

ЛИТЕРАТУРА

- C. F. Gauß, Ges. Werke, III, 123—163, 207—229.
 E. E. Kummer, Journ. für Math., XV (1836), 39—83, 127—172.
 G. F. B. Riemann, Ges. Math. Werke, 67—84.
 E. Papperitz, Math. Ann., XXV (1885), 212—221.
 S. Pincherle, Rend. Accad. Lincei (4), IV (1888), 694—700, 792—799.
 E. W. Barnes, Proc. London Math. Soc. (2), VI (1908), 141—177.
 Hj. Mellin, Acta Soc. Fennicae, XX (1895), No. 12.
 В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. III, ч. 2, Гостехиздат, 1956.
 Н. Н. Лебедев, Специальные функции и их приложения, Гостехиздат, М., 1953.

Примеры

1. Показать, что

$$F(a, b+1; c, z) - F(a, b; c; z) = \frac{az}{c} F(a+1, b+1; c+1; z).$$

2. Показать, что если α — отрицательное целое число, в то время как β и γ не целые числа, то отношение

$$F(\alpha, \beta; \alpha + \beta + 1 - \gamma; 1 - x) : F(\alpha, \beta; \gamma; x)$$

не зависит от x , и найти его значение.

3. Пусть $P(z)$ — гипергеометрическая функция; выразить ее производные $\frac{dP}{dz}$ и $\frac{d^2P}{dz^2}$ линейно через функцию P и смежные функции и отсюда найти линейное соотношение между P , $\frac{dP}{dz}$ и $\frac{d^2P}{dz^2}$, т. е. проверить, что P удовлетворяет гипергеометрическому дифференциальному уравнению.

4. Показать, что $F\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{4}; 1; 4z(1-z)\right\}$ удовлетворяет гипергеометрическому уравнению, которому удовлетворяет $F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; z\right)$. Показать, что в левой половине лемнискаты $|z(1-z)| = \frac{1}{4}$ эти две функции равны, а в правой половине лемнискаты первая функция равна $F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; 1-z\right)$.

5. Пусть $F_{a+} = F(a+1, b; c; x)$, $F_{a-} = F(a-1, b; c; x)$; определить 15 линейных соотношений с полиномиальными коэффициентами, которые связывают $F(a, b; c; x)$ с любыми двумя из шести функций

$$F_{a+}, F_{a-}, F_{b+}, F_{b-}, F_{c+}, F_{c-}.$$

(Gauss)

6. Показать, что гипергеометрическому уравнению

$$x(x-1) \frac{d^2y}{dx^2} - \{\gamma - (\alpha + \beta + 1)x\} \frac{dy}{dx} + \alpha\beta y = 0$$

удовлетворяют интегралы (которые предполагаются сходящимися)

$$\int_0^1 z^{\beta-1} (1-z)^{\gamma-\beta-1} (1-xz)^{-\alpha} dz$$

и

$$\int_0^1 z^{\beta-1} (1-z)^{\alpha-\gamma} \{1-(1-x)z\}^{-\alpha} dz.$$

7. Показать, что для значений x между 0 и 1 решением уравнения

$$x(1-x) \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{2}(\alpha+\beta+1)(1-2x) \frac{dy}{dx} - \alpha\beta y = 0$$

будет

$$AF\left\{\frac{1}{2}\alpha, \frac{1}{2}\beta; \frac{1}{2}; (1-2x)^2\right\} + \\ + B(1-2x)F\left\{\frac{1}{2}(\alpha+1), \frac{1}{2}(\beta+1); \frac{3}{2}; (1-2x)^2\right\},$$

где A, B — произвольные постоянные, а $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ представляет гипергеометрический ряд.

(Math. Trip., 1896)

8. Показать, что

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \left[F(\alpha, \beta; \gamma; x) - \right. \\ \left. - \sum_{n=0}^k (-1)^n \frac{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma-n)\Gamma(\gamma-\alpha+n)\Gamma(\gamma-\beta+n)\Gamma(\gamma)}{n! \Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \times \right. \\ \left. \times (1-x)^{n+\gamma-\alpha-\beta} \right] = \frac{\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)},$$

где k — такое целое число, что $k \leq \operatorname{Re}(\alpha+\beta-\gamma) < k+1$.(Это определяет, каким образом гипергеометрическая функция стремится к бесконечности, когда $x \rightarrow 1-0$, в предположении, что $\alpha+\beta-\gamma$ не целое число.)

(Hardy)

9. Показать, что если $\operatorname{Re}(\gamma-\alpha-\beta) < 0$, то

$$S_n : \frac{\Gamma(\gamma) n^{\alpha+\beta-\gamma}}{(\alpha+\beta-\gamma)\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \rightarrow 1$$

при $n \rightarrow \infty$; здесь S_n обозначает сумму первых n членов ряда $F(\alpha, \beta; \gamma; 1)$.

(M. J. M. Hill, Proc. London Math. Soc. (2), V)

10. Показать, что если y_1, y_2 — независимые решения уравнения

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P \frac{dy}{dx} + Qy = 0,$$

то общим решением уравнения

$$\frac{d^3z}{dx^3} + 3P \frac{d^2z}{dx^2} + \left\{ 2P^2 + \frac{dP}{dx} + 4Q \right\} \frac{dz}{dx} + \left\{ 4PQ + 2 \frac{dQ}{dx} \right\} z = 0$$

будет $z = Ay_1^2 + By_1y_2 + Cy_2^2$, где A, B, C — постоянные.

(Appel, Comptes Rendus, XCI)

11. Вывести из примера 10, что если $a + b + \frac{1}{2} = c$, то

$$\{F(a, b; c; x)\}^2 =$$

$$= \frac{\Gamma(c) \Gamma(2c - 1)}{\Gamma(2a) \Gamma(2b) \Gamma(a + b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2a + n) \Gamma(a + b + n) \Gamma(2b + n)}{n! \Gamma(c + n) \Gamma(2c - 1 + n)} x^n.$$

(Clausen, Journ. für Math., III)

12. Показать, что если $|x| < \frac{1}{2}$ и $|x(1-x)| < \frac{1}{4}$, то

$$F\left\{2\alpha, 2\beta; \alpha + \beta + \frac{1}{2}; x\right\} = F\left\{\alpha, \beta; \alpha + \beta + \frac{1}{2}; 4x(1-x)\right\}.$$

(Kummer)

13. Вывести из примера 12, что

$$F\left\{2\alpha, 2\beta; \alpha + \beta + \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\} = \frac{\Gamma\left(\alpha + \beta + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\beta + \frac{1}{2}\right)}.$$

14. Показать, что если $\omega = e^{\frac{2}{3}\pi i}$ и $\operatorname{Re} \alpha < 1$, то

$$F(\alpha, 3\alpha - 1; 2\alpha; -\omega^2) = 3^{\frac{3}{2}\alpha - \frac{3}{2}} \exp\left\{\frac{1}{6}\pi i(3\alpha - 1)\right\} \frac{\Gamma(2\alpha) \Gamma\left(\alpha - \frac{1}{3}\right)}{\Gamma(3\alpha - 1) \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)},$$

$$F(\alpha, 3\alpha - 1; 2\alpha; -\omega) = 3^{\frac{3}{2}\alpha - \frac{3}{2}} \exp\left\{\frac{1}{6}\pi i(1 - 3\alpha)\right\} \frac{\Gamma(2\alpha) \Gamma\left(\alpha - \frac{1}{3}\right)}{\Gamma(3\alpha - 1) \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}.$$

(Watson, Quarterly Journ., XLI)

15. Показать, что

$$F\left(-\frac{1}{2}n, -\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}; n + \frac{3}{2}; -\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{8}{9}\right)^n \frac{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right) \Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \Gamma\left(n + \frac{4}{3}\right)}.$$

(Heymann, Zeitschrift
für Math. u. Phys., XLIV)

16. Показать, что если

$$(1-x)^{\alpha+\beta-1} F(2\alpha, 2\beta; 2\gamma; x) = 1 + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \dots,$$

$$\text{то } F\left(\alpha, \beta; \gamma + \frac{1}{2}; x\right) F\left(\gamma - \alpha, \gamma - \beta; \gamma + \frac{1}{2}; x\right) = 1 + \frac{\gamma}{\gamma + \frac{1}{2}} Bx +$$

$$+ \frac{\gamma(\gamma + 1)}{(\gamma + \frac{1}{2})(\gamma + \frac{3}{2})} Cx^2 + \frac{\gamma(\gamma + 1)(\gamma + 2)}{(\gamma + \frac{1}{2})(\gamma + \frac{3}{2})(\gamma + \frac{5}{2})} Dx^3 + \dots$$

(Cayley, Phil. Mag. (4), XVI (1858), 356—357. См. также Orr, Camb. Phil. Trans., XVII (1889), 1—15).

17. Показать, что если функция $F(\alpha, \beta, \beta'; \gamma; x, y)$ определяется равенством

$$F(\alpha, \beta, \beta'; \gamma; x, y) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \int_0^1 u^{\alpha-1} (1-u)^{\gamma-\alpha-1} (1-ux)^{-\beta} (1-uy)^{-\beta'} du,$$

то между F и любыми тремя из восьми смежных функций

$$F(\alpha \pm 1), \quad F(\beta \pm 1), \quad F(\beta' \pm 1), \quad F(\gamma \pm 1)$$

существует однородное линейное соотношение, коэффициенты которого суть полиномы от x и y .

(Le Vavasseur)

18. Показать, что если $\gamma - \alpha - \beta < 0$, то при $x \rightarrow 1 - 0$

$$F(\alpha, \beta; \gamma; x) : \left\{ \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} \right\} \rightarrow 1;$$

если же $\gamma - \alpha - \beta = 0$, то соответствующая приближенная формула будет

$$F(\alpha, \beta; \gamma; x) : \left\{ \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \ln \frac{1}{1-x} \right\} \rightarrow 1.$$

(Math. Trip., 1893)

19. Показать, что при $|x| < 1$

$$\begin{aligned} & \int_{c-}^{(x+, 0+, x-, 0-)} x^{1-\gamma} (v-x)^{\gamma-\alpha-1} v^{\alpha-1} (1-v)^{-\beta} dv = \\ & = -4e^{\pi i \gamma l} \sin \alpha \pi \sin (\gamma - \alpha) \pi \frac{\Gamma(\gamma - \alpha) \Gamma(\alpha)}{\Gamma(\gamma)} F(\alpha, \beta; \gamma; x), \end{aligned}$$

где c обозначает точку на отрезке, соединяющем точки $0, x$; аргументы у исходных значений $v - x$ и v те же самые, что и у x , и $\arg(1-v) \rightarrow 0$, когда $v \rightarrow 0$.

(Pochhammer)

20. Пусть при $|\arg(1-x)| < 2\pi$

$$K(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty i}^{+\infty i} \left\{ \Gamma(-s) \Gamma\left(\frac{1}{2} + s\right) \right\}^2 (1-x)^s ds,$$

а при $|\arg x| < 2\pi$

$$K'(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty i}^{+\infty i} \left\{ \Gamma(-s) \Gamma\left(\frac{1}{2} + s\right) \right\}^2 x^s ds.$$

При помощи замены переменной s в интеграле или каким-либо другим

образом получить следующие зависимости:

$$\begin{aligned} K(x) &= K'(1-x), && \text{если } |\arg(1-x)| < \pi, \\ K(1-x) &= K'(x), && \text{если } |\arg x| < \pi, \\ K(x) &= (1-x)^{-\frac{1}{2}} K\left(\frac{x}{x-1}\right), && \text{если } |\arg(1-x)| < \pi, \\ K(1-x) &= x^{-\frac{1}{2}} K\left(\frac{x-1}{x}\right), && \text{если } |\arg x| < \pi, \\ K'(x) &= x^{-\frac{1}{2}} K'\left(\frac{1}{x}\right), && \text{если } |\arg x| < \pi, \\ K'(1-x) &= (1-x)^{-\frac{1}{2}} K'\left(\frac{1}{1-x}\right), && \text{если } |\arg(1-x)| < \pi. \end{aligned}$$

(Barnes)

21. Пользуясь обозначениями предыдущего примера, получить следующие формулы:

$$2K(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + n\right)}{n!} \right\}^2 x^n,$$

$$2\pi K'(x) = - \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + n\right)}{n!} \right\}^2 x^n \left\{ \lg x - 4\lg 2 + 4\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \dots - \frac{1}{2n}\right) \right\},$$

когда $|x| < 1$, $|\arg x| < \pi$;

$$K(x) = \mp i(-x)^{-\frac{1}{2}} K\left(\frac{1}{x}\right) + (-x)^{-\frac{1}{2}} K'\left(\frac{1}{x}\right),$$

когда $|\arg(-x)| < \pi$; из знаков \pm выбирается тот, который имеет $\operatorname{Im} x$.

