16. Доказать, что

$$\frac{d \lg \Gamma(z)}{dz} = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha} - e^{-z\alpha}}{1 - e^{-\alpha}} d\alpha - \gamma =$$

$$= \int_0^\infty \{(1+\alpha^{-1}) - (1+\alpha)^{-z}\} \frac{d\alpha}{\alpha} - \gamma = \int_0^1 \frac{x^{z-1} - 1}{x - 1} dx - \gamma.$$

(Legendre)

17. Доказать, что при $\operatorname{Re} z > 0$

$$\lg \Gamma(z) = \int_0^1 \left\{ \frac{x^z - x}{x - 1} - x(z-1) \right\} \frac{dx}{x \lg x}.$$

(Binet)

18. Доказать, что

$$\lg \Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right) \lg z - z + \frac{1}{2} \lg 2\pi +$$

$$+ \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2 \cdot 3} \sum_{r=1}^\infty \frac{1}{(z+r)^2} + \frac{2}{3 \cdot 4} \sum_{r=1}^\infty \frac{1}{(z+r)^3} + \frac{3}{4 \cdot 5} \sum_{r=1}^\infty \frac{1}{(z+r)^4} + \dots \right\}$$

для всех значений z, кроме отрицательных вещественных значений.

19. Доказать, что при $\operatorname{Re} z > 0$

$$\frac{d}{dz} \lg \Gamma(z) = \lg z - \int_0^1 \frac{x^{z-1} \{1 - x + \lg x\}}{(1-x) \lg x} dx.$$

20. Доказать, что при $\operatorname{Re} z > 0$

$$\frac{d^2}{dz^2} \lg \Gamma(z) = \int_0^\infty \frac{x e^{-xz} dx}{1 - e^{-x}}.$$

21. Положив $\int_z^{z+1} \lg \Gamma(t)\, dt = u$, показать, что

$$\frac{du}{dz} = \lg z,$$

и, пользуясь § 12.33, доказать, что для всех, кроме отрицательных вещественных, значений z

$$u = z \lg z - z + \frac{1}{2} \lg 2\pi.$$

(Raabe, Journ. für. Math., XXV)

22. Доказать, что

$$\lg \Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right) \lg z - z + \frac{1}{2} \lg 2\pi + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{dx}{x+z} \frac{\sin 2n\pi x}{n\pi}$$

для всех значений z, кроме отрицательных вещественных

(Bourguet [1])

23. Доказать, что

$$B(p, p) B\left(p + \frac{1}{2}, p + \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2^{4p-1} p}.$$

(Binet)

24. Доказать, что при $-t < r < t$

$$B(t+r, t-r) = \frac{1}{4^{t-1}} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch}(2ru)\, du}{\operatorname{ch}^{2t} u}.$$

25. Доказать, что при $q > 1$

$$B(p, q) + B(p+1, q) + B(p+2, q) + \ldots = B(p, q-1).$$

26. Доказать, что при $p - a > 0$

$$\frac{B(p-a, q)}{B(p, q)} = 1 + \frac{aq}{p+q} + \frac{a(a+1)q(q+1)}{1 \cdot 2 \cdot (p+q)(p+q+1)} + \ldots$$

27. Доказать, что

$$B(p, q) B(p+q, r) = B(q, r) B(q+r, p).$$

(Euler)

28. Показать, что при $a > 0$, $b > 0$, $p > 0$

$$\int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} \frac{dx}{(x+p)^{a+b}} = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \frac{1}{(1+p)^a p^b}.$$

(Trinity, 1908)

29. Показать, что при $m > 0$, $n > 0$

$$\int_{-1}^{1} \frac{(1+x)^{2m-1} (1-x)^{2n-1}}{(1+x^2)^{m+n}} dx = 2^{m+n-2} \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)},$$

и, считая α вещественным и не кратным $\frac{\pi}{2}$, вывести формулу

$$\int_{-\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} \left(\frac{\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta - \sin\theta}\right)^{\cos 2\alpha} d\theta = \frac{\pi}{2 \sin(\pi \cos^2 \alpha)}.$$

(St. John's, 1904)

---

[1]) Стилтьес приписывает этот результат Бурге (Bourguet, Journ. de Math. (4), V, 432).

30. Показать, что при $\alpha > 0$, $\beta > 0$

$$\int_0^1 \frac{t^{\alpha-1}}{1+t}\,dt = \frac{1}{2}\psi\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\alpha\right) - \frac{1}{2}\psi\left(\frac{1}{2}\alpha\right)$$

и

$$\int_0^1 \frac{t^{\alpha-1}-t^{\beta-1}}{(1+t)\lg t}\,dt = \lg\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\alpha\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\beta\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\alpha\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\beta\right)}.$$

(Kummer)

31. Показать, что при $a > 0$, $a+b > 0$

$$\int_0^1 \frac{x^{a-1}(1-x^b)}{1-x}\,dx = \lim_{\delta\to 0}\left\{\frac{\Gamma(a)\Gamma(\delta)}{\Gamma(a+\delta)} - \frac{\Gamma(a+b)\Gamma(\delta)}{\Gamma(a+b+\delta)}\right\} = \psi(a+b) - \psi(a).$$

Доказать, что при дополнительном условии $a+c > 0$, $a+b+c > 0$ имеем

$$\int_0^1 \frac{x^{a-1}(1-x^b)(1-x^c)}{(1-x)(-\lg x)}\,dx = \lg\frac{\Gamma(a)\Gamma(a+b+c)}{\Gamma(a+b)\Gamma(a+c)}.$$

32. Показать, что

$$\int_0^1 \frac{(1-x^a)(1-x^b)(1-x^c)}{(1-x)(-\lg x)}\,dx = \lg\frac{\Gamma(b+c+1)\Gamma(c+a+1)\Gamma(a+b+1)}{\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)\Gamma(c+1)\Gamma(a+b+c+1)},$$

если a, b, c таковы, что интеграл сходится.

33. Подстановкой $\cos\theta = 1 - 2\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi$ показать, что

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{(3-\cos\theta)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\left\{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right\}^2}{4\sqrt{\pi}}.$$

(St. John's, 1896)

34. Выразить через гамма-функции интеграл $\int_0^\infty \frac{\sin^p x}{x}\,dx$, где p — дробь, большая единицы, числитель и знаменатель которой — нечетные целые числа. [Показать, что интеграл равен

$$\frac{1}{2}\int_0^\pi \sin^p x\left\{\frac{1}{x} + \sum_{n=1}^\infty (-1)^n\left(\frac{1}{x+n\pi} + \frac{1}{x-n\pi}\right)\right\}dx.\Bigg]$$

(Clare, 1898)

35. Показать, что

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left(1-\frac{1}{2}\sin^2 x\right)^{n-\frac{1}{2}} dx = \frac{n!}{2^{n+2}\pi^{\frac{1}{2}}} \sum_{r=0}^{n} \frac{2^{3r}}{2r!\,(n-r)!} \left\{\Gamma\left(\frac{2r+1}{4}\right)\right\}^2.$$

36. Доказать, что

$$\lg \mathrm{B}(p, q) = \lg\left(\frac{p+q}{pq}\right) + \int_0^1 \frac{(1-v^p)(1-v^q)}{(1-v)\lg v}\, dv.$$

(Euler)

37. Доказать, что при $p > 0$, $p + s > 0$

$$\mathrm{B}(p, p+s) = \frac{\mathrm{B}(p, p)}{2^s}\left\{1 + \frac{s(s-1)}{2(2p+1)} + \frac{s(s-1)(s-2)(s-3)}{2\cdot 4(2p+1)(2p+3)} + \ldots\right\}.$$

(Binet)

38. Кривая $r^m = 2^{m-1}a^m \cos m\theta$ состоит из m равных петель. Показать, что длина дуги половины петли равна

$$m^{-1}a \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left(\frac{1}{2}\cos x\right)^{\frac{1}{m}-1} dx,$$

и вывести отсюда, что длина всей кривой равна

$$\frac{a\left\{\Gamma\left(\frac{1}{2m}\right)\right\}^2}{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)}.$$

39. Проведем прямую, соединяющую точки $\pm i$, и полуокружность $|z| = 1$, лежащую справа от этой прямой. Пусть C — контур, образованный из этой фигуры вырезанием ее в точках $-i$, 0, i. Рассматривая интеграл $\int_C z^{p-q-1}(z+z^{-1})^{p+q-2}\, dz$, показать, что при $p+q > 1$, $q < 1$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^{p+q-2}\theta \cos(p-q)\theta\, d\theta = \frac{\pi}{(p+q-1)\,2^{p+q-1}\,\mathrm{B}(p, q)}.$$

Доказать, что результат остается справедливым для значений p и q, ограниченных только условием $p + q > 1$.

(Cauchy)

40. Показать, что при s положительном (не обязательно целом) и $-\frac{1}{2}\pi \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\pi$

$$\cos^s x = \frac{1}{2^{s-1}} \frac{\Gamma(s+1)}{\left\{\Gamma\left(\frac{1}{2}s+1\right)\right\}^2} \left\{\frac{1}{2} + \frac{s}{s+2}\cos 2x + \frac{s(s-2)}{(s+2)(s+4)}\cos 4x + \ldots\right\}.$$

Вычертить графики ряда и функции $\cos^s x$.

41. Получить разложение

$$\cos^s x = \frac{\alpha}{2^{s-1}}\Gamma(s+1)\left[\frac{\cos\alpha x}{\Gamma\left(\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}\alpha+1\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}\alpha+1\right)}+\right.$$
$$\left.+\frac{\cos 3\alpha x}{\Gamma\left(\frac{1}{2}s+\frac{3}{2}\alpha+1\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}s-\frac{3}{2}\alpha+1\right)}+\ldots\right]$$

и найти значения x, для которых оно пригодно.

(Cauchy)

42. Доказать, что при $p > \frac{1}{2}$

$$\Gamma(2p) = \frac{2^{2p-1}}{\sqrt{\pi}}\{\Gamma(p)\}^2\left[\frac{2p^2}{2p+1}\left\{1+\frac{1^2}{2(2p+3)}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1^2\cdot 3^2}{2\cdot 4(2p+3)(2p+5)}+\ldots\right\}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

(Binet)

43. Показать, что при $x < 0$, $x+z > 0$

$$\frac{\Gamma(-x)}{\Gamma(z)}\left\{\frac{-x}{z}+\frac{1}{2}\frac{(-x)(1-x)}{z(1+z)}+\frac{1}{3}\frac{(-x)(1-x)(2-x)}{z(1+z)(2+z)}+\ldots\right\}=$$
$$=\frac{1}{\Gamma(x+z)}\int_0^1 t^{-x-1}\{-\lg(1-t)\}(1-t)^{x+z-1}\,dt,$$

и вывести, что при $x+z > 0$

$$\frac{d}{dz}\lg\frac{\Gamma(z+x)}{\Gamma(z)}=\frac{x}{z}-\frac{1}{2}\frac{x(x-1)}{z(z+1)}+\frac{1}{3}\frac{x(x-1)(x-2)}{z(z+1)(z+2)}-\ldots$$

44. Пользуясь результатом примера 43, доказать, что

$$\lg\Gamma(z+a)=\lg\Gamma(z)+a\lg z-\frac{a-a^2}{2z}-$$
$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a\int_0^1 t(1-t)(2-t)\ldots(n-t)\,dt-\int_0^a t(1-t)(2-t)\ldots(n-t)\,dt}{(n+1)z(z+1)(z+2)\ldots(z+n)},$$

и исследовать область сходимости ряда.

(Binet, Journal de l'École polytechnique, XVI, 1830, 256)

45. Доказать, что при $p > 0$, $q > 0$

$$\mathrm{B}(p,q)=\frac{p^{p-\frac{1}{2}}q^{q-\frac{1}{2}}}{(p+q)^{p+q-\frac{1}{2}}}(2\pi)^{\frac{1}{2}}e^{M(p,q)},$$

где

$$M(p, q) = 2\rho \int_0^\infty \frac{dt}{e^{2\pi t\rho} - 1} \operatorname{arctg} \left\{ \frac{(t^3 + t)\rho^3}{pq(p+q)} \right\},$$

а

$$\rho^2 = p^2 + q^2 + pq.$$

46. Пусть

$$U = \frac{2^{\frac{1}{2}x}}{\Gamma\left(1 - \frac{1}{2}x\right)}, \quad V = \frac{2^{\frac{1}{2}x}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x\right)},$$

и пусть функция $F(x)$ определяется равенством

$$F(x) = \pi^{\frac{1}{2}} \left(V \frac{dU}{dx} - U \frac{dV}{dx} \right).$$

Показать, что

1) $F(x)$ удовлетворяет уравнению

$$F(x+1) = xF(x) + \frac{1}{\Gamma(1-x)};$$

2) для всех положительных целых значений x

$$F(x) = \Gamma(x);$$

3) $F(x)$ будет аналитической функцией для всех конечных значений x

4) $F(x) = \dfrac{1}{\Gamma(1-x)} \dfrac{d}{dx} \lg \dfrac{\Gamma\left(\frac{1-x}{2}\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{x}{2}\right)}.$

47. Разложить

$$\{\Gamma(a)\}^{-1}$$

в ряд по возрастающим степеням a.

[Различные способы определения коэффициентов в этом разложении даны Бурге (Bourguet), Bull. des Sci. Math., V (1881), 43; Bourguet, Acta Math., II (1880), 261; Шлёмильхом (Schlömilch), Zeitschrift für Math. und Phys., XXV (1880), 35, 351.]

48. Доказать, что функция G, определяемая равенством

$$G(z+1) = (2\pi)^{\frac{1}{2}z} e^{-\frac{1}{2}z(z+1) - \frac{1}{2}\gamma z^2} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n e^{-z + \frac{z^2}{2n}} \right\},$$

есть целая функция, удовлетворяющая соотношениям

$$G(z+1) = \Gamma(z)\, G(z), \quad G(1) = 1,$$

$$\frac{(n!)^n}{G(n+1)} = 1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \ldots n^n.$$

(Алексеевский)

[Наиболее важные свойства функции G рассмотрены в мемуаре Барнса (Barnes), Quarterly Journal, XXXI.]

49. Показать, что

$$\frac{G'(z+1)}{G(z+1)} = \frac{1}{2}\lg 2\pi + \frac{1}{2} - z + z\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)},$$

и вывести отсюда, что

$$\lg\frac{G(1-z)}{G(1+z)} = \int_0^z \pi z \operatorname{ctg} \pi z \, dz - z \lg 2\pi.$$

50. Показать, что

$$\int_0^z \lg \Gamma(t+1)\, dt = \frac{1}{2} z \lg 2\pi - \frac{1}{2} z(z+1) + z \lg \Gamma(z+1) - \lg G(z+1).$$

ГЛАВА 13

ДЗЕТА-ФУНКЦИЯ РИМАНА

13.1. Определение дзета-функции

Пусть $s=\sigma+it$, где σ и t вещественны [1]). Тогда при $\delta>0$ ряд

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$$

будет равномерно сходящимся рядом аналитических функций (§§ 2.33, 3.34, часть I) во всякой области, в которой

$$\sigma\geqslant 1+\delta.$$

Следовательно, в такой области ряд будет аналитической функцией от s. Эта функция называется *дзета-функцией*. Хотя она была известна еще Эйлеру [2]), наиболее замечательные ее свойства были открыты только Риманом [3]), который рассмотрел эту функцию в своем мемуаре о простых числах.

С этого момента она приобрела громадное значение не только в теории простых чисел, но также в высших разделах теории гамма-функции и других родственных функций.

13.11. Обобщенная дзета-функция [4])

Многие свойства, которыми обладает дзета-функция, являются частными случаями свойств, присущих более общей функции, опре-

---

[1]) Буквы σ и t будут использованы в этом смысле на протяжении всей главы.

[2]) Euler, Commentationes Acad. Sci. Imp. Petropolitanae, IX (1737), 160—188.

[3]) Riemann, Berliner Monatsberichte (1859), 671—680; Ges. Werke (1876) 136—144.

[4]) Определение этой функции, по-видимому, принадлежит Гурвицу, (Hurwitz, Zs. für Math. und Phys., XXVII (1882), 86—101).

