\right\}\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2}=0.$$

Отсюда находим

$$\frac{2x}{a^2+\lambda}=4H_1^2\frac{\partial\lambda}{\partial x},$$

$$\frac{2}{a^2+\lambda}-\frac{2x^2}{(a^2+\lambda)^3H_1^2}+\frac{x^2}{2H_1^4(a^2+\lambda)^2}\sum_{\substack{x,\,y,\,z\\ a,\,b,\,c}}\frac{x^2}{(a^2+\lambda)^3}=4H_1^2\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2}$$

и подобные же соотношения для μ, ν и y, z.

Из соотношения первого типа видно, что коэффициент при $\frac{\partial^2 V}{\partial\lambda^2}$ равен $\frac{1}{H_1^2}$, а коэффициент при $\frac{\partial^2 V}{\partial\mu\,\partial\nu}$ равен нулю; если сложить соотношения второго типа, получаемые круговой перестановкой x, y, z, то получим

$$4H_1^2\left\{\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\lambda}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\lambda}{\partial z^2}\right\}=\sum_{a,\,b,\,c}\frac{2}{a^2+\lambda}$$

и подобные же соотношения для μ и ν.

Если для краткости положим

$$\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}\equiv\Delta_\lambda$$

и аналогично определим Δ_μ и Δ_ν, то увидим, что

$$\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\lambda}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\lambda}{\partial z^2}=\frac{\Delta_\lambda^2}{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}\left\{\frac{2}{a^2+\lambda}+\frac{2}{b^2+\lambda}+\frac{2}{c^2+\lambda}\right\}=$$
$$=\frac{4\Delta_\lambda}{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}\frac{d\Delta_\lambda}{d\lambda},$$

и таким образом, уравнение Лапласа примет вид

$$\sum_{\lambda,\,\mu,\,\nu}\frac{4}{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}\left[\Delta_\lambda^2\frac{\partial^2 V}{\partial\lambda^2}+\Delta_\lambda\frac{d\Delta_\lambda}{d\lambda}\frac{\partial V}{\partial\lambda}\right]=0$$

или

$$(\mu-\nu)\Delta_\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}\left\{\Delta_\lambda\frac{\partial V}{\partial\lambda}\right\}+(\nu-\lambda)\Delta_\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\left\{\Delta_\mu\frac{\partial V}{\partial\mu}\right\}+$$
$$+(\lambda-\mu)\Delta_\nu\frac{\partial}{\partial\nu}\left\{\Delta_\nu\frac{\partial V}{\partial\nu}\right\}=0.$$

Эквивалентное уравнение с независимыми переменными (u, v, w) имеет вид

$$\{\wp(v)-\wp(w)\}\frac{\partial^2 V}{\partial u^2}+\{\wp(w)-\wp(u)\}\frac{\partial^2 V}{\partial v^2}+\{\wp(u)-\wp(v)\}\frac{\partial^2 V}{\partial w^2}=0$$

или, короче,

$$(\mu-\nu)\frac{\partial^2 V}{\partial u^2}+(\nu-\lambda)\frac{\partial^2 V}{\partial v^2}+(\lambda-\mu)\frac{\partial^2 V}{\partial w^2}=0.$$

Последние три уравнения будем рассматривать в дальнейшем исследовании как канонические формы уравнения Лапласа.

23.33. Эллипсоидальные гармонические функции в эллипсоидальных координатах

Если функцию Θ_p Нивена, определяемую как

$$\frac{x^2}{a^2+\theta_p}+\frac{y^2}{b^2+\theta_p}+\frac{z^2}{c^2+\theta_p}-1,$$

выразим через эллипсоидальные координаты (λ, μ, ν) точки (x, y, z), то она примет вид

$$-\frac{(\lambda-\theta_p)(\mu-\theta_p)(\nu-\theta_p)}{(a^2+\theta_p)(b^2+\theta_p)(c^2+\theta_p)},$$

и следовательно, если опустим постоянные множители вида

$$-(a^2+\theta_p)(b^2+\theta_p)(c^2+\theta_p),$$

эллипсоидальные гармонические функции примут вид

$$\left\{\begin{matrix} & x & yz & \\ 1 & y & zx & xyz \\ & z & xy & \end{matrix}\right\}\prod_{p=1}^{m}(\lambda-\theta_p)\prod_{p=1}^{m}(\mu-\theta_p)\prod_{p=1}^{m}(\nu-\theta_p).$$

Если теперь мы заменим x, y, z их выражениями через λ, μ, ν, то увидим, что любая *эллипсоидальная функция выражается, с точностью до постоянного множителя, в виде* $\Lambda\mathrm{MN}$, где Λ — функция только от λ, а M и N — такие же функции от μ и ν, как Λ от λ. Далее, Λ есть полином степени m относительно λ, умноженный в случае гармонических функций второго, третьего или четвертого вида на одно, два или три из выражений

$$\sqrt{a^2+\lambda},\quad \sqrt{b^2+\lambda},\quad \sqrt{c^2+\lambda}.$$

Так как полином, содержащийся в Λ, равен $\prod_{p=1}^{m}(\lambda-\theta_p)$, то из рассмотрения §§ 23.21—23.24 вытекает, что Λ является решением

дифференциального уравнения Ламе

$$4\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}\,\frac{d}{d\lambda}\left[\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}\,\frac{d\Lambda}{d\lambda}\right]=$$
$$=\{n(n+1)\lambda+C\}\,\Lambda,$$

где n — степень рассматриваемой гармонической функции относительно x, y, z. К этому результату можно придти также, рассматривая решения уравнения Лапласа, которые имеют вид[1]):

$$V=\Lambda\mathrm{MN},$$

где Λ, M, N — функции соответственно только от λ, μ, ν.

Ибо если подставить это выражение в уравнение Лапласа в форме § 23.32, то после деления на V найдем, что

$$\frac{\wp(v)-\wp(w)}{\Lambda}\,\frac{d^2\Lambda}{du^2}+\frac{\wp(w)-\wp(u)}{\mathrm{M}}\,\frac{d^2\mathrm{M}}{dv^2}+\frac{\wp(u)-\wp(v)}{\mathrm{N}}\,\frac{d^2\mathrm{N}}{dw^2}=0.$$

Последние два члена, рассматриваемые как функции от u, являются линейными функциями от $\wp(u)$, и следовательно, $\frac{1}{\Lambda}\frac{d^2\Lambda}{du^2}$ также должно быть линейной функцией от $\wp(u)$; так как оно не зависит от координат u и w, то имеем

$$\frac{1}{\Lambda}\,\frac{d^2\Lambda}{du^2}=\{K\wp(u)+B\},$$

где K и B — постоянные.

Если подставить это выражение в дифференциальное уравнение, то получим (тождественное) равенство нулю линейной функции от $\wp(u)$, и таким образом, коэффициенты в этой линейной функции должны равняться нулю; отсюда найдем уравнения

$$K\{\wp(v)-\wp(w)\}-\frac{1}{\mathrm{M}}\,\frac{d^2\mathrm{M}}{dv^2}+\frac{1}{\mathrm{N}}\,\frac{d^2\mathrm{N}}{dw^2}=0,$$
$$B\{\wp(v)-\wp(w)\}+\frac{\wp(w)}{\mathrm{M}}\,\frac{d^2\mathrm{M}}{dv^2}-\frac{\wp(v)}{\mathrm{N}}\,\frac{d^2\mathrm{N}}{dw^2}=0;$$

разрешая их (и замечая при этом, что $\wp(v)-\wp(w)$ не равно нулю тождественно), получим три уравнения:

$$\frac{d^2\Lambda}{du^2}=\{K\wp(u)+B\}\,\Lambda,$$
$$\frac{d^2\mathrm{M}}{dv^2}=\{K\wp(v)+B\}\,\mathrm{M},$$
$$\frac{d^2\mathrm{N}}{dw^2}=\{K\wp(w)+B\}\,\mathrm{N}.$$

---

[1]) Гармоническую функцию, являющуюся произведением трех функций, каждая из которых зависит только от одной координаты, иногда называют *нормальным решением* уравнения Лапласа. Так, нормальными решениями в полярных координатах (§ 18.31) будут $r^nP_n^m(\cos\theta)\begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix}m\varphi$.

Когда за независимую переменную принимается λ, первое уравнение принимает вид

$$4\Delta_\lambda \frac{d}{d\lambda}\left\{\Delta_\lambda \frac{d\Lambda}{d\lambda}\right\} = \left\{K\lambda + B + \frac{1}{3}K(a^2+b^2+c^2)\right\}\Lambda,$$

а это и есть уравнение, уже полученное для Λ; степень n гармонической функции дается формулой

$$n(n+1) = K.$$

Мы продвинулись теперь в изучении эллипсоидальных гармонических функций настолько далеко, насколько было возможно, не прибегая к использованию свойств уравнения Ламе.

Теперь мы приступим к подробному рассмотрению этого уравнения.

23.4. Различные формы дифференциального уравнения Ламе

Мы уже встречались с двумя формами уравнения Ламе, а именно:

$$4\Delta_\lambda \frac{d}{d\lambda}\left\{\Delta_\lambda \frac{d\Lambda}{d\lambda}\right\} = \{n(n+1)\lambda + C\}\Lambda,$$

или

$$\frac{d^2\Lambda}{d\lambda^2} + \left\{\frac{\frac{1}{2}}{a^2+\lambda} + \frac{\frac{1}{2}}{b^2+\lambda} + \frac{\frac{1}{2}}{c^2+\lambda}\right\}\frac{d\Lambda}{d\lambda} = \frac{\{n(n+1)\lambda + C\}\Lambda}{4(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)},$$

которая может быть названа алгебраической формой, и

$$\frac{d^2\Lambda}{du^2} = \{n(n+1)\wp(u) + B\}\Lambda,$$

которая может быть названа формой Вейерштрасса, так как она содержит эллиптическую функцию Вейерштрасса $\wp(u)$; постоянные B и C связаны соотношением

$$B + \frac{1}{3}n(n+1)(a^2+b^2+c^2) = C.$$

Если примем функцию $\wp(u)$ за новую независимую переменную, которую обозначим через ξ, то получим несколько видоизмененную алгебраическую форму (ср. § 10.6):

$$\frac{d^2\Lambda}{d\xi^2} + \left\{\frac{\frac{1}{2}}{\xi-e_1} + \frac{\frac{1}{2}}{\xi-e_2} + \frac{\frac{1}{2}}{\xi-e_3}\right\}\frac{d\Lambda}{d\xi} = \frac{\{n(n+1)\xi + B\}\lambda}{4(\xi-e_1)(\xi-e_2)(\xi-e_3)}.$$

Это дифференциальное уравнение имеет особые точки в e_1, e_2, e_3, в каждой из которых показатели равны 0, $\frac{1}{2}$, и особую точку на бесконечности, показатели в которой равны $-\frac{1}{2}n$, $\frac{1}{2}(n+1)$.

Вейерштрассовская форма уравнения была изучена Альфаном (Halphen, Fonctions Elliptiques, II (Paris, 1888), 457—531).

Алгебраическая форма была изучена Стилтьесом (Stieltjes, Acta Math., VI (1885), 321—326), Клейном (Klein, Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen (литографировано, Göttingen, (1894)) и Бохером (Bôcher, Ueber die Reihenentwicklungen der Potentialtheorie (Leipzig, 1894)).

Более общее дифференциальное уравнение с четырьмя особыми точками, в которых показатели произвольны (за исключением того, что сумма всех показателей во всех особых точках равна 2), было исследовано Хейном (Heun, Math. Ann., XXXIII (1889), 161—179); произвольное расположение особых точек приводит только к кажущемуся выигрышу в общности, так как при помощи дробнолинейного преобразования независимой переменной одну из особых точек можно перевести в точку на бесконечности, а тогда перенос начала координат достаточен для того, чтобы сделать сумму комплексных координат трех конечных особых точек равной нулю.