(Barnes)

22. Гипергеометрические ряды с двумя переменными определяются равенствами

$$F_1(\alpha; \beta, \beta'; \gamma; x, y) = \sum_{m, n} \frac{\alpha_m \alpha'_n \beta_m \beta'_n}{m! n! \gamma_{m+n}} x^m y^n,$$

$$F_2(\alpha; \beta, \beta'; \gamma, \gamma'; x, y) = \sum_{m, n} \frac{\alpha_m \alpha'_n \beta_m \beta'_n}{m! n! \gamma_m \gamma'_n} x^m y^n,$$

$$F_3(\alpha, \alpha'; \beta, \beta'; \gamma; x, y) = \sum_{m, n} \frac{\alpha_m \alpha'_n \beta_m \beta'_n}{m! n! \gamma_{m+n}} x^m y^n,$$

$$F_4(\alpha; \beta; \gamma, \gamma'; x, y) = \sum_{m, n} \frac{\alpha_m \alpha'_n \beta_{m+n}}{m! n! \gamma_m \gamma'_n} x^m y^n,$$

где $\alpha_m = \alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+m-1)$, а $\sum_{m, n}$ обозначает $\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty}$.

Получить дифференциальные уравнения

$$\begin{aligned} x(1-x) \frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} + y(1-x) \frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial y} + \\ + \{\gamma - (\alpha + \beta + 1)x\} \frac{\partial F_1}{\partial x} - \beta y \frac{\partial F_1}{\partial y} - \alpha \beta F_1 = 0, \\ x(1-x) \frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2} - xy \frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial y} + \{\gamma - (\alpha + \beta + 1)x\} \frac{\partial F_2}{\partial x} - \beta y \frac{\partial F_2}{\partial y} - \alpha \beta F_2 = 0, \\ x(1-x) \frac{\partial^2 F_3}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial y} + \{\gamma - (\alpha + \beta + 1)x\} \frac{\partial F_3}{\partial x} - \alpha \beta F_3 = 0, \\ x(1-x) \frac{\partial^2 F_4}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 F_4}{\partial x \partial y} - y^2 \frac{\partial^2 F_4}{\partial y^2} + \\ + \{\gamma - (\alpha + \beta + 1)x\} \frac{\partial F_4}{\partial x} - (\alpha + \beta + 1)y \frac{\partial F_4}{\partial y} - \alpha \beta F_4 = 0, \end{aligned}$$

и четыре подобных уравнения, получаемых из предыдущих перестановкой x с y и α, β, γ с α', β', γ' , когда α, β', γ' входят в соответствующий ряд.

(Appel, Comptes Rendus, XC)

23. Показать, что если α отрицательно и $\alpha = -v + \alpha$, где v — целое число, а α положительно, то

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(a)}{\Gamma(x+a)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{R_n}{x+n} + G_n(x) \right\},$$

где

$$R_n = \frac{(-1)^n (\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n)}{n!} G(-n),$$

$$G(x) = \left(1 + \frac{x}{\alpha-1}\right) \left(1 + \frac{x}{\alpha-2}\right) \dots \left(1 + \frac{x}{\alpha-v}\right),$$

$$G_n(x) = \frac{G(x) - G(-n)}{x+n}.$$

(Hermite, Journ. für Math., XCII)

24. Показать, что если $a < 1$, то

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(a-x)}{\Gamma(a)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_n}{x+n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_n}{x-a-n},$$

где

$$R_n = \frac{(-1)^n a(a+1)\dots(a+n-1)}{n!}.$$

25. Показать, что если $a > 1$, а v и α — соответственно целая и дробная части величины a , то

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(x)\Gamma(a-x)}{\Gamma(a)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G(x)\rho_n}{x+n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G(x)\rho_{v+n}}{x-\alpha-n} - \\ - G(x) \left[\frac{\rho_0}{x-\alpha} + \frac{\rho_1}{x-\alpha-1} + \dots + \frac{\rho_{v-1}}{x-\alpha-v+1} \right], \end{aligned}$$

где

$$G(x) = \left(1 - \frac{x}{\alpha}\right) \left(1 - \frac{x}{\alpha+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{x}{\alpha+n-1}\right)$$

и

$$\rho_n = \frac{(-1)^n \alpha (\alpha+1) \cdots (\alpha+n-1)}{n!}.$$

(Hermite, Journ. für Math., XCII)

26. Показать, что если

$$f_n(x, y, v) = 1 - C_n^2 \frac{x(y+v+n-1)}{y(x+v)} + \\ + C_n^2 \frac{x(x+1)(y+v+n-1)(y+v+n)}{y(y+1)(x+v)(x+v+1)} - \dots,$$

где n — положительное целое число, а C_n^1 , C_n^2 — биномиальные коэффициенты, то

$$f_n(x, y, v) = \frac{\Gamma(y)\Gamma(y-x+n)\Gamma(x+v)\Gamma(v+n)}{\Gamma(y-x)\Gamma(y+n)\Gamma(v)\Gamma(x+v+n)}.$$

(Saalschütz, Zeitschrift für Math., XXXV; большое количество подобных результатов дано Дауголлом, Dougall, Proc. Edinburgh Math. Soc., XXV.)

27. Показать, что если

$$F(\alpha, \beta, \gamma; \delta, \epsilon; x) = 1 + \frac{\alpha\beta\gamma}{\delta\epsilon 1} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)\gamma(\gamma+1)}{\delta(\delta+1)\epsilon(\epsilon+1)\cdot 1\cdot 2} x^2 + \dots,$$

то при $\operatorname{Re}(\delta + \epsilon - \frac{3}{2}\alpha - 1) > 0$

$$F(\alpha, \alpha-\delta+1, \alpha-\epsilon+1; \delta, \epsilon; 1) =$$

$$= 2^{-\alpha} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\delta)\Gamma(\epsilon)\Gamma(\delta+\epsilon-\frac{3}{2}\alpha-1)}{\Gamma(\delta-\frac{1}{2}\alpha)\Gamma(\epsilon-\frac{1}{2}\alpha)\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\alpha)\Gamma(\delta+\epsilon-\alpha-1)}.$$

(A. C. Dixon, Proc. London Math. Soc., XXXV)

28. Показать, что при $\operatorname{Re} \alpha < \frac{2}{3}$

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\alpha(\alpha+1) \cdots (\alpha+n-1)}{n!} \right\}^3 = \cos\left(\frac{1}{2}\pi\alpha\right) \frac{\Gamma\left(1-\frac{3}{2}\alpha\right)}{\left\{ \Gamma\left(1-\frac{1}{2}\alpha\right) \right\}^3}.$$

(Morley, Proc. London Math. Soc., XXXIV)

29. Если

$$\int_0^1 \int_0^1 x^{l-1} (1-x)^{j-1} y^{l-1} (1-y)^{k-1} (1-xy)^{m-j-k} dx dy = B(l, j, k, l, m),$$

то при помощи интегрирования по x , а также и по y показать, что $B(l, j, k, l, m)$ есть симметрическая функция от $i+j, j+k, k+l, l+m, m+i$.

Показать, что

$$F(\alpha, \beta, \gamma; \delta, \epsilon; 1) : \Gamma(\delta) \Gamma(\epsilon) \Gamma(\delta + \epsilon - \alpha - \beta - \gamma)$$

есть симметрическая функция от $\delta, \epsilon, \delta + \epsilon - \alpha - \beta, \delta + \epsilon - \beta - \gamma, \delta + \epsilon - \gamma - \alpha$.

[A. C. Dixon, Proc. London Math. Soc. (2), II (1905), 8—16. О доказательстве частного случая методом Барнса см. Barnes, Quarterly Journ., XLI (1910), 136—140.]

30. Показать, что если

$$\begin{aligned} F_n &= F(-n, \alpha + n; \gamma; x) = \\ &= \frac{x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha}}{\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)} \frac{d^n}{dx^n} \{x^{\gamma+n-1}(1-x)^{\alpha+n-\gamma}\}, \end{aligned}$$

то, когда n — большое положительное целое число и $0 < x < 1$,

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{\Gamma(\gamma)}{n^{\gamma-\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}} (\sin \varphi)^{\frac{1}{2}-\gamma} (\cos \varphi)^{\gamma-\alpha-\frac{1}{2}} \times \\ &\quad \times \cos \left\{ (2n+\alpha)\varphi - \frac{1}{4}\pi(2\gamma-1) \right\} + O\left(\frac{1}{n^{\gamma+\frac{1}{2}}}\right), \end{aligned}$$

где $x = \sin^2 \varphi$.

[Этот результат приводится в большом мемуаре Darboux'a «Sur l'approximation des fonctions de très grands nombres», Journ. de Math. (3), IV (1878), 5—56, 377—416. Систематическое развитие теории гипергеометрических функций, у которых одна (или более) из постоянных велика, см. в Camb. Phil. Trans., XXII (1918), 277—308.]

ГЛАВА 15

ФУНКЦИИ ЛЕЖАНДРА

15.1. Определение полиномов Лежандра

Рассмотрим выражение $(1 - 2zh + h^2)^{-\frac{1}{2}}$; при $|2zh - h^2| < 1$ оно может быть разложено в ряд по возрастающим степеням разности $2zh - h^2$. Если, сверх того, $|2zh| + |h|^2 < 1$, то степени $2zh - h^2$ можно развернуть по формуле бинома Ньютона и расположить члены в любом порядке (§ 2.52, часть I), так как разложение выражения $[1 - \{|2zh| + |h|^2\}]^{-\frac{1}{2}}$ по степеням выражения $|2zh| + |h|^2$ сходится абсолютно. В частности, если ряд расположить по степеням h , то мы получим

$$(1 - 2zh + h^2)^{-\frac{1}{2}} = P_0(z) + hP_1(z) + h^2P_2(z) + h^3P_3(z) + \dots,$$

где

$$P_0(z) = 1, \quad P_1(z) = z, \quad P_2(z) = \frac{1}{2}(3z^2 - 1), \quad P_3(z) = \frac{1}{2}(5z^3 - 3z),$$

$$P_4(z) = \frac{1}{8}(35z^4 - 30z^2 + 3), \quad P_5(z) = \frac{1}{8}(63z^5 - 70z^3 + 15z)$$

и вообще

$$\begin{aligned} P_n(z) &= \frac{(2n)!}{2^n \cdot (n!)^2} \left\{ z^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} z^{n-2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4(2n-1)(2n-3)} z^{n-4} - \dots \right\} = \\ &= \sum_{r=0}^m (-1)^r \frac{(2n-2r)!}{2^n \cdot r! \cdot (n-r)! \cdot (n-2r)!} z^{n-2r}, \end{aligned}$$

где $m = \frac{1}{2}n$ или $\frac{1}{2}(n-1)$, смотря по тому, которое из этих чисел целое.

Если a, b и δ — положительные постоянные, причем b настолько мало, что $2ab + b^2 \leq 1 - \delta$, то разложение выражения $(1 - 2zh + h^2)^{-\frac{1}{2}}$ сходится равномерно относительно z и h , когда $|z| \leq a$, $|h| \leq b$.

Выражения $P_0(z)$, $P_1(z)$, ..., являющиеся, очевидно, полиномами z , известны под названием *полиномов Лежандра*¹⁾. $P_n(z)$ называется *полиномом Лежандра степени n*.

Из последующего (§ 15.2) будет видно, что эти полиномы являются частными случаями более обширного класса функций, известных под названием *функций Лежандра*.