деляемой при $\sigma \geqslant 1+\delta$ равенством

$$\zeta(s, a)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(a+n)^s},$$

где a — постоянная. Для простоты предположим [1]), что $0 < a \leqslant 1$, и возьмем $\arg(a+n)=0$. Очевидно, что $\zeta(s, 1)=\zeta(s)$.

13.12. Представление функции $\zeta(s, a)$ в виде несобственного интеграла

Так как

$$(a+n)^{-s}\Gamma(s)=\int_0^{\infty} x^{s-1}e^{-(n+a)x}\,dx,$$

когда $\arg x=0$ и $\sigma>0$ (и *a fortiori*, когда $\sigma \geqslant 1+\delta$), то при $\sigma \geqslant 1+\delta$ мы будем иметь

$$\Gamma(s)\zeta(s, a)=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\int_0^{\infty} x^{s-1}e^{-(n+a)x}\,dx=$$

$$=\lim_{N\to\infty}\left\{\int_0^{\infty}\frac{x^{s-1}e^{-ax}}{1-e^{-x}}\,dx-\int_0^{\infty}\frac{x^{s-1}}{1-e^{-x}}e^{-(N+1+a)x}\,dx\right\}.$$

Но при $x \geqslant 0$ имеем $e^x \geqslant 1+x$, а потому модуль второго из этих интегралов не превосходит интеграла

$$\int_0^{\infty} x^{\sigma-2}e^{-(N+a)x}\,dx=(N+a)^{1-\sigma}\Gamma(\sigma-1),$$

который (при $\sigma \geqslant 1+\delta$) стремится к нулю, когда $N\to\infty$.

Отсюда при $\sigma \geqslant 1+\delta$ и $\arg x=0$ имеем

$$\zeta(s, a)=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{\infty}\frac{x^{s-1}e^{-ax}}{1-e^{-x}}\,dx.$$

Эта формула в некоторых отношениях соответствует интегралу Эйлера для гамма-функции.

---

[1]) Если a лежит в этом промежутке, то свойства функции будут, вообще говоря, более простыми, чем соответствующие свойства для других значений a. Результаты § 13.14 остаются верными для всех значений a (за исключением целых отрицательных значений). Результаты §§ 13.12, 13.13, 13.2 остаются верными только при $\operatorname{Re} a > 0$.

13.13. Представление [1]) функции $\zeta(s, a)$ в виде интеграла по контуру

Считая $\sigma \geqslant 1+\delta$, рассмотрим интеграл

$$\int_{\infty}^{(0+)} \frac{(-z)^{s-1} e^{-az}}{1-e^{-z}} dz,$$

где за контур интегрирования взят контур типа Ханкеля (§ 12.22), не содержащий точек $\pm 2n\pi i$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$, являющиеся полюсами подинтегральной функции. Предполагается (как в § 12.22), что $|\arg(-z)| \leqslant \pi$.

Когда $\sigma \geqslant 1+\delta$ [2]), мы имеем право деформировать контур совершенно так же, как в § 12.22; получим

$$\int_{\infty}^{(0+)} \frac{(-z)^{s-1} e^{-az}}{1-e^{-z}} dz = \{e^{\pi i(s-1)} - e^{-\pi i(s-1)}\} \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1} e^{-ax}}{1-e^{-x}} dx.$$

Поэтому

$$\zeta(s, a) = -\frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i} \int_{\infty}^{(0+)} \frac{(-z)^{s-1} e^{-az}}{1-e^{-z}} dz.$$

Этот последний интеграл есть однозначная аналитическая функция от s для *всех* значений s. Поэтому единственно возможными особыми точками $\zeta(s, a)$ будут особые точки функции $\Gamma(1-s)$, т. е. точки 1, 2, 3, ..., и, за исключением этих точек, интеграл дает представление функции $\zeta(s, a)$, годное во всей плоскости. Полученный результат соответствует интегралу Ханкеля для гамма-функции. С другой стороны, мы видели, что $\zeta(s, a)$ является аналитической при $\sigma \geqslant 1+\delta$, и таким образом, единственной особой точкой функции $\zeta(s, a)$ будет точка $s=1$.

Положив в интеграле $s=1$, получим выражение

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\infty}^{(0+)} \frac{e^{-az}}{1-e^{-z}} dz,$$

которое равно вычету подинтегральной функции в точке $z=0$; а этот вычет равен 1.

Отсюда

$$\lim_{s \to 1} \frac{\zeta(s, a)}{\Gamma(1-s)} = -1.$$

---

[1]) Дано Риманом для обыкновенной дзета-функции.

[2]) Если $\sigma \leqslant 1$, то интеграл, взятый вдоль какой-либо прямой, идущей из начала координат, не будет сходиться.

Так как функция $\Gamma(1-s)$ имеет простой полюс в $s=1$ с вычетом -1, то заключаем, что единственной особой точкой функции $\zeta(s, a)$ будет простой полюс с вычетом $+1$ при $s=1$.

Пример 1. Показать, что при $\operatorname{Re} s > 0$

$$(1-2^{1-s})\zeta(s) = \frac{1}{1^s} - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \ldots = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x+1}\, dx.$$

Пример 2. Показать, что при $\operatorname{Re} s > 1$

$$(2^s-1)\zeta(s) = \zeta\left(s, \frac{1}{2}\right) = \frac{2^s}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{x^{s-1} e^x}{e^{2x}-1}\, dx.$$

Пример 3. Показать, что

$$\zeta(s) = -\frac{2^{1-s}\Gamma(1-s)}{2\pi i\,(2^{1-s}-1)} \int_\infty^{(0+)} \frac{(-z)^{s-1}}{e^z+1}\, dz,$$

где контур не должен содержать точки $\pm \pi i$, $\pm 3\pi i$, $\pm 5\pi i$, ...

13.14. Значения функции $\zeta(s, a)$ для частных значений s

В частном случае, когда s — целое число (положительное или отрицательное), выражение $\dfrac{(-z)^{s-1} e^{-az}}{1-e^{-z}}$ будет однозначной функцией от z. Мы можем, следовательно, применить теорему Коши, так что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\infty^{(0+)} \frac{(-z)^{s-1} e^{-az}}{1-e^{-z}}\, dz$$

будет вычетом подинтегральной функции при $z=0$, иначе говоря, коэффициентом при z^{-s} в $\dfrac{(-1)^{s-1} e^{-az}}{1-e^{-z}}$.

Для получения этого коэффициента продифференцируем почленно по a разложение (§ 7.2, часть I)

$$-z\,\frac{e^{-az}-1}{e^{-z}-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\varphi_n(a)}{n!} z^n,$$

где $\varphi_n(a)$ обозначает n-й полином Бернулли.

(Это, очевидно, является законным согласно § 4.7 части I, когда $|z| < 2\pi$, так как $\dfrac{z^2 e^{-az}}{e^{-z}-1}$ может быть разложена в степенной ряд по z, равномерно сходящийся относительно a.)

Получим

$$\frac{z^2 e^{-az}}{e^{-z}-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\varphi_n'(a)}{n!} z^n.$$

Поэтому, если z равно нулю или целому отрицательному числу ($=-m$), мы имеем

$$\zeta(-m, a) = -\frac{\varphi_{m+2}'(a)}{(m+1)(m+2)}.$$

В частном случае, когда $a=1$, функция $\zeta(s)$ при $s=-m$ равна коэффициенту при z^{1-s} в разложении функции $\frac{(-1)^s m! z}{e^z-1}$.

Следовательно, согласно § 7.2 части I,

$$\zeta(-2m)=0, \quad \zeta(1-2m) = \frac{(-1)^m B_m}{2m} \qquad (m=1, 2, 3, \ldots),$$

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2}.$$

Эти равенства дают значение функции $\zeta(s)$, когда s — отрицательное целое число или нуль.

13.15. Формула Гурвица [1]) для функции $\zeta(s, a)$, когда $\sigma < 0$

Рассмотрим интеграл

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{(-z)^{s-1} e^{-az}}{1-e^{-z}}\, dz,$$

взятый по контуру C, состоящему из окружности (большого) радиуса $(2N+1)\pi$ (N — целое число), которая начинается в точке $(2N+1)\pi$ и обходит начало координат в положительном направлении; пусть $\arg(-z)$ равен нулю при $z=-(2N+1)\pi$.

В области между C и контуром $(2N\pi+\pi, 0+)$, предельная форма которого есть контур § 13.13, функция $(-z)^{s-1} e^{-az}(1-e^{-z})^{-1}$ будет аналитической и однозначной, если исключить простые полюсы $\pm 2\pi i, \pm 4\pi i, \ldots, \pm 2N\pi i$.

Отсюда

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{(-z)^{s-1} e^{-az}}{1-e^{-z}}\, dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{(2N+1)\pi}^{(0+)} \frac{(-z)^{s-1} e^{-az}}{1-e^{-z}}\, dz = \sum_{n=1}^{N} (R_n + R_n'),$$

где R_n, R_n' суть вычеты подинтегральной функции соответственно в точках $2n\pi i$, $-2n\pi i$.

---

[1]) Hurwitz, Zs. für Math. und Phys., XXVII (1882), 95.

В точке, для которой $-z = 2n\pi e^{-\frac{1}{2}\pi i}$, вычет равен

$$(2n\pi)^{s-1} e^{-\frac{1}{2}\pi i (s-1)} e^{-2an\pi i},$$

и отсюда

$$R_n + R_n' = (2n\pi)^{s-1} 2 \sin\left(\frac{1}{2} s\pi + 2\pi an\right).$$

Следовательно,

$$-\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(2N+1)\pi}^{(0+)} \frac{(-z)^{s-1} e^{-az}}{1-e^{-z}} dz =$$

$$= \frac{2 \sin \frac{1}{2} s\pi}{(2\pi)^{1-s}} \sum_{n=1}^{N} \frac{\cos(2\pi an)}{n^{1-s}} + \frac{2 \cos \frac{1}{2} s\pi}{(2\pi)^{1-s}} \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin(2\pi an)}{n^{1-s}} -$$

$$- \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C} \frac{(-z)^{s-1} e^{-az}}{1-e^{-z}} dz.$$

Далее, поскольку $0 < a \leqslant 1$, легко видеть, что можно найти такое число K, не зависящее от N, что $\left| e^{-az}(1-e^{-z})^{-1} \right| < K$, когда z находится на C.

Отсюда

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C} \frac{(-z)^{s-1} e^{-az}}{1-e^{-z}} dz \right| < \frac{1}{2\pi} K \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left| \{(2N+1)\pi\}^{s} e^{si\theta} \right| d\theta <$$

$$< K \{(2N+1)\pi\}^{\sigma} e^{\pi |s|} \to 0 \quad \text{при} \quad N \to \infty, \quad \text{если } \sigma < 0.$$

Заставляя $N \to \infty$, мы получаем при $\sigma < 0$ следующую формулу Гурвица:

$$\zeta(s, a) = \frac{2\Gamma(1-s)}{(2\pi)^{1-s}} \left\{ \sin\left(\frac{1}{2} s\pi\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi an)}{n^{1-s}} + \cos\left(\frac{1}{2} s\pi\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi an)}{n^{1-s}} \right\},$$

причем оба ряда сходятся.

13.151. Соотношение Римана между $\zeta(s)$ и $\zeta(1-s)$

Если в формуле Гурвица, данной в § 13.15, положить $a = 1$ и применить результат § 12.14, то получается замечательная формула, принадлежащая Риману:

$$2^{1-s}\Gamma(s)\zeta(s)\cos\left(\frac{1}{2} s\pi\right) = \pi^{s}\zeta(1-s).$$

Так как обе части этого равенства являются аналитическими функциями от s, за исключением изолированных значений s, при которых

они имеют полюсы, то это равенство, доказанное для $\sigma < 0$, остается справедливым (по § 5.5, часть I) для всех значений s, за исключением указанных изолированных значений.

Пример 1. Показать, что при m целом и положительном

$$\zeta(2m) = 2^{2m-1}\pi^{2m}\frac{B_m}{(2m)!}.$$

Пример 2. Показать, что $\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)\pi^{-\frac{1}{2}s}\zeta(s)$ не меняется при замене s на $1-s$.

(Riemann)

Пример 3. Исходя из соотношения Римана, доказать, что нули функции $\zeta(s)$ в -2, -4, -6, ... будут нулями первого порядка.

13.2. Формула Эрмита [1]) для $\zeta(s, a)$

Применим теорему Плана (часть I, стр. 203, пример 7) к функции $\varphi(z) = (a+z)^{-s}$, где $\arg(a+z)$ имеет главное значение.

Определим функцию $q(x, y)$ равенством

$$q(x, y) = \frac{1}{2i}\{(a+x+iy)^{-s} - (a+x-iy)^{-s}\} =$$

$$= -\{(a+x)^2+y^2\}^{-\frac{1}{2}s}\sin\left\{s\operatorname{arctg}\frac{y}{x+a}\right\}.$$

Так как [2]) $\left|\operatorname{arctg}\frac{y}{x+a}\right|$ не превосходит наименьшей из величин $\frac{1}{2}\pi$ и $\frac{|y|}{x+a}$, то мы имеем

$$|q(x, y)| \leqslant \{(a+x)^2+y^2\}^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sigma}|y^{-1}|\operatorname{sh}\left\{\frac{1}{2}\pi|s|\right\},$$

$$|q(x, y)| \leqslant \{(a+x)^2+y^2\}^{-\frac{1}{2}\sigma}\left|\left\{\operatorname{sh}\frac{y|s|}{x+a}\right\}\right|.$$

Пользуясь первым неравенством при $|y| > a$ и вторым при $|y| < a$, найдем, что при $\sigma > 0$ интеграл $\int\limits_0^\infty q(x, y)(e^{2\pi y}-1)^{-1}\,dy$ сходится, когда $x \geqslant 0$, и стремится к 0, когда $x \to \infty$, интеграл же $\int\limits_0^\infty (a+x)^{-s}\,dx$ сходится при $\sigma > 1$.

---

[1]) Hermite, Annali di Matematica (3), V (1901), 57—72.

[2]) Если $\xi > 0$, то $\operatorname{arctg}\xi = \int\limits_0^\xi \frac{dt}{1+t^2} < \int\limits_0^\infty \frac{dt}{1+t^2}$ и $\operatorname{arctg}\xi < \int\limits_0^\xi dt$.

Следовательно, если $\sigma > 1$, предельный переход $x_2 \to \infty$ в цитированном выше примере является законным; тогда мы имеем

$$\zeta(s, a) = \frac{1}{2} a^{-s} + \int_0^\infty (a+x)^{-s}\, dx + 2\int_0^\infty (a^2+y^2)^{-\frac{1}{2}s} \left\{ \sin\left(s \operatorname{arctg} \frac{y}{a}\right)\right\} \frac{dy}{e^{2\pi y}-1}.$$

Таким образом,

$$\zeta(s, a) = \frac{1}{2} a^{-s} + \frac{a^{1-s}}{s-1} + 2\int_0^\infty (a^2+y^2)^{-\frac{1}{2}s} \left\{ \sin\left(s \operatorname{arctg} \frac{y}{a}\right)\right\} \frac{dy}{e^{2\pi y}-1}.$$

Это и есть формула Эрмита [1]); пользуясь тем, что при $y \geqslant 0$

$$\operatorname{arctg} \frac{y}{a} \leqslant \frac{y}{a} \quad \left(y < \frac{1}{2} a\pi\right), \quad \operatorname{arctg} \frac{y}{a} < \frac{1}{2}\pi \quad \left(y > \frac{1}{2} a\pi\right),$$

мы видим, что интеграл, содержащийся в этой формуле, сходится для всех значений s. Кроме того, этот интеграл определяет аналитическую функцию от s для всех значений s.