Другая важная форма уравнения Ламе получается, если перейти к эллиптическим функциям Якоби; если положить

$$z_1 = u\sqrt{e_1 - e_3},$$

то форма Вейерштрасса примет вид

$$\frac{d^2\Lambda}{dz_1^2} = \left[n(n+1)\left\{\frac{e_3}{e_1 - e_3} + \operatorname{ns}^2 z_1\right\} + \frac{B}{e_1 - e_3}\right]\Lambda,$$

а положив $z_1 = \alpha - iK'$, где $2iK'$ — мнимый период функции $\operatorname{sn} z_1$, получим простую форму

$$\frac{d^2\Lambda}{d\alpha^2} = \{n(n+1)k^2 \operatorname{sn}^2 \alpha + A\}\Lambda,$$

где A — постоянная, связанная с B соотношением

$$B + e_3 n(n+1) = A(e_1 - e_3).$$

Форма Якоби была изучена Эрмитом в мемуаре «Sur quelques applications des fonctions elliptiques», Comptes Rendus, LXXXV (1887), опубликован отдельно, Paris, 1885.

При изучении свойств уравнения Ламе лучше пользоваться не одной только формой, а брать ту форму, которая является наиболее удобной для данной цели. Для практических приложений форма Якоби, приводящая к тэта-функциям, является наиболее подходящей.

Для получения свойств решений уравнения наилучшей формой является, вообще говоря, вторая алгебраическая форма, хотя в некоторых задачах более простое исследование получается при форме Вейерштрасса.

23.41. Решения уравнения Ламе в виде рядов

Допустим, что уравнение Ламе, которое можно написать так

$$4(\xi-e_1)(\xi-e_2)(\xi-e_3)\frac{d^2\Lambda}{d\xi^2}+\left(6\xi^2-\frac{1}{2}g_2\right)\frac{d\Lambda}{d\xi}-$$
$$-\{n(n+1)\xi+B\}\Lambda=0,$$

имеет решение вида

$$\Lambda=\sum_{r=0}^{\infty}b_r(\xi-e_2)^{\frac{1}{2}n-r}.$$

Ряд справа, если он является решением, будет сходиться (§ 10.31, часть I) при достаточно больших значениях $|\xi-e_2|$; но нашей целью является не изучение сходимости, а выбор такого B, чтобы ряд обрывался на конечном числе членов, так что исследование сходимости окажется излишним.

Результатом подстановки этого ряда для Λ в левую часть уравнения Ламе и расположения его по степеням $\xi-e_2$ будет ряд

$$4\sum_{r=0}^{\infty}(\xi-e_2)^{\frac{1}{2}n-r+1}\left[r\left(n-r+\frac{1}{2}\right)b_r-\right.$$
$$-\left\{3e_2\left(\frac{1}{2}n-r+1\right)^2-\frac{1}{4}n(n+1)e_2-\frac{1}{4}B\right\}b_{r-1}+$$
$$\left.+(e_1-e_2)(e_2-e_3)\left(\frac{1}{2}n-r+2\right)\left(\frac{1}{2}n-r+\frac{3}{2}\right)b_{r-2}\right]$$

со знаком минус, причем коэффициенты b_r с отрицательными индексами следует считать равными нулю.

Поэтому, если ряд является решением, зависимость, связывающая последовательные коэффициенты, должна быть следующей:

$$r\left(n-r+\frac{1}{2}\right)b_r=\left\{3e_2\left(\frac{1}{2}n-r+1\right)^2-\frac{1}{4}n(n+1)e_2-\frac{1}{4}B\right\}b_{r-1}-$$
$$-(e_1-e_2)(e_2-e_3)\left(\frac{1}{2}n-r+2\right)\left(\frac{1}{2}n-r+\frac{3}{2}\right)b_{r-2}$$

и

$$\left(n-\frac{1}{2}\right)b_1=\left\{\frac{3}{4}n^2e_2-\frac{1}{4}n(n+1)e_2-\frac{1}{4}B\right\}b_0.$$

Если взять $b_0=1$, что мы можем сделать, не теряя общности, то коэффициенты b_r окажутся функциями от B со следующими свойствами:

(I) b_r — полином относительно B степени r;

(II) — знак коэффициента при B^r в выражении для b_r будет $(-1)^r$ в предположении, что $r\leqslant n$; сам коэффициент при B^r равен

$$\frac{(-1)^r}{2\cdot4\ldots2r(2n-1)(2n-3)\ldots(2n-2r+1)};$$

(III) если e_1, e_2, e_3 и B вещественны и $e_1 > e_2 > e_3$, то при $b_{r-1} = 0$ значения b_r и b_{r-2} противоположны по знаку в предположении, что $r < \frac{1}{2}(n+3)$ и $r < n$.

Теперь предположим, что n четное и что мы взяли такое B, что

$$b_{\frac{1}{2}n+1} = 0.$$

Если сделан этот выбор, то рекуррентная формула показывает, что

$$b_{\frac{1}{2}n+2} = 0,$$

если положить в ней $r = \frac{1}{2}n + 2$, а если как $b_{\frac{1}{2}n+1}$, так и $b_{\frac{1}{2}n+2}$ — нули, то *дальнейшие рекуррентные формулы удовлетворяются, если взять*

$$b_{\frac{1}{2}n+3} = b_{\frac{1}{2}n+4} = \ldots = 0.$$

Таким образом, условие, чтобы уравнение Ламе имело в качестве решения полином от ξ, заключается в том, что B должно быть корнем определенного алгебраического уравнения степени $\frac{1}{2}n + 1$, если n четное.

Когда же n нечетное, мы берем $b_{\frac{1}{2}(n+1)}$ равным нулю, тогда $b_{\frac{1}{2}(n+3)}$ также будет равняться нулю, и то же будет с дальнейшими коэффициентами; так что, когда n нечетное, условие заключается в том, что B должно быть корнем определенного алгебраического уравнения степени $\frac{1}{2}(n+1)$.

Легко показать, что при $e_1 > e_2 > e_3$ все корни этих алгебраических уравнений вещественны. В самом деле, свойства (II) и (III) показывают, что выражения b_0, b_1, b_2, ..., b_r, как функции от B, образуют ряд функций Штурма[1]), когда $r < \frac{1}{2}(n+3)$, и таким образом, у уравнения

$$b_{\frac{1}{2}n+1} = 0 \quad \text{или} \quad b_{\frac{1}{2}(n+1)} = 0$$

все корни вещественные[2]) и неравные.

Таким образом, если постоянные e_1, e_2, e_3 вещественны (случай, который является практически важным, как было видно в § 23.31),

---

[1]) Sturm, Mém. présentés par les Savants Étrangers, VI (1835), 271—318.

[2]) Этот способ рассуждения принадлежит Лиувиллю (Liouville, Journ. de Math., XI (1846), 221).

то при n четном имеется $\frac{1}{2}n+1$ вещественных и различных значений B, для которых уравнение Ламе имеет решение вида

$$\sum_{r=0}^{\frac{1}{2}n} b_r(\xi-e_2)^{\frac{1}{2}n-r},$$

а при n нечетном имеется $\frac{1}{2}(n+1)$ вещественных и различных значений B, для которых уравнение Ламе имеет решение вида

$$\sum_{r=0}^{\frac{1}{2}(n-1)} b_r(\xi-e_2)^{\frac{1}{2}n-r}.$$

Когда *не все* постоянные e_1, e_2, e_3 вещественны, уравнение, которому удовлетворяет величина B, может иметь равные корни; решения уравнения Ламе в таких случаях были исследованы Коном (Cohn) в Кенигсбергской диссертации (1888 г.).

Пример 1. Исследовать решения уравнения Ламе типа

$$\text{(I)}\qquad (\xi-e_1)^{\frac{1}{2}}\sum_{r=0}^{\infty} b'_r(\xi-e_2)^{\frac{1}{2}n-r-\frac{1}{2}},$$

$$\text{(II)}\qquad (\xi-e_3)^{\frac{1}{2}}\sum_{r=0}^{\infty} b''_r(\xi-e_2)^{\frac{1}{2}n-r-\frac{1}{2}},$$

$$\text{(III)}\qquad (\xi-e_1)^{\frac{1}{2}}(\xi-e_3)^{\frac{1}{2}}\sum_{r=0}^{\infty} b'''_r(\xi-e_2)^{\frac{1}{2}n-r-1},$$

получив рекуррентные соотношения

$$\text{(I)}\quad r\left(n-r+\frac{1}{2}\right)b'_r=$$
$$=\left\{3e_2\left(\frac{1}{2}n-r+\frac{1}{2}\right)^2+(e_2-e_3)\left(\frac{1}{2}n-r+\frac{3}{4}\right)-\frac{1}{4}n(n+1)e_2-\frac{1}{4}B\right\}b'_{r-1}-$$
$$-(e_1-e_2)(e_2-e_3)\left(\frac{1}{2}n-r+\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}n-r+1\right)b'_{r-2},$$

$$\text{(II)}\quad r\left(n-r+\frac{1}{2}\right)b''_r=$$
$$=\left\{3e_2\left(\frac{1}{2}n-r+\frac{1}{2}\right)^2-(e_1-e_2)\left(\frac{1}{2}n-r+\frac{3}{4}\right)-\frac{1}{4}n(n+1)e_2-\frac{1}{4}B\right\}b''_{r-1}-$$
$$-(e_1-e_2)(e_2-e_3)\left(\frac{1}{2}n-r+\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}n-r+1\right)b''_{r-2},$$

$$\text{(III)}\quad r\left(n-r+\frac{1}{2}\right)b'''_r=\left\{3e_2\left(\frac{1}{2}n-r+\frac{1}{2}\right)^2-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{4}e_2(n^2+n+1)-\frac{1}{4}B\right\}b'''_{r-1}-$$
$$-(e_1-e_2)(e_2-e_3)\left(\frac{1}{2}n-r+1\right)\left(\frac{1}{2}n-r+\frac{1}{2}\right)b'''_{r-2}.$$

Пример 2. В обозначении примера 1 показать, что число вещественных различных значений B, при которых уравнению Ламе удовлетворяют обрывающиеся ряды различного вида, равно

$$\text{(I)}\ \frac{1}{2}(n-1)\ \text{или}\ \frac{1}{2}(n-2),\quad \text{(II)}\ \frac{1}{2}(n-1)\ \text{или}\ \frac{1}{2}(n-2),$$

$$\text{(III)}\ \frac{1}{2}(n-2)\ \text{или}\ \frac{1}{2}(n-3).$$

23.42. Определение функций Ламе

Если собрать результаты, полученные в § 23.41, то будет ясно, что для уравнения

$$\frac{d^2\Lambda}{du^2} = [n(n+1)\wp(u) + B]\Lambda$$

с целым положительным n имеется $2n+1$ значений B, при которых уравнение имеет решение одного из четырех видов, описанных в §§ 23.21—23.24.

Если при разложении такого решения по убывающим степеням ξ коэффициент при высшем члене $\xi^{\frac{1}{2}n}$ берется равным единице, как это было сделано в § 23.41, то полученная таким образом функция называется *функцией Ламе степени n первого рода* первого (второго, третьего или четвертого) вида. Полученные таким образом $2n+1$ функций обозначаются символом

$$E_n^m(\xi) \qquad (m = 1, 2, \ldots, 2n+1);$$

когда же имеем дело лишь с одной такой функцией, то она может быть обозначена символом

$$E_n(\xi).$$

Таблицы выражений, дающих функции Ламе для $n = 1, 2, \ldots, 10$ были составлены Герриторе (Guerritore, Giornale di Math. (2), XVI (1909), 164—172).