При мер 1. Давая z частные значения в выражении $(1 - 2zh + h^2)^{-\frac{1}{2}}$, показать, что

$$\begin{aligned} P_n(1) &= 1, \quad P_n(-1) = (-1)^n, \\ P_{2n+1}(0) &= 0, \quad P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots (2n)}. \end{aligned}$$

При мер 2. Исходя из разложения

$$(1 - 2h \cos \theta + h^2)^{-\frac{1}{2}} = \left(1 + \frac{1}{2} h e^{i\theta} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} h^2 e^{2i\theta} + \dots\right) \times \left(1 + \frac{1}{2} h e^{-i\theta} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} h^2 e^{-2i\theta} + \dots\right),$$

показать, что

$$\begin{aligned} P_n(\cos \theta) &= \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots (2n)} \left\{ 2 \cos n\theta + \frac{1 \cdot (2n)}{2(2n-1)} 2 \cos(n-2)\theta + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1 \cdot 3 \cdot (2n)(2n-2)}{2 \cdot 4 \cdot (2n-1)(2n-3)} 2 \cos(n-4)\theta + \dots \right\}. \end{aligned}$$

Вывести отсюда, что если θ — вещественный угол, то

$$\begin{aligned} |P_n(\cos \theta)| &\leq \frac{1 \cdot 3 (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots 2n} \left\{ 2 + \frac{1 \cdot (2n)}{2(2n-1)} \cdot 2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1 \cdot 3 \cdot (2n)(2n-2)}{2 \cdot 4 \cdot (2n-1)(2n-3)} \cdot 2 + \dots \right\} = P_n(1), \end{aligned}$$

так что $|P_n(\cos \theta)| \leq 1$.

(Legendre)

При мер 3. Показать, что при $z = -\frac{1}{2}$

$$P_n = P_0 P_{2n} - P_1 P_{2n-1} + P_2 P_{2n-2} - \dots + P_{2n} P_0.$$

(Clare, 1905)

¹⁾ Другие названия: *коэффициенты Лежандра* и *зональные гармоники* (Zonal Harmonics). Они были введены в анализ 1784 г. Лежандром (Legendre, Mémoires par divers savants, X (1785)).

15.11. Формула Родрига¹⁾ для полиномов Лежандра

Очевидно, что, когда n — целое число,

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dz^n} (z^2 - 1)^n &= \frac{d^n}{dz^n} \left\{ \sum_{r=0}^n (-1)^r \frac{n!}{r!(n-r)!} z^{2n-2r} \right\} = \\ &= \sum_{r=0}^m (-1)^r \frac{n!}{r!(n-r)!} \frac{(2n-2r)!}{(n-2r)!} z^{n-2r}, \end{aligned}$$

где $m = \frac{1}{2} n$ или $\frac{1}{2}(n-1)$, чтобы коэффициенты отрицательных степеней z были равны нулю.

Из общей формулы для $P_n(z)$ вытекает непосредственно, что

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \frac{d^n}{dz^n} (z^2 - 1)^n;$$

этот результат известен под названием формулы Родрига.

При мер. Показать, что уравнение $P_n(z) = 0$ имеет n вещественных корней, лежащих между ± 1 .

15.12. Интеграл Шлефли для $P_n(z)$ ²⁾

Из результата § 15.11 в комбинации с результатами § 5.22 части I сразу же вытекает, что

$$P_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{(t^2 - 1)^n}{2^n (t - z)^{n+1}} dt,$$

где C — контур, обходящий вокруг точки z один раз против часовой стрелки; этот результат называется *интегральной формулой Шлефли* для полиномов Лежандра.

15.13. Дифференциальное уравнение Лежандра

Докажем теперь, что функция $u = P_n(z)$ является решением дифференциального уравнения

$$(1 - z^2) \frac{d^2 u}{dz^2} - 2z \frac{du}{dz} + n(n+1)u = 0;$$

это уравнение называется *дифференциальным уравнением Лежандра для функции степени n* . Подставив интеграл Шлефли в левую часть

¹⁾ Rodrigues, Corresp. sur l'École polytechnique, III (1814—1816), 361—385.

²⁾ Schläfli, Ueber die zwei Heine'schen Kugelfunktionen (Bern, 1881).

уравнения, мы получим, пользуясь § 5.22 части I,

$$(1-z^2) \frac{d^2 P_n(z)}{dz^2} - 2z \frac{d P_n(z)}{dz} + n(n+1) P_n(z) = \\ = \frac{n+1}{2\pi i} \int_C \frac{(t^2-1)^n dt}{2^n (t-z)^{n+3}} \{ -(n+2)(t^2-1) + 2(n+1)t(t-z) \} = \\ = \frac{n+1}{2\pi i 2^n} \int_C \frac{d}{dt} \left\{ \frac{(t^2-1)^{n+1}}{(t-z)^{n+2}} \right\} dt,$$

а этот интеграл равен нулю, так как при целом n функция

$$(t^2-1)^{n+1} (t-z)^{-n-2}$$

принимает свое начальное значение после обхода C . Поэтому полином Лежандра действительно удовлетворяет указанному дифференциальному уравнению.

Полученный результат может быть написан в форме

$$\frac{d}{dz} \left\{ (1-z^2) \frac{d P_n(z)}{dz} \right\} + n(n+1) P_n(z) = 0.$$

Заметим, что уравнение Лежандра является частным случаем уравнения Римана и определяется схемой

$$P \left\{ \begin{matrix} -1 & \infty & 1 \\ 0 & n+1 & 0 & z \\ 0 & -n & 0 \end{matrix} \right\}.$$

Пример 1. Показать, что уравнение, которому удовлетворяет $\frac{d^r P_n(z)}{dz^r}$, определяется схемой

$$P \left\{ \begin{matrix} -1 & \infty & 1 \\ -r & n+r+1 & -r & z \\ 0 & -n+r & 0 \end{matrix} \right\}.$$

Пример 2. Показать, что если $z^2 = \eta$, то дифференциальное уравнение Лежандра принимает вид

$$\frac{d^2 y}{d\eta^2} + \left\{ \frac{1}{2\eta} - \frac{1}{1-\eta} \right\} \frac{dy}{d\eta} + \frac{n(n+1)y}{4\eta(1-\eta)} = 0.$$

Показать, что это уравнение гипергеометрическое.

Пример 3. Получить интеграл Шлефли для функций Лежандра как предельный случай общего гипергеометрического интеграла § 14.6.

Так как уравнение Лежандра задается схемой

$$P \left\{ \begin{matrix} -1 & \infty & 1 \\ 0 & n+1 & 0 & z \\ 0 & -n & 0 \end{matrix} \right\},$$

то искомый интеграл будет

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{z}{b}\right)^{n+1} \int_C (t+1)^n (t-1)^n \lim_{b \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{t}{b}\right)^{-n} (t-z)^{-n-1} dt = \\ = \int_C (t^2 - 1)^n (t-z)^{-n-1} dt,$$

взятый по такому контуру C , что подинтегральная функция принимает свое начальное значение при его обходе, а это и дает интеграл Шлефли.

15.14. Интегральные свойства полиномов Лежандра

Покажем теперь, что ¹⁾

$$\int_{-1}^1 P_m(z) P_n(z) dz = \begin{cases} 0 & (m \neq n), \\ \frac{2}{2n+1} & (m = n). \end{cases}$$

Пусть $\{u\}_r$ обозначает $\frac{d^r u}{dz^r}$; тогда, если $r \leq n$, то $\{(z^2 - 1)^n\}_r$, является на $(z^2 - 1)^{n-r}$; следовательно, если $r < n$, то $\{(z^2 - 1)^n\}_r = 0$ при $z = 1$ и при $z = -1$.

Пусть m больше или равно n . Тогда, интегрируя последовательно по частям, получим

$$\int_{-1}^1 \{(z^2 - 1)^m\}_m \{(z^2 - 1)^n\}_n dz = [\{(z^2 - 1)^m\}_{m-1} \{(z^2 - 1)^n\}_n]_{-1}^1 - \\ - \int_{-1}^1 \{(z^2 - 1)^m\}_{m-1} \{(z^2 - 1)^n\}_{n+1} dz = \\ = (-1)^m \int_{-1}^1 (z^2 - 1)^m \{(z^2 - 1)^n\}_{n+m} dz,$$

так как $\{(z^2 - 1)^m\}_{m-1}, \{(z^2 - 1)^m\}_{m-2}, \dots$ обращаются в нуль в обоих пределах интегрирования.

Далее, если $m > n$, то $\{(z^2 - 1)^n\}_{n+m} = 0$, так как производные выражения $(z^2 - 1)^n$ порядка выше чем $2n$ равны нулю; следовательно, когда $m > n$, из формулы Родрига вытекает, что

$$\int_{-1}^1 P_m(z) P_n(z) dz = 0.$$

¹⁾ Эти результаты были даны Лежандром в 1784 и 1789 гг.

Если же $m = n$, то мы имеем на основании только что полученного преобразования

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \{(z^2 - 1)^n\}_n \{(z^2 - 1)^n\}_n dz &= (-1)^n \int_{-1}^1 (z^2 - 1)^n \frac{d^{2n}}{dz^{2n}} (z^2 - 1)^n dz = \\ &= (2n)! \int_{-1}^1 (1 - z^2)^n dz = 2(2n)! \int_0^1 (1 - z^2)^n dz = \\ &= 2 \cdot (2n)! \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}\theta d\theta = 2(2n)! \frac{2 \cdot 4 \dots (2n)}{3 \cdot 5 \dots (2n+1)}, \end{aligned}$$

где в интеграле была сделана подстановка $z = \cos \theta$; отсюда по формуле Родрига

$$\int_{-1}^1 \{P_n(z)\}^2 dz = \frac{2 \cdot (2n)! (2^n n!)^2}{(2^n \cdot n!)^2 (2n+1)!} = \frac{2}{2n+1}.$$

Таким образом, мы получили оба требуемых результата.

На языке главы XI части I функции $\left(n + \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} P_n(z)$ называются нормальными ортогональными функциями на интервале $(-1, 1)$.

Пример 1. Показать, что при $x > 0$

$$\int_{-1}^1 (\operatorname{ch} 2x - z)^{-\frac{1}{2}} P_n(z) dz = 2^{\frac{1}{2}} \left(n + \frac{1}{2}\right)^{-1} e^{-(2n+1)x}.$$

(Clare, 1908)

Пример 2. Если $I = \int_0^1 P_m(z) P_n(z) dz$, то

$$(I) \quad I = \frac{1}{2n+1} \quad (m = n),$$

$$(II) \quad I = 0 \quad (m - n — \text{четное число}),$$

$$(III) \quad I = \frac{(-1)^{\mu+\nu}}{2^{m+n-1} (n-m) (n+m+1)} \frac{n! m!}{(\nu!)^2 (\mu!)^2} \quad (n = 2\nu + 1, m = 2\mu).$$

(Clare, 1902)

15.2. Функции Лежандра

До сих пор мы предполагали, что степень n функции $P_n(z)$ — положительное целое число; фактически $P_n(z)$ не была даже определена при n , не являющимся положительным целым числом. Посмот-

рим теперь, как можно определить $P_n(z)$ для значений n , которые не обязательно являются целыми числами.

Здесь может быть проведена аналогия с теорией гамма-функции. Выражение $z!$, определенное обычным образом (т. е. как $z(z-1)(z-2)\dots 2 \cdot 1$), имеет смысл только для положительных целых значений z ; но когда введена гамма-функция, то $z!$ можно определить как $\Gamma(z+1)$, и тогда функция $z!$ будет существовать для нецелых значений z .

Ссылаясь на § 15.13, мы видим, что выражение

$$u = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{(t^2 - 1)^n}{2^n (t - z)^{n+1}} dt$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(1 - z^2) \frac{d^2 u}{dz^2} - 2z \frac{du}{dz} + n(n+1) u = 0$$

даже тогда, когда n не является положительным целым числом, лишь бы только контур C был таким, чтобы функция $(t^2 - 1)^{n+1}(t - z)^{-n-2}$ принимала свое начальное значение при обходе C .

Поэтому мы не будем более требовать, чтобы n было целым положительным числом.