Для доказательства последнего достаточно (§ 5.31, часть I) показать, что интеграл, получаемый из него дифференцированием под знаком интеграла, сходится равномерно; иначе говоря, что

$$\int_0^\infty \left[-\frac{1}{2} \lg (a^2+y^2)\,(a^2+y^2)^{-\frac{1}{2}s} \sin\left(s \operatorname{arctg} \frac{y}{a}\right)\right] \frac{dy}{e^{2\pi y}-1} + \int_0^\infty \left[(a^2+y^2)^{-\frac{1}{2}s} \operatorname{arctg} \frac{y}{a} \cos\left(s \operatorname{arctg} \frac{y}{a}\right)\right] \frac{dy}{e^{2\pi y}-1}$$

сходится равномерно относительно s в любой области значений s. Но при $|s| \leqslant \Delta$, где Δ — любое положительное число, мы имеем

$$\left| (a^2+y^2)^{-\frac{1}{2}s} \operatorname{arctg} \frac{y}{a} \cos\left(s \operatorname{arctg} \frac{y}{a}\right)\right| < (a^2+y^2)^{\frac{1}{2}\Delta} \frac{y}{a} \operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}\pi\Delta\right);$$

а так как интеграл

$$\frac{\Delta}{a} \int_0^\infty (a^2+y^2)^{\frac{1}{2}\Delta} \frac{y\, dy}{e^{2\pi y}-1}$$

сходится, то второй интеграл, по § 4.431 (I), сходится равномерно.

---

[1]) Соответствующая формула при $a = 1$ была дана раньше Йенсеном.

Разделяя путь интегрирования первого интеграла на две части $\left(0, \frac{1}{2}\pi a\right)$, $\left(\frac{1}{2}\pi a, \infty\right)$ и применяя неравенства

$$\left|\sin\left(s \operatorname{arctg}\frac{y}{a}\right)\right| < \operatorname{sh}\frac{\Delta y}{a}, \quad \left|\sin\left(s \operatorname{arctg}\frac{y}{a}\right)\right| < \operatorname{sh}\frac{1}{2}\pi\Delta$$

в соответствующих частях, мы можем также показать, что и первый интеграл сходится равномерно.

Следовательно, формула Эрмита имеет силу (§ 5.5, часть I) для всех значений s, и дифференцирование под знаком интеграла является законным; интеграл, полученный в результате дифференцирования, является непрерывной функцией от s.

13.21. Следствия из формулы Эрмита

Положив в формуле Эрмита $s=0$, получим $\zeta(0, a)=\frac{1}{2}-a$.

Заставляя $s\to 1$, из равномерной сходимости интеграла, входящего в формулу Эрмита, заключаем, что

$$\lim_{s\to 1}\left\{\zeta(s, a)-\frac{1}{s-1}\right\}=\lim_{s\to 1}\frac{a^{1-s}-1}{s-1}+\frac{1}{2a}+2\int_0^\infty\frac{y\,dy}{(a^2+y^2)(e^{2\pi y}-1)},$$

откуда на основании примера § 12.32

$$\lim_{s\to 1}\left\{\zeta(s, a)-\frac{1}{s-1}\right\}=-\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}.$$

Далее, дифференцируя [1]) формулу для $\zeta(s, a)$ и переходя к пределу при $s\to 0$, получаем

$$\left\{\frac{d}{ds}\zeta(s, a)\right\}_{s=0}=\lim_{s\to 0}\left[-\frac{1}{2}a^{-s}\lg a-\frac{a^{1-s}\lg a}{s-1}-\frac{a^{1-s}}{(s-1)^2}+\right.$$

$$+2\int_0^\infty\left\{-\frac{1}{2}\lg(a^2+y^2)(a^2+y^2)^{-\frac{1}{2}s}\sin\left(s\operatorname{arctg}\frac{y}{a}\right)+\right.$$

$$\left.\left.+(a^2+y^2)^{-\frac{1}{2}s}\operatorname{arctg}\frac{y}{a}\cos\left(s\operatorname{arctg}\frac{y}{a}\right)\right\}\frac{dy}{e^{2\pi y}-1}\right]=$$

$$=\left(a-\frac{1}{2}\right)\lg a-a+2\int_0^\infty\frac{\operatorname{arctg}(y/a)}{e^{2\pi y}-1}\,dy.$$

---

[1]) Это законно на основании § 13.2.

Отсюда по § 12.32

$$\left\{\frac{d}{ds}\zeta(s, a)\right\}_{s=0} = \lg\Gamma(a) - \frac{1}{2}\lg 2\pi.$$

Этот результат был получен ранее Лерхом [1]) другим способом.

Следствие. $\lim\limits_{s\to 1}\left\{\zeta(s) - \frac{1}{s-1}\right\} = \gamma$; $\zeta'(0) = -\frac{1}{2}\lg 2\pi$.

13.3. Бесконечное произведение Эйлера для $\zeta(s)$

Пусть $\sigma \geqslant 1+\delta$, пусть, далее, 2, 3, 5, ..., p, ... — последовательные простые числа. Тогда, вычитая ряд для $2^{-s}\zeta(s)$ из ряда для $\zeta(s)$, получим

$$\zeta(s)(1-2^{-s}) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \ldots,$$

где отсутствуют все члены ряда $\sum n^{-s}$, в которых n кратно 2; таким же образом находим

$$\zeta(s)(1-2^{-s})(1-3^{-s}) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \ldots,$$

где отсутствуют все члены, в которых n кратно 2 и 3 и т. д., вообще

$$\zeta(s)(1-2^{-s})(1-3^{-s})\ldots(1-p^{-s}) = 1 + \sum{}' n^{-s},$$

где значок $'$ обозначает, что суммирование производится только по значениям n (бóльшим p), взаимно простым с 2, 3, ..., p.

Но [2])

$$\left|\sum{}' n^{-s}\right| \leqslant \sum{}' n^{-1-\delta} \leqslant \sum_{n=p+1}^{\infty} n^{-1-\delta} \to 0, \quad \text{когда} \quad p\to\infty.$$

Поэтому, если $\sigma \geqslant 1+\delta$, *то бесконечное произведение* $\zeta(s)\prod\limits_p(1-p^{-s})$, *где число* p *пробегает только простые числа* 2, 3, 5, ..., *сходится и равно* 1.

---

[1]) Формула для $\zeta(s, a)$, из которой Лерх (Lerch) вывел этот результат, дана в мемуаре, опубликованном Пражской Академией наук. Сокращенное изложение этого мемуара содержится в «Jahrbuch über die Fortschritte der Math.» (1893—1894), 484.

[2]) Первый член $\sum{}'$ соответствует ближайшему простому числу, бóльшему p.

Но произведение $\prod_p (1-p)^{-s}$ сходится, когда $\sigma \geqslant 1+\delta$, ибо оно состоит из части множителей абсолютно сходящегося произведения $\prod_{n=2}^{\infty}(1-n^{-s})$.

Следовательно, мы убеждаемся в том, что $\zeta(s)$ *не имеет нулей, для которых* $\sigma \geqslant 1+\delta$; ибо если бы она имела такие нули, то бесконечное произведение $\prod_p (1-p^{-s})$ в этих нулях расходилось бы.

Поэтому при $\sigma \geqslant 1+\delta$

$$\prod_p \left(1-\frac{1}{p^s}\right)=\frac{1}{\zeta(s)}.$$

Это и есть результат, полученный Эйлером.

13.31. Гипотеза Римана относительно нулей функции $\zeta(s)$

Только было что доказано, что $\zeta(s)$ не имеет нулей при $\sigma > 1$. Из формулы (§ 13.151)

$$\zeta(s)=2^{s-1}\{\Gamma(s)\}^{-1}\sec\left(\frac{1}{2}s\pi\right)\zeta(1-s)$$

теперь видно, что единственными нулями функции $\zeta(s)$ при $\sigma < 0$ будут нули выражения $\{\Gamma(s)\}^{-1}\sec\left(\frac{1}{2}s\pi\right)$, т. е. точки $s=-2, -4, \ldots$

Таким образом, все нули функции $\zeta(s)$, *исключая значения* $s=-2, -4, \ldots$, *лежат в той полосе плоскости комплексной переменной* s, *которая определяется неравенствами* $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$.

Риман высказал предположение, никем пока не доказанное, что все нули функции $\zeta(s)$ в этой полосе лежат на прямой $\sigma=\frac{1}{2}$; Харди[1]) доказал, что бесконечное число нулей функции $\zeta(s)$ действительно лежит на прямой $\sigma=\frac{1}{2}$. Весьма вероятно, что предположение Римана правильно и доказательство его привело бы к весьма важным следствиям теории простых чисел.

13.4. Интеграл Римана для $\zeta(s)$

Легко видеть, что при $\sigma > 0$

$$n^{-s}\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)\pi^{-\frac{1}{2}s}=\int_0^{\infty} e^{-n^2\pi x}x^{\frac{1}{2}s-1}\,dx.$$

---

[1]) Hardy, Comptes Rendus, CLVIII (1914), 1012; см. стр. 80.

Следовательно, при $\sigma > 0$

$$\zeta(s)\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)\pi^{-\frac{1}{2}s} = \lim_{N\to\infty}\int_0^\infty \sum_{n=1}^{N} e^{-n^2\pi x} x^{\frac{1}{2}s-1}\,dx.$$

Если положить

$$\tilde{\omega}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi x},$$

то, на основании примера 17 главы 6 части I (стр. 174),

$$1 + 2\tilde{\omega}(x) = x^{-\frac{1}{2}}\left\{1 + 2\tilde{\omega}\left(\frac{1}{x}\right)\right\}$$

и мы будем иметь $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{1}{2}}\tilde{\omega}(x) = 1$. Отсюда видно, что

$$\int_0^\infty \tilde{\omega}(x)\, x^{\frac{1}{2}s-1}\,dx$$

сходится, когда $\sigma > 1$.

Следовательно, если $\sigma > 2$, *то*

$$\zeta(s)\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)\pi^{-\frac{1}{2}s} = \lim_{N\to\infty}\left[\int_0^\infty \tilde{\omega}(x)\, x^{\frac{1}{2}s-1}\,dx - \int_0^\infty \sum_{n=N+1}^{\infty} e^{-n^2\pi x} x^{\frac{1}{2}s-1}\,dx\right].$$

Далее, как в § 13.12, модуль последнего интеграла не превосходит

$$\int_0^\infty \left\{\sum_{n=N+1}^{\infty} e^{-n(N+1)\pi x}\right\} x^{\frac{1}{2}\sigma-1}\,dx =$$

$$= \int_0^\infty \frac{e^{-(N+1)^2\pi x} x^{\frac{1}{2}\sigma-1}}{1-e^{-(N+1)\pi x}}\,dx < \{\pi(N+1)\}^{-1}\int_0^\infty e^{-(N^2+2N)\pi x} x^{\frac{1}{2}\sigma-2}\,dx =$$

$$= \{\pi(N+1)\}^{-1}\{(N^2+2N)\pi\}^{1-\frac{1}{2}\sigma}\Gamma\left(\frac{1}{2}\sigma - 1\right) \to 0,$$

когда $N\to\infty$, так как $\sigma > 2$.

Итак, когда $\sigma > 2$,

$$\zeta(s)\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)\pi^{-\frac{1}{2}s} = \int_0^\infty \tilde{\omega}(x)\, x^{\frac{1}{2}s-1}\, ds =$$

$$= \int_0^1 \left\{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\tilde{\omega}\left(\frac{1}{x}\right)\right\} x^{\frac{1}{2}s-1}\, dx + \int_1^\infty \tilde{\omega}(x)\, x^{\frac{1}{2}s-1}\, dx =$$

$$= -\frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} + \int_\infty^1 x^{\frac{1}{2}}\tilde{\omega}(x)\, x^{-\frac{1}{2}s+1}\left(-\frac{1}{x^2}\right) dx + \int_1^\infty \tilde{\omega}(x)\, x^{\frac{1}{2}s-1}\, dx.$$

Следовательно,

$$\zeta(s)\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)\pi^{-\frac{1}{2}s} - \frac{1}{s(s-1)} = \int_1^\infty \left(x^{\frac{1}{2}(1-s)} + x^{\frac{1}{2}s}\right) x^{-1}\tilde{\omega}(x)\, dx.$$

Но интеграл в правой части, в силу § 5.32 части I, представляет аналитическую функцию от s для *всех* значений s, так как на пути интегрирования

$$\tilde{\omega}(x) < e^{-\pi x}\sum_{n=0}^\infty e^{-m\pi x} \leqslant e^{-\pi x}(1 - e^{-\pi})^{-1}.$$

Следовательно, по § 5.5 части I, приведенное выше равенство, доказанное для случая $\sigma > 2$, сохраняет силу для всех значений s.

Если положим теперь

$$s = \frac{1}{2} + it, \quad \frac{1}{2}s(s-1)\zeta(s)\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)\pi^{-\frac{1}{2}s} = \xi(t),$$

то получим

$$\xi(t) = \frac{1}{2} - \left(t^2 + \frac{1}{4}\right)\int_1^\infty x^{-\frac{3}{4}}\tilde{\omega}(x)\cos\left(\frac{1}{2}t\lg x\right) dx.$$

Так как интеграл

$$\int_1^\infty x^{-\frac{3}{4}}\tilde{\omega}(x)\left\{\frac{1}{2}\lg x\right\}^n \cos\left(\frac{1}{2}t\lg x + \frac{1}{2}n\pi\right) dx$$

удовлетворяет признаку, приведенному в следствии § 4.44 части I, то мы можем дифференцировать его любое число раз под знаком

интеграла и полагать затем $t = 0$. Отсюда, по теореме Тейлора, имеем для всех значений[1]) t

$$\xi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} t^{2n}.$$

Из рассмотрения последнего интеграла ясно, что a_{2n} вещественные. Полученный результат является основным в исследованиях Римана.

13.5. Неравенства, которым удовлетворяет функция $\zeta(s, a)$ при $\sigma > 0$

Исследуем теперь поведение функции $\zeta(s, a)$ для данных значений σ, когда $t \to \pm\infty$.

Когда $\sigma > 1$, легко видеть, что при любом целом N

$$\zeta(s, a) = \sum_{n=0}^{N} (a+n)^{-s} - \frac{1}{(1-s)(N+a)^{s-1}} - \sum_{n=N}^{\infty} f_n(s),$$

где

$$f_n(s) = \frac{1}{1-s}\left\{\frac{1}{(n+1+a)^{s-1}} - \frac{1}{(n+a)^{s-1}}\right\} - \frac{1}{(n+1+a)^s} =$$

$$= s\int_n^{n+1} \frac{u-n}{(u+a)^{s+1}}\,du.$$

Но при $\sigma > 0$

$$|f_n(s)| \leqslant |s| \int_n^{n+1} \frac{u-n}{(u+a)^{\sigma+1}}\,du < |s| \int_n^{n+1} \frac{du}{(n+a)^{\sigma+1}} = |s|\,(n+a)^{-\sigma-1}.$$

Поэтому $\sum_{n=N}^{\infty} f_n(s)$ при $\sigma > 0$ является равномерно сходящимся рядом аналитических функций, так что и сумма ряда $\sum_{n=N}^{\infty} f_n(s)$ будет аналитической функцией при $\sigma > 0$; следовательно, согласно § 5.5 части I, функция $\zeta(s, a)$ может быть определена при $\sigma > 0$ рядом

$$\zeta(s, a) = \sum_{n=0}^{N} (a+n)^{-s} - \frac{1}{(1-s)(N+a)^{s-1}} - \sum_{n=N}^{\infty} f_n(s).$$

---

[1]) Здесь удобно рассматривать t как комплексное переменное, определяемое равенством $s = \frac{1}{2} + it$; тогда $\xi(t)$ будет целой функцией от t.