Пример 1. Получить пять функций Ламе второй степени, а именно:

$$\lambda + \frac{1}{3}\sum a^2 \pm \frac{1}{3}\sqrt{\sum a^4 - \sum b^2c^2},$$

$$\sqrt{\lambda+b^2}\sqrt{\lambda+c^2},\quad \sqrt{\lambda+c^2}\sqrt{\lambda+a^2},\quad \sqrt{\lambda+a^2}\sqrt{\lambda+b^2}.$$

Пример 2. Получить семь функций Ламе третьей степени, а именно:

$$\sqrt{(\lambda+a^2)(\lambda+b^2)(\lambda+c^2)},$$

и шесть функций, получаемых перестановкой a, b, c в выражениях

$$\sqrt{\lambda+a^2}\left[\lambda + \frac{1}{5}(a^2+2b^2+2c^2) \pm \frac{1}{5}\sqrt{a^4+4b^4+4c^4-7b^2c^2-c^2a^2-a^2b^2}\right].$$

23.43. Об отсутствии кратных корней у функций Ламе

Покажем теперь, что все линейные множители, на которые разлагается функция $E_n^m(\xi)$, *различны*. Этот результат легче всего получается из дифференциального уравнения, которому удовлетворяет функция $E_n^m(\xi)$; ибо если $\xi - \xi_1$ — какой-нибудь множитель функции $E_n^m(\xi)$, где ξ_1 не равно ни одному из чисел e_1, e_2, e_3, то ξ_1 будет правильной точкой уравнения (§ 10.3, часть I), и любое решение, разложение которого по степеням $\xi - \xi_1$ не начинается с члена $(\xi - \xi_1)^0$ или $(\xi - \xi_1)^1$, должно тождественно равняться нулю.

Точно так же, если бы ξ_1 было одним из чисел e_1, e_2 или e_3, то определяющее уравнение, соответствующее особой точке ξ_1, имело бы корни 0 и $\frac{1}{2}$; таким образом, разложение функции $E_n^m(\xi)$ по возрастающим степеням $\xi - \xi_1$ начиналось бы с члена $(\xi - \xi_1)^0$ или $(\xi - \xi_1)^{\frac{1}{2}}$.

Таким образом, ни при каких обстоятельствах $E_n^m(\xi)$, как функция от ξ, не имеет равных корней.

Определение чисел $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$, введенных в §§ 23.21—23.24, можно считать теперь законченным, ибо мы видели, что решения уравнения Ламе могут быть составлены из неравных множителей и значения $\theta_1, \theta_2, \ldots$, соответствующие корням функции $E_n^m(\xi) = 0$, удовлетворяют уравнениям, необходимым для обеспечения того, чтобы произведения Нивена были решениями уравнения Лапласа.

Остается еще показать, что $2n+1$ эллипсоидальных гармонических функций, построенных таким образом, образуют фундаментальную систему решений степени n уравнения Лапласа.

23.44. Линейная независимость функций Ламе

Покажем теперь, что $2n+1$ функций Ламе $E_n^m(\xi)$ степени n линейно независимы, т. е. что между ними не существует линейных соотношений, имеющих место тождественно относительно ξ.

Во-первых, если бы существовало линейное соотношение, в которое входили бы функции различных видов, то очевидно, что надлежащим изменением знака радикалов $\sqrt{\xi - e_1}$, $\sqrt{\xi - e_2}$, $\sqrt{\xi - e_3}$ можно было бы получить другие соотношения, которые при сложении с первоначальным соотношением и вычетании из него дали бы два (или более) новых линейных соотношения, каждое из которых связывало бы функции не только одного и того же вида, но даже одного и того же типа.

Пусть одно из таких соотношений, если они существуют, будет

$$\sum a_m E_n^m(\xi) \equiv 0 \qquad (a_m \neq 0),$$

и пусть это соотношение содержит r функций.

Подействуем на это тождество оператором

$$\frac{d^2}{du^2} - n(n+1)\xi$$

$r-1$ раз.

Результаты последовательных действий будут

$$\sum a_m (B_n^m)^s E_n^m(\xi) \equiv 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, r-1),$$

где B_n^m — значение B, соответствующее функции $E_n^m(\xi)$.

Исключим $a_1, a_2, \ldots, a_r$ из r полученных уравнений; тогда найдем, что

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ B_n^1 & B_n^2 & B_n^3 & \ldots & B_n^r \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (B_n^1)^{r-1} & (B_n^2)^{r-1} & \ldots & \ldots & (B_n^r)^{r-1} \end{vmatrix} = 0.$$

Но определитель слева равен произведению разностей чисел B_n^m, а эти разности не могут равняться нулю по § 23.41. Поэтому определитель не может равняться нулю, и таким образом, предполагаемого соотношения не существует.

Линейная независимость $2n+1$ функций Ламе степени n, таким образом, доказана.

23.45. Линейная независимость эллипсоидальных гармонических функций

Пусть $G_n^m(x, y, z)$ — эллипсоидальная гармоническая функция степени n, соответствующая функции $E_n^m(\xi)$, и пусть $H_n^m(x, y, z)$ — соответствующая однородная гармоническая функция.

Теперь легко показать не только линейную независимость $2n+1$ гармонических функций $G_n^m(x, y, z)$, но и линейную независимость $2n+1$ гармонических функций $H_n^m(x, y, z)$.

Во-первых, если бы существовало линейное соотношение между гармоническими функциями $G_n^m(x, y, z)$, то, выразив эти гармонические функции через эллипсоидальные координаты (λ, μ, ν), мы должны были бы получить линейное соотношение между функциями Ламе $E_n^m(\xi)$, где $\xi = \lambda + \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$, а мы видели, что такого соотношения не существует.

Затем, если бы существовало линейное соотношение между однородными гармоническими функциями $H_n^m(x, y, z)$, то, действуя на

него оператором Нивена (§ 23.25)

$$1-\frac{D^2}{2(2n-1)}+\frac{D^4}{2\cdot 4(2n-1)(2n-3)}-\ldots,$$

мы получили бы из него линейное соотношение, связывающее функции $G_n^m(x, y, z)$, а так как только что было показано, что такого соотношения не существует, то заключаем, что и однородные гармонические функции степени n линейно независимы.

23.46. Теорема Стилтьеса о нулях функций Ламе

Мы видели, что любая функция Ламе степени n может быть представлена в виде

$$(\theta+a^2)^{\varkappa_1}(\theta+b^2)^{\varkappa_2}(\theta+c^2)^{\varkappa_3}\prod_{p=1}^{m}(\theta-\theta_p),$$

где $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ равны 0 или $\frac{1}{2}$, а числа $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$ вещественны и не равны друг другу и числам $-a^2$, $-b^2$, $-c^2$; кроме того, $\frac{1}{2}n=m+\varkappa_1+\varkappa_2+\varkappa_3$. Когда $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ заданы, число функций Ламе этой степени и типа равно $m+1$.

Стилтьесом [1]) была доказана замечательная теорема, утверждающая, что эти $m+1$ функций могут быть расположены таким образом, что r-я функция имеет $r-1$ нулей [2]) между $-a^2$ и $-b^2$, а остающиеся $m-r+1$ нулей между $-b^2$ и $-c^2$, так что, между прочим, все корни $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$ *всех* $m+1$ функций лежат между $-a^2$ и $-c^2$.

Чтобы доказать эту теорему, предположим, что $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ — любые вещественные переменные, такие, что

$$\begin{cases} -a^2\leqslant\varphi_p\leqslant-b^2 & (p=1, 2, \ldots, r-1),\\ -b^2\leqslant\varphi_p\leqslant-c^2 & (p=r, r+1, \ldots, m),\end{cases}$$

и рассмотрим произведение

$$\Pi=\prod_{p=1}^{m}\left[|\varphi_p+a^2|^{\varkappa_1+\frac{1}{4}}|\varphi_p+b^2|^{\varkappa_2+\frac{1}{4}}|\varphi_p+c^2|^{\varkappa_3+\frac{1}{4}}\right]\prod_{p\neq q}|\varphi_p-\varphi_q|.$$

Это произведение равно нулю, когда все переменные φ_p имеют свои наименьшие значения, а также когда они имеют свои наибольшие значения; когда переменные φ_p не равны друг другу и числам

---

[1]) Stieltjes, Acta Mathematica, VI (1885), 321—326.

[2]) Нули $-a^2$, $-b^2$, $-c^2$ опускаются из перечисления, принимаются во внимание только $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$.

$-a^2$, $-b^2$, $-c^2$, произведение Π положительно и, очевидно, является непрерывной ограниченной функцией переменных φ_p.

Отсюда заключаем, что имеется система значений переменных, для которых Π достигает своей верхней грани, которая строго положительна (см. § 3.62, часть I). Для этой системы значений переменных условия максимума дают

$$\frac{\partial \ln \Pi}{\partial \varphi_1} = \frac{\partial \ln \Pi}{\partial \varphi_2} = \ldots = 0,$$

т. е.

$$\frac{\varkappa_1 + \frac{1}{4}}{\varphi_p + a^2} + \frac{\varkappa_2 + \frac{1}{4}}{\varphi_p + b^2} + \frac{\varkappa_3 + \frac{1}{4}}{\varphi_p + c^2} + \sum_{q=1}^{m}{}' \frac{1}{\varphi_p - \varphi_q} = 0,$$

где p принимает последовательно значения $1, 2, \ldots, m$.

Но эта система уравнений представляет собой как раз систему, посредством которой определяются $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p$ (см. §§ 23.21—23.24); *таким образом, система уравнений, определяющих* $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$, *имеет решение, удовлетворяющее неравенствам*

$$\begin{cases} -a^2 < \theta_p < -b^2 & (p = 1, 2, \ldots, r-1), \\ -b^2 < \theta_p < -c^2 & (p = r, r+1, \ldots, m). \end{cases}$$

Следовательно, если r — какое-нибудь из значений $1, 2, \ldots, m+1$, то существует функция Ламе с $r-1$ нулем между $-a^2$ и $-b^2$ и с остающимися $m-r+1$ нулями между $-b^2$ и $-c^2$.

Так как имеется всего $m+1$ функция Ламе определенного типа, то они получаются все, если дать r последовательно значения $1, 2, \ldots, m+1$, а это и есть теорема Стилтьеса.

Стилтьес дал интересную статическую интерпретацию теоремы, а именно: пусть $m+3$ частицы, притягивающиеся друг к другу по закону обратной пропорциональности расстояниям, расположены на прямой, причем три из этих частиц, массы которых равны $\varkappa_1 + \frac{1}{4}$, $\varkappa_2 + \frac{1}{4}$, $\varkappa_3 + \frac{1}{4}$, закреплены в точках с координатами $-a^2$, $-b^2$, $-c^2$, а остальные частицы имеют единичную массу и могут свободно перемещаться по прямой, тогда $\ln \Pi$ будет потенциалом тяготения системы и положениями равновесия системы будут такие положения, в которых координаты подвижных частиц равны $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$, т. е. имеют значения, для которых какая-либо из функций Ламе степени $2(m + \varkappa_1 + \varkappa_2 + \varkappa_3)$ будет равна нулю.

Пример. Рассмотреть положения нулей полиномов, удовлетворяющих уравнению типа

$$\frac{d^2\Lambda}{d\theta^2} + \sum_{r=1}^{s} \frac{1 - a_s}{\theta - a_s} \frac{d\Lambda}{d\theta} + \frac{\varphi_{r-2}(\theta)}{\prod\limits_{s=1}^{r} (\theta - a_s)} \Lambda = 0,$$

где $\varphi_{r-2}(\theta)$ — полином степени $r-2$ относительно θ, в котором коэффициент при θ^{r-2} равен

$$-m\left\{m+r-1-\sum_{s=1}^{r} a_s\right\},$$

где m — положительное целое число, а остальные коэффициенты в функции $\varphi_{r-2}(\theta)$ определяются из того соображения, что уравнение имеет решение в виде полинома.

(Stieltjes)

23.47. Функции Ламе второго рода

Рассмотренные до сего времени функции $E_n^m(\xi)$ известны как функции Ламе *первого рода*. Легко убедиться в том, что вторым независимым решением уравнения Ламе

$$\frac{d^2\Lambda}{du^2}=\{n(n+1)\xi+B_n^m\}\Lambda$$

будет функция $F_n^m(\xi)$, определяемая равенством [1])

$$F_n^m(\xi)=(2n+1)E_n^m(\xi)\int_0^u \frac{du}{\{E_n^m(\xi)\}^2};$$

эта функция $F_n^m(\xi)$ называется функцией Ламе *второго рода*.