Функция $(t^2 - 1)^{n+1}(t - z)^{-n-2}$ имеет три особые точки, а именно точки $t = 1$, $t = -1$, $t = z$; очевидно, что после того, как t описывает петлю вокруг точки $t = 1$ против часовой стрелки, функция примет свое исходное значение, умноженное на $e^{2\pi i(n+1)}$; если же t описывает петлю против часовой стрелки вокруг точки $t = z$, то функция примет исходное значение, умноженное на $e^{2\pi i(-n-2)}$. Поэтому если C — контур, окружающий точки $t = 1$ и $t = z$, но не окружающий точку $t = -1$, то функция $(t^2 - 1)^{n+1}(t - z)^{-n-2}$ примет свое исходное значение после того, как t описывает контур C . Следовательно, выражение

$$u = \frac{1}{2\pi i} \int_A^{(1+, z+)} \frac{(t^2 - 1)^n}{2^n (t - z)^{n+1}} dt$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению Лагранжа для функции степени n :

$$(1 - z^2) \frac{d^2 u}{dz^2} - 2z \frac{du}{dz} + n(n+1) u = 0$$

для всех значений n ; многозначные функции точно определяются, если взять A на вещественной оси справа от точки $t = 1$ (и справа от z , если z вещественно) и положить $\arg(t-1) = \arg(t+1) = 0$ и $|\arg(t-z)| < \pi$ в точке A .

Это выражение обозначим через $P_n(z)$ и назовем функцией Лежандра степени n первого рода.

Таким образом, мы определили функцию $P_n(z)$ независимо от того, будет ли n целым или нет.

Функция $P_n(z)$, определенная указанным образом, не будет однозначной функцией z , ибо мы можем взять два контура, как указано на рисунке, и интегралы по этим контурам не будут равны; для того чтобы сделать контурный интеграл однозначным, проведем разрез в плоскости t от -1 до $+\infty$ вдоль вещественной оси; это потребует проведения такого же разреза в плоскости z , так как если бы этого разреза не было, то при непрерывном изменении z через отрицательную часть вещественной оси контур не мог бы изменяться непрерывно.

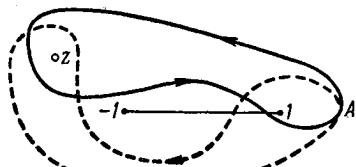


Рис. 3.

Из § 5.31 части I вытекает, что $P_n(z)$ будет аналитической функцией на всей разрезанной плоскости.

15.21. Рекуррентные формулы

Выведем теперь формулы (которые в действительности являются частными случаями соотношений, существующих, как было показано в § 14.7, между смежными P -функциями Римана), связывающие функции Лежандра различных степеней.

Если C — контур § 15.2, то мы имеем¹⁾

$$P_n(z) = \frac{1}{2^{n+1} \pi i} \int_C \frac{(t^2 - 1)^n}{(t - z)^{n+1}} dt,$$

$$P'_n(z) = \frac{n+1}{2^{n+1} \pi i} \int_C \frac{(t^2 - 1)^n}{(t - z)^{n+2}} dt.$$

Но

$$\frac{d}{dt} \frac{(t^2 - 1)^{n+1}}{(t - z)^{n+1}} = \frac{2(n+1)t(t^2 - 1)^n}{(t - z)^{n+1}} - \frac{(n+1)(t^2 - 1)^{n+1}}{(t - z)^{n+2}},$$

откуда, интегрируя, получим

$$0 = 2 \int_C \frac{t(t^2 - 1)^n}{(t - z)^{n+1}} dt - \int_C \frac{(t^2 - 1)^{n+1}}{(t - z)^{n+2}} dt.$$

¹⁾ Мы пишем $P'_n(z)$ вместо $\frac{d}{dz} P_n(z)$.

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^{n+1}\pi i} \int_C \frac{(t^2-1)^n}{(t-z)^n} dt &= \\ &= \frac{1}{2^{n+2}\pi i} \int_C \frac{(t^2-1)^{n+1}}{(t-z)^{n+2}} dt - \frac{z}{2^{n+1}\pi i} \int_C \frac{(t^2-1)^n}{(t-z)^{n+1}} dt, \end{aligned}$$

т. е.

$$P_{n+1}(z) - zP_n(z) = \frac{1}{2^{n+1}\pi i} \int_C \frac{(t^2-1)^n}{(t-z)^n} dt. \quad (\text{A})$$

Дифференцируя ¹⁾, получим, далее,

$$P'_{n+1}(z) - zP'_n(z) - P_n(z) = nP_n(z)$$

или

$$P'_{n+1}(z) - zP'_n(z) = (n+1)P_n(z). \quad (\text{I})$$

Это и есть первая из искомых формул.

Далее, развертывая равенство

$$\int_C \frac{d}{dt} \left\{ \frac{t(t^2-1)^n}{(t-z)^n} \right\} dt = 0,$$

найдем, что

$$\int_C \frac{(t^2-1)^n}{(t-z)^n} dt + 2n \int_C \frac{t^2(t^2-1)^{n-1}}{(t-z)^n} dt - n \int_C \frac{t(t^2-1)^n}{(t-z)^{n+1}} dt = 0.$$

Напишем $(t^2-1)+1$ вместо t^2 и $(t-z)+z$ вместо t в этом равенстве, тогда получим

$$(n+1) \int_C \frac{(t^2-1)^n}{(t-z)^n} dt + 2n \int_C \frac{(t^2-1)^{n-1}}{(t-z)^n} dt - nz \int_C \frac{(t^2-1)^n}{(t-z)^{n+1}} dt = 0.$$

Пользуясь равенством (A), получим тотчас же

$$(n+1)\{P_{n+1}(z) - zP_n(z)\} + nP_{n-1}(z) - nzP_n(z) = 0,$$

т. е.

$$(n+1)P_{n+1}(z) - (2n+1)zP_n(z) + nP_{n-1}(z) = 0 \quad (\text{II})$$

— соотношение ²⁾, связывающее три функции Лежандра последовательных степеней. Это и есть вторая из искомых формул.

¹⁾ Процесс дифференцирования под знаком интеграла легко обосновать согласно § 4.2 части I.

²⁾ Это соотношение, по существу, было дано Лагранжем в мемуаре по теории вероятности, Misc. Taurinensis, V (1770—1773), 167—232.

Остальные формулы мы можем вывести из (I) и (II) следующим образом:

Дифференцируя (II), имеем

$$(n+1) \{P'_{n+1}(z) - zP_n(z)\} - n \{zP'_n(z) - P'_{n-1}(z)\} - (2n+1)P_n(z) = 0.$$

Пользуясь формулой (I) для исключения $P'_{n+1}(z)$ и деля затем на n^1 , получим

$$zP'_n(z) - P'_{n-1}(z) = nP_n(z). \quad (\text{III})$$

Складывая (I) и (III), получим

$$P'_{n+1}(z) - P'_{n-1}(z) = (2n+1)P_n(z). \quad (\text{IV})$$

Наконец, заменяя в (I) n на $n-1$ и исключая $P'_{n-1}(z)$ из полученного таким образом равенства и формулы (III), находим

$$(z^2 - 1)P'_n(z) = nzP_n(z) - nP_{n-1}(z). \quad (\text{V})$$

Формулы (I) — (V) называются *рекуррентными формулами*.

Приведенное доказательство остается справедливым независимо от того, будет ли n целым числом или нет, т. е. оно применимо к общим функциям Лежандра. Другое доказательство, которое, однако, применимо лишь к случаю, когда n — положительное целое число (т. е. лишь к полиномам Лежандра), заключается в следующем.

Положим

$$V = (1 - 2hz + h^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Тогда, сравнивая коэффициенты²⁾ при одинаковых степенях h в разложениях обеих частей уравнения

$$(1 - 2hz + h^2) \frac{\partial V}{\partial h} = (z - h)V,$$

получим

$$nP_n(z) - (2n-1)zP_{n-1}(z) + (n-1)P_{n-2}(z) = 0,$$

что представляет собою формулу (II).

Подобным же образом, сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях h в разложениях обеих частей уравнения

$$h \frac{\partial V}{\partial h} = (z - h) \frac{\partial V}{\partial z},$$

получим

$$z \frac{dP_n(z)}{dz} - \frac{dP_{n-1}(z)}{dz} = nP_n(z),$$

¹⁾ Если $n=0$, то мы имеем $P_0(z)=1$, $P_{-1}(z)=1$, и результат (III) верен, но тривиален.

²⁾ Читателю рекомендуется проверить законность этих операций.

15.211. РАЗЛОЖЕНИЕ ЛЮБОГО ПОЛИНОМА ПО ПОЛИНОМАМ ЛЕЖАНДРА 119

что представляет собою формулу (III). Остальные формулы могут быть выведены из этих формул.

Пример 1. Показать, что для всех значений n

$$\frac{d^2}{dz^2} \left\{ z(P_n^2 + P_{n+1}^2) - 2P_n P_{n+1} \right\} = (2n+3) P_{n+1}^2 - (2n+1) P_n^2.$$

(Hargreaves)

Пример 2. Показать, что если

$$M_n(x) = \left[\left(\frac{d}{dz} \right)^n (ze^{xz} \operatorname{cosech} z) \right]_{z=0},$$

то

$$\frac{dM_n(x)}{dx} = nM_{n-1}(x) \quad \text{и} \quad \int_{-1}^1 M_n(x) dx = 0.$$

(Trinity, 1900)

Пример 3. Доказать, что если m и n — целые числа и $m \leq n$, причем оба четные или оба нечетные, то

$$\int_{-1}^1 \frac{dP_m(z)}{dz} \frac{dP_n(z)}{dz} dz = m(m+1).$$

(Clare, 1898)

Пример 4. Доказать, что если m, n — целые числа и $m \geq n$, то

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{d^2 P_m(z)}{dz^2} \frac{d^2 P_n(z)}{dz^2} dz &= \\ &= \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{48} \{3m(m+1) - n(n+1) + 6\} \{1 + (-1)^{n+m}\}. \end{aligned}$$

(Math. Trip., 1897)

15.211. Разложение любого полинома по полиномам Лежандра

Пусть $f_n(z)$ — полином степени n от z .

Тогда всегда можно выбрать a_0, a_1, \dots, a_n так, что

$$f_n(z) \equiv a_0 P_0(z) + a_1 P_1(z) + \dots + a_n P_n(z),$$

ибо, сравнивая коэффициенты при z^n, z^{n-1}, \dots в обеих частях, мы получим уравнения, последовательно определяющие a_n, a_{n-1}, \dots однозначно через коэффициенты полинома $f_n(z)$.

Для того чтобы определить a_0, a_1, \dots, a_n наиболее простым способом, умножим рассматриваемое тождество на $P_n(z)$ и проинтегрируем.

Тогда при $r = 0, 1, 2, \dots, n$, в силу § 15.14, имеем

$$\int_{-1}^1 f_n(z) P_r(z) dz = \frac{2a_r}{2r+1};$$

если же $r > n$, то интеграл в левой части равен нулю.

Пример 1. Дано $z^n = a_0 P_0(z) + a_1 P_1(z) + \dots + a_n P_n(z)$; определить a_0, a_1, \dots, a_n .

(Legendre, Exercices de Calc. Int., II, 352)

[Приравняем коэффициенты при z^n в обеих частях; это даст

$$a_n = \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!}.$$

Пусть $I_{n, m} = \int_{-1}^1 z^n P_m(z) dz$, так что, по только что полученному результату,

$$I_{n, m} = \frac{2^{m+1} (m!)^2}{(2m+1)!}.$$

Далее, если $(n-m)$ — нечетное число, то $I_{n, m}$ есть интеграл от нечетной функции с пределами ± 1 и, следовательно, равен нулю; $I_{n, m}$ будет также равен нулю, когда $n-m$ — отрицательное четное число.