Теперь пусть $[t]$ — целая часть $|t|$; возьмем $N=[t]$; тогда

$$|\zeta(s, a)| \leqslant \sum_{n=0}^{[t]} |(a+n)^{-s}| + |\{(1-s)^{-1}([t]+a)^{1-s}\}| + \sum_{n=[t]}^{\infty} |s|(n+a)^{-\sigma-1} <$$

$$< \sum_{n=0}^{[t]} (a+n)^{-\sigma} + |t|^{-1}([t]+a)^{1-\sigma} + |s| \sum_{n=[t]}^{\infty} (n+a)^{-\sigma-1}.$$

Применяя здесь формулу суммирования Маклорена—Коши (§ 4.43, часть I), получим

$$|\zeta(s, a)| < a^{-\sigma} + \int_0^{[t]} (a+x)^{-\sigma}\,dx + |t|^{-1}([t]+a)^{1-\sigma} + |s| \int_{[t]-1}^{\infty} (x+a)^{-\sigma-1}\,dx.$$

Отсюда при $\delta \leqslant \sigma \leqslant 1-\delta$, где $\delta > 0$, имеем

$$|\zeta(s, a)| < a^{-\sigma} + (1-\sigma)^{-1}\{(a+[t])^{1-\sigma} - a^{1-\sigma}\} + |t|^{-1}([t]+a)^{1-\sigma} +$$
$$+ |s|\sigma^{-1}([t]-1+a)^{-\sigma}.$$

Следовательно, $\zeta(s, a) = O(|t|^{1-\sigma})$, *где постоянная, подразумеваемая в символе* O, *не зависит от* s. *Далее, при* $1-\delta \leqslant \sigma \leqslant 1+\delta$ *имеем*

$$|\zeta(s, a)| = O(|t|^{1-\sigma}) + \int_0^{[t]} (a+x)^{-\sigma}\,dx <$$

$$< O(|t|^{1-\sigma}) + \{a^{1-\sigma} + (a+t)^{1-\sigma}\} \int_0^{[t]} (a+x)^{-1}\,dx,$$

так как

$$(a+x)^{-\sigma} \leqslant a^{1-\sigma}(a+x)^{-1} \quad \text{при} \quad \sigma \geqslant 1$$

и

$$(a+x)^{-\sigma} \leqslant (a+[t])^{1-\sigma}(a+x)^{-1} \quad \text{при} \quad \sigma \leqslant 1;$$

следовательно,

$$\zeta(s, a) = O\{|t|^{1-\sigma} \lg|t|\}.$$

При $\sigma \geqslant 1+\delta$

$$|\zeta(s, a)| \leqslant a^{-\sigma} + \sum_{n=1}^{\infty} (a+n)^{-1-\delta} = O(1).$$

13.51. Неравенства, которым удовлетворяет функция $\zeta(s, a)$ при $\sigma \leqslant 0$

Выведем теперь аналогичные неравенства при $\sigma \leqslant \delta$. В случае функции $\zeta(s)$ мы применим соотношение Римана

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \Gamma(1-s)\,\zeta(1-s) \sin\left(\frac{1}{2} s\pi\right).$$

При $\sigma < 1-\delta$ мы имеем, по § 12.33,

$$\Gamma(1-s) = O\left\{e^{\left(\frac{1}{2}-s\right)\lg(1-s)-(1-s)}\right\},$$

и таким образом,

$$\zeta(s) = O\left[\exp\left\{\frac{1}{2}\pi|t| + \left(\frac{1}{2}-\sigma-it\right)\lg|1-s| + i\operatorname{arctg}\frac{t}{1-\sigma}\right\}\right]\zeta(1-s).$$

Так как

$$\operatorname{arctg}\frac{t}{1-\sigma} = \pm\frac{1}{2}\pi + O(t^{-1}),$$

смотря по тому, будет ли t положительно или отрицательно, то из результата, уже полученного для $\zeta(s, a)$, мы видим, что

$$\zeta(s) = O\left\{|t|^{\frac{1}{2}-\sigma}\right\}\zeta(1-s).$$

Для обобщения этого результата на случай функции $\zeta(s, a)$ следует применить формулу Гурвица (§ 13.15); при $\sigma < 0$ имеем

$$\zeta(s, a) = -i(2\pi)^{s-1}\Gamma(1-s)\left[e^{\frac{1}{2}s\pi i}\zeta_a(1-s) - e^{-\frac{1}{2}s\pi i}\zeta_{-a}(1-s)\right],$$

где

$$\zeta_a(1-s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2n\pi ia}}{n^{1-s}}.$$

Отсюда

$$(1-e^{2\pi ia})\zeta_a(1-s) = e^{2\pi ia} + \sum_{n=2}^{N} e^{2n\pi ia}[n^{s-1}-(n-1)^{s-1}] +$$

$$+ (s-1)\sum_{n=N+1}^{\infty} e^{2n\pi ia}\int_{n-1}^{n} u^{s-2}\,du.$$

Так как ряд справа есть равномерно сходящийся ряд аналитических функций, когда $\sigma \leqslant 1-\delta$, то это равенство дает продолжение функции $\zeta_a(1-s)$ в полосу $0 \leqslant \sigma \leqslant 1-\delta$, так что при $\sigma \leqslant 1-\delta$ имеем

$$|\sin \pi a\zeta_a(1-s)| \leqslant 1 + \sum_{n=2}^{N}\{n^{\sigma-1}+(n-1)^{\sigma-1}\} + |s-1|\sum_{n=N+1}^{\infty}\int_{n-1}^{n} u^{\sigma-2}\,du.$$

Взяв $N = [t]$, получим, как в § 13.5,

$$\zeta_a(1-s) = \begin{cases} O(|t|^{\sigma}) & (\delta \leqslant \sigma \leqslant 1-\delta), \\ O(|t|^{\sigma}\lg|t|) & (-\delta \leqslant \sigma \leqslant \delta) \end{cases}$$

и, очевидно,

$$\zeta_a(1-s) = O(1) \qquad (\sigma < -\delta).$$

Следовательно, независимо от того будет ли a равно 1 или нет, имеем результат

$$\zeta(s, a) = \begin{cases} O\left(|t|^{\frac{1}{2}-\sigma}\right) & (\sigma \leqslant \delta), \\ O\left(|t|^{\frac{1}{2}}\right) & (\delta \leqslant \sigma \leqslant 1-\delta), \\ O\left(|t|^{\frac{1}{2}} \lg |t|\right) & (-\delta \leqslant \sigma \leqslant \delta). \end{cases}$$

Мы можем объединить эти результаты и результаты § 13.5 в одну формулу:

$$\zeta(s, a) = O\left(|t|^{\tau(\sigma)} \lg |t|\right),$$

где [1])

$$\tau(\sigma) = \frac{1}{2} - \sigma \quad (\sigma \leqslant 0); \quad \tau(\sigma) = \frac{1}{2} \quad \left(0 \leqslant \sigma \leqslant \frac{1}{2}\right);$$

$$\tau(\sigma) = 1 - \sigma \quad \left(\frac{1}{2} \leqslant \sigma \leqslant 1\right); \quad \tau(\sigma) = 0 \quad (\sigma \geqslant 1);$$

$\lg |t|$ может быть отброшен, за исключением случая, когда $-\delta \leqslant \sigma \leqslant \delta$ или когда $1-\delta \leqslant \sigma \leqslant 1+\delta$.

13.6. Асимптотическое разложение функции $\lg \Gamma(z+a)$

Из примера 3 § 12.1 следует, что

$$\left(1 + \frac{z}{a}\right) \prod_{n=1}^{\infty} \left\{\left(1 + \frac{z}{a+n}\right) e^{-\frac{z}{n}}\right\} = \frac{e^{-\gamma z}\Gamma(a)}{\Gamma(z+a)}.$$

Взяв главные значения логарифма, получим

$$\lg\left(1 + \frac{z}{a}\right) + \lg \prod_{n=1}^{\infty} \left\{\left(1 + \frac{z}{a+n}\right) e^{-\frac{z}{n}}\right\} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{-az}{n(a+n)} + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m} \frac{z^m}{(a+n)^m}\right] + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} z^m}{m a^m}.$$

При $|z| < a$ двойной ряд абсолютно сходится, поскольку сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a|z|}{n(a+n)} - \lg\left(1 - \frac{|z|}{a+n}\right) - \frac{|z|}{a+n}\right].$$

---

[1]) Можно доказать, что $\tau(\sigma)$ может быть взято равным $\frac{1}{2}(1-\sigma)$, когда $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$. См. Landau, Primzahlen, § 237.

Следовательно,

$$\lg \frac{e^{-\gamma z}\Gamma(a)}{\Gamma(z+a)} = \frac{z}{a} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{az}{n(a+n)} + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m} z^m \zeta(m, a).$$

Рассмотрим теперь интеграл

$$\frac{-1}{2\pi i} \int_C \frac{\pi z^s}{s \sin \pi s} \zeta(s, a)\, ds,$$

где за контур интегрирования берется контур, подобный данному в § 12.22 и охватывающий точки $s = 2, 3, 4 \ldots$, но не охватывающий точек $1, 0, -1, -2, \ldots$; вычет подинтегральной функции при $s = m$ $(m \geqslant 2)$ равен $\frac{(-1)^m}{m} z^m \zeta(m, a)$; а так как при $\sigma \to \infty$ (где $s = \sigma + it$) $\zeta(s, a) = O(1)$, то интеграл сходится при $|z| < 1$.

Следовательно,

$$\lg \frac{e^{-\gamma z}\Gamma(a)}{\Gamma(z+a)} = \frac{z}{a} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{az}{n(a+n)} - \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\pi z^s}{s \sin \pi s} \zeta(s, a)\, ds,$$

откуда

$$\lg \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(z+a)} = -z \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} - \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\pi z^s}{s \sin \pi s} \zeta(s, a)\, ds.$$

Пусть D — полуокружность (большого) радиуса N с центром в $s = \frac{3}{2}$, лежащая справа от прямой $\sigma = \frac{3}{2}$. На этой полуокружности $\zeta(s, a) = O(1)$, $|z^s| = |z|^\sigma e^{-t \arg z}$ и, таким образом, подинтегральная функция будет[1])

$$O\left\{|z|^\sigma e^{-\pi|t| - t \arg z}\right\}.$$

Отсюда следует, что при $|z| < 1$ и $-\pi + \delta \leqslant \arg z \leqslant \pi - \delta$, где δ — положительное число, подинтегральная функция будет $O(|z|^\sigma e^{-\delta|t|})$ и, значит, интеграл

$$\int_D \frac{\pi z^s}{s \sin \pi s} \zeta(s, a)\, ds \to 0$$

при $N \to \infty$. Отсюда сразу заключаем, что при $|\arg z| \leqslant \pi - \delta$ и $|z| < 1$

$$\lg \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(z+a)} = -z \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{3}{2} - \infty i}^{\frac{3}{2} + \infty i} \frac{\pi z^s}{s \sin \pi s} \zeta(s, a)\, ds.$$

---

[1]) Постоянные, содержащиеся в символе O, всюду не зависят от s и z.

Но входящий сюда интеграл определяет аналитическую функцию от z для всех значений $|z|$, для которых

$$|\arg z| \leqslant \pi - \delta.$$

Следовательно, по § 5.5 части I вышеприведенное равенство, доказанное для случая $|z| < 1$, сохраняет силу для всех значений $|z|$, для которых $|\arg z| \leqslant \pi - \delta$.

Рассмотрим теперь интеграл

$$\int\limits_{-n-\frac{1}{2} \pm Ri}^{\frac{3}{2} \pm Ri} \frac{\pi z^s}{s \sin \pi s} \zeta(s, a)\, ds,$$

где n — фиксированное целое число, и заставим R стремиться к бесконечности. По § 13.51 подинтегральная функция будет

$$O\left\{z^\sigma e^{-\delta R} R^{\tau(\sigma)}\right\}, \quad \text{где} \quad -n - \frac{1}{2} \leqslant \sigma \leqslant \frac{3}{2};$$

отсюда независимо от того, берем ли мы верхние или нижние знаки у пределов, интеграл стремится к нулю, когда $R \to \infty$. Поэтому по теореме Коши

$$\lg \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(z+a)} = -z \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-n-\frac{1}{2}-\infty i}^{-n-\frac{1}{2}+\infty i} \frac{\pi z^s}{s \sin \pi s} \zeta(s, a)\, ds + \sum_{m=-1}^{n} R_m,$$

где R_m — вычет подинтегральной функции при $s = -m$.

Далее, на новом пути интегрирования

$$\left| \frac{\pi z^s}{s \sin \pi s} \zeta(s, a) \right| < K z^{-n-\frac{1}{2}} e^{-\delta |t|} |t|^{\tau\left(-n-\frac{1}{2}\right)},$$

где K не зависит от z и t, а $\tau(\sigma)$ — функция, определенная в § 13.51.

Следовательно, так как интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\delta |t|} |t|^{\tau\left(-n-\frac{1}{2}\right)} dt$$

сходится, то мы имеем

$$\lg \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(z+a)} = -z \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} + \sum_{m=-1}^{n} R_m + O\left(z^{-n-\frac{1}{2}}\right),$$

когда $|z|$ велик.

Но, когда m — положительное целое число,

$$R_m = \frac{(-1)^m z^{-m}\zeta(-m, a)}{-m},$$

и таким образом, по § 13.14

$$R_m = \frac{(-1)^m z^{-m}\varphi'_{m+2}(a)}{m(m+1)(m+2)},$$

где $\varphi'_m(a)$ — производная от полинома Бернулли.

Далее, R_0 есть вычет выражения

$$\frac{1}{s}\left(1+\frac{\pi^2 s^2}{6}+\ldots\right)(1+s\lg z+\ldots)\left\{\frac{1}{2}-a+s\zeta'(0, a)+\ldots\right\}$$

при $s=0$; следовательно, в силу § 13.21

$$R_0 = \left(\frac{1}{2}-a\right)\lg z+\zeta'(0, a) = \left(\frac{1}{2}-a\right)\lg z+\lg\Gamma(a)-\frac{1}{2}\lg 2\pi.$$

Наконец, по § 13.21 R_{-1} есть вычет выражения

$$-\frac{1}{S}(1-S+S^2-\ldots)\left(1+\frac{\pi^2 S^2}{6}+\ldots\right)\times$$
$$\times z(1+S\lg z+\ldots)\left(\frac{1}{S}-\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}+\ldots\right)$$

при $S=0$ [1]).

Отсюда

$$R_{-1} = -z\lg z+z\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}+z.$$

Окончательно, если $|\arg z|\leqslant\pi-\delta$ и $|z|$ велик,

$$\lg\Gamma(z+a) = \left(z+a-\frac{1}{2}\right)\lg z-z+\frac{1}{2}\lg 2\pi+$$
$$+\sum_{m=1}^{n}\frac{(-1)^{m-1}\varphi'_{m+2}(a)}{m(m+1)(m+2)z^m}+O\left(z^{-n-\frac{1}{2}}\right).$$

В частном случае, когда $a=1$, эта формула переходит в формулу, найденную в § 12.33 для более ограниченной области значений $\arg z$.

Только что полученное асимптотическое разложение пригодно и тогда, когда a не ограничено неравенством $0<a\leqslant 1$, но исследование этого случая основывается на более изощренных методах, необходимых для получения неравенств, имеющих место для функции $\zeta(s, a)$, когда a не удовлетворяет неравенству $0<a\leqslant 1$.

---

[1]) Полагаем $s=S+1$.

Однако если в полученной формуле положить $a=1$ и затем заменить z на $z+a$, то легко видеть, что при $|\arg(z+a)|\leqslant\pi-\delta$ мы получим

$$\lg\Gamma(z+a+1)=\left(z+a+\frac{1}{2}\right)\lg(z+a)-z-a+\frac{1}{2}\lg 2\pi+o(1).$$

Вычитая по $\lg(z+a)$ из обеих частей, легко видеть, что, когда

$$|\arg(z+a)|\leqslant\pi-\delta \quad \text{и} \quad |\arg z|\leqslant\pi-\delta,$$

мы получим асимптотическую формулу

$$\lg\Gamma(z+a)=\left(z+a-\frac{1}{2}\right)\lg z-z+\frac{1}{2}\lg 2\pi+o(1),$$

причем выражение $o(1)$ стремится к нулю при $|z|\to\infty$.

ЛИТЕРАТУРА

G. F. B. Riemann, Ges. Werke, 145—155.
E. G. H. Landau, Handbuch der Primzahlen (Leipzig, 1909).
E. L. Lindelöf, Le Calcul des Résidus, гл. IV (Paris, 1905).
E. W. Barnes, Messenger of Mathematics. XXIX (1899), 64—128.
G. H. Hardy and J. E. Littlewood, Acta Mathematica, XLI (1917), 119—196.