Из этой формулы ясно, что вблизи $u=0$

$$F_n^m(\xi)=(2n+1)u^{-n}\{1+O(u)\}\int_0^u u^{2n}\{1+O(u)\}\,du=u^{n+1}\{1+O(u)\},$$

а мы, очевидно, имеем $E_n^m(\xi)=u^{-n}\{1+O(u)\}$.

Из этих результатов ясно, что $F_n^m(\xi)$ никогда не может быть функцией Ламе первого рода, и *таким образом, не имеется значений B_n^m, для которых уравнение Ламе удовлетворялось бы двумя функциями Ламе первого рода различных видов или типов.*

Можно получить выражение для $F_n^m(\xi)$, свободное от квадратур, аналогично формуле Кристоффеля для $Q_n(z)$, данной на стр. 155 (пример 29). Сделаем это для случая, когда $E_n^m(\xi)$ есть функция первого вида. Единственными неприводимыми полюсами выражения $\frac{1}{\{E_n^m(\xi)\}^2}$, как функции от u, являются точки $u_1, u_2, \ldots, u_n$, которые не будут ни периодами, ни половинами периодов.

---

[1]) Это определение функции $F_n^m(\xi)$ принадлежит Гейне (Heine, Journ. für Math., XXIX (1845), 194).

Вблизи любой из этих точек мы имеем разложение вида

$$E_n^m(\xi) = k_1(u-u_r) + k_2(u-u_r)^2 + k_3(u-u_r)^3 + \ldots$$

и после подстановки этого ряда в дифференциальное уравнение найдем, что k_2 равно нулю.

Отсюда заключаем, что главная часть разложения $\frac{1}{\{E_n^m(\xi)\}^2}$ вблизи u_r равняется $\frac{1}{k_1^2(u-u_r)^2}$, и следовательно, вычет равен нулю.

Поэтому можно найти такие постоянные A_r, что функция

$$\{E_n^m(\xi)\}^{-2} - \sum_{r=1}^{n} A_r \wp(u-u_r)$$

не будет иметь полюсов в точках, сравнимых с точками u_r; и значит по теореме Лиувилля она равна некоторой постоянной A, так как она является двоякопериодической функцией от u.

Отсюда

$$\int_0^u \frac{du}{\{E_n^m(\xi)\}^2} = Au - \sum_{r=1}^{n} A_r \{\zeta(u-u_r) + \zeta(u_r)\}.$$

Но точки u_r могут быть сгруппированы в пары, суммы которых равны нулю, так как $E_n^m(\xi)$ — четная функция от u.

Если взять $u_{n-r} = -u_{r+1}$, то получим

$$\int_0^u \frac{du}{\{E_n^m(\xi)\}^2} = Au - \sum_{r=1}^{\frac{1}{2}n} A_r \{\zeta(u-u_r) + \zeta(u+u_r)\} =$$

$$= Au - 2\zeta(u)\sum_{r=1}^{\frac{1}{2}n} A_r - \sum_{r=1}^{\frac{1}{2}n} \frac{A_r \wp'(u)}{\wp(u) - \wp(u_r)},$$

и следовательно,

$$F_n^m(\xi) = (2n+1)\left\{Au - 2\zeta(u)\sum_{r=1}^{\frac{1}{2}n} A_r\right\} E_n^m(\xi) + \wp'(u)\, w_{\frac{1}{2}n-1}(\xi),$$

где $w_{\frac{1}{2}n-1}(\xi)$ — полином относительно ξ степени $\frac{1}{2}n - 1$.

Пример. Получить формулы, аналогичные этому выражению для $F_n^m(\xi)$, когда $E_n^m(\xi)$ второго, третьего или четвертого вида.

23.5. Уравнение Ламе в связи с эллиптическими функциями Якоби

Все результаты, полученные до сих пор в связи с функциями Ламе, конечно, имеют свои аналоги в обозначениях через эллиптические функции Якоби, и в руках Эрмита (ср. § 23.71) применение эллиптических функций Якоби в исследовании обобщений уравнения Ламе дало чрезвычайно интересные результаты.

К сожалению, невозможно без потери симметрии применить эллиптические функции Якоби, в которых все переменные были бы вещественны.

Симметричные формулы могут быть получены, если взять новые переменные α, β, γ, определяемые равенствами

$$\begin{cases} \alpha = iK' + u\sqrt{e_1 - e_3}, \\ \beta = iK' + v\sqrt{e_1 - e_3}, \\ \gamma = iK' + w\sqrt{e_1 - e_3}, \end{cases}$$

и тогда формулы § 23.31 будут эквивалентны формулам

$$x = k^2\sqrt{a^2 - c^2}\cdot \operatorname{sn}\alpha \operatorname{sn}\beta \operatorname{sn}\gamma,$$

$$y = -\frac{k^2}{k'}\sqrt{a^2 - c^2}\cdot \operatorname{cn}\alpha \operatorname{cn}\beta \operatorname{cn}\gamma,$$

$$z = \frac{i}{k'}\sqrt{a^2 - c^2}\cdot \operatorname{dn}\alpha \operatorname{dn}\beta \operatorname{dn}\gamma,$$

причем модуль эллиптических функций равен

$$\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}.$$

Уравнение поверхности второго порядка софокусной системы, на которой α постоянно, будет

$$\frac{X^2}{(a^2 - b^2)\operatorname{sn}^2\alpha} - \frac{Y^2}{(a^2 - b^2)\operatorname{cn}^2\alpha} - \frac{Z^2}{(a^2 - c^2)\operatorname{dn}^2\alpha} = 1.$$

Это уравнение представляет эллипсоид, если α лежит между iK' и $K + iK'$; поверхность второго порядка, на которой β постоянно, будет однополостным гиперболоидом, если β лежит между $K + iK'$ и K; поверхность второго порядка, на которой постоянно γ, будет двуполостным гиперболоидом, если γ лежит между 0 и K; при этом определении (α, β, γ) точка (x, y, z) лежит в положительном октанте.

Мы уже видели (§ 23.4), что в этих обозначениях уравнение Ламе принимает форму

$$\frac{d^2\Lambda}{d\alpha^2} = \{n(n+1)k^2\operatorname{sn}^2\alpha + A\}\Lambda$$

и решения, которые можно выразить как периодические функции от α, обозначаются[1]) через $E_n^m(\alpha)$. Функции Ламе первого вида будут тогда полиномами относительно $\operatorname{sn}^2\alpha$, и вообще вид может быть определен схемой, аналогичной схеме § 23.2:

$$\left\{\begin{matrix} & \operatorname{sn}\alpha, & \operatorname{cn}\alpha\operatorname{dn}\alpha, & \\ 1, & \operatorname{cn}\alpha, & \operatorname{dn}\alpha\operatorname{sn}\alpha, & \operatorname{sn}\alpha\operatorname{cn}\alpha\operatorname{dn}\alpha \\ & \operatorname{dn}\alpha, & \operatorname{sn}\alpha\operatorname{cn}\alpha & \end{matrix}\right\}\prod_p(\operatorname{sn}^2\alpha-\operatorname{sn}^2\alpha_p).$$

23.6. Интегральное уравнение, которому удовлетворяют функции Ламе первого и второго вида[2])

Покажем теперь, что если $E_n^m(\alpha)$ — какая-нибудь функция Ламе первого вида (n четное) или второго вида (n нечетное) с множителем $\operatorname{sn}\alpha$, то $E_n^m(\alpha)$ будет решением интегрального уравнения

$$E_n^m(\alpha)=\lambda\int_{-2K}^{2K}P_n(k\operatorname{sn}\alpha\operatorname{sn}\theta)\,E_n^m(\theta)\,d\theta,$$

где λ — одно из «характеристических чисел» (§ 11.23, часть I).

Для доказательства этого результата нам нужна лемма: *дифференциальный оператор с частными производными*

$$\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}-\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}-n(n+1)k^2(\operatorname{sn}^2\alpha-\operatorname{sn}^2\theta)$$

аннулирует функцию $P_n(k\operatorname{sn}\alpha\operatorname{sn}\theta)$.

Для доказательства леммы заметим, что, обозначая для краткости $k\operatorname{sn}\alpha\operatorname{sn}\theta$ через μ, имеем, если воспользуемся дифференциальным уравнением Лежандра (§ 15.13),

$$\begin{aligned}\left\{\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}-\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right\}P_n(k\operatorname{sn}\alpha\operatorname{sn}\theta)&=\\ &=k^2\{\operatorname{cn}^2\alpha\operatorname{dn}^2\alpha\operatorname{sn}^2\theta-\operatorname{cn}^2\theta\operatorname{dn}^2\theta\operatorname{sn}^2\alpha\}P_n''(\mu)+\\ &+2k^3\operatorname{sn}\alpha\operatorname{sn}\theta(\operatorname{sn}^2\alpha-\operatorname{sn}^2\theta)P_n'(\mu)=\\ &=k^2(\operatorname{sn}^2\alpha-\operatorname{sn}^2\theta)[(\mu^2-1)P_n''(\mu)+2\mu P_n'(\mu)]=\\ &=k^2(\operatorname{sn}^2\alpha-\operatorname{sn}^2\theta)\,n(n+1)P_n(\mu).\end{aligned}$$

Лемма тем самым доказана.

---

[1]) Опасности смешения их с соответствующими функциями $E_n^m(\xi)$ не существует.

[2]) Это интегральное уравнение и соответствующие формулы § 23.62 для эллипсоидальных гармонических функций даны Уиттекером (Whittaker, Proc. London Math. Soc (2), XIV (1915), 260—268). Доказательства формул, содержащих функции третьего и четвертого видов, даны в этой работе впервые.

Результат применения оператора

$$\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} - n(n+1)k^2 \operatorname{sn}^2\alpha - A_n^m$$

к интегралу

$$\int_{-2K}^{2K} P_n(k \operatorname{sn}\alpha \operatorname{sn}\theta) E_n^m(\theta)\, d\theta$$

будет поэтому

$$\int_{-2K}^{2K} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} - n(n+1)k^2 \operatorname{sn}^2\alpha - A_n^m \right\} P_n(k \operatorname{sn}\alpha \operatorname{sn}\theta) E_n^m(\theta)\, d\theta =$$

$$= \int_{-2K}^{2K} \left[\left\{ \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} - n(n+1)k^2 \operatorname{sn}^2\theta - A_n^m \right\} P_n(k \operatorname{sn}\alpha \operatorname{sn}\theta) \right] E_n^m(\theta)\, d\theta,$$

откуда, интегрируя два раза по частям, получим

$$\left[\frac{\partial P_n(k \operatorname{sn}\alpha \operatorname{sn}\theta)}{\partial\theta} E_n^m(\theta) - P_n(k \operatorname{sn}\alpha \operatorname{sn}\theta) \frac{dE_n^m(\theta)}{d\theta} \right]_{-2K}^{2K} +$$

$$+ \int_{-2K}^{2K} P_n(k \operatorname{sn}\alpha \operatorname{sn}\theta) \left\{ \frac{d^2}{d\theta^2} - n(n+1)k^2 \operatorname{sn}^2\theta - A_n^m \right\} E_n^m(\theta)\, d\theta = 0.$$

Отсюда следует, что оператор

$$\frac{d^2}{d\alpha^2} - n(n+1)k^2 \operatorname{sn}^2\alpha - A_n^m$$

аннулирует интеграл

$$\int_{-2K}^{+2K} P_n(k \operatorname{sn}\alpha \operatorname{sn}\theta) E_n^m(\theta)\, d\theta;$$

кроме того, этот интеграл есть, очевидно, полином степени n относительно $\operatorname{sn}^2\alpha$. Так как уравнение Ламе имеет только один интеграл этого типа [1]), то заключаем, что интеграл будет кратным функции $E_n^m(\alpha)$, если он не нуль; таким образом, результат установлен.