Для определения $I_{n, m}$, когда $n-m$ — положительное четное число, находим из уравнения Лежандра, интегрируя дважды по частям,

$$\begin{aligned} m(m+1) \int_{-1}^1 z^n P_m(z) dz &= - \int_{-1}^1 z^n \frac{d}{dz} \{(1-z^2) P'_m(z)\} dz = \\ &= - [z^n (1-z^2) P'_m(z)]_{-1}^1 + n \int_{-1}^1 z^{n-1} (1-z^2) P'_m(z) dz = \\ &= n [z^{n-1} (1-z^2) P_m(z)]_{-1}^1 - n \int_{-1}^1 \{(n-1) z^{n-2} - (n+1) z^n\} P_m(z) dz, \end{aligned}$$

и таким образом,

$$m(m+1) I_{n, m} = n(n+1) I_{n, m} - n(n-1) I_{n-2, m}.$$

Поэтому имеем

$$\begin{aligned} I_{n, m} &= \frac{n(n-1)}{(n-m)(n+m+1)} I_{n-2, m} = \\ &= \frac{n(n-1) \dots (m+1)}{(n-m)(n-2-m) \dots 2 \cdot (n+m+1)(n+m-1) \dots (2m+3)} I_{m, m}, \end{aligned}$$

повторяя тот же процесс сведения.

Следовательно,

$$I_{n,m} = \frac{2^{m+1} n! \left(\frac{n+m}{2}\right)!}{\left(\frac{n-m}{2}\right)! (n+m+1)!},$$

и, таким образом,

$a_m = 0$, когда $n - m$ — нечетное или отрицательное число,
и

$$a_m = \frac{(2m+1) 2^m n! \left(\frac{n+m}{2}\right)!}{\left(\frac{n-m}{2}\right)! (n+m+1)!},$$

когда $n - m$ — четное положительное число].

П р и м е р 2. Разложить $\cos n\theta$ по полиномам Лежандра от $\cos \theta$, когда n — целое число.

П р и м е р 3. Вычислить интегралы

$$\int_{-1}^1 z P_n(z) P_{n+1}(z) dz, \quad \int_{-1}^1 z^2 P_n(z) P_{n+1}(z) dz.$$

(St. John's, 1899)

П р и м е р 4. Показать, что

$$\int_{-1}^1 (1-z^2) \{P'_n(z)\}^2 dz = \frac{2n(n+1)}{2n+1}.$$

(Trinity, 1894)

П р и м е р 5. Показать, что

$$nP_n(\cos \theta) = \sum_{r=1}^n \cos r\theta P_{n-r}(\cos \theta).$$

(St. John's, 1898)

П р и м е р 6. Показать, что если

$$u_n = \int_{-1}^1 (1-z^2)^n P_{2m}(z) dz,$$

где $m < n$, то

$$(n-m)(2n+2m+1) u_n = 2n^2 u_{n-1}.$$

(Trinity, 1895)

15.22. Представление Мерфи функции $P_n(z)$ в виде гипергеометрической функции¹⁾

Так как (§ 15.13) уравнение Лежандра является частным случаем уравнения Римана, то следует ожидать, что может быть получена формула, дающая выражение для $P_n(z)$ через гипергеометрические

¹⁾ M i g r h y, Electricity (1833). Результат Мерфи был получен только для полиномов Лежандра.

функции. Для получения этой формулы возьмем интеграл § 15.2 для функции Лежандра и предположим, что $|1-z| < 2$. Для выбора контура C предположим, что δ — любая постоянная, удовлетворяющая неравенству $0 < \delta < 1$, и z таково, что $|1-z| \leq 2(1-\delta)$; затем возьмем C в виде окружности¹⁾

$$|1-t| = 2 - \delta.$$

Так как $\left| \frac{1-z}{1-t} \right| \leq \frac{2-2\delta}{2-\delta} < 1$, то мы можем разложить $(t-z)^{-n-1}$ в равномерно сходящийся ряд²⁾

$$(t-z)^{-n-1} = (t-1)^{-n-1} \left\{ 1 + (n+1) \frac{z-1}{t-1} + \right. \\ \left. + \frac{(n+1)(n+2)}{2!} \left(\frac{z-1}{t-1} \right)^2 + \dots \right\}.$$

Подставляя это разложение в интеграл Шлефли и интегрируя почленно (§ 4.7, часть I), получим

$$P_n(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(z-1)^r}{2^{n+1}\pi i} \frac{(n+1)(n+2)\dots(n+r)}{r!} \int_A^{(1+, z+)} \frac{(t^2-1)^n}{(t-1)^{n+1+r}} dt = \\ = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(z-1)^r (n+1)(n+2)\dots(n+r)}{2^n \cdot (r!)^2} \left[\frac{d^r}{dt^r} (t+1)^n \right]_{t=1}$$

согласно § 5.22.

Так как $\arg(t+1) = 0$ при $t = 1$, то

$$\left[\frac{d^r}{dt^r} (t+1)^n \right]_{t=1} = 2^{n-r} n(n-1)\dots(n-r+1),$$

и таким образом, при $|1-z| \leq 2(1-\delta) < 2$ имеем

$$P_n(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)\dots(n+r)(-n)(1-n)\dots(r-1-n)}{(r!)^2} \times \\ \times \left(\frac{1-z}{2} \right)^r = F(n+1, -n; 1; \frac{1-z}{2}).$$

Это и есть требуемое представление; оно объясняет (§ 14.53), почему в § 15.2 нельзя было избежать разреза от -1 до $-\infty$.

¹⁾ Эта окружность охватывает точки $t = 1$, $t = z$.

²⁾ Ряд обрывается, если n — целое отрицательное число.

Следствие. Из полученного результата ясно, что для всех значений n

$$P_n(z) = P_{-n-1}(z).$$

Примечание. Если n — целое положительное число, то полученная формула представляет полином Лежандра в виде полинома от $1-z$ с коэффициентами простого вида.

Пример 1. Показать, что если m — целое положительное число, то

$$\left\{ \frac{d^{m+1}P_{m+n}(z)}{dz^{m+1}} \right\}_{z=1} = \frac{\Gamma(2m+n+2)}{2^{m+1} (m+1)! \Gamma(n)}.$$

(Trinity, 1907)

Пример 2. Показать, что полином Лежандра $P_n(\cos \theta)$ равен

$$(-1)^n F\left(n+1; -n; 1; \cos^2 \frac{1}{2} \theta\right)$$

и

$$\cos^n \frac{1}{2} \theta F\left(-n, -n; 1; -\tan^2 \frac{1}{2} \theta\right).$$

(Murphy)

15.23. Интегралы Лапласа¹⁾ для $P_n(z)$

Покажем теперь, что для всех значений n и для определенных значений z функция Лежандра $P_n(z)$ может быть представлена в виде интеграла

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left\{ z + (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \cos \varphi \right\}^n d\varphi,$$

называемого *первым интегралом Лапласа*.

(А) *Доказательство, применимое только к полиномам Лежандра.*

Если n — положительное целое число, то согласно § 15.12 мы имеем

$$P_n(z) = \frac{1}{2^{n+1} \pi i} \int_C \frac{(t^2 - 1)^n}{(t - z)^{n+1}} dt,$$

где C — какой-либо контур, описываемый вокруг точки z против часовой стрелки. Примем за C окружность с центром z и радиусом $|z^2 - 1|^{\frac{1}{2}}$, так что на C $t = z + (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} e^{i\varphi}$, где φ можно взять возрастающим от $-\pi$ до π .

¹⁾ Laplace, Mécanique Celeste, книга XI, глава 2. Контуром применяемым в этом параграфе, а также другими, вводимыми ниже в этой главе, мы обязаны Дж. Ходжкинсону (J. Hodgkinson).

Произведя подстановку, получим для *всех* значений z

$$\begin{aligned} P_n(z) &= \frac{1}{2^{n+1}\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\left\{ z - 1 + (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} e^{i\varphi} \right\} \left\{ z + 1 + (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} e^{i\varphi} \right\}}{(z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} e^{i\varphi}} \right)^n i d\varphi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ z + (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \cos \varphi \right\}^n d\varphi = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left\{ z + (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \cos \varphi \right\}^n d\varphi, \end{aligned}$$

так как подинтегральная функция есть четная функция от φ . Выбор ветви двувзначной функции $(z^2 - 1)^{\frac{1}{2}}$, очевидно, безразличен.

(В) *Доказательство, применимое к функциям Лежандра при любом n .*

Сделаем ту же самую подстановку, как в (А), в интеграле Шлефли, определяющем $P_n(z)$; необходимо, однако, дополнительно добиться, чтобы $t = 1$ лежала внутри контура, а $t = -1$ вне его, и необходимо также выбрать определенную ветвь выражения

$$\left\{ z + (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \cos \varphi \right\}^n,$$

которое теперь является многозначной функцией от φ .

Условие, что $t = 1$ и $t = -1$ лежат соответственно внутри и вне контура C , заключается в том, что расстояния z от этих точек соответственно меньше и больше, чем $|z^2 - 1|^{\frac{1}{2}}$. Оба эти условия удовлетворяются, если $|z - 1| < |z + 1|$, что дает $\operatorname{Re} z > 0$, и таким образом (приняв за $\arg z$ его главное значение), мы должны иметь $|\arg z| < \frac{1}{2}\pi$.

Поэтому

$$P_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ z + (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \cos \varphi \right\}^n d\varphi,$$

где значение $\arg \left\{ z + (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \cos \varphi \right\}$ определяется тем обстоятельством, что оно [будучи равно $\arg(t^2 - 1) - \arg(t - z)$] численно меньше π , когда t лежит на вещественной оси и справа от z (см. § 15.2).

Если φ возрастает от $-\pi$ до π , то $z + (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \cos \varphi$ пробегает отрезок прямой на плоскости комплексной переменной от точки $z - (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}}$ до точки $z + (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}}$ и обратно; а так как этот отрезок не проходит через

начало координат¹⁾, то $\arg \left\{ z + (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \cos \varphi \right\}$ на пути интегрирования может изменяться лишь на величины, меньшие π .

Предположим теперь, что ветвь функции

$$\left\{ z + (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \cos \varphi \right\}^n,$$

которую следует взять, будет такова, что она приходит к $z^n e^{n2k\pi i}$ (где k — целое число) при $\varphi = \frac{1}{2}\pi$.

Тогда

$$P_n(z) = \frac{e^{2nk\pi i}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ z + (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \cos \varphi \right\}^n d\varphi,$$

где уже берется та ветвь многозначной функции, которая равна z^n , когда $\varphi = \frac{1}{2}\pi$.

Заставим теперь $z \rightarrow 1$ по пути, который не проходит через нули функции $P_n(z)$; так как $P_n(z)$ и интеграл являются аналитическими функциями от z при $|\arg z| < \frac{1}{2}\pi$, то k не изменяется, когда z описывает этот путь.

Таким образом, мы получим

$$e^{2nk\pi i} = 1.$$

Следовательно, при $|\arg z| < \frac{1}{2}\pi$ и любом n

$$P_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ z + (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \cos \varphi \right\}^n d\varphi,$$

где $\arg \left\{ z + (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \cos \varphi \right\}$ берется равным $\arg z$ при $\varphi = \frac{1}{2}\pi$.

Полученное для $P_n(z)$ выражение, которое, очевидно, и в этом случае может быть записано в виде

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left\{ z + (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \cos \varphi \right\}^n d\varphi,$$

известно под названием *первого интеграла Лапласа* для $P_n(z)$.

¹⁾ В противном случае z принимает чисто мнимое значение, а такие значения z исключены.

Следствие. Из следствия § 15.22 очевидно, что при $|\arg z| < \frac{1}{2}\pi$ имеем

$$P_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\varphi}{\left\{ z + (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \cos \varphi \right\}^{n+1}},$$

результат, принадлежащий Якоби (Jacobi, Journ. für Math., XXVI (1843), 81—87) и известный под названием *второго интеграла Лапласа* для $P_n(z)$.

Пример 1. Получить первый интеграл Лапласа, рассматривая

$$\sum_{n=0}^{\infty} h^n \int_0^\pi \left\{ z + (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \cos \varphi \right\}^n d\varphi$$

и пользуясь примером 1 § 6.21 части I.

Пример 2. Показать прямым дифференцированием, что интеграл Лапласа является решением уравнения Лежандра.