Примеры

1. Показать, что

$$(2^s-1)\zeta(s)=\frac{2^{s-1}s}{s-1}+2\int_0^\infty\left(\frac{1}{4}+y^2\right)^{-\frac{1}{2}s}\sin(s\operatorname{arctg}2y)\frac{dy}{e^{2\pi y}-1}.$$

(Jensen, L'Intermédiaire des Math. (1895), 346)

2. Показать, что

$$\zeta(s)=\frac{2^{s-1}}{s-1}-2^s\int_0^\infty(1+y^2)^{-\frac{1}{2}s}\sin(s\operatorname{arctg}y)\frac{dy}{e^{\pi y}+1}.$$

(Jensen)

3. Рассмотреть асимптотическое разложение функции $\lg G(z+a)$ (глава 12, пример 48) при помощи обобщенной дзета-функции.

(Barnes)

4. Показать, что при $\sigma>1$

$$\ln\zeta(s)=\sum_p\sum_{m=1}^\infty\frac{1}{mp^{ms}},$$

где суммирование распространяется на все простые числа $p=2, 3, 5, \ldots$

(Dirichlet, Journal de Math., IV (1839), 407)

5. Показать, что при $\sigma > 1$

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s},$$

где $\Lambda(n) = 0$, когда n не есть степень простого числа, $\Lambda(n) = \lg p$, когда n — степень простого числа p.

6. Доказать, что

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-x^2}\,dx}{\left(1+\frac{w^2}{4x^2}\right)^{\frac{1}{2}s}} = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)} \int_0^{\infty} e^{-x^2-wx} x^{s-1}\,dx.$$

(Lerch, Kraków Rozprawy, [1]), II)

7. Пусть

$$\varphi(s, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^s},$$

где $|x| < 1$ и вещественная часть s положительна; показать, что

$$\varphi(s, x) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{xz^{s-1}\,dz}{e^z - x}$$

и если $s < 1$, то

$$\lim_{x \to 1} (1-x)^{1-s} \varphi(s, x) = \Gamma(1-s).$$

(Appell, Comptes Rendus, LXXXVII)

8. Пусть x, a и s вещественны, $0 < a < 1$, $s > 1$, и пусть

$$\varphi(x, a, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{2n\pi i x}}{(a+n)^s};$$

показать, что

$$\varphi(x, a, s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{e^{-az} z^{s-1}\,dz}{1 - e^{2\pi i x - z}}$$

и

$$\varphi(x, a, 1-s) = \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s} \left\{ e^{\pi i\left(\frac{1}{2}s - 2ax\right)} \varphi(-a, x, s) + \right.$$
$$\left. + e^{\pi i\left\{-\frac{1}{2}s + 2a(1-x)\right\}} \varphi(a, 1-x, s) \right\}.$$

(Lerch, Acta Math., XI)

---

[1]) См. Jahrbuch über die Fortschritte der Math. (1893—1894), 482.

9. Вычисляя вычеты в полюсах слева от прямой линии, принятой за контур, показать, что при $k > 0$ и $|\arg y| < \frac{1}{2}\pi$

$$e^{-y} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{k-\infty i}^{k+\infty i} \Gamma(u)\, y^{-u}\, du,$$

и вывести отсюда, что если $k > \frac{1}{2}$, то

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{k-\infty i}^{k+\infty i} \Gamma(u)\,(\pi x)^{-u}\,\zeta(2u)\, du = \tilde{\omega}(x),$$

а отсюда, в свою очередь, получить формулу

$$\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{ch}\frac{1}{2}\alpha t}{t^2+\frac{1}{4}}\,\xi(t)\,dt = \pi\cos\frac{1}{4}\alpha - \frac{1}{2}\pi e^{\frac{1}{4}i\alpha}\{1+2\tilde{\omega}(e^{i\alpha})\},$$

где α — острый угол.

(Hardy)

10. Дифференцируя $2n$ раз под знаком интеграла в последнем результате примера 9 и переходя к пределу при $\alpha \to \frac{1}{2}\pi$, вывести из примера 17 на стр. 174 части I, что

$$\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{ch}\frac{1}{4}\pi t}{t^2+\frac{1}{4}}\, t^{2n}\xi(t)\,dt = \frac{(-1)^n\pi}{2^{2n}}\cos\frac{\pi}{8}.$$

Беря большие n, показать, что не существует числа t_0 такого, что $\xi(t)$ сохраняет постоянный знак при $t > t_0$, и вывести отсюда, что $\zeta(s)$ имеет бесконечное число нулей на прямой $\sigma = \frac{1}{2}$,

(Hardy)

[Харди и Литлвуд (Hardy and Littlewood, Proc. London Math. Soc., XIX (1920)) показали, что число нулей на прямой $\sigma = \frac{1}{2}$, для которых $0 < t < T$, будет по меньшей мере $O(T)$, когда $T \to \infty$; если гипотеза Римана верна, то это число будет $\frac{1}{2\pi} T \lg T - \frac{1+\lg 2\pi}{2\pi} T + O(\lg T)$; см. Landau, Primzahlen, I, 370.]

ГЛАВА 14

ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ

14.1. Гипергеометрический ряд

В § 2.38 части I мы уже рассмотрели вопрос о сходимости *гипергеометрического ряда*[1])

$$1+\frac{a\cdot b}{1\cdot c}z+\frac{a(a+1)b(b+1)}{1\cdot 2\cdot c(c+1)}z^2+$$
$$+\frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot c(c+1)(c+2)}z^3+\ldots$$

Из § 2.38 и § 5.3 части I следует, что этот ряд определяет функцию, которая будет аналитической при $|z|<1$. Ниже будет показано (§ 14.53), что эта функция имеет точку ветвления при $z=1$ и что если сделан разрез[2]) (т. е. непереходимый барьер) от $+1$ до $+\infty$ вдоль вещественной оси, то функция будет аналитической и однозначной во всей разрезанной плоскости. Она обозначается символом $F(a, b; c; z)$.

Многие важные функции, встречающиеся в анализе, могут быть выражены при помощи гипергеометрических функций, например[3]):

$$(1+z)^n=F(-n, \beta; \beta; -z),$$
$$\lg(1+z)=zF(1, 1; 2; -z),$$
$$e^z=\lim_{\beta\to\infty}F\left(1, \beta; 1; \frac{z}{\beta}\right),$$

---

[1]) Это название было дано Валлисом в 1655 г. ряду, n-й член которого есть $a\{a+b\}\{a+2b\}\ldots\{a+(n-1)b\}$. Эйлер применял термин «гипергеометрический» в этом же смысле; современное применение термина, по-видимому, принадлежит Куммеру (Kummer, Journ. für Math. XV (1836)).

[2]) Говорят, что плоскость переменной z разрезана вдоль кривой, когда удобно рассматривать только такие изменения z, при которых z не переходит через эту кривую, так что разрез можно рассматривать как непереходимый барьер.

[3]) Построение строгого доказательства для третьего примера может послужить читателю хорошим упражнением.

Пример. Показать, что

$$\frac{d}{dz}F(a, b; c; z) = \frac{ab}{c}F(a+1, b+1; c+1; z).$$

14.11. Значение[1]) функции $F(a, b; c; 1)$ при $\operatorname{Re}(c-a-b)>0$

Рассматривая коэффициенты при x^n в соответствующих рядах, легко убедиться, что при $0 \leqslant x < 1$

$$\begin{aligned} c\{c-1-(2c-a-b-1)x\}F(a, b; c; x)+ \\ +(c-a)(c-b)xF(a, b; c+1; x)= \\ =c(c-1)(1-x)F(a, b; c-1; x)= \\ =c(c-1)\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}(u_n-u_{n-1})x^n\right\}, \end{aligned}$$

где u_n — коэффициент при x^n в $F(a, b; c-1; x)$. Заставим теперь $x \to 1$. В силу результата § 3.71 части I выражение в правой части стремится к нулю, если $1+\sum_{n=1}^{\infty}(u_n-u_{n-1})$ сходится к нулю, т. е. если $u_n \to 0$, что и имеет место в том случае, когда $\operatorname{Re}(c-a-b)>0$.

Левая же часть по § 2.38 и § 3.71 части I при тех же самых условиях стремится к

$$c(a+b-c)F(a, b; c; 1)+(c-a)(c-b)F(a, b; c+1; 1),$$

и следовательно,

$$F(a, b; c; 1)=\frac{(c-a)(c-b)}{c(c-a-b)}F(a, b; c+1; 1).$$

Повторяя эту операцию, видим, что

$$\begin{aligned} F(a, b; c; 1)=\left\{\prod_{n=0}^{m-1}\frac{(c-a+n)(c-b+n)}{(c+n)(c-a-b+n)}\right\}F(a, b; c+m; 1)= \\ =\left\{\lim_{m\to\infty}\prod_{n=0}^{m-1}\frac{(c-a+n)(c-b+n)}{(c+n)(c-a-b+n)}\right\}\lim_{m\to\infty}F(a, b; c+m; 1), \end{aligned}$$

если эти два предела существуют.

Но (§ 12.13) первый предел равен

$$\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)},$$

---

[1]) Этот анализ принадлежит Гауссу. Способ, более легкий для запоминания, но более трудный в смысле доказательства, дан в примере 2 § 14.6.

если c не есть отрицательное целое число; далее, если обозначим через $u_n(a, b, c)$ коэффициент при x^n в $F(a, b; c; x)$, то при $m > |c|$ имеем

$$|F(a, b; c+m; 1) - 1| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |u_n(a, b, c+m)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} u_n(|a|, |b|, m-|c|) <$$

$$< \frac{|ab|}{m-|c|} \sum_{n=0}^{\infty} u_n(|a|+1, |b|+1, m+1-|c|).$$

Последний ряд сходится при $m > |c| + |a| + |b| - 1$ и представляет положительную убывающую функцию от m; поэтому, так как $\{m - |c|\}^{-1} \to 0$, мы имеем

$$\lim_{m \to \infty} F(a, b; c+m; 1) = 1$$

и окончательно

$$F(a, b; c; 1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}.$$

14.2. Дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция $F(a, b; c; z)$

По способу § 10.3 части I легко убедиться, что гипергеометрический ряд является вблизи $z = 0$ интегралом *гипергеометрического уравнения*[1])

$$z(1-z)\frac{d^2u}{dz^2} + \{c - (a+b+1)z\}\frac{du}{dz} - abu = 0.$$

По § 10.3 части I видно, что всякая точка есть «обыкновенная точка» этого уравнения, за исключением 0, 1, ∞, и что последние являются «правильными особыми точками».

Пример. Показать, что одним из интегралов уравнения

$$z\left(z\frac{d}{dz} + a\right)\left(z\frac{d}{dz} + b\right)u - \left(z\frac{d}{dz} - \alpha\right)\left(z\frac{d}{dz} - \beta\right)u = 0$$

является

$$z^{\alpha}F(a+\alpha; b+\alpha; \alpha-\beta+1; z).$$

---

[1]) Это уравнение было дано Гауссом.

14.3. Решения P-уравнения Римана при помощи гипергеометрических функций

В § 10.72 части I было отмечено, что дифференциальное уравнение Римана [1])

$$\frac{d^2u}{dz^2}+\left\{\frac{1-\alpha-\alpha'}{z-a}+\frac{1-\beta-\beta'}{z-b}+\frac{1-\gamma-\gamma'}{z-c}\right\}\frac{du}{dz}+$$
$$+\left\{\frac{\alpha\alpha'(a-b)(a-c)}{z-a}+\frac{\beta\beta'(b-c)(b-a)}{z-b}+\right.$$
$$\left.+\frac{\gamma\gamma'(c-a)(c-b)}{z-c}\right\}\frac{u}{(z-a)(z-b)(z-c)}=0$$

при соответственной замене переменных может быть приведено к гипергеометрическому уравнению. Выполняя эту замену, мы видим, что решением уравнения Римана будет

$$\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^{\alpha}\left(\frac{z-c}{z-b}\right)^{\gamma}F\left\{\alpha+\beta+\gamma,\ \alpha+\beta'+\gamma;\ 1+\alpha-\alpha';\ \frac{(z-a)(c-b)}{(z-b)(c-a)}\right\},$$

где предполагается, что $\alpha-\alpha'$ не есть целое отрицательное число.

Для простоты мы будем предполагать во всей этой главе, что ни одна из разностей показателей $\alpha-\alpha'$, $\beta-\beta'$, $\gamma-\gamma'$ не будет нулем или целым числом, так как (§ 10.32, часть I) в этом исключительном случае в общее решение дифференциального уравнения могут входить логарифмические члены. Формулы для этого исключительного случая можно найти в мемуаре [2]) Линделёфа, к которому мы и отсылаем читателя.

Если теперь в полученном выражении переставить местами α и α' или γ и γ', то оно должно все же удовлетворять уравнению Римана, так как такая замена не изменяет этого уравнения.

Таким образом, мы получим в итоге четыре выражения, а именно:

$$u_1=\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^{\alpha}\left(\frac{z-c}{z-b}\right)^{\gamma}F\left\{\alpha+\beta+\gamma,\ \alpha+\beta'+\gamma;\ 1+\alpha-\alpha';\ \frac{(c-b)(z-a)}{(c-a)(z-b)}\right\},$$
$$u_2=\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^{\alpha'}\left(\frac{z-c}{z-b}\right)^{\gamma}F\left\{\alpha'+\beta+\gamma,\ \alpha'+\beta'+\gamma;\ 1+\alpha'-\alpha;\ \frac{(c-b)(z-a)}{(c-a)(z-b)}\right\},$$
$$u_3=\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^{\alpha}\left(\frac{z-c}{z-b}\right)^{\gamma'}F\left\{\alpha+\beta+\gamma',\ \alpha+\beta'+\gamma';\ 1+\alpha-\alpha';\ \frac{(c-b)(z-a)}{(c-a)(z-b)}\right\},$$
$$u_4=\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^{\alpha'}\left(\frac{z-c}{z-b}\right)^{\gamma'}F\left\{\alpha'+\beta+\gamma',\ \alpha'+\beta'+\gamma';\ 1+\alpha'-\alpha;\ \frac{(c-b)(z-a)}{(c-a)(z-b)}\right\},$$

---

[1]) Постоянные подчиняются условию

$$\alpha+\alpha'+\beta+\beta'+\gamma+\gamma'=1.$$

[2]) Lindelöf, Acta Soc. Scient. Fennicae, XIX (1893). См. также стеклографированные лекции Клейна (Klein, Ueber die hypergeometrische Funktion, Leipzig, Teubner, 1906).

которые являются решениями рассматриваемого дифференциального уравнения.

Кроме того, дифференциальное уравнение не изменится, если тройки чисел (α, α', a); (β, β', b); (γ, γ', c) как-либо переставить. Поэтому, если мы произведем такие перестановки в вышеприведенных решениях, то они все же останутся решениями дифференциального уравнения.

Имеется пять таких перестановок, ибо мы можем написать $\{b, c, a\}$, $\{c, a, b\}$, $\{a, c, b\}$, $\{c, b, a\}$, $\{b, a, c\}$ вместо $\{a, b, c\}$ и сделать соответственные перестановки α, α'; β, β'; γ, γ'. Таким образом, мы получим $4 \times 5 = 20$ новых выражений, которые вместе с четырьмя предыдущими дают двадцать четыре частных решения уравнения Римана, выраженных через гипергеометрические ряды.