Оказывается, что *всякое* характеристическое число уравнения

$$f(\alpha) = \lambda \int_{-2K}^{2K} P_n(k \operatorname{sn}\alpha \operatorname{sn}\theta) f(\theta)\, d\theta$$

приводит к решению уравнения Ламе (см. Ince, Proc. Royal Soc. Edin., XLII (1922), 43—53).

---

[1]) Второе решение, будучи разложено по нисходящим степеням $\operatorname{sn}\alpha$, начинается с члена $(\operatorname{sn}\alpha)^{-n-1}$.

Пример 1. Показать, что ядро интегрального уравнения, которому удовлетворяет функция Ламе первого вида (с четным n) или второго вида (с нечетным n) с множителем $\operatorname{cn}\alpha$, может быть взято равным

$$P_n\left(\frac{ik}{k'}\operatorname{cn}\alpha\operatorname{cn}\theta\right).$$

Пример 2. Показать, что ядро интегрального уравнения, которому удовлетворяет функция Ламе первого вида (с четным n) или второго вида (с нечетным n) с множителем $\operatorname{dn}\alpha$, может быть взято равным

$$P_n\left(\frac{1}{k'}\operatorname{dn}\alpha\operatorname{dn}\theta\right).$$

23.61. Интегральное уравнение, которому удовлетворяют функции Ламе третьего и четвертого вида

Теорема, аналогичная теореме § 23.6 в случае функций Ламе третьего или четвертого вида, заключается в том, что функция Ламе четвертого вида (с нечетным n) или третьего вида (с четным n) с множителем $\operatorname{cn}\alpha\operatorname{dn}\alpha$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$E_n^m(\alpha)=\lambda\int\limits_{-2K}^{2K}\operatorname{cn}\alpha\operatorname{dn}\alpha\operatorname{cn}\theta\operatorname{dn}\theta\,P_n''(k\operatorname{sn}\alpha\operatorname{sn}\theta)\,E_n^m(\theta)\,d\theta.$$

Аналогично § 23.6 необходима предварительная лемма, заключающаяся в том, что оператор

$$\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}-\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}-n(n+1)k^2(\operatorname{sn}^2\alpha-\operatorname{sn}^2\theta)$$

аннулирует ядро

$$\operatorname{cn}\alpha\operatorname{dn}\alpha\operatorname{cn}\theta\operatorname{dn}\theta\,P_n''(k\operatorname{sn}\alpha\operatorname{sn}\theta).$$

В самом деле, имеем

$$\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\left\{\operatorname{cn}\alpha\operatorname{dn}\alpha\,P_n''(k\operatorname{sn}\alpha\operatorname{sn}\theta)\right\}=$$
$$=k^2\operatorname{cn}^3\alpha\operatorname{dn}^3\alpha\operatorname{sn}^2\theta P_n^{\mathrm{IV}}(\mu)-3k\operatorname{sn}\alpha\operatorname{cn}\alpha\operatorname{dn}\alpha\operatorname{sn}\theta(\operatorname{dn}^2\alpha+k^2\operatorname{cn}^2\alpha)P_n'''(\mu)-$$
$$-\operatorname{cn}\alpha\operatorname{dn}\alpha(\operatorname{dn}^2\alpha+k^2\operatorname{cn}^2\alpha-4k^2\operatorname{sn}^2\alpha)P_n''(\mu),$$

и следовательно,

$$\left\{\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}-\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right\}\left\{\operatorname{cn}\alpha\operatorname{dn}\alpha\operatorname{cn}\theta\operatorname{dn}\theta\,P_n''(k\operatorname{sn}\alpha\operatorname{sn}\theta)\right\}=$$
$$=k\operatorname{cn}\alpha\operatorname{dn}\alpha\operatorname{cn}\theta\operatorname{dn}\theta(\operatorname{sn}^2\alpha-\operatorname{sn}^2\theta)\left\{(\mu^2-1)P_n^{\mathrm{IV}}(\mu)+6\mu P_n'''(\mu)+\right.$$
$$\left.+6P_n''(\mu)\right\}=k^2\operatorname{cn}\alpha\operatorname{dn}\alpha\operatorname{cn}\theta\operatorname{dn}\theta(\operatorname{sn}^2\alpha-\operatorname{sn}^2\theta)\frac{d^3}{d\mu^3}\left\{(\mu^2-1)P_n'(\mu)\right\}=$$
$$=k^2n(n+1)\operatorname{cn}\alpha\operatorname{dn}\alpha\operatorname{cn}\theta\operatorname{dn}\theta(\operatorname{sn}^2\alpha-\operatorname{sn}^2\theta)P_n''(\mu),$$

что и доказывает лемму. Доказательство того, что $E_n^m(\alpha)$ удовлетворяет интегральному уравнению, получается теперь точно так же, как и в случае интегрального уравнения § 23.6.

Пример 1. Показать, что ядро интегрального уравнения, которому удовлетворяют функции Ламе четвертого вида (с нечетным n) или третьего вида (с четным n) с множителем $\operatorname{sn}\alpha \operatorname{dn}\alpha$, может быть взято равным

$$\operatorname{sn}\alpha \operatorname{dn}\alpha \operatorname{sn}\theta \operatorname{dn}\theta P_n''\left(\frac{ik}{k'} \operatorname{cn}\alpha \operatorname{cn}\theta\right).$$

Пример 2. Показать, что ядро интегрального уравнения, которому удовлетворяют функции Ламе четвертого вида (с нечетным n) или третьего вида (с четным n) с множителем $\operatorname{sn}\alpha \operatorname{cn}\alpha$, может быть взято равным

$$\operatorname{sn}\alpha \operatorname{cn}\alpha \operatorname{sn}\theta \operatorname{cn}\theta P_n''\left(\frac{1}{k'} \operatorname{dn}\alpha \operatorname{dn}\theta\right).$$

Пример 3. Получить три следующих интегральных уравнения, которым удовлетворяют функции Ламе четвертого вида (с нечетным n) и третьего вида (с четным n):

$$\text{(I)}\quad k^2 \operatorname{sn}^2\alpha\, E_n^m(\alpha) = \\ = \lambda \operatorname{cn}\alpha \operatorname{dn}\alpha \int_{-2K}^{2K} P_n(k \operatorname{sn}\alpha \operatorname{sn}\theta) \frac{d}{d\theta}\left\{\frac{1}{\operatorname{cn}\theta \operatorname{dn}\theta} \frac{dE_n^m(\theta)}{d\theta}\right\} d\theta,$$

$$\text{(II)}\quad -k^2 \operatorname{cn}^2\alpha\, E_n^m(\alpha) = \\ = \lambda k'^2 \operatorname{sn}\alpha \operatorname{dn}\alpha \int_{-2K}^{2K} P_n\left(\frac{ik}{k'} \operatorname{cn}\alpha \operatorname{cn}\theta\right) \frac{d}{d\theta}\left\{\frac{1}{\operatorname{sn}\theta \operatorname{dn}\theta} \frac{dE_n^m(\theta)}{d\theta}\right\} d\theta,$$

$$\text{(III)}\quad k^2 \operatorname{dn}^2\alpha\, E_n^m(\alpha) = \\ = \lambda k'^2 \operatorname{sn}\alpha \operatorname{cn}\alpha \int_{-2K}^{2K} P_n\left(\frac{1}{k'} \operatorname{dn}\alpha \operatorname{dn}\theta\right) \frac{d}{d\theta}\left\{\frac{1}{\operatorname{sn}\theta \operatorname{cn}\theta} \frac{dE_n^m(\theta)}{d\theta}\right\} d\theta;$$

в случае функций четного порядка каждая из функций различных типов удовлетворяет только одному из этих уравнений.

23.62. Интегральные формулы для эллипсоидальных гармонических функций

Рассмотренные интегральные уравнения позволяют получить изящное представление эллипсоидальной гармонической функции $G_n^m(x, y, z)$ и соответствующей однородной гармонической функции $H_n^m(x, y, z)$ через определенные интегралы.

По общей формуле § 18.3 очевидно, что $H_n^m(x, y, z)$ может быть представлена в форме

$$H_n^m(x, y, z) = \int_{-\pi}^{\pi} (x\cos t + y\sin t + iz)^n f(t)\,dt,$$

где $f(t)$ — периодическая функция, подлежащая определению.

Но результат применения оператора Нивена D^2 к функции $(x\cos t + y\sin t + iz)^n$ будет

$$n(n-1)(a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t - c^2)(x\cos t + y\sin t + iz)^{n-2},$$

и, таким образом, по формуле Нивена (§ 23.25) найдем, что $G_n^m(x, y, z)$ может быть представлена в виде

$$G_n^m(x, y, z) = \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \mathfrak{A}^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} \mathfrak{A}^{n-2}\mathfrak{B}^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4\cdot(2n-1)(2n-3)} \mathfrak{A}^{n-4}\mathfrak{B}^4 - \ldots \right\} f(t)\,dt,$$

где

$$\mathfrak{A} \equiv x\cos t + y\sin t + iz,$$

$$\mathfrak{B} \equiv \sqrt{(a^2-c^2)\cos^2 t + (b^2-c^2)\sin^2 t},$$

так что

$$G_n^m(x, y, z) =$$

$$= \frac{2^n\cdot(n!)^2}{(2n)!} \int_{-\pi}^{\pi} \mathfrak{B}^n P_n\left(\frac{x\cos t + y\sin t + iz}{\sqrt{(a^2-c^2)\cos^2 t + (b^2-c^2)\sin^2 t}}\right) f(t)\,dt.$$

Положим теперь $\sin t \equiv \operatorname{cd}\theta$, причем модуль эллиптических функций, как обычно, дается равенством

$$k^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}.$$

Новыми пределами интегрирования будут $-3K$ и K, но они могут быть заменены $-2K$ и $2K$ вследствие периодичности подинтегрального выражения.

Таким путем найдем, что

$$G_n^m(x, y, z) = \int_{-2K}^{2K} P_n\left(\frac{k'x\operatorname{sn}\theta + y\operatorname{cn}\theta + iz\operatorname{dn}\theta}{\sqrt{b^2-c^2}}\right)\varphi(\theta)\,d\theta,$$

где $\varphi(\theta)$ — периодическая функция от θ, не зависящая от x, y, z и все еще подлежащая определению.

Если выразить эллипсоидальную гармоническую функцию как произведение трех функций Ламе, то с помощью формул § 23.5 найдем, что

$$E_n^m(\alpha)\,E_n^m(\beta)\,E_n^m(\gamma)=C\int\limits_{-2K}^{2K}P_n(\mu)\,\varphi(\theta)\,d\theta,$$

где C — известная постоянная и

$$\mu\equiv k^2\operatorname{sn}\alpha\operatorname{sn}\beta\operatorname{sn}\gamma\operatorname{sn}\theta-\frac{k^2}{k'^2}\operatorname{cn}\alpha\operatorname{cn}\beta\operatorname{cn}\gamma\operatorname{cn}\theta-$$
$$-\frac{1}{k'^2}\operatorname{dn}\alpha\operatorname{dn}\beta\operatorname{dn}\gamma\operatorname{dn}\theta.$$

Если рассматриваемая эллипсоидальная гармоническая функция — первого вида или второго вида и первого типа, то, дав β и γ частные значения

$$\beta=K,\quad \gamma=K+iK',$$

видим, что

$$C\int\limits_{-2K}^{2K}P_n(k\operatorname{sn}\alpha\operatorname{sn}\theta)\,\varphi(\theta)\,d\theta$$

есть решение уравнения Ламе, и следовательно, по § 23.6 $\varphi(\theta)$ есть решение уравнения Ламе, *которое не может быть не чем иным*[1]), *как кратным функции* $E_n^m(\theta)$.

Отсюда получается, что

$$G_n^m(x,\ y,\ z)=\lambda\int\limits_{-2K}^{2K}P_n\left(\frac{k'x\operatorname{sn}\theta+y\operatorname{cn}\theta+iz\operatorname{dn}\theta}{\sqrt{b^2-c^2}}\right)E_n^m(\theta)\,d\theta,$$

где λ — постоянная.