Пример 3. Показать, что если

$$s < 1, \quad |h| < 1$$

и

$$(1 - 2h \cos \theta + h^2)^{-s} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cos n\theta,$$

то

$$b_n = \frac{2 \sin s\pi}{\pi} \int_0^1 \frac{h^n x^{n+s-1}}{(1-x)^s (1-xh^2)^s} dx. \quad (\text{Binet})$$

Пример 4. Вывести второй интеграл Лапласа из первого интеграла, когда $z > 1$, при помощи подстановки

$$\left\{ z - (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \cos \theta \right\} \left\{ z + (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \cos \varphi \right\} = 1.$$

Пример 5. Разложением по степеням $\cos \varphi$ показать, что для определенной области значений z

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left\{ z + (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \cos \varphi \right\}^n d\varphi = z^n F\left(-\frac{n}{2}, \frac{1-n}{2}; 1; 1-z^{-2}\right).$$

Пример 6. Показать, что уравнение Лежандра определяется схемой

$$P \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & \infty & 1 \\ -\frac{n}{2} & \frac{1+n}{2} & 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{ccc} 1+n & -\frac{n}{2} & 0 \\ \frac{1+n}{2} & -\frac{n}{2} & 0 \end{array} \right\},$$

где

$$z = \frac{1}{2} \left(\xi^{\frac{1}{2}} + \xi^{-\frac{1}{2}} \right).$$

15.231. Интеграл Мелера — Дирихле¹⁾ для $P_n(z)$

Другое интегральное представление функции Лежандра может быть получено следующим путем.

Для всех значений n имеем по предыдущей теореме

$$P_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left\{ z + \cos \varphi (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \right\}^n d\varphi.$$

В этом интеграле заменим переменную φ новой переменной h , определяемой равенством

$$h = z + (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \cos \varphi;$$

получим

$$P_n(z) = \frac{i}{\pi} \int_{z-(z^2-1)^{\frac{1}{2}}}^{z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}} h^n (1 - 2hz + h^2)^{-\frac{1}{2}} dh;$$

путь интегрирования — отрезок прямой, $\arg h$ определяется условием, что $h = z$ при $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ и

$$(1 - 2hz + h^2)^{-\frac{1}{2}} = -i(z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \sin \varphi.$$

Пусть теперь $z = \cos \theta$; тогда

$$P_n(\cos \theta) = \frac{i}{\pi} \int_{e^{-i\theta}}^{e^{i\theta}} h^n (1 - 2h\cos \theta + h^2)^{-\frac{1}{2}} dh.$$

Далее (так как θ ограничено неравенством $-\frac{1}{2}\pi < \theta < \frac{1}{2}\pi$, когда n не есть положительное целое число), путь интегрирования можно деформировать²⁾ в дугу окружности $|h| = 1$, проходящую через точку $h = 1$ и соединяющую точки $h = e^{-i\theta}$ и $h = e^{i\theta}$, так как подинтегральная функция является аналитической во всей области между этой дугой и ее хордой³⁾.

¹⁾ Dirichlet, Journ. für Math., XVII (1837), 35; Mehlert, Math. Ann., V (1872), 141.

²⁾ Если θ — комплексная величина и $\operatorname{Re}(\cos \theta) > 0$, деформирование контура представляет несколько большие трудности. Данный анализ легко видоизменить так, чтобы охватить и этот случай.

³⁾ Подинтегральная функция не будет аналитической на концах дуги, однако будет вести себя, как $(h - e^{\pm i\theta})^{-\frac{1}{2}}$, вблизи них; но если область вырезать (§ 6.23) при $e^{\pm i\theta}$ и радиусы вырезов заставить стремиться к нулю, то мы увидим, что деформация законна.

Положив $h = e^{i\varphi}$, получим

$$P_n(\cos \theta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\theta}^{\theta} \frac{e^{(n+\frac{1}{2})i\varphi}}{(2 \cos \varphi - 2 \cos \theta)^{\frac{1}{2}}} d\varphi$$

и, далее,

$$P_n(\cos \theta) = \frac{2}{\pi} \int_0^\theta \frac{\cos(n + \frac{1}{2})\varphi}{\{2(\cos \varphi - \cos \theta)\}^{\frac{1}{2}}} d\varphi;$$

легко видеть, что нужно взять положительное значение квадратного корня.

Выведенная формула известна под названием *упрощенной формы Мелера интеграла Дирихле*. Результат справедлив для всех значений n .

Пример 1. Доказать, что, когда n — положительное целое число,

$$P_n(\cos \theta) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin(n + \frac{1}{2})\varphi}{\{2(\cos \theta - \cos \varphi)\}^{\frac{1}{2}}} d\varphi.$$

[Заменить θ на $\pi - \theta$ и φ на $\pi - \varphi$ в только что полученном результате.]

Пример 2. Доказать, что

$$P_n(\cos \theta) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{h^n}{(h^2 - 2h \cos \theta + 1)^{\frac{1}{2}}} dh,$$

причем интеграл берется вдоль замкнутого контура, охватывающего точки $h = e^{\pm i\theta}$, а радикалу приписывается надлежащее значение.

Исходя отсюда (или другим путем), доказать, что если θ лежит между $\frac{1}{6}\pi$ и $\frac{5}{6}\pi$, то

$$\begin{aligned} P_n(\cos \theta) = & \frac{4}{\pi} \frac{2 \cdot 4 \dots 2n}{3 \cdot 5 \dots (2n+1)} \left[\frac{\cos(n\theta + \varphi)}{(2 \sin \theta)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1^2}{2(2n+3)} \frac{\cos(n\theta + 3\varphi)}{(2 \sin \theta)^{\frac{3}{2}}} + \right. \\ & \left. + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2 \cdot 4 \cdot (2n+3)(2n+5)} \frac{\cos(n\theta + 5\varphi)}{(2 \sin \theta)^{\frac{5}{2}}} + \dots \right], \end{aligned}$$

где φ обозначает $\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\pi$.

Показать также, что первые члены ряда дают приближенное значение $P_n(\cos \theta)$ для всех значений θ между 0 и π , не слишком близких к 0 или π . Объяснить, как можно использовать эту теорему для получения приближений к корням уравнения $P_n(\cos \theta) = 0$.

[См. Heine, Kugelfunctionen, I, 178; Darboux, Comptes Rendus, LXXXII (1876), 365, 404.]

15.3. Функции Лежандра второго рода

Мы рассматривали до сих пор только одно решение уравнения Лежандра, а именно $P_n(z)$. Приступим к нахождению второго решения.

Мы видели (§ 15.2), что уравнению Лежандра удовлетворяет интеграл

$$\int (t^2 - 1)^n (t - z)^{-n-1} dt,$$

взятый вдоль такого контура, после обхода которого подинтегральная функция возвращается к своему начальному значению. Пусть D — контур в виде восьмерки, образованной следующим образом: пусть z не есть вещественное число, заключающееся между -1 и $+1$; построим эллипс в плоскости t с фокусами в точках ± 1 и настолько малый, что точка $t = z$ находится вне его. Пусть A — конец большой оси эллипса справа от $t = 1$.

Пусть контур D начинается от точки A , описывает путь $(1-, -1+)$ и возвращается в A (§ 12.43), причем он лежит целиком внутри эллипса.

Пусть $|\arg z| \leq \pi$ и $|\arg(z-t)| \rightarrow \arg z$, когда $t \rightarrow 0$ на контуре. Пусть $\arg(t+1) = \arg(t-1) = 0$ в точке A .

Тогда решение уравнения Лежандра, справедливое в этой плоскости (разрезанной вдоль вещественной оси от 1 до $-\infty$), будет

$$Q_n(z) = \frac{1}{4i \sin n\pi} \int_D \frac{(t^2 - 1)^n}{2^n (z - t)^{n+1}} dt,$$

если n не целое число.

Если $\operatorname{Re}(n+1) > 0$, то можно деформировать путь интегрирования, как в 12.43, что дает

$$Q_n(z) = \frac{1}{2^{n+1}} \int_{-1}^1 (1 - t^2)^n (z - t)^{-n-1} dt$$

(где $\arg(1-t) = \arg(1+t) = 0$); это выражение мы примем за определение функции $Q_n(z)$, когда n — положительное целое число или нуль. Когда n — отрицательное целое число ($= -m - 1$), дифференциальное уравнение Лежандра для функции степени n будет тождественно с таковым для функции степени m , и таким образом, мы примем за два основных решения $P_m(z)$, $Q_n(z)$.

$Q_n(z)$ называется функцией Лежандра степени n второго рода.

15.31. Разложение функции $Q_n(z)$ в степенной ряд

Получим теперь функцию Лежандра второго рода в виде степенного ряда относительно z^{-1} .

Когда вещественная часть $n + 1$ положительна, имеем

$$Q_n(z) = \frac{1}{2^{n+1}} \int_{-1}^1 (1 - t^2)^n (z - t)^{-n-1} dt.$$

Предположим, что $|z| > 1$. Тогда подинтегральная функция может быть разложена в ряд, равномерно сходящийся относительно t , так что

$$\begin{aligned} Q_n(z) &= \frac{1}{2^{n+1} z^{n+1}} \int_{-1}^1 (1 - t^2)^n \left(1 - \frac{t}{z}\right)^{-n-1} dt = \\ &= \frac{1}{2^{n+1} z^{n+1}} \int_{-1}^1 (1 - t^2)^n \left\{ 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{t}{z}\right)^r \frac{(n+1)(n+2)\dots(n+r)}{r!} \right\} dt = \\ &= \frac{1}{2^n z^{n+1}} \left[\int_0^1 (1 - t^2)^n dt + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(n+1)\dots(n+2s)}{(2s)! z^{2s}} \int_0^1 (1 - t^2)^n t^{2s} dt \right], \end{aligned}$$

где $r = 2s$, потому что при нечетных значениях r интегралы равны 0. Положив $t^2 = u$, получим без затруднений, пользуясь формулой § 12.41,

$$Q_n(z) = \frac{\frac{1}{2} \Gamma(n+1)}{2^{n+1} \Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)} \frac{1}{z^{n+1}} F\left(\frac{1}{2} n + \frac{1}{2}, \frac{1}{2} n + 1; n + \frac{3}{2}; z^{-2}\right).$$

Данное выше доказательство применимо только в том случае, когда вещественная часть $(n+1)$ будет положительна (см. § 4.5, часть I); но совершенно аналогичные рассуждения можно применить и к интегралу

$$Q_n(z) = \frac{1}{4i \sin n\pi} \int_D \frac{1}{2^n} (t^2 - 1)^n (z - t)^{-n-1} dt,$$

причем коэффициенты вычисляются, если представлять интегралы

$$\int_D (t^2 - 1)^n t^r dt$$

в форме

$$e^{n\pi i} \int_0^{(1-)} (1 - t^2)^n t^r dt + e^{n\pi i} \int_0^{(-1+)} (1 - t^2)^n t^r dt;$$

тогда, положив $t^2 = u$ и используя § 12.43, получим тот же самый результат, что и прежде; таким образом, формула

$$Q_n(z) = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2^{n+1}} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)} \frac{1}{z^{n+1}} F\left(\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}; \frac{1}{2}n + 1; n + \frac{3}{2}; \frac{1}{z^2}\right)$$

остается верной для любых значений n (за исключением отрицательных целых значений) и для всех значений¹⁾ z таких, что $|z| > 1$, $|\arg z| < \pi$.

Пример 1. Показать, что если n — положительное целое число, то

$$Q_n(z) = \frac{(-2)^n n!}{(2n)!} \frac{d^n}{dz^n} \left\{ (z^2 - 1)^n \int_z^\infty (v^2 - 1)^{-n-1} dv \right\}.$$

[Легко убедиться в том, что уравнение Лежандра может быть выведено из уравнения

$$(1 - z^2) \frac{d^2 w}{dz^2} + 2(n-1)z \frac{dw}{dz} + 2nw = 0$$

путем n -кратного дифференцирования и подстановки $w = \frac{d^n w}{dz^n}$. Двумя независимыми решениями этого уравнения будут

$$(z^2 - 1)^n \quad \text{и} \quad (z^2 - 1)^n \int_z^\infty (v^2 - 1)^{-n-1} dv.$$

Отсюда вытекает, что

$$\frac{d^n}{dz^n} \left\{ (z^2 - 1)^n \int_z^\infty (v^2 - 1)^{-n-1} dv \right\}$$

является решением уравнения Лежандра. Так как это выражение, будучи разложено по возрастающим степеням z^{-1} , начинается с члена z^{-n-1} , то оно должно отличаться лишь постоянным множителем от функции $Q_n(z)$ ²⁾.