Двадцать новых решений можно записать следующим образом:

$$\left\{\begin{aligned}
u_5 &= \left(\frac{z-b}{z-c}\right)^{\beta}\left(\frac{z-a}{z-c}\right)^{\alpha} F\left\{\beta+\gamma+\alpha,\ \beta+\gamma'+\alpha';\ 1+\beta-\beta';\ \frac{(a-c)(z-b)}{(a-b)(z-c)}\right\},\\
u_6 &= \left(\frac{z-b}{z-c}\right)^{\beta'}\left(\frac{z-a}{z-c}\right)^{\alpha} F\left\{\beta'+\gamma+\alpha,\ \beta'+\gamma'+\alpha;\ 1+\beta'-\beta;\ \frac{(a-c)(z-b)}{(a-b)(z-c)}\right\},\\
u_7 &= \left(\frac{z-b}{z-c}\right)^{\beta}\left(\frac{z-a}{z-c}\right)^{\alpha'} F\left\{\beta+\gamma+\alpha',\ \beta+\gamma'+\alpha';\ 1+\beta-\beta';\ \frac{(a-c)(z-b)}{(a-b)(z-c)}\right\},\\
u_8 &= \left(\frac{z-b}{z-c}\right)^{\beta'}\left(\frac{z-a}{z-c}\right)^{\alpha'} F\left\{\beta'+\gamma+\alpha',\ \beta'+\gamma'+\alpha';\ 1+\beta'-\beta;\ \frac{(a-c)(z-b)}{(a-b)(z-c)}\right\},
\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}
u_9 &= \left(\frac{z-c}{z-a}\right)^{\gamma}\left(\frac{z-b}{z-a}\right)^{\beta} F\left\{\gamma+\alpha+\beta,\ \gamma+\alpha'+\beta;\ 1+\gamma-\gamma';\ \frac{(b-a)(z-c)}{(b-c)(z-a)}\right\},\\
u_{10} &= \left(\frac{z-c}{z-a}\right)^{\gamma'}\left(\frac{z-b}{z-a}\right)^{\beta} F\left\{\gamma'+\alpha+\beta,\ \gamma'+\alpha'+\beta;\ 1+\gamma'-\gamma;\ \frac{(b-a)(z-c)}{(b-c)(z-a)}\right\},\\
u_{11} &= \left(\frac{z-c}{z-a}\right)^{\gamma}\left(\frac{z-b}{z-a}\right)^{\beta'} F\left\{\gamma+\alpha+\beta',\ \gamma+\alpha'+\beta';\ 1+\gamma-\gamma';\ \frac{(b-a)(z-c)}{(b-c)(z-a)}\right\},\\
u_{12} &= \left(\frac{z-c}{z-a}\right)^{\gamma'}\left(\frac{z-b}{z-a}\right)^{\beta'} F\left\{\gamma'+\alpha+\beta',\ \gamma'+\alpha'+\beta';\ 1+\gamma'-\gamma;\ \frac{(b-a)(z-c)}{(b-c)(z-a)}\right\},
\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}
u_{13} &= \left(\frac{z-a}{z-c}\right)^{\alpha}\left(\frac{z-b}{z-c}\right)^{\beta} F\left\{\alpha+\gamma+\beta,\ \alpha+\gamma'+\beta;\ 1+\alpha-\alpha';\ \frac{(b-c)(z-a)}{(b-a)(z-c)}\right\},\\
u_{14} &= \left(\frac{z-a}{z-c}\right)^{\alpha'}\left(\frac{z-b}{z-c}\right)^{\beta} F\left\{\alpha'+\gamma+\beta,\ \alpha'+\gamma'+\beta;\ 1+\alpha'-\alpha;\ \frac{(b-c)(z-a)}{(b-a)(z-c)}\right\},\\
u_{15} &= \left(\frac{z-a}{z-c}\right)^{\alpha}\left(\frac{z-b}{z-c}\right)^{\beta'} F\left\{\alpha+\gamma+\beta',\ \alpha+\gamma'+\beta';\ 1+\alpha-\alpha';\ \frac{(b-c)(z-a)}{(b-a)(z-c)}\right\},\\
u_{16} &= \left(\frac{z-a}{z-c}\right)^{\alpha'}\left(\frac{z-b}{z-c}\right)^{\beta'} F\left\{\alpha'+\gamma+\beta',\ \alpha'+\gamma'+\beta';\ 1+\alpha'-\alpha;\ \frac{(b-c)(z-a)}{(b-a)(z-c)}\right\},
\end{aligned}\right.$$

$$\begin{cases} u_{17} = \left(\frac{z-c}{z-b}\right)^{\gamma}\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^{\alpha} F\left\{\gamma+\beta+\alpha,\ \gamma+\beta'+\alpha;\ 1+\gamma-\gamma';\ \frac{(a-b)(z-c)}{(a-c)(z-b)}\right\}, \\ u_{18} = \left(\frac{z-c}{z-b}\right)^{\gamma'}\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^{\alpha} F\left\{\gamma'+\beta+\alpha,\ \gamma'+\beta'+\alpha;\ 1+\gamma'-\gamma;\ \frac{(a-b)(z-c)}{(a-c)(z-b)}\right\}, \\ u_{19} = \left(\frac{z-c}{z-b}\right)^{\gamma}\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^{\alpha'} F\left\{\gamma+\beta+\alpha',\ \gamma+\beta'+\alpha';\ 1+\gamma-\gamma';\ \frac{(a-b)(z-c)}{(a-c)(z-b)}\right\}, \\ u_{20} = \left(\frac{z-c}{z-b}\right)^{\gamma'}\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^{\alpha'} F\left\{\gamma'+\beta+\alpha',\ \gamma'+\beta'+\alpha';\ 1+\gamma'-\gamma;\ \frac{(a-b)(z-c)}{(a-c)(z-b)}\right\}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{21} = \left(\frac{z-b}{z-a}\right)^{\beta}\left(\frac{z-c}{z-a}\right)^{\gamma} F\left\{\beta+\alpha+\gamma,\ \beta+\alpha'+\gamma;\ 1+\beta-\beta';\ \frac{(c-a)(z-b)}{(c-b)(z-a)}\right\}, \\ u_{22} = \left(\frac{z-b}{z-a}\right)^{\beta'}\left(\frac{z-c}{z-a}\right)^{\gamma} F\left\{\beta'+\alpha+\gamma,\ \beta'+\alpha'+\gamma;\ 1+\beta'-\beta;\ \frac{(c-a)(z-b)}{(c-b)(z-a)}\right\}, \\ u_{23} = \left(\frac{z-b}{z-a}\right)^{\beta}\left(\frac{z-c}{z-a}\right)^{\gamma'} F\left\{\beta+\alpha+\gamma',\ \beta+\alpha'+\gamma';\ 1+\beta-\beta';\ \frac{(c-a)(z-b)}{(c-b)(z-a)}\right\}, \\ u_{24} = \left(\frac{z-b}{z-a}\right)^{\beta'}\left(\frac{z-c}{z-a}\right)^{\gamma'} F\left\{\beta'+\alpha+\gamma',\ \beta'+\alpha'+\gamma';\ 1+\beta'-\beta;\ \frac{(c-a)(z-b)}{(c-b)(z-a)}\right\}. \end{cases}$$

Заменяя α, α', β, β', γ, γ', $\frac{(z-a)(c-b)}{(z-b)(c-a)}$ соответственно через 0, $1-C$, A, B, 0, $C-A-B$, x, мы получим 24 решения гипергеометрического уравнения, которому удовлетворяет $F(A, B; C; x)$.

Существование этих 24 решений впервые было доказано Куммером [1]).

14.4. Соотношения между частными решениями гипергеометрического уравнения

Нами было только что показано, что 24 выражения, заключающие в себе гипергеометрические ряды, являются решениями гипергеометрического уравнения; но из общей теории линейных дифференциальных уравнений второго порядка известно, что если какие-либо три из них имеют общую область существования, то должно существовать линейное соотношение с постоянными коэффициентами, связывающее эти три решения.

Если мы упростим u_1, u_2, u_3, u_4, u_{17}, u_{18}, u_{21}, u_{22} способом, указанным в конце § 14.3, то получим следующие решения гипергео-

---

[1]) Kummer; Journ. für Math. XV (1836), 39—83, 127—172. Они были получены другим способом Форсайтом (Forsyth, Treatise on Differential Equations, гл. VI).

метрического уравнения с элементами A, B, C, x:

$$y_1 = F(A, B; C; x),$$
$$y_2 = (-x)^{1-C} F(A-C+1, B-C+1; 2-C; x),$$
$$y_3 = (1-x)^{C-A-B} F(C-B, C-A; C; x),$$
$$y_4 = (-x)^{1-C} (1-x)^{C-A-B} F(1-B, 1-A; 2-C; x),$$
$$y_{17} = F(A, B; A+B-C+1; 1-x),$$
$$y_{18} = (1-x)^{C-A-B} F(C-B, C-A; C-A-B+1; 1-x),$$
$$y_{21} = (-x)^{-B} F(A, A-C+1; A-B+1; x^{-1}),$$
$$y_{22} = (-x)^{-A} F(B, B-C+1; B-A+1; x^{-1}).$$

Если $|\arg(1-x)| < \pi$, то легко видеть из § 2.53 части I, что при $|x| < 1$ соотношения, связывающие y_1, y_2, y_3, y_4, должны быть вида $y_1 = y_3$, $y_2 = y_4$; это следует из рассмотрения вида разложений содержащихся в них рядов вблизи $x = 0$.

Подобным же образом мы можем сгруппировать функции $u_1, \ldots, u_{24}$ в шесть групп по четыре в каждой [1]), именно:

$$u_1,\ u_3,\ u_{13},\ u_{15};\quad u_2,\ u_4,\ u_{14},\ u_{16};\quad u_5,\ u_7,\ u_{21},\ u_{23};$$
$$u_6,\ u_8,\ u_{22},\ u_{24};\quad u_9,\ u_{11},\ u_{17},\ u_{19};\quad u_{10},\ u_{12},\ u_{18},\ u_{20},$$

таким образом, что члены одной и той же группы будут отличаться друг от друга постоянными множителями в подходящей области. В частности, отметим, что u_1, u_3, u_{13}, u_{15} отличаются постоянным множителем от функции, которая (согласно §§ 5.4, 2.53 части I) может быть разложена в ряд

$$(z-a)^{\alpha} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} e_n (z-a)^n \right\}$$

при $|z-a|$ достаточно малом; если $\arg(z-a)$ ограничен так, что функция $(z-a)^{\alpha}$ будет однозначной, то это решение уравнения Римана обозначается обычно через $P^{(\alpha)}$. Подобным же образом определяются $P^{(\alpha')}$, $P^{(\beta)}$, $P^{(\beta')}$, $P^{(\gamma)}$, $P^{(\gamma')}$ при достаточно малых $|z-a|$, $|z-b|$, $|z-c|$ соответственно.

Значительно труднее получить соотношения, связывающие три решения различных групп. Эти соотношения получаются при помощи

---

[1]) Частная формула $F(A, 1; C; x) = \frac{1}{1-x} F\left(C-A, 1; C; \frac{x}{x-1}\right)$, которую можно вывести из соотношения, связывающего u_1 с u_{13}, была открыта в 1730 г. Стирлингом (Stirling, Methodus Differentialis, предл. VII).

преобразований интегралов, взятых по двойным петлям, которые будут получены ниже, в § 14.61; но более простой и чрезвычайно изящный способ был недавно открыт Барнсом; мы дадим краткое изложение этого способа.

14.5. Контурные интегралы Барнса для гипергеометрической функции [1])

Рассмотрим интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty i}^{\infty i}\frac{\Gamma(a+s)\,\Gamma(b+s)\,\Gamma(-s)}{\Gamma(c+s)}(-z)^s\,ds,$$

где $|\arg(-z)|<\pi$ и путь интегрирования искривлен (если это необходимо) для обеспечения того, чтобы полюсы функции

$$\Gamma(a+s)\,\Gamma(b+s),$$

т. е. $s=-a-n$, $-b-n$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$, лежали слева от пути и полюсы функции $\Gamma(-s)$, т. е. $s=0, 1, 2, \ldots$, лежали справа от пути [2]).

Из § 13.6 следует, что подинтегральная функция будет

$$O\left[|s|^{a+b-c-1}\exp\{-\arg(-z)\cdot\operatorname{Im}s-\pi\,|\operatorname{Im}s|\}\right],$$

когда $s\to\infty$ на контуре; отсюда легко видеть (§ 5.32, часть I), что подинтегральная функция является аналитической функцией от z во всей области, определяемой неравенством $|\arg z|\leqslant\pi-\delta$, где δ — произвольное положительное число.

Теперь, принимая во внимание соотношение

$$\Gamma(-s)\,\Gamma(1+s)=-\pi\operatorname{cosec}s\pi,$$

рассмотрим интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C}\frac{\Gamma(a+s)\,\Gamma(b+s)\,\pi(-z)^s}{\Gamma(c+s)\,\Gamma(1+s)\sin s\pi}\,ds,$$

где C — полуокружность радиуса $N+\frac{1}{2}$ справа от мнимой оси с центром в начале координат и N — целое число.

---

[1]) Barnes, Proc. London Math. Soc. (2), VI (1908), 141—177. Библиография более ранних работ по сходным вопросам — Пинкерле (Pincherle), Меллина (Mellin) и Барнса (Barnes) — дана там же.

[2]) Предполагается, что a и b таковы, что контур может быть проведен, т. е. что a и b не являются целыми отрицательными числами (в каковом случае гипергеометрический ряд будет просто полиномом).

По § 13.6 мы имеем

$$\frac{\Gamma(a+s)\,\Gamma(b+s)\,\pi(-z)^s}{\Gamma(c+s)\,\Gamma(1+s)\sin s\pi} = O\left(N^{a+b-c-1}\right)\frac{(-z)^s}{\sin s\pi},$$

когда $N \to \infty$; постоянная, заключающаяся в символе O, не зависит от $\arg s$, когда s находится на рассматриваемой полуокружности; полагая $s = \left(N+\frac{1}{2}\right)e^{i\theta}$, имеем, если $|z| < 1$,

$$(-z)^s \operatorname{cosec} s\pi = O\left[\exp\left\{\left(N+\frac{1}{2}\right)\cos\theta \lg|z| - \right.\right.$$

$$\left.\left. -\left(N+\frac{1}{2}\right)\sin\theta \arg(-z) - \left(N+\frac{1}{2}\right)\pi|\sin\theta|\right\}\right] =$$

$$= O\left[\exp\left\{\left(N+\frac{1}{2}\right)\cos\theta \lg|z| - \left(N+\frac{1}{2}\right)\delta|\sin\theta|\right\}\right] =$$

$$= \begin{cases} O\left[\exp\left\{2^{-\frac{1}{2}}\left(N+\frac{1}{2}\right)\lg|z|\right\}\right], & 0 \leqslant |\theta| \leqslant \frac{1}{4}\pi, \\ O\left[\exp\left\{-2^{-\frac{1}{2}}\delta\left(N+\frac{1}{2}\right)\right\}\right], & \frac{1}{4}\pi \leqslant |\theta| \leqslant \frac{1}{2}\pi. \end{cases}$$

Таким образом, если $\lg|z|$ отрицателен (т. е. $|z| < 1$), то подинтегральная функция стремится к нулю достаточно быстро (для всех рассматриваемых значений θ), чтобы $\int\limits_C \to 0$ при $N \to \infty$.

Далее, выражение

$$\int\limits_{-\infty i}^{\infty i} - \left\{ \int\limits_{-\infty i}^{-\left(N+\frac{1}{2}\right)i} + \int\limits_C + \int\limits_{\left(N+\frac{1}{2}\right)i}^{\infty i} \right\}$$

по теореме Коши равно $-2\pi i$, умноженному на сумму вычетов подинтегральной функции в точках $s = 0, 1, 2, \ldots, N$. Заставим $N \to \infty$; тогда последние три интеграла будут стремиться к нулю, когда $|\arg(-z)| \leqslant \pi - \delta$ и $|z| < 1$, и следовательно, при этих условиях

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty i}^{\infty i} \frac{\Gamma(a+s)\,\Gamma(b+s)\,\Gamma(-s)}{\Gamma(c+s)}(-z)^s\,ds =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{\Gamma(a+n)\,\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)\,n!} z^n,$$

причем общий член в сумме является вычетом подинтегральной функции при $s = n$.

Таким образом, существует аналитическая функция (именно рассматриваемый интеграл) во всей области, определяемой неравенством $|\arg(-z)| < \pi$, *которая при* $|z| < 1$ *может быть представлена рядом*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)\,n!} z^n.$$

Символ $F(a, b; c; z)$ употребляется в дальнейшем для обозначения этой функции, разделенной на $\Gamma(a)\Gamma(b)/\Gamma(c)$.