Если $G_n^m(x,\ y,\ z)$ — второго вида и второго или третьего типа, то положим

$$\beta=0,\quad \gamma=K+iK'$$

или

$$\beta=0,\quad \gamma=K$$

соответственно и получим снова ту же самую формулу.

---

[1]) Если бы $\varphi(\theta)$ содержала второе решение, то интеграл не сходился бы.

Таким образом, получается, что если $G_n^m(x, y, z)$ — какая-нибудь эллипсоидальная гармоническая функция первого или второго вида, то

$$G_n^m(x, y, z) = \lambda \int_{-2K}^{2K} P_n(\mu) E_n^m(\theta)\, d\theta,$$

$$H_n^m(x, y, z) = \lambda \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2 (b^2 - c^2)^{\frac{1}{2}n}} \times$$

$$\times \int_{-\pi}^{\pi} (k'x \operatorname{sn}\theta + y \operatorname{cn}\theta + iz \operatorname{dn}\theta)^n E_n^m(\theta)\, d\theta,$$

где

$$\mu \equiv \frac{k'x \operatorname{sn}\theta + y \operatorname{cn}\theta + iz \operatorname{dn}\theta}{\sqrt{b^2 - c^2}}.$$

23.63. Интегральные формулы для эллипсоидальных гармонических функций третьего и четвертого вида

Чтобы получить интегральные представления для гармонических функций третьего и четвертого вида, обратимся к уравнению § 23.62, а именно:

$$E_n^m(\alpha) E_n^m(\beta) E_n^m(\gamma) = C \int_{-2K}^{2K} P_n(\mu) \varphi(\theta)\, d\theta,$$

где

$$\mu \equiv k^2 \operatorname{sn}\alpha \operatorname{sn}\beta \operatorname{sn}\gamma \operatorname{sn}\theta - \frac{k^2}{k'^2} \operatorname{cn}\alpha \operatorname{cn}\beta \operatorname{cn}\gamma \operatorname{cn}\theta - \frac{1}{k'^2} \operatorname{dn}\alpha \operatorname{dn}\beta \operatorname{dn}\gamma \operatorname{dn}\theta;$$

этому уравнению удовлетворяют гармонические функции *всех* видов.

Предположим теперь, что $E_n^m(\alpha)$ — четвертого вида или первого типа третьего вида, так что она имеет множителем $\operatorname{cn}\alpha \operatorname{dn}\alpha$.

Продифференцируем уравнение по β и γ и затем положим $\beta = K$, $\gamma = K + iK'$.

Таким путем найдем, что

$$E_n^m(\alpha) \left[\frac{d}{d\beta} E_n^m(\beta)\right]_{\beta=K} \left[\frac{d}{d\gamma} E_n^m(\gamma)\right]_{\gamma=K+iK'} =$$

$$= C \int_{-2K}^{2K} \left[\frac{\partial^2 P_n(\mu)}{\partial\beta\, \partial\gamma}\right]_{\beta=K,\ \gamma=K+iK'} \varphi(\theta)\, d\theta.$$

Но

$$\left[\frac{\partial P_n(\mu)}{\partial\gamma}\right]_{\gamma=K+iK'} = -\frac{i}{k'}\,\mathrm{dn}\,\alpha\,\mathrm{dn}\,\beta\,\mathrm{dn}\,\theta\,P_n'(\mu),$$

так что

$$\left[\frac{\partial^2 P_n(\mu)}{\partial\beta\,\partial\gamma}\right]_{\beta=K,\ \gamma=K+iK'} = -k\,\mathrm{cn}\,\alpha\,\mathrm{dn}\,\alpha\,\mathrm{cn}\,\theta\,\mathrm{dn}\,\theta P_n''(k\,\mathrm{sn}\,\alpha\,\mathrm{sn}\,\theta).$$

Поэтому

$$\int_{-2K}^{2K} \mathrm{cn}\,\alpha\,\mathrm{dn}\,\alpha\,\mathrm{cn}\,\theta\,\mathrm{dn}\,\theta\,P_n''(k\,\mathrm{sn}\,\alpha\,\mathrm{sn}\,\theta)\,\varphi(\theta)\,d\theta$$

есть решение уравнения Ламе с множителем $\mathrm{cn}\,\alpha\,\mathrm{dn}\,\alpha$, и таким образом, по § 23.61 $\varphi(\theta)$ *не может быть не чем иным, как кратным функции* $E_n^m(\alpha)$.

Таким образом, мы нашли, что формула

$$G_n^m(x,\ y,\ z) = \lambda \int_{-2K}^{2K} P_n(\mu)\,E_n^m(\theta)\,d\theta$$

имеет место для любой эллипсоидальной гармонической функции, имеющей множителем $\mathrm{cn}\,\alpha\,\mathrm{dn}\,\alpha$; соответствующая формула для однородной гармонической функции будет

$$H_n^m(x,\ y,\ z) = \lambda\,\frac{(2n)!}{2^n\,(n!)^2\,(b^2-c^2)^{\frac{1}{2}n}} \times$$

$$\times \int_{-2K}^{2K} (k'x\,\mathrm{sn}\,\theta + y\,\mathrm{cn}\,\theta + iz\,\mathrm{dn}\,\theta)^n\,E_n^m(\theta)\,d\theta.$$

Пример. Показать, что формула этого параграфа имеет место для эллипсоидальных гармонических функций, имеющих множителем $\mathrm{sn}\,\alpha\,\mathrm{dn}\,\alpha$ или $\mathrm{sn}\,\alpha\,\mathrm{cn}\,\alpha$.

23.7. Обобщения уравнения Ламе

Два обобщения уравнения Ламе напрашиваются сами собою. В первом постоянная B не равна ни одному из характеристических значений B_n^m, для которых одно из решений выражается как алгебраическая функция от $\wp(u)$; во втором степень n не предполагается более целым числом. Первое обобщение полностью было разработано Эрмитом[1]) и Альфаном[2]); единственный случай второго обобщения, привлекший некоторое внимание, это тот, когда n равно половине

[1]) Hermite, Comptes Rendus, LXXXV (1877), 689—695, 728—732, 821—826.

[2]) Halphen, Fonctions Elliptiques, II (Paris, 1888), 494—502.

нечетного целого числа; этот случай был рассмотрен Бриоски[1]), Альфаном[2]) и Кроуфордом[3]).

Рассмотрим теперь решение уравнения

$$\frac{d^2\Lambda}{du^2} = \{n(n+1)\wp(u) + B\}\Lambda,$$

где B — произвольное, а n — положительное целое число, методом Линдемана — Стилтьеса, уже объясненным в связи с уравнением Матье (§§ 19.5—19.52). Произведение какой-либо пары решений этого уравнения является решением уравнения

$$\frac{d^3X}{du^3} - 4\{n(n+1)\wp(u) + B\}\frac{dX}{du} - 2n(n+1)\wp'(u)X = 0$$

по § 19.52. Алгебраическая форма этого уравнения будет

$$4(\xi - e_1)(\xi - e_2)(\xi - e_3)\frac{d^3X}{d\xi^3} + 3\left(6\xi^2 - \frac{1}{2}g_2\right)\frac{d^2X}{d\xi^2} -$$
$$- 4\{(n^2 + n - 3)\xi + B\}\frac{dX}{d\xi} - 2n(n+1)X = 0.$$

Если искать решение этого уравнения в виде ряда по убывающим степеням $\xi - e_2$:

$$X = \sum_{r=0}^{\infty} c_r(\xi - e_2)^{n-r} \qquad (c_0 = 1),$$

то рекуррентная формула для коэффициентов c_r будет

$$4r\left(n - r + \frac{1}{2}\right)(2n - r + 1)c_r =$$
$$= (n - r + 1)\{12e_2(n - r)(n - r + 2) - 4e_2(n^2 + n - 3) - 4B\}c_{r-1} -$$
$$- 2(n - r + 1)(n - r + 2)(e_1 - e_2)(e_2 - e_3)(2n - 2r + 3)c_{r-2}.$$

Положим $r = n + 1$; тогда увидим, что $c_{n+1} = 0$, затем положим $r = n + 2$ и получим $c_{n+2} = 0$; рекуррентные формулы при $r > n + 2$ удовлетворяются, если положим

$$c_{n+3} = c_{n+4} = \ldots = 0.$$

Следовательно, *обобщенное уравнение Ламе всегда имеет два решения, произведение которых имеет вид*

$$\sum_{r=0}^{n} c_r(\xi - e_2)^{n-r}.$$

---

[1]) Brioschi, Comptes Rendus, LXXXVI (1878), 313—315.
[2]) Halphen, Fonctions Elliptiques, II (Paris, 1888) 471—473.
[3]) Crawford, Quarterly Journal, XXVII (1895), 93—98.

Этот полином может быть переписан в виде

$$\prod_{r=1}^{n} \{\wp(u) - \wp(a_r)\},$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ пока определены с точностью до знаков; эти два решения уравнения Ламе назовем Λ_1, Λ_2.

Можно различить два случая: (I) когда $\frac{\Lambda_1}{\Lambda_2}$ постоянно, (II) когда $\frac{\Lambda_1}{\Lambda_2}$ не постоянно.

(I) Первый случай рассмотреть легко; ибо если полином

$$\prod_{r=1}^{n} \{\xi - \wp(a_r)\}$$

не есть полный квадрат относительно ξ, возможно умноженный на выражения типа $\xi - e_1$, $\xi - e_2$, $\xi - e_3$, то алгебраическая форма уравнения Ламе имеет определяющее уравнение, один из корней которого равен $\frac{1}{2}$, в одной или нескольких точках $\xi = \wp(a_r)$, а в данном случае это не имеет места (§ 23.43).

Следовательно, полином должен быть квадратом, умноженным, возможно, на одно или более из выражений $\xi - e_1$, $\xi - e_2$, $\xi - e_3$, и тогда Λ_1 является функцией Ламе, так что B равно одному из характеристических значений B_n^m; но это — случай, подробно рассмотренный в §§ 23.1—23.47.

(II) Во втором случае имеем (§ 19.53)

$$\Lambda_1 \frac{d\Lambda_2}{du} - \Lambda_2 \frac{d\Lambda_1}{du} = 2\mathfrak{C},$$

где $\mathfrak{C}$ — постоянная, не равная нулю. Тогда

$$\begin{cases} \dfrac{d \ln \Lambda_2}{du} - \dfrac{d \ln \Lambda_1}{du} = \dfrac{2\mathfrak{C}}{X}, \\ \dfrac{d \ln \Lambda_2}{du} + \dfrac{d \ln \Lambda_1}{du} = \dfrac{1}{X} \dfrac{dX}{du}, \end{cases}$$

так что

$$\frac{d \ln \Lambda_1}{du} = \frac{1}{2X} \frac{dX}{du} - \frac{\mathfrak{C}}{X}, \quad \frac{d \ln \Lambda_2}{du} = \frac{1}{2X} \frac{dX}{du} + \frac{\mathfrak{C}}{X}.$$

Проинтегрировав, увидим, что можно взять

$$\Lambda_1 = \sqrt{X} \exp\left\{-\mathfrak{C} \int \frac{du}{X}\right\}.$$

С другой стороны, если продифференцируем уравнение

$$\frac{1}{\Lambda_1}\frac{d\Lambda_1}{du}=\frac{1}{2X}\frac{dX}{du}-\frac{\mathfrak{C}}{X},$$

то найдем, что

$$\frac{1}{\Lambda_1}\frac{d^2\Lambda_1}{du^2}-\left\{\frac{1}{\Lambda_1}\frac{d\Lambda_1}{du}\right\}^2=\frac{1}{2X}\frac{d^2X}{du^2}-\frac{1}{2X^2}\left(\frac{dX}{du}\right)^2+\frac{\mathfrak{C}}{X^2}\frac{dX}{du},$$