Из сравнения коэффициентов при z^{-n-1} в этом выражении и в разложении функции $Q_n(z)$, найденном выше, мы и получим требуемый результат.]

Пример 2. Показать, что, когда n — положительное целое число, функция Лежандра второго рода может быть выражена формулой

$$Q_n(z) = 2^n n! \int_z^\infty \int_v^\infty \int_v^\infty \dots \int_v^\infty (v^2 - 1)^{-n-1} (dv)^{n+1}.$$

¹⁾ При целом положительном n нет необходимости ограничивать значение $\arg z$.

²⁾ $P_n(z)$ содержит только положительные степени z , когда n — целое число.

Пример 3. Показать, что, когда n — положительное целое число,

$$Q_n(z) = \sum_{t=0}^n \frac{2^n \cdot n!}{t!(n-t)!} (-z)^{n-t} \int_z^\infty v^t (v^2 - 1)^{-n-1} dv.$$

[Этот результат может быть получен применением к предыдущему результату общей теоремы интегрального исчисления

$$\int_z^\infty \int_v^\infty \int_v^\infty \dots \int_v^\infty f(v) (dv)^{n+1} = \sum_{t=0}^n \frac{(-z)^{n-t}}{t!(n-t)!} \int_z^\infty v^t f(v) dv .$$

15.32. Рекуррентные формулы для $Q_n(z)$

Функции $P_n(z)$ и $Q_n(z)$ были определены при помощи интегралов одной и той же формы, а именно при помощи интеграла

$$\int (t^2 - 1)^n (t - z)^{-n-1} dt,$$

взятого вдоль различных контуров.

Отсюда вытекает, что общее доказательство рекуррентных формул для $P_n(z)$, данное в § 15.21, в одинаковой мере применимо к функциям $Q_n(z)$; а отсюда вытекает, что для функций Лежандра второго рода имеют место рекуррентные формулы

$$Q'_{n+1}(z) - z Q'_n(z) = (n+1) Q_n(z),$$

$$(n+1) Q_{n+1}(z) - (2n+1) z Q_n(z) + n Q_{n-1}(z) = 0,$$

$$z Q'_n(z) - Q'_{n-1}(z) = n Q_n(z),$$

$$Q'_{n+1}(z) - Q'_{n-1}(z) = (2n+1) Q_n(z),$$

$$(z^2 - 1) Q'_n(z) = n z Q_n(z) - n Q_{n-1}(z).$$

Пример 1. Показать, что

$$Q_0(z) = \frac{1}{2} \lg \frac{z+1}{z-1}, \quad Q_1(z) = \frac{1}{2} z \lg \frac{z+1}{z-1} - 1,$$

и вывести, что

$$Q_2(z) = \frac{1}{2} P_2(z) \lg \frac{z+1}{z-1} - \frac{3}{2} z$$

и что отношение $\frac{Q_n(z)}{P_n(z)}$ разлагается в непрерывную дробь вида

$$\frac{Q_n(z)}{P_n(z)} = \frac{1}{2} \lg \frac{z+1}{z-1} - \frac{1}{z} - \frac{1^2}{3z} - \frac{2^2}{5z} - \frac{3^2}{7z} - \dots - \frac{(n-1)^2}{(2n-1)z}.$$

Пример 2. Показать при помощи рекуррентных формул, что если n — положительное целое число¹⁾, то

$$\frac{1}{2} P_n(z) \lg \frac{z+1}{z-1} - Q_n(z) = f_{n-1}(z),$$

где $f_{n-1}(z)$ состоит из членов положительных (и нулевой) степеней в разложении выражения $\frac{1}{2} P_n(z) \lg \frac{z+1}{z-1}$ по убывающим степеням z .

[Этот пример показывает характер особых точек функции $Q_n(z)$ при $z = \pm 1$, когда n — целое число; эти точки и делают необходимым разрез от -1 до $+1$. О связи полученного результата с теорией непрерывных дробей см. Gauss, Werke, III, 165—206 и Frobenius, Journ. für Math., LXXIII (1871), 16; формулы примера 1 принадлежат им.]

15.33. Интеграл²⁾ Лапласа для функций Лежандра второго рода

Докажем теперь, что при $\operatorname{Re}(n+1) > 0$

$$Q_n(z) = \int_0^\infty \left\{ z + (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \operatorname{ch} \theta \right\}^{-n-1} d\theta,$$

где $\arg \left\{ z + (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \operatorname{ch} \theta \right\}$ при $\theta = 0$ имеет свое главное значение, если n не есть целое число.

Предположим сначала, что $z > 1$. В интегrale § 15.3, т. е. в

$$Q_n(z) = \frac{1}{2^{n+1}} \int_{-1}^1 (1-t^2)^n (z-t)^{-n-1} dt,$$

положим

$$t = \frac{e^\theta (z+1)^{\frac{1}{2}} - (z-1)^{\frac{1}{2}}}{e^\theta (z+1)^{\frac{1}{2}} + (z-1)^{\frac{1}{2}}},$$

¹⁾ Если $-1 < z < 1$, то из этих формул очевидно, что

$$Q_n(z+0i) - Q_n(z-0i) = -\pi i P_n(z).$$

Удобно определять $Q_n(z)$ для таких значений z , как выражение

$$\frac{1}{2} Q_n(z+0i) + \frac{1}{2} Q_n(z-0i).$$

Отметим, что эта функция удовлетворяет уравнению Лежандра для вещественных значений z .

²⁾ Эта формула была дана впервые Гейне; см. Heine, Kugelfunktionen, 147.

так что область $(-1, 1)$ вещественных значений t соответствует области $(-\infty, \infty)$ вещественных значений θ . Тогда [как в § 15.23(A)] прямой подстановкой получим, что

$$\begin{aligned} Q_n(z) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ z + (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \operatorname{ch} \theta \right\}^{-n-1} d\theta = \\ &= \int_0^{\infty} \left\{ z + (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \operatorname{ch} \theta \right\}^{-n-1} d\theta, \end{aligned}$$

так как подинтегральная функция есть четная функция от θ .

Чтобы доказать полученный результат для z , не являющихся вещественными числами, большими 1, заметим, что точки ветвления подинтегральной функции как функции z суть ± 1 и точки, где $z + (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \operatorname{ch} \theta = 0$; последние суть точки, в которых $z = \pm \operatorname{cth} \theta$.

Отсюда можно видеть, что

$$Q_n(z) \text{ и } \int_0^{\infty} [z + (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \operatorname{ch} \theta]^{-n-1} d\theta$$

будут аналитическими¹⁾ во всех точках плоскости, разрезанной вдоль прямой, соединяющей точки $z = \pm 1$. По теории аналитического продолжения равенство, доказанное для положительных значений $z - 1$, сохраняется также для всех значений z в разрезанной плоскости, лишь бы только $\arg \left\{ z + (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \operatorname{ch} \theta \right\}$ было приписано надлежащее значение, а именно то, которое обращается в нуль, когда $z - 1$ положительно.

Подинтегральная функция будет однозначной в разрезанной плоскости [и такой же будет и $Q_n(z)$], когда n — положительное целое число; но $\arg \left\{ z + (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \operatorname{ch} \theta \right\}$ увеличивается на 2π , когда $\arg z$ увеличивается на 2π ; поэтому, если n не будет положительным целым числом, следует сделать добавочный разрез от $z = -1$ до $z = -\infty$.

Эти разрезы налагают необходимые ограничения на значения z ; в частности, разрез, примененный, когда n не целое число, обеспечивает, что

$$\arg \left\{ z + (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \right\} = 2 \arg \left\{ (z+1)^{\frac{1}{2}} + (z-1)^{\frac{1}{2}} \right\}$$

будет иметь свое главное значение.

Пример 1. Получить тот же результат для комплексных значений z , принимая за путь интегрирования некоторую дугу окружности и только

¹⁾ Легко показать, что интеграл имеет единственную производную в разрезанной плоскости.

15.34. ФОРМУЛА НЕЙМАНА для $Q_n(z)$, когда n — целое число 135

затем делая подстановку

$$t = \frac{e^{\theta}(z+1)^{\frac{1}{2}} - (z-1)^{\frac{1}{2}}}{e^{\theta}(z+1)^{\frac{1}{2}} + (z-1)^{\frac{1}{2}}},$$

где θ вещественно.

Пример 2. Показать, что если $z > 1$ и $\operatorname{cth} \alpha = z$, то

$$Q_n(z) = \int_0^{\alpha} \left\{ z - (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \operatorname{ch} u \right\}^n du,$$

где

$$\arg \left\{ z - (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \operatorname{ch} u \right\} = 0.$$

(Trinity, 1893)

15.34. Формула Неймана¹⁾ для $Q_n(z)$, когда n — целое число

Перейдем теперь к установлению соотношения

$$Q_n(z) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 P_n(y) \frac{dy}{z-y},$$

дающего выражение $Q_n(z)$ через функцию Лежандра первого рода, когда n — положительное целое число, а z не лежит на вещественной оси между 1 и -1 .

Если $|z| > 1$, то подинтегральную функцию можно разложить в равномерно сходящийся ряд

$$P_n(y) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{y^m}{z^{m+1}}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 P_n(y) \frac{dy}{z-y} = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} z^{-m-1} \int_{-1}^1 y^m P_n(y) dy.$$

Но интегралы, для которых $m = n$ — четное или отрицательное число, равняются нулю (§ 15.211), и таким образом, согласно § 15.31,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{-1}^1 P_n(y) \frac{dy}{z-y} &= \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} z^{-n-2m-1} \int_{-1}^1 y^{n+2m} P_n(y) dy = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} z^{-n-2m-1} \frac{2^{n+1} (n+2m)! (n+m)!}{m! (2n+2m+1)!} = \\ &= \frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!} z^{-n-1} F\left(\frac{1}{2} n + \frac{1}{2}, \frac{1}{2} n + 1; n + \frac{3}{2}; z^{-2}\right) = Q_n(z). \end{aligned}$$

¹⁾ F. Neumann, Journ. für Math., XXXVII (1848), 24.

Итак, для случая, когда $|z| > 1$, теорема доказана. Так как обе части равенства

$$Q_n(z) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 P_n(y) \frac{dy}{z-y}$$

представляют аналитические функции даже тогда, когда $|z|$ не больше единицы, лишь бы только z не было вещественным числом, заключенным между -1 и $+1$, то делаем вывод, что, за этим исключением, результат справедлив (\S 5.5, часть I) для всех значений z .

Кажется, что формула Неймана представляет $Q_n(z)$ как однозначную функцию от z , между тем как эта функция многозначна (\S 15.32, пример 2). Причина этого кажущегося противоречия заключается в том, что формула Неймана была установлена для плоскости z , разрезанной от -1 до $+1$, а в разрезанной плоскости $Q_n(z)$ однозначна.

Пример 1. Показать, что при $-1 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$ $|Q_n(z)| \leq |\operatorname{Im} z|^{-1}$ и что для любого значения z , $|Q_n(z)|$ не должен превышать наибольшего из чисел $|z-1|^{-1}$, $|z+1|^{-1}$.

Пример 2. Показать, что при целом положительном n функция $Q_n(z)$ является коэффициентом при h^n в разложении по степеням h выражения

$$(1 - 2hz + h^2)^{-\frac{1}{2}} \operatorname{arch} \left\{ \frac{h-z}{(z^2-1)^{\frac{1}{2}}} \right\}.$$

[Ибо, когда $|h|$ достаточно мал,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} h^n Q_n(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{2} \int_{-1}^1 \frac{P_n(y) dy}{z-y} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{(1 - 2hy + h^2)^{-\frac{1}{2}} dy}{(z-y)} = \\ &= (1 - 2hz + h^2)^{-\frac{1}{2}} \operatorname{arch} \left\{ \frac{h-z}{(z^2-1)^{\frac{1}{2}}} \right\}. \end{aligned}$$

Этот результат был получен Гейне (Heine, Kugelfunktionen, I, 134) и Лораном (Laurant, Journl. de Math. (3), I, 373).]

15.4. Разложение Гейне¹⁾ для функции $(t-z)^{-1}$ в ряд по полиномам Лежандра

Найдем теперь разложение, которое послужит основой для разложений широкого класса функций по полиномам Лежандра.