14.51. Аналитическое продолжение гипергеометрического ряда

Для представления функции $F(a, b; c; z)$ в виде сходящегося ряда, когда $|z| > 1$, используем интеграл, полученный в § 14.5. Если D — полуокружность радиуса ρ слева от мнимой оси и с центром в начале координат, то способом § 14.5 можно показать [1]), что

$$\frac{1}{2\pi i}\int_D \frac{\Gamma(a+s)\Gamma(b+s)\Gamma(-s)}{\Gamma(c+s)}(-z)^s\,ds \to 0,$$

когда $\rho \to \infty$, если $|\arg(-z)| < \pi$, $|z| > 1$ и $\rho \to \infty$ так, чтобы нижняя граница расстояния D от полюсов подинтегральной функции была *положительным* числом (не нулем).

После этого можно доказать (как в соответственном месте § 14.5), что при $|\arg(-z)| < \pi$ и $|z| > 1$

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{\Gamma(a+s)\Gamma(b+s)\Gamma(-s)}{\Gamma(c+s)}(-z)^s\,ds =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(1-c+a+n)}{\Gamma(1+n)\Gamma(1-b+a+n)} \frac{\sin(c-a-n)\pi}{\cos n\pi \sin(b-a-n)\pi}(-z)^{-a-n} +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(b+n)\Gamma(1-c+b+n)}{\Gamma(1+n)\Gamma(1-a+b+n)} \frac{\sin(c-b-n)\pi}{\cos n\pi \sin(a-b-n)\pi}(-z)^{-b-n},$$

причем выражения в этих суммах являются вычетами подинтегральной функции в точках $s = -a-n$ и $s = -b-n$ соответственно.

После упрощения этих рядов сразу заключаем, что аналитическое продолжение ряда, которым была первоначально определена гипер-

---

[1]) При рассмотрении асимптотического разложения подинтегральной функции, когда $|s|$ велик на контуре или на D, проще всего преобразовать функции $\Gamma(a+s)$, $\Gamma(b+s)$, $\Gamma(c+s)$ при помощи соотношения § 12.14.

геометрическая функция, дается равенством

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(c)}F(a,\ b;\ c;\ z)=$$
$$=\frac{\Gamma(a)\Gamma(a-b)}{\Gamma(a-c)}(-z)^{-a}F(a,\ 1-c+a;\ 1-b+a;\ z^{-1})+$$
$$+\frac{\Gamma(b)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b-c)}(-z)^{-b}F(b,\ 1-c+b;\ 1-a+b;\ z^{-1}),$$

где $|\arg(-z)|<\pi$.

Легко видеть, что каждый из трех членов этого равенства является решением гипергеометрического уравнения (см. § 14.4).

Полученный результат должен быть видоизменен, когда $a-b$ есть целое число или нуль, так как некоторые из полюсов выражения $\Gamma(a+s)\Gamma(b+s)$ будут двойными, и тогда правая часть может содержать логарифмические члены согласно § 14.3.

Следствие. Положив $b=c$, мы видим, что при $|\arg(-z)|<\pi$

$$\Gamma(a)(1-z)^{-a}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty i}^{\infty i}\Gamma(a+s)\Gamma(-s)(-z)^{s}\,ds,$$

где $(1-z)^{-a}\to 1$, когда $z\to 0$, и следовательно, в этом равенстве всегда нужно брать то значение $|\arg(1-z)|$, которое меньше π, ввиду наличия *разреза* от 0 до $+\infty$, вытекающего из неравенства $|\arg(-z)|<\pi$.

14.52. Лемма Барнса

Если путь интегрирования искривлен так, что полюсы выражения $\Gamma(\gamma-s)\Gamma(\delta-s)$ *лежат справа от него, а полюсы выражения* $\Gamma(\alpha+s)\times\Gamma(\beta+s)$ *слева* [1]), *то*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty i}^{\infty i}\Gamma(\alpha+s)\Gamma(\beta+s)\Gamma(\gamma-s)\Gamma(\delta-s)\,ds=$$
$$=\frac{\Gamma(\alpha+\gamma)\Gamma(\alpha+\delta)\Gamma(\beta+\gamma)\Gamma(\beta+\delta)}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\delta)}.$$

Обозначим через I выражение в левой части.

Пусть C — полуокружность радиуса ρ, расположенная справа от мнимой оси, с центром в начале координат, и пусть $\rho\to\infty$ таким образом, что нижняя граница расстояния C от полюсов выражения $\Gamma(\gamma-s)\Gamma(\delta-s)$ *положительна* (не нуль), тогда легко видеть, что

$$\Gamma(\alpha+s)\Gamma(\beta+s)\Gamma(\gamma-s)\Gamma(\delta-s)=$$
$$=\frac{\Gamma(\alpha+s)\Gamma(\beta+s)}{\Gamma(1-\gamma+s)\Gamma(1-\delta+s)}\pi^2\operatorname{cosec}(\gamma-s)\pi\operatorname{cosec}(\delta-s)\pi=$$
$$=O\left[s^{\alpha+\beta+\gamma+\delta-2}\exp\{-2\pi|\operatorname{Im}s|\}\right]$$

---

[1]) Предполагается, что α, β, γ, δ таковы, что ни один из полюсов первой совокупности не совпадает ни с одним полюсом второй совокупности.

для точек s на полуокружности C; то же самое верно, когда $|s| \to \infty$ по мнимой оси. Отсюда следует, что исходный интеграл сходится и что $\int\limits_C \to 0$ при $\rho \to \infty$, если $\operatorname{Re}(\alpha+\beta+\gamma+\delta-1)<0$.

Таким образом, как и в § 14.5, интеграл, входящий в I, равен произведению $-2\pi i$ на сумму вычетов подинтегральной функции в полюсах выражения $\Gamma(\gamma-s)\Gamma(\delta-s)$. Вычисляя эти вычеты, мы получим [1]):

$$I=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+\gamma+n)\Gamma(\beta+\gamma+n)}{\Gamma(n+1)\Gamma(1+\gamma-\delta+n)}\frac{\pi}{\sin(\delta-\gamma)\pi}+$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+\delta+n)\Gamma(\beta+\delta+n)}{\Gamma(n+1)\Gamma(1+\delta-\gamma+n)}\frac{\pi}{\sin(\gamma-\delta)\pi}.$$

Пользуясь результатом § 12.14, имеем в силу § 14.11

$$I=\frac{\pi}{\sin(\gamma-\delta)\pi}\left\{\frac{\Gamma(\alpha+\delta)\Gamma(\beta+\delta)}{\Gamma(1-\gamma+\delta)}F(\alpha+\delta,\beta+\delta;1-\gamma+\delta;1)-\right.$$
$$\left.-\frac{\Gamma(\alpha+\gamma)\Gamma(\beta+\gamma)}{\Gamma(1-\delta+\gamma)}F(\alpha+\gamma,\beta+\gamma;1-\delta+\gamma;1)\right\}=$$
$$=\frac{\pi\Gamma(1-\alpha-\beta-\gamma-\delta)}{\sin(\gamma-\delta)\pi}\left\{\frac{\Gamma(\alpha+\delta)\Gamma(\beta+\delta)}{\Gamma(1-\alpha-\gamma)\Gamma(1-\beta-\gamma)}-\frac{\Gamma(\alpha+\gamma)\Gamma(\beta+\gamma)}{\Gamma(1-\alpha-\delta)\Gamma(1-\beta-\delta)}\right\}=$$
$$=\frac{\Gamma(\alpha+\gamma)\Gamma(\beta+\gamma)\Gamma(\alpha+\delta)\Gamma(\beta+\delta)}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\delta)\sin(\alpha+\beta+\gamma+\delta)\pi\sin(\gamma-\delta)\pi}\{\sin(\alpha+\gamma)\pi\sin(\beta+\gamma)\pi-$$
$$-\sin(\alpha+\delta)\pi\sin(\beta+\delta)\pi\}.$$

Но

$$2\sin(\alpha+\gamma)\pi\sin(\beta+\gamma)\pi-2\sin(\alpha+\delta)\pi\sin(\beta+\delta)\pi=$$
$$=\cos(\alpha-\beta)\pi-\cos(\alpha+\beta+2\gamma)\pi-\cos(\alpha-\beta)\pi+\cos(\alpha+\beta+2\delta)\pi=$$
$$=2\sin(\gamma-\delta)\pi\sin(\alpha+\beta+\gamma+\delta)\pi.$$

Поэтому

$$I=\frac{\Gamma(\alpha+\gamma)\Gamma(\beta+\gamma)\Gamma(\alpha+\delta)\Gamma(\beta+\delta)}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\delta)},$$

что и является искомым результатом; он доказан пока только при условии

$$\operatorname{Re}(\alpha+\beta+\gamma+\delta-1)<0;$$

но по теории аналитического продолжения он верен во всей области, в которой обе части равенства являются аналитическими функциями, скажем, от α; а отсюда вытекает справедливость результата для всех значений α, β, γ, δ, для которых ни один из полюсов выражения $\Gamma(\alpha+s)\Gamma(\beta+s)$, как функции от s, не совпадает с каким-либо полюсом выражения

$$\Gamma(\gamma-s)\Gamma(\delta-s).$$

Следствие. Написав $s+k$, $\alpha-k$, $\beta-k$, $\gamma+k$, $\delta+k$ вместо s, α, β, γ, δ, мы видим, что результат остается верным и тогда, когда пределы интегрирования суть $-k\pm\infty i$, где k — любая вещественная постоянная.

---

[1]) Оба эти ряда сходящиеся (§ 2.38, часть I).

14.53. Связь между гипергеометрическими функциями от z и от $1-z$

Мы видели, что при $\arg|(-z)|<\pi$

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(c)}F(a,b;c;z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty i}^{\infty i}\frac{\Gamma(a+s)\Gamma(b+s)\Gamma(-s)}{\Gamma(c+s)}(-z)^s\,ds=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty i}^{\infty i}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-k-\infty i}^{-k+\infty i}\Gamma(a+t)\Gamma(b+t)\Gamma(s-t)\Gamma(c-a-b-t)\,dt\right\}\times$$

$$\times\frac{\Gamma(-s)(-z)^s}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}\,ds$$

по лемме Барнса. Можно доказать, что если взять k так, что нижняя граница расстояния между контурами s и t будет положительная (не нуль), порядок интегрирования [1]) можно изменить.

Изменяя порядок, мы видим, что если $\arg(1-z)$ приписать его главное значение, то

$$\frac{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(c)}F(a,b;c;z)=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-k-\infty i}^{-k+\infty i}\Gamma(a+t)\,\Gamma(b+t)\Gamma(c-a-b-t)\times$$

$$\times\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty i}^{\infty i}\Gamma(s-t)\Gamma(-s)(-z)^s\,ds\right\}dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-k-\infty i}^{-k+\infty i}\Gamma(a+t)\,\Gamma(b+t)\Gamma(c-a-b-t)\Gamma(-t)(1-z)^t\,dt.$$

Далее, при $|\arg(1-z)|<\pi$ и $|1-z|<1$ последний интеграл может быть вычислен с помощью методов, примененных в лемме Барнса (§ 14.52), и мы найдем, таким образом, что

$$\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)\Gamma(a)\Gamma(b)F(a,b;c;z)=$$
$$=\Gamma(c)\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c-a-b)\,F(a,b;a+b-c+1;1-z)+$$
$$+\Gamma(c)\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)\Gamma(a+b-c)(1-z)^{c-a-b}\,F(c-a,c-b;c-a-b+1;1-z)$$

— результат, который показывает природу особенности функции $F(a,b;c;z)$ при $z=1$.

Этот результат изменяется, если $c-a-b$ — целое число или нуль, так как тогда

$$\Gamma(a+t)\,\Gamma(b+t)\Gamma(c-a-b-t)\Gamma(-t)$$

---

[1]) Можно применить методы, подобные методам § 4.51 части I, или доказать без особых трудностей, что удовлетворяются условия, установленные Бромуичем (Bromwich) в «Infinite Series», § 177.

имеет двойной полюс и могут появиться логарифмические члены. За этим исключением, результат имеет силу при

$$|\arg(-z)| < \pi, \quad |\arg(1-z)| < \pi.$$

Взяв $|z| < 1$, мы можем заставить z стремиться к вещественному значению, и мы видим, что результат остается верным для вещественных значений z, удовлетворяющих условию $0 < z < 1$.

14.6. Решение уравнения Римана при помощи интеграла по контуру

Перейдем теперь к отысканию контурного интеграла, выражающего гипергеометрическую функцию.

Заменим функцию u в уравнении Римана (§ 10.7, часть I) новой функцией I, определяемой соотношением

$$u = (z-a)^{\alpha}(z-b)^{\beta}(z-c)^{\gamma} I.$$

Дифференциальным уравнением, которому удовлетворяет функция I, будет, как легко установить, уравнение

$$\frac{d^2I}{dz^2} + \left\{\frac{1+\alpha-\alpha'}{z-a} + \frac{1+\beta-\beta'}{z-b} + \frac{1+\gamma-\gamma'}{z-c}\right\}\frac{dI}{dz} + \\ + \frac{(\alpha+\beta+\gamma)\left\{(\alpha+\beta+\gamma+1)z + \sum a(\alpha+\beta'+\gamma'-1)\right\}}{(z-a)(z-b)(z-c)} I = 0,$$

которое можно написать в виде

$$Q(z)\frac{d^2I}{dz^2} - \{(\lambda-2)Q'(z) + R(z)\}\frac{dI}{dz} + \\ + \left\{\frac{1}{2}(\lambda-2)(\lambda-1)Q''(z) + (\lambda-1)R'(z)\right\} I = 0,$$

где

$$\lambda = 1-\alpha-\beta-\gamma = \alpha'+\beta'+\gamma',$$
$$Q(z) = (z-a)(z-b)(z-c),$$
$$R(z) = \sum(\alpha'+\beta+\gamma)(z-b)(z-c).$$

Следует заметить, что функция I не аналитическая в бесконечно удаленной точке и, следовательно, вышеприведенное дифференциальное уравнение относительно I не есть частный случай обобщенного гипергеометрического уравнения.

Покажем теперь, что этому дифференциальному уравнению удовлетворяет интеграл вида

$$I = \int_C (t-a)^{\alpha'+\beta+\gamma-1}(t-b)^{\alpha+\beta'+\gamma-1}(t-c)^{\alpha+\beta+\gamma'-1}(z-t)^{-\alpha-\beta-\gamma}\,dt,$$

если контур интегрирования C выбран надлежащим образом.

Действительно, если мы подставим этот интеграл I в дифференциальное уравнение, то условие[1]), что уравнение удовлетворится, примет вид

$$\int_C (t-a)^{\alpha'+\beta+\gamma-1}(t-b)^{\alpha+\beta'+\gamma-1}(t-c)^{\alpha+\beta+\gamma'-1}(z-t)^{-\alpha-\beta-\gamma-2}K\,dt=0,$$

где

$$K=(\lambda-2)\left\{Q(z)+(t-z)Q'(z)+\frac{1}{2}(t-z)^2Q''(z)\right\}+$$
$$+(t-z)\{R(z)+(t-z)R'(z)\}=$$
$$=(\lambda-2)\{Q(t)-(t-z)^3\}+(t-z)\left\{R(t)-(t-z)^2\sum(\alpha'+\beta+\gamma)\right\}=$$
$$=-(1+\alpha+\beta+\gamma)(t-a)(t-b)(t-c)+\sum(\alpha'+\beta+\gamma)(t-b)(t-c)(t-z).$$

Отсюда следует, что требуемое условие приводится к равенству

$$\int_C \frac{dV}{dt}\,dt=0,$$

где

$$V=(t-a)^{\alpha'+\beta+\gamma}(t-b)^{\alpha+\beta'+\gamma}(t-c)^{\alpha+\beta+\gamma'}(t-z)^{-(1+\alpha+\beta+\gamma)}.$$

Поэтому интеграл I является решением дифференциального уравнения, когда контур C таков, что V принимает свое начальное значение после того, как t опишет C.