отсюда при помощи уравнения Ламе получим интересную формулу

$$n(n+1)\wp(u)+B=\frac{1}{2X}\frac{d^2X}{du^2}-\left(\frac{1}{2X}\frac{dX}{du}\right)^2+\frac{\mathfrak{C}^2}{X^2}.$$

Если теперь $\xi_r\equiv\wp(a_r)$, то по этой формуле (умноженной на X^2) найдем, давая u частное значение a_r, что

$$\left(\frac{dX}{d\xi}\right)^2_{\xi=\xi_r}=\frac{4\mathfrak{C}^2}{\wp'^2(a_r)}.$$

Фиксируем теперь знаки $a_1, a_2, \ldots, a_n$, взяв

$$\left(\frac{dX}{d\xi}\right)_{\xi=\xi_r}=\frac{2\mathfrak{C}}{+\wp'(a_r)}.$$

Тогда, если разложим $\frac{2\mathfrak{C}}{X}$, как функцию от ξ, на простейшие дроби, то увидим, что

$$\frac{2\mathfrak{C}}{X}=\sum_{r=1}^{n}\frac{\wp'(a_r)}{\xi-\wp(a_r)}=\sum_{r=1}^{n}\{\zeta(u-a_r)-\zeta(u+a_r)+2\zeta(a_r)\},$$

и следовательно,

$$\Lambda_1=\left[\prod_{r=1}^{n}\{\wp(u)-\wp(a_r)\}\right]^{\frac{1}{2}}\times$$
$$\times\exp\left[\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n}\{\lg\sigma(a_r+u)-\lg\sigma(a_r-u)-2u\zeta(a_r)\}\right],$$

откуда следует, что (§ 20.53, пример 1)

$$\Lambda_1=\prod_{r=1}^{n}\left\{\frac{\sigma(a_r+u)}{\sigma(u)\sigma(a_r)}\right\}\exp\left\{-u\sum_{r=1}^{n}\zeta(a_r)\right\}$$

и

$$\Lambda_2=\prod_{r=1}^{n}\left\{\frac{\sigma(a_r-u)}{\sigma(u)\sigma(a_r)}\right\}\exp\left\{u\sum_{r=1}^{n}\zeta(a_r)\right\}.$$

Таким образом, получено полное решение для произвольных значений постоянной B.

23.71. Форма Якоби обобщенного уравнения Ламе

Мы построим теперь решение уравнения

$$\frac{d^2\Lambda}{d\alpha^2} = \{n(n+1)k^2 \operatorname{sn}^2\alpha + A\}\Lambda$$

для любых значений A в форме, похожей на форму § 23.6.

Решение, соответствующее решению § 23.6, будет[1])

$$\Lambda = \prod_{r=1}^{n} \left\{ \frac{\mathrm{H}(\alpha+\alpha_r)}{\Theta(\alpha)} \right\} e^{\rho\alpha},$$

где ρ, α_1, α_2, ..., α_n — постоянные, подлежащие определению.

Дифференцируя это равенство, найдем, что

$$\frac{1}{\Lambda}\frac{d\Lambda}{d\alpha} = \sum_{r=1}^{n} \left\{ \frac{\mathrm{H}'(\alpha+\alpha_r)}{\mathrm{H}(\alpha+\alpha_r)} - \frac{\Theta'(\alpha)}{\Theta(\alpha)} \right\} + \rho =$$

$$= \sum_{r=1}^{n} \{\mathrm{Z}(\alpha+\alpha_r+iK') - \mathrm{Z}(\alpha)\} + \rho + \frac{1}{2} n\pi i/K,$$

так что

$$\frac{1}{\Lambda}\frac{d^2\Lambda}{d\alpha^2} - \left\{\frac{1}{\Lambda}\frac{d\Lambda}{d\alpha}\right\}^2 = \sum_{r=1}^{n} \{\mathrm{dn}^2(\alpha+\alpha_r+iK') - \mathrm{dn}^2\alpha\},$$

и следовательно, так как Λ является решением уравнения Ламе, постоянные ρ, α_1, α_2, ..., α_n определяются из условия, что равенство

$$n(n+1)k^2\operatorname{sn}^2\alpha + A = \sum_{r=1}^{n} \{\mathrm{dn}^2(\alpha+\alpha_r+iK') - \mathrm{dn}^2\alpha\} +$$

$$+ \left[\sum_{r=1}^{n} \{\mathrm{Z}(\alpha+\alpha_r+iK') - \mathrm{Z}(\alpha)\} + \rho + \frac{1}{2} n\pi i/K\right]^2$$

должно быть тождеством, т. е. из условия

$$n^2k^2\operatorname{sn}^2\alpha + n + A + \sum_{r=1}^{n} \operatorname{cs}^2(\alpha+\alpha_r) \equiv$$

$$\equiv \left[\sum_{r=1}^{n} \{\mathrm{Z}(\alpha+\alpha_r+iK') - \mathrm{Z}(\alpha)\} + \rho + \frac{1}{2} n\pi i/K\right]^2.$$

---

[1]) Это решение было опубликовано в 1872 г. в литографированных записках лекций Эрмита, читанных в Политехнической школе.

Но обе части предположенного тождества суть двоякопериодические функции от α с периодами $2K$, $2iK'$, и их особые точки суть двойные полюсы в точках, сравнимых с $-iK'$, $-\alpha_1$, $-\alpha_2, \ldots, -\alpha_n$; главные части их вблизи $-iK'$ и $-\alpha_r$ будут соответственно

$$\frac{n^2}{(\alpha+iK')^2}, \quad -\frac{1}{(\alpha+\alpha_r)^2}.$$

Все вычеты выражения слева равны нулю, и таким образом, если возьмем ρ, α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ так, что вычеты выражения справа будут нулями, то по теореме Лиувилля эти два выражения будут отличаться друг от друга только на постоянную, которую можно сделать равной нулю надлежащим выбором A.

Мы получаем, таким образом, $n+2$ уравнения, связывающих ρ, α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ с A, но эти уравнения не все независимы.

Легко доказать, что вблизи $-\alpha_r$

$$\sum_{r=1}^{n}\{Z(\alpha+\alpha_r+iK')-Z(\alpha)\}+\rho+\frac{1}{2}n\pi i/K=$$
$$=\frac{1}{\alpha+\alpha_r}+\sum_{p=1}^{n}{}'Z(\alpha_p-\alpha_r+iK')+nZ(\alpha_r)+\rho+$$
$$+\frac{1}{2}(n-1)\pi i/K+O(\alpha+\alpha_r),$$

где штрих обозначает, что член, для которого $p=r$, опускается; точно так же вблизи $-iK'$ имеем

$$\sum_{r=1}^{n}\{Z(\alpha+\alpha_r+iK')-Z(\alpha)\}+\rho+\frac{1}{2}n\pi i/K=$$
$$=-\frac{n}{\alpha+iK}+\sum_{r=1}^{n}Z(\alpha_r)+\rho+O(\alpha+iK').$$

Следовательно, вычеты выражения

$$\left[\sum_{r=1}^{n}\{Z(\alpha+\alpha_r+iK')-Z(\alpha)\}+\rho+\frac{1}{2}n\pi i/K\right]^2$$

равняются нулю, если ρ, α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ выбраны так, что все уравнения

$$\begin{cases}\sum_{p=1}^{n}{}'Z(\alpha_p-\alpha_r+iK')+nZ(\alpha_r)+\rho+\frac{1}{2}(n-1)\pi i/K=0,\\ \sum_{r=1}^{n}Z(\alpha_r)+\rho=0\end{cases}$$

удовлетворяются.

Последнее уравнение дает просто значение величины ρ, а именно:

$$-\sum_{r=1}^{n} Z(\alpha_r),$$

и, подставив это значение в систему первых уравнений, найдем, что

$$\sum_{p=1}^{n}{}' \left[Z(\alpha_p - \alpha_r + iK') + Z(\alpha_r) - Z(\alpha_p) + \frac{1}{2}\pi i/K\right] = 0,$$

где $r = 1, 2, \ldots, n$. Согласно примеру 2 § 22.735 сумма левых частей этих уравнений равна нулю, так что система эквивалентна самое большее $n-1$ уравнению; если $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ имеют какие-либо значения, которые удовлетворяют этим уравнениям, то разность

$$\left[n^2k^2 \operatorname{sn}^2 \alpha + n + A + \sum_{r=1}^{n} \operatorname{cs}^2(\alpha + \alpha_r)\right] -$$
$$- \left[\sum_{r=1}^{n} \left\{Z(\alpha + \alpha_r + iK') - Z(\alpha) - Z(\alpha_r) + \frac{1}{2}\pi i/K\right\}\right]^2$$

будет постоянной. Взяв $\alpha = 0$, видим, что эта постоянная равна нулю, если

$$n + A + \sum_{r=1}^{n} \operatorname{cs}^2 \alpha_r = \left[\sum_{r=1}^{n} \left\{Z(\alpha_r + iK') - Z(\alpha_r) + \frac{1}{2}\pi i/K\right\}\right]^2,$$

т. е. если

$$\left\{\sum_{r=1}^{n} \operatorname{cn} \alpha_r \operatorname{ds} \alpha_r\right\}^2 - \sum_{r=1}^{n} \operatorname{ns}^2 \alpha_r = A.$$

Сделаем теперь приведение системы n уравнений; при обозначении § 22.2, отмечая функции от α_p, α_r значками 1 и 2, легко видеть, что

$$Z(\alpha_p - \alpha_r + iK') + Z(\alpha_r) - Z(\alpha_p) + \frac{1}{2}\pi i/K =$$
$$= Z(\alpha_p - \alpha_r + iK') + Z(\alpha_r) - Z(\alpha_p + iK') + c_1 d_1/s_1 =$$
$$= k^2 \operatorname{sn}(\alpha_p + iK') \operatorname{sn} \alpha_r \operatorname{sn}(\alpha_p + iK' - \alpha_r) + c_1 d_1/s_1 = \frac{s_2}{s_1 \operatorname{sn}(\alpha_p - \alpha_r)} + \frac{c_1 d_1}{s_1} =$$
$$= \frac{s_2(s_1 c_2 d_2 + s_2 c_1 d_1) + c_1 d_1 (s_1^2 - s_2^2)}{s_1 (s_1^2 - s_2^2)} = \frac{s_1 c_1 d_1 + s_2 c_2 d_2}{s_1^2 - s_2^2}.$$

Следовательно,

$$\Lambda = \prod_{r=1}^{n} \left[\frac{H(\alpha + \alpha_r)}{\Theta(\alpha)} \exp\{-\alpha Z(\alpha_r)\}\right]$$

будет решением уравнения Ламе

$$\frac{d^2\Lambda}{d\alpha^2} = \{n(n+1)k^2 \operatorname{sn}^2\alpha + A\}\Lambda$$

в предположении, что $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ выбраны так, что они удовлетворяют n независимым уравнениям, содержащимся в системе

$$\begin{cases} \sum_{p=1}^{n}{}' \left[\dfrac{\operatorname{sn}\alpha_p \operatorname{cn}\alpha_p \operatorname{dn}\alpha_p + \operatorname{sn}\alpha_r \operatorname{cn}\alpha_r \operatorname{dn}\alpha_r}{\operatorname{sn}^2\alpha_p - \operatorname{sn}^2\alpha_r}\right] \\ \left[\sum_{r=1}^{n} \operatorname{cn}\alpha_r \operatorname{ds}\alpha_r\right]^2 - \sum_{r=1}^{n} \operatorname{ns}^2\alpha_r = A, \end{cases}$$

и если это решение уравнения Ламе не является двоякопериодическим, то

$$\prod_{r=1}^{n}\left[\frac{\mathrm{H}(\alpha-\alpha_r)}{\Theta(\alpha)}\exp\{\alpha Z(\alpha_r)\}\right]$$

будет вторым решением.

Существование решения системы $n+1$ уравнений вытекает из § 23.7.