Далее,

$$V=(t-a)^{\alpha'+\beta+\gamma-1}(t-b)^{\alpha+\beta'+\gamma-1}(t-c)^{\alpha+\beta+\gamma'-1}(z-t)^{-\alpha-\beta-\gamma}U,$$

где

$$U=(t-a)(t-b)(t-c)(z-t)^{-1}$$

— однозначная функция от t; отсюда следует, что если C — замкнутый контур, то он должен быть таким, чтобы подинтегральная функция в интеграле I принимала свое начальное значение после того, как t опишет контур.

Из сказанного заключаем: *любой интеграл вида*

$$(z-a)^{\alpha}(z-b)^{\beta}(z-c)^{\gamma}\times$$
$$\times\int_C (t-a)^{\beta+\gamma+\alpha'-1}(t-b)^{\gamma+\alpha+\beta'-1}(t-c)^{\alpha+\beta+\gamma'-1}(z-t)^{-\alpha-\beta-\gamma}\,dt$$

представляет решение гипергеометрического дифференциального уравнения, если C является либо замкнутым контуром в пло-

---

[1]) Дифференцирование под знаком интеграла допустимо (§ 4.2, часть I) в том случае, если путь C не зависит от z и не проходит через точки a, b, c, z; если C — бесконечный контур или если C проходит через точки a, b, c или z, то необходимы дополнительные условия.

скости t, таким, что подинтегральная функция принимает свое начальное значение после того, как t опишет его, либо же такой кривой, что V имеет одинаковые значения на ее концах.

Методы, с помощью которых интегралы этого типа можно преобразовать так, чтобы прийти к соотношениям §§ 14.51 и 14.53, читатель найдет в мемуарах Похгаммера (Pochhammer, Math. Ann. XXXV (1890), стр. 495—526) и Гобсона (Hobson, Phil. Trans, 187A (1896), 443—531).

Пример 1. Получить вещественный определенный интеграл, представляющий при известных условиях гипергеометрический ряд.

Гипергеометрический ряд $F(a, b; c; z)$, как уже показано, является решением дифференциального уравнения, определяемого схемой

$$P\left\{\begin{array}{cccc} 0 & \infty & 1 & \\ 0 & a & 0 & z \\ 1-c & b & c-a-b & \end{array}\right\}.$$

Если в интеграле

$$(z-a)^{\alpha}\left(1-\frac{z}{b}\right)^{\beta}(z-c)^{\gamma}\times$$
$$\times\int\limits_{C}(t-a)^{\beta+\gamma+\alpha'-1}\left(1-\frac{t}{b}\right)^{\gamma+\alpha+\beta'-1}(t-c)^{\alpha+\beta+\gamma'-1}(t-z)^{-\alpha-\beta-\gamma}\,dt,$$

который отличается от только что полученного на постоянный множитель, перейдем к пределу при $b\to\infty$ (оставляя в стороне вопрос о допустимости этой операции), то мы придем к рассмотрению интеграла

$$\int\limits_{C}t^{a-c}(t-1)^{c-b-1}(t-z)^{-a}\,dt\ ^{1}).$$

Предельной формой для V будет

$$t^{1-c+a}(t-1)^{c-b}(t-z)^{-1-a},$$

а это выражение стремится к нулю при $t=1$ и $t=\infty$, если $\operatorname{Re}c>\operatorname{Re}b>0$.

В соответствии с этим рассмотрим

$$\int\limits_{1}^{\infty}t^{a-c}(t-1)^{c-b-1}(t-z)^{-a}\,dt,$$

где z не есть положительное[2]) число, большее 1.

---

[1]) Здесь не совсем удачные обозначения: точки a, b, c в общем контурном интеграле не имеют никакого отношения к параметрам a, b, c в схеме P. Авторы хотят сказать, что, специализируя общий контурный интеграл для случая *точек* $a=0$, $b=\infty$ и $c=1$, и подставляя в него затем выражения для α, α', β, β', γ, γ' через *параметры* a, b, c в схеме P, мы приходим к рассмотрению интеграла $\int\limits_{C}t^{a-c}(t-1)^{c-b-1}(t-z)^{-a}\,dt$. — *Прим. ред.*

[2]) Этим обеспечивается, что точка $t=z$ не будет находиться на пути интегрирования.

В этом интеграле положим $t = u^{-1}$; тогда он переходит в интеграл

$$\int_0^1 u^{b-1}(1-u)^{c-b-1}(1-uz)^{-a}\,du.$$

На основании сказанного можно ожидать, что этот интеграл будет решением дифференциального уравнения для гипергеометрического ряда.

В самом деле, легко видеть, что если $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b$ и $\arg u = \arg(1-u) = 0$, а ветвь функции $1-uz$ характеризуется тем, что $(1-uz)^{-a} \to 1$ при $u \to 0$, то только что найденный интеграл будет равен

$$\frac{\Gamma(b)\,\Gamma(c-b)}{\Gamma(c)}F(a, b; c; z).$$

Это можно доказать, разлагая [1]) $(1-uz)^{-a}$ в ряд по возрастающим степеням z, когда $|z| < 1$, и пользуясь § 12.41.

Пример 2. Вывести результат § 14.11 из предыдущего примера.

14.61. Нахождение интеграла, представляющего $P^{(\alpha)}$

Покажем теперь, как может быть найден интеграл, представляющий частное решение $P^{(\alpha)}$ (§ 14.4) гипергеометрического дифференциального уравнения.

Мы видели (§ 14.6), что интеграл

$$I = (z-a)^{\alpha}(z-b)^{\beta}(z-c)^{\gamma}\int_C (t-a)^{\beta+\gamma+\alpha'-1}(t-b)^{\gamma+\alpha+\beta'-1}\times$$
$$\times(t-c)^{\alpha+\beta+\gamma'-1}(t-z)^{-\alpha-\beta-\gamma}\,dt$$

удовлетворяет гипергеометрическому дифференциальному уравнению, если C — такой замкнутый контур, что подинтегральная функция принимает свое начальное значение после того, как t опишет C.

Особыми точками подинтегральной функции в плоскости t являются точки a, b, c, z, и после того, как t опишет двойную петлю (§ 12.43), определяемую символом $(b+, c+, b-, c-)$, подинтегральная функция принимает начальное значение.

Далее, если z лежит в круге с центром a, не содержащем ни одной из точек b, c, то мы можем выбрать путь интегрирования так, что t будет находиться вне этого круга, и тогда $|z-a| < |t-a|$ для всех точек t на этом пути.

Выберем $\arg(z-a)$, по величине меньший π, а $\arg(z-b)$ и $\arg(z-c)$ так, чтобы они приводились к $\arg(a-b)$, $\arg(a-c)$ [2]), когда $z \to a$; фиксируем $\arg(t-a)$, $\arg(t-b)$, $\arg(t-c)$ в точке N, в которой начинается и кончается путь интегрирования; далее, выберем $\arg(t-z)$ так, чтобы он приводился к $\arg(t-a)$ при $z \to a$.

---

[1]) Предоставляем читателю доказать справедливость этой операции, пользуясь § 4.7 части I.

[2]) Причем значения $\arg(a-b)$, $\arg(a-c)$ фиксированы.

Тогда имеем

$$(z-b)^{\beta}=(a-b)^{\beta}\left\{1+\beta\left(\frac{z-a}{a-b}\right)+\ldots\right\},$$

$$(z-c)^{\gamma}=(a-c)^{\gamma}\left\{1+\gamma\left(\frac{z-a}{a-c}\right)+\ldots\right\}.$$

Далее, $(t-z)^{-\alpha-\beta-\gamma}$ разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд

$$(t-a)^{-\alpha-\beta-\gamma}\left\{1-(\alpha+\beta+\gamma)\frac{a-z}{t-a}+\ldots\right\},$$

поэтому мы можем интеграл разложить в ряд, который сходится абсолютно.

Перемножая абсолютно сходящиеся ряды, мы получим ряд, расположенный по целым степеням разности $z-a$, умноженный на $(z-a)^{\alpha}$. Следовательно, мы должны иметь

$$I=(a-b)^{\beta}(a-c)^{\gamma}P^{(\alpha)}\times$$
$$\times\int\limits_{N}^{(b+,\,c+,\,b-,\,c-)}(t-a)^{\beta+\gamma+\alpha'-1}(t-b)^{\gamma+\alpha+\beta'-1}(t-c)^{\alpha+\beta+\gamma'-1}\,dt$$

и таким же образом можем при помощи интегралов, взятых по двойным петлям, определить и $P^{(\alpha')}$, $P^{(\beta)}$, $P^{(\beta')}$, $P^{(\gamma)}$, $P^{(\gamma')}$.

14.7. Соотношения между смежными гипергеометрическими функциями

Пусть $P(z)$ — решение уравнения Римана с аргументом z, особыми точками a, b, c и показателями α, α', β, β', γ, γ'. Пусть, далее, $P(z)$ отличается от одной из шести функций $P^{(\alpha)}$, $P^{(\alpha')}$, $P^{(\beta)}$, $P^{(\beta')}$, $P^{(\gamma)}$, $P^{(\gamma')}$ лишь постоянным множителем.

Пусть $P_{l+1,\,m-1}(z)$ обозначает функцию, которая получается из $P(z)$ заменой двух показателей l и m соответственно через $l+1$ и $m-1$. Такие функции $P_{l+1,\,m-1}(z)$ называются *смежными* (contiguous) с $P(z)$. Имеется $6\times5=30$ смежных функций, поскольку l и m могут быть любыми двумя из шести показателей.

Риман[1]) впервые показал, что *функция $P(z)$ и две любые смежные с ней связаны между собой линейной зависимостью, в которой коэффициентами являются полиномы от z.*

Очевидно, что таких зависимостей будет $\frac{1}{2}\times30\times29=435$.

---

[1]) Riemann, Abh. der k. Ges. der Wiss. zu Göttingen (1857). Гаусс (Gauss) получил ранее 15 соотношений между смежными гипергеометрическими функциями.

Чтобы показать, каким образом они могут быть получены, возьмем $P(z)$ в виде

$$P(z)=(z-a)^{\alpha}(z-b)^{\beta}(z-c)^{\gamma}\times$$
$$\times\int\limits_{C}(t-a)^{\beta+\gamma+\alpha'-1}(t-b)^{\gamma+\alpha+\beta'-1}(t-c)^{\alpha+\beta+\gamma'-1}(z-t)^{-\alpha-\beta-\gamma}\,dt,$$

где C — двойная петля рассмотренного в § 14.61 типа.

Так как интеграл вдоль C от дифференциала любой функции, которая принимает свое начальное значение после того, как t опишет C, будет равен нулю, то мы имеем

$$0=\int\limits_{C}\frac{d}{dt}\left\{(t-a)^{\alpha'+\beta+\gamma}(t-b)^{\alpha+\beta'+\gamma-1}(t-c)^{\alpha+\beta+\gamma'-1}(t-z)^{-\alpha-\beta-\gamma}\right\}dt.$$

Продифференцировав последовательно каждый из сомножителей, получим

$$(\alpha'+\beta+\gamma)P+(\alpha+\beta'+\gamma-1)P_{\alpha'+1,\,\beta'-1}+$$
$$+(\alpha+\beta+\gamma'-1)P_{\alpha'+1,\,\gamma'-1}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{z-b}P_{\beta+1,\,\gamma'-1}.$$

Соображения симметрии показывают, что правую часть этого равенства можно заменить выражением

$$\frac{\alpha+\beta+\gamma}{z-c}P_{\beta'-1,\,\gamma+1}.$$

Эти формулы вместе с аналогичными, получаемыми при помощи циклических перестановок[1]) тройки $(a,\ \alpha,\ \alpha')$ с тройками $(b,\ \beta,\ \beta')$ и $(c,\ \gamma,\ \gamma')$, представляют собою шесть линейных соотношений, связывающих гипергеометрическую функцию P с двенадцатью смежными функциями

$$P_{\alpha+1,\,\beta-1},\ P_{\beta+1,\,\gamma'-1},\ P_{\gamma+1,\,\alpha'-1},\ P_{\alpha+1,\,\gamma'-1},\ P_{\beta+1,\,\alpha'-1},\ P_{\gamma+1,\,\beta'-1},$$
$$P_{\alpha'+1,\,\beta'-1},\ P_{\alpha'+1,\,\gamma'-1},\ P_{\beta'+1,\,\gamma'-1},\ P_{\beta'+1,\,\alpha'-1},\ P_{\gamma'+1,\,\alpha'-1},\ P_{\gamma'+1,\,\beta'-1}.$$

Затем, положив $t-a=(t-b)+(b-a)$ и обозначая через[2]) $P_{\alpha'-1}$ результат замены в P показателя α' на $\alpha'-1$, получим

$$P=P_{\alpha'-1,\,\beta'+1}+(b-a)P_{\alpha'-1}.$$

Таким же образом

$$P=P_{\alpha'-1,\,\gamma'+1}+(c-a)P_{\alpha'-1}.$$

---

[1]) Перестановка делается только в подинтегральном выражении; контур C остается без изменения.

[2]) $P_{\alpha'-1}$ не является функцией типа Римана, поскольку сумма ее показателей при a, b, c не равна единице.

Исключая из этих уравнений $P_{\alpha'-1}$, получим

$$(c-b)P+(a-c)P_{\alpha'-1,\,\beta'+1}+(b-a)P_{\alpha'-1,\,\gamma'+1}=0.$$

Эта и аналогичные формулы являются тремя новыми линейными соотношениями, связывающими P с последними шестью из двенадцати смежных функций, написанных выше.

Далее, положив $(t-z)=(t-a)-(z-a)$, мы тотчас же найдем соотношение

$$P=\frac{1}{z-b}P_{\beta+1,\,\gamma'-1}-(z-a)^{\alpha+1}(z-b)^{\beta}(z-c)^{\gamma}\times$$
$$\times\int\limits_C(t-a)^{\beta+\gamma+\alpha'-1}(z-a)^{\gamma+\alpha+\beta'-1}(z-b)^{\alpha+\beta+\gamma'-1}(t-z)^{-\alpha-\beta-\gamma-1}\,dt,$$

которое приводит к равенствам

$$(z-a)^{-1}\left\{P-(z-b)^{-1}P_{\beta+1,\,\gamma'-1}\right\}=(z-b)^{-1}\left\{P-(z-c)^{-1}P_{\gamma+1,\,\alpha'-1}\right\}=$$
$$=(z-c)^{-1}\left\{P-(z-a)^{-1}P_{\alpha+1,\,\beta'-1}\right\}.$$

Это — два новых линейных соотношения между P и вышеуказанными двенадцатью смежными функциями.

Мы нашли теперь в общей сложности одиннадцать линейных соотношений между P и этими двенадцатью функциями; коэффициенты в этих соотношениях будут рациональными функциями z. Отсюда каждая из этих функций может быть выражена линейно через P и одну какую-нибудь выбранную из них, а это значит, что *между P и любыми двумя из вышеприведенных функций существует линейное соотношение*. Коэффициенты в этом соотношении будут рациональными функциями от z, и после умножения на общее наименьшее кратное их знаменателей они станут полиномами от z.

Теорема, следовательно, доказана по отношению к вышеприведенным двенадцати смежным функциям. Она может быть распространена без затруднений на все тридцать смежных функций.

Следствие. Если из P вывести новые функции заменой показателей α, α', β, β', γ, γ' на $\alpha+p$, $\alpha'+q$, $\beta+r$, $\beta'+s$, $\gamma+t$, $\gamma'+u$, где p, q, r, s, t, u — целые числа, удовлетворяющие соотношению

$$p+q+r+s+t+u=0,$$

то между P и любыми двумя такими функциями существует линейная зависимость, в которой коэффициентами служат полиномы от z.

Этот результат можно доказать, соединив P с этими двумя функциями при помощи цепочки промежуточных смежных функций, выписав линейные зависимости, которые связывают P с двумя функциями, и исключив из этих соотношений промежуточные смежные функции.

Многие теоремы, которые будут установлены позже, как, например, рекуррентные формулы для функций Лежандра (§ 15.21), являются в действительности частными случаями доказанной сейчас теоремы.