ЛИТЕРАТУРА

G. Lamé, Journ. de Math., II (1837), 147—188; IV (1839), 100—125, 126—163, 351—385; VIII (1843), 397—434; Leçons sur les fonctions inverses des transcendantes et les surfaces isothermes (Paris, 1857). Leçons sur les coordonnées curvilignes (Paris, 1859).

E. Heine, Journ. für Math., XXIX (1845), 185—208 Theorie der Kugelfunktionen, II (Berlin, 1880).

C. Hermite, Comptes Rendus, LXXXV (1877), 689—695, 728—732, 821—826; Ann. di Mat. (2) IX (1878), 21—24; Oeuvres Mathématiques (Paris, 1905—1917).

G. H. Halphen, Fonctions Elilptiques, II (Paris, 1888);

F. Lindemann, Math. Ann., XIX (1882), 323—386.

K. Heun, Math. Ann., XXXIII (1889), 161—179, 180—196.

L. Crawford, Quarterly Journal, XXVII (1895), 93—98; XXIX (1898), 196—201.

W. D. Niven, Phil. Trans. of the Royal Society, 182A (1891), 231—278.

A. Cayley, Phil. Trans. of the Royal Society., 165 (1875), 675—774.

G. H. Darwin, Phil. Trans. of the Royal Society, 197A (1901), 461—557; 198A (1901), 301—331.

Е. В. Гобсон, Теория сферических и эллипсоидальных функций, ИЛ, 1952.

Примеры

1. Получить формулу

$$G_n(x, y, z) = \frac{2^n \cdot n}{(2n)!}\int_0^\infty D^{2n}P_n\left(\frac{u}{D}\right)e^{-u}\,du \cdot H_n(x, y, z).$$

(Niven, Phil. Trans. 182A (1891), 245)

2. Показать, что

$$H_n\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{(-1)^n\cdot(2n)!}{2^n\cdot n!}\cdot\frac{H_n(x, y, z)}{(x^2+y^2+z^2)^{n+\frac{1}{2}}}.$$

(Hobson, Proc. London Math. Soc., XXIV)

3. Показать, что «внешняя эллипсоидальная гармоническая функция» $F_n^m(\xi)\,E_n^m(\eta)\,E_n^m(\zeta)$ есть постоянное кратное выражения

$$H_n\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\left(1+\frac{D^2}{2\cdot(2n+3)}+\right.$$
$$\left.+\frac{D^4}{2\cdot 4\cdot(2n+3)(2n+5)}+\ldots\right)\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

(Niven; Hobson, Proc. London Math. Soc., XXIV)

4. Рассмотреть предельную форму уравнения Ламе, когда инварианты g_2 и g_3 эллиптической функции Вейерштрасса стремятся к нулю; выразить решение через функции Бесселя.

(Haentzschel, Zeitschrift für Math. und Phys., XXXI)

5. Пусть v означает

$$\frac{\mathrm{H}(\alpha+\mu)}{\Theta(\alpha)}\exp\left[\{\lambda-\mathrm{Z}(\mu)\}\,\alpha\right],$$

где λ и μ — постоянные; показать, что уравнение Ламе имеет решение, которое выражается как линейная комбинация производных

$$\frac{d^{n-1}v}{d\alpha^{n-1}},\quad \frac{d^{n-3}v}{d\alpha^{n-3}},\quad \frac{d^{n-5}v}{d\alpha^{n-5}},\ldots,$$

где λ^2 и $\mathrm{sn}^2\mu$ — алгебраические функции постоянной A.

(Hermite)

6. Получить решения уравнения

$$\frac{1}{w}\frac{d^2w}{dz^2} = 12k^2\,\mathrm{sn}^2 z - 4(1+k^2) \pm 5\sqrt{1-k^2+k^4}.$$

(Stenberg, Acta Math., X)

7. Рассмотреть решение уравнения

$$z(z-1)(z-a)\frac{d^2y}{dz^2}+$$
$$+\left[(\alpha+\beta+1)z^2-\{\alpha+\beta-\delta+1+(\gamma+\delta)a\}z+\alpha\gamma\right]\frac{dy}{dz}+\alpha\beta(z-q)y=0$$

в виде ряда

$$1+\alpha\beta\sum_{n=1}^{\infty}\frac{G_n(q)\,(z/a)^n}{n!\,\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n)},$$

где

$$G_1(q) = q, \quad G_2(q) = \alpha\beta q^2 + \{(\alpha+\beta-\delta+1)+(\gamma+\delta)a\}q - \alpha\gamma,$$
$$G_{n+1}(q) = [n\{(\alpha+\beta-\delta+n)+(\gamma+\delta+n-1)a\}+\alpha\beta q]\,G_n(q) -$$
$$-(\alpha+n-1)(\beta+n-1)(\gamma+n-1)\,naG_{n-1}(q).$$

(Heun, Math. Ann., XXXIII)

8. Показать, что показатели в особых точках 0, 1, a, ∞ уравнения Хейна будут

$$(0,\ 1-\gamma), \quad (0,\ 1-\delta), \quad (0,\ 1-\varepsilon), \quad (\alpha,\ \beta),$$

где

$$\gamma+\delta+\varepsilon = \alpha+\beta+1.$$

(Heun, Math., Ann., XXXIII)

9. Получить следующую группу подстановок для уравнения Хейна, соответствующую группе

$$z, \quad 1-z, \quad \frac{1}{z}, \quad \frac{1}{1-z}, \quad \frac{z}{z-1}, \quad \frac{z-1}{z},$$

для гипергеометрического уравнения:

$$z, \quad 1-z, \quad \frac{1}{z}, \quad \frac{1}{1-z}, \quad \frac{z}{z-1}, \quad \frac{z-1}{z},$$
$$\frac{z}{a}, \quad \frac{a-z}{a}, \quad \frac{a}{z}, \quad \frac{a}{a-z}, \quad \frac{z}{z-a}, \quad \frac{z-a}{z},$$
$$\frac{z-a}{1-a}, \quad \frac{z-1}{a-1}, \quad \frac{1-a}{z-a}, \quad \frac{a-1}{z-1}, \quad \frac{z-a}{z-1}, \quad \frac{z-1}{z-a},$$
$$\frac{z-a}{a(z-1)}, \quad \frac{(a-1)z}{a(z-1)}, \quad \frac{a(z-1)}{z-a}, \quad \frac{a(z-1)}{(a-1)z}, \quad \frac{z-a}{(1-a)z}, \quad \frac{(1-a)z}{z-a}.$$

(Heun, Math. Ann., XXXIII)

10. Обозначая ряд примера 7 через

$$F(a,\ q;\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta;\ z),$$

получить 192 решения дифференциального уравнения в форме степеней z, $z-1$ и $z-a$, умноженных на функции типа F.

[Хейн дает 48 этих решений.]

11. При $u = 2v$ показать, что уравнение Ламе

$$\frac{d^2\Lambda}{du^2} = \{n(n+1)\wp(u)+B\}\Lambda$$

может быть преобразовано в уравнение

$$\frac{d^2L}{dv^2} - 2n\frac{\wp''(v)}{\wp'(v)}\frac{dL}{dv} + 4\{n(2n-1)\wp(v)-B\}L = 0$$

при помощи подстановки

$$\Lambda = \{\wp'(v)\}^{-n}L.$$

12. Полагая $\zeta = \wp(v)$, показать, что

$$L = \sum_{r=0}^{\infty} b_r(\zeta-e_r)^{\alpha-r}$$

есть формальное решение уравнения примера 11, причем α и b_r определяются уравнениями

$$(\alpha-2n)\left(\alpha-n+\frac{1}{2}\right)=0$$

и

$$4(\alpha-r-2n)\left(\alpha-r-n+\frac{1}{2}\right)b_r+[12e_2(\alpha-r+1)(\alpha-r-2n+1)+$$
$$+4e_2n(2n-1)-4B]\,b_{r-1}-$$
$$-4(e_1-e_2)(e_2-e_3)(\alpha-r+2)\left(\alpha-r-n+\frac{3}{2}\right)b_{r-2}=0.$$

(Brioschi, Comptes Rendus, LXXXVI (1878), 313—315 и Halphen)

13. Показать, что если n равно половине нечетного положительного целого числа, то решение уравнения примера 11, которое выражается в конечной форме, имеет вид:

$$L=\sum_{r=0}^{n-\frac{1}{2}} b_r(\zeta-e_2)^{2n-r},$$

причем b_r определяются уравнениями

$$4r\left(n-r+\frac{1}{2}\right)b_r+[12e_2(2n-r+1)(r-1)-4e_2n(2n-1)+4B]\,b_{r-1}+$$
$$+4(e_1-e_2)(e_2-e_3)(2n-r+2)\left(n-r+\frac{3}{2}\right)b_{r-2}=0,$$

а B определяется так, чтобы $b_{n+\frac{1}{2}}=0$.

(Brioschi и Halphen)

14. Показать, что если n равно половине нечетного целого числа, то решение уравнения примера 11, которое выражается в конечной форме, имеет вид:

$$L'=\sum_{p=0}^{n-\frac{1}{2}} b'_p(\zeta-e_2)^{n-p-\frac{1}{2}},$$

причем b'_p определяются уравнениями

$$4p\left(n+p+\frac{1}{2}\right)b'_p-$$
$$-\left[12e_2\left(n-p+\frac{1}{2}\right)\left(n+p-\frac{1}{2}\right)-4e_2n(2n-1)+4B\right]b'_{p-1}+$$
$$+4(e_1-e_2)(e_2-e_3)\left(n-p+\frac{3}{2}\right)(p-1)\,b'_{p-2}=0,$$

а $b'_{n+\frac{1}{2}}=0$ есть уравнение, которое определяет B.

(Crawford)

15. Сохраняя обозначения примеров 13 и 14, показать, что если

$$b'_p = (-1)^p (e_1 - e_2)^p (e_2 - e_3)^p c_{n-p-\frac{1}{2}},$$

то уравнения, которые определяют $c_0, c_1, \ldots, c_{n-\frac{1}{2}}$, тождественны с уравнениями, определяющими $b_0, b_1, \ldots, b_{n-\frac{1}{2}}$, и вывести отсюда, что если одно из решений уравнения Ламе (в котором n равно половине нечетного целого числа) выражается как алгебраическая функция от $\wp(v)$, то тем же свойством обладает и второе.

(Crawford)

16. Доказать, что значения B, определяемые в примере 13, вещественны, когда e_1, e_2, e_3 вещественны.

17. Показать, что общим решением уравнения

$$\frac{1}{\Lambda}\frac{d^2\Lambda}{du^2} = \frac{3}{4}\wp(u)$$

будет

$$\Lambda = \left\{\wp'\left(\frac{1}{2}u\right)\right\}^{-\frac{1}{2}}\left\{A\wp\left(\frac{1}{2}u\right) + B\right\},$$

где A и B — произвольные постоянные.

(Halphen, Mém. par divers savants, XXVIII (I), 1880, 105)

18. Показать, что общим решением уравнения

$$\frac{1}{\Lambda}\frac{d^2\Lambda}{d\alpha^2} = \frac{3}{4}k^2\,\mathrm{sn}^2\,\alpha - \frac{1}{4}(1+k^2)$$

будет

$$\Lambda = \left\{\mathrm{sn}\,\frac{1}{2}(C-\alpha)\,\mathrm{cn}\,\frac{1}{2}(C-\alpha)\,\mathrm{dn}\,\frac{1}{2}(C-\alpha)\right\}^{-\frac{1}{2}}\left\{A + B\,\mathrm{sn}^2\,\frac{1}{2}(C-\alpha)\right\},$$

где A и B — произвольные постоянные и $C = 2K + iK'$.

(Jamet, Comptes Rendus, CXI)

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ [1])

[1]) Римские цифры обозначают I или II часть книги, арабские — страницы.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ [1])

[1]) Римские цифры обозначают I или II часть книги, арабские — страницы. Тире (—) заменяет слово, тильда (~) — группу слов (если заменяется не весь предыдущий термин, то конец заменяемой группы слов отмечен вертикальной черточкой).