По индукции легко вывести из рекуррентных формул

$$\begin{aligned} (2m+1)tQ_m(t) - (m+1)Q_{m+1}(t) - mQ_{m-1}(t) &= 0, \\ (2m+1)zP_m(z) - (m+1)P_{m+1}(z) - mP_{m-1}(z) &= 0. \end{aligned}$$

¹⁾ Heine, Journ. für Math., XLII (1851), 72.

что

$$\frac{1}{t-z} = \sum_{m=0}^n (2m+1) P_m(z) Q_m(t) + \\ + \frac{n+1}{t-z} \{P_{n+1}(z) Q_n(t) - P_n(z) Q_{n+1}(t)\}.$$

Пользуясь интегралами Лапласа, получим

$$P_{n+1}(z) Q_n(t) - P_n(z) Q_{n+1}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty \frac{\left\{ z + (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \cos \varphi \right\}^n}{\left\{ t + (t^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \operatorname{ch} u \right\}^{n+1}} \times \\ \times \left[z + (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \cos \varphi - \left\{ t + (t^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \operatorname{ch} u \right\}^{-1} \right] d\varphi du.$$

Рассмотрим теперь

$$\left| \frac{z + (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \cos \varphi}{t + (t^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \operatorname{ch} u} \right|.$$

Пусть $\operatorname{ch} a, \operatorname{ch} \alpha$ — большие полуоси эллипсов с фокусами ± 1 , проходящих соответственно через z и t .

Пусть θ — эксцентрический угол для z ; тогда

$$z = \operatorname{ch}(a + i\theta),$$

$$\left| z \pm (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \cos \varphi \right| = |\operatorname{ch}(a + i\theta) \pm \operatorname{sh}(a + i\theta) \cos \varphi| = \\ = \{ \operatorname{ch}^2 a - \sin^2 \theta + (\operatorname{ch}^2 a - \cos^2 \theta) \cos^2 \varphi \pm 4 \operatorname{sh} a \operatorname{ch} a \cos \varphi \}^{\frac{1}{2}}.$$

Для вещественных значений φ это выражение имеет максимум при $\cos \varphi = \mp 1$, а отсюда

$$\left| z \pm (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \cos \varphi \right|^2 \leqslant 2 \operatorname{ch}^2 a - 1 + 2 \operatorname{ch} a (\operatorname{ch}^2 a - 1)^{\frac{1}{2}} = \exp(2a).$$

Подобным же образом

$$\left| t + (t^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \operatorname{ch} u \right| \geqslant \exp \alpha.$$

Поэтому

$$|P_{n+1}(z) Q_n(t) - P_n(z) Q_{n+1}(t)| \leqslant \pi^{-1} \exp \{n(a - \alpha)\} \int_0^\pi \int_0^\infty V d\varphi du,$$

где

$$|V| = \left| \frac{z + (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \cos \varphi}{t + (t^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \operatorname{ch} u} \right| + \left| \left\{ t + (t^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \operatorname{ch} u \right\}^{-1} \right|.$$

Следовательно,

$$|P_{n+1}(z)Q_n(t) - P_n(z)Q_{n+1}(t)| \rightarrow 0,$$

когда $n \rightarrow \infty$, в предположении, что $a < \alpha$.

Далее, если t изменяется, а α остается постоянным, то легко видеть, что верхняя граница выражения $\int_0^\pi \int_0^\infty V d\varphi du$ не будет зависеть от t и, таким образом,

$$P_{n+1}(z)Q_n(t) - P_n(z)Q_{n+1}(t)$$

стремится к нулю равномерно относительно t .

Отсюда следует, что если точка z находится внутри эллипса, проходящего через точку t и имеющего точки ± 1 своими фокусами, то имеет место разложение

$$\frac{1}{t-z} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_n(z) Q_n(t);$$

если же t — переменная точка на эллипсе с фокусами ± 1 и z — неподвижная точка внутри его, то разложение сходится равномерно относительно t .

15.41. Разложение Неймана¹⁾ для произвольной функции в ряд по полиномам Лежандра

Приступим теперь к разложению данной функции в ряд по полиномам Лежандра. Это разложение представляет особый интерес, поскольку среди других разложений по полиномам оно по своей простоте идет сразу же после рядов Тейлора.

Пусть $f(z)$ — какая-нибудь функция, аналитическая внутри и на эллипсе C , фокусами которого являются точки ± 1 . Мы покажем, что

$$f(z) = a_0 P_0(z) + a_1 P_1(z) + a_2 P_2(z) + \dots,$$

где a_0, a_1, a_2, \dots не зависят от z , причем это разложение годно для всех точек z внутри эллипса C .

Пусть t — какая-нибудь точка на контуре эллипса.

¹⁾ K. Neumann, Ueber die Entwicklung einer Funktion nach den Kugelfunktionen (Halle, 1862). См. также Thomé, Journ. für Math., LXVI (1866), 337—343. Нейман дает также разложение по функциям Лежандра обоих родов, справедливое в кольце, ограниченном двумя эллипсами.

Тогда, так как $\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_n(z) Q_n(t)$ сходится равномерно относительно t ,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t) dt}{t-z} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \int_C (2n+1) P_n(z) Q_n(t) f(t) dt = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(z), \end{aligned}$$

где

$$a_n = \frac{2n+1}{2\pi i} \int_C f(t) Q_n(t) dt.$$

Это и есть требуемое разложение; так как можно доказать¹⁾, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_n(z) Q_n(t)$ сходится равномерно относительно z в любой области C' , лежащей полностью внутри C , то и найденное разложение сходится равномерно во всей области C' .

Другое выражение для a_n может быть получено интегрированием, как в § 15.211, так что

$$a_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx.$$

Весьма часто употребляемой формой последнего выражения является

$$a_n = \frac{n + \frac{1}{2}}{2^n n!} \int_{-1}^1 f^{(n)}(x) (1-x^2)^n dx,$$

которая получается, если заменить $P_n(x)$ его выражением по формуле Родрига и проинтегрировать по частям.

Теорема, относящаяся к разложению Неймана так же, как теорема Фурье относится к разложению § 9.11 части I, заключается в следующем:

Пусть $f(t)$ определена, когда $-1 \leq t \leq 1$, и пусть интеграл от выражения $(1-t^2)^{-\frac{1}{4}} f(t)$ существует и абсолютно сходится; пусть, далее,

$$a_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \int_{-1}^1 f(t) P_n(t) dt.$$

¹⁾ Доказательство подобно доказательству § 15.4 о равномерной сходимости относительно t .

Тогда ряд $\sum a_n P_n(x)$ сходится и имеет сумму $\frac{1}{2} \{f(x+0) + f(x-0)\}$ в любой точке x промежутка $-1 < x < 1$, если удовлетворяется одно из условий типа, установленного в конце § 9.43 части I.

Доказательство читатель найдет в мемуарах Гобсона¹⁾ и Буркгардта²⁾.

Пример 1. Показать, что если радиус сходимости ряда $\sum c_n z^n$ есть $\rho (> 1)$, то ряд $\sum c_n P_n(z)$ сходится внутри эллипса, полуоси которого есть $\frac{1}{2} (\rho + \rho^{-1})$, $\frac{1}{2} (\rho - \rho^{-1})$.

Пример 2. Доказать, что если

$$z = \left(\frac{y-1}{y+1} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad k^2 = \frac{(x-1)(y+1)}{(x+1)(y-1)}, \quad \text{где } y > x > 1,$$

то

$$\int_z^1 \frac{dz}{\{(1-z^2)(1-k^2 z^2)\}^{\frac{1}{2}}} = \{(x+1)(y-1)\}^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) Q_n(y).$$

[Подставить интегралы Лапласа в правую часть и проинтегрировать по y .]

Пример 3. Показать, что

$$\frac{1}{2(y-x)} \ln \frac{(x+1)(y-1)}{(x-1)(y+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) Q_n(x) Q_n(y).$$

(Frobenius, Journ. für Math., LXXIII (1871), 1).

15.5. Присоединенные лежандровы функции $P_n^m(z)$ и $Q_n^m(z)$ Феррерса

Введем теперь более широкий класс функций Лежандра. Если m — положительное целое число, $-1 < z < 1$ и n — любое³⁾, то функции

$$P_n^m(z) = (1-z^2)^{\frac{1}{2} m} \frac{d^m P_n(z)}{dz^m}, \quad Q_n^m(z) = (1-z^2)^{\frac{1}{2} m} \frac{d^m Q_n(z)}{dz^m}$$

называются *присоединенными лежандровыми функциями* Феррерса степени n и порядка m соответственно первого и второго рода.

Можно показать, что эти функции удовлетворяют дифференциальному уравнению, аналогичному уравнению Лежандра.

¹⁾ Hobson, Proc. London Math. Soc. (2), VI (1908), 388—395; (2), VII (1909), 24—39.

²⁾ Burkhhardt, Münchener Sitzungsberichte, XXXIX (1909), No. 10.

³⁾ См. стр. 131, примечание. Феррерс (Ferrers) обозначает $P_n^m(z)$ через $T_n^m(z)$.

Действительно, продифференцируем уравнение Лежандра

$$(1-z^2) \frac{d^2y}{dz^2} - 2z \frac{dy}{dz} + n(n+1)y = 0$$

m раз и положим $\frac{d^m y}{dz^m} = v$. Мы получим уравнение

$$(1-z^2) \frac{d^2v}{dz^2} - 2z(m+1) \frac{dv}{dz} + (n-m)(n+m+1)v = 0.$$

Положив, далее, $w = (1-z^2)^{\frac{1}{2}m} v$, получим уравнение

$$(1-z^2) \frac{d^2w}{dz^2} - 2z \frac{dw}{dz} + \left\{ n(n+1) - \frac{m^2}{1-z^2} \right\} w = 0.$$

Это и есть дифференциальное уравнение для функций

$$P_n^m(z) \quad \text{и} \quad Q_n^m(z).$$

Из данных выше определений может быть получено несколько выражений для присоединенных функций.

Так, из формулы Шлефли имеем

$$P_n^m(z) = \frac{(n+1)(n+2)\dots(n+m)}{2^{n+1}\pi i} (1-z^2)^{\frac{1}{2}m} \int_A^{(1+, z+)} (t^2-1)^n (t-z)^{-n-m-1} dt,$$

где контур не окружает точку $t = -1$.

Далее, когда n — положительное целое число, мы имеем по формуле Родрига

$$P_n^m(z) = \frac{(1-z^2)^{\frac{1}{2}m}}{2^n n!} \frac{d^{n+m}(z^2-1)^n}{dz^{n+m}}.$$

Пример. Показать, что присоединенное уравнение Лежандра определяется схемой

$$P \left\{ \begin{array}{cccc} 0 & \infty & 1 \\ \frac{1}{2}m & n+1 & \frac{1}{2}m & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}z \\ -\frac{1}{2}m & -n & -\frac{1}{2}m \end{array} \right\}.$$

(Olbricht)

15.51. Интегральные свойства присоединенных функций Лежандра

Теорема § 15.14 обобщается следующим образом.

Если n, r, m — положительные целые числа $n > m, r > m$, то

$$\int_{-1}^1 P_n^m(z) P_r^m(z) dz = \begin{cases} 0 & (r \neq n), \\ \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} & (r = n). \end{cases}$$

Чтобы получить первый результат, умножим дифференциальные уравнения для $P_n^m(z)$, $P_r^m(z)$ на $P_r^m(z)$, $P_n^m(z)$ соответственно и вычтем; это даст

$$\frac{d}{dz} \left[(1-z^2) \left\{ P_r^m(z) \frac{dP_n^m(z)}{dz} - P_n^m(z) \frac{dP_r^m(z)}{dr} \right\} \right] + (n-r)(n+r+1) P_r^m(z) P_n^m(z) = 0.$$

Интегрируя в пределах -1 , $+1$, получаем требуемый результат, когда $n \neq r$, так как выражение в квадратных скобках равняется нулю при каждом пределе.

Чтобы получить второй результат, отметим, что

$$P_n^{m+1}(z) = (1-z^2)^{\frac{1}{2}} \frac{dP_n^m(z)}{dz} + mz(1-z^2)^{-\frac{1}{2}} P_n^m(z);$$

возводя в квадрат и интегрируя, получим

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \{P_n^{m+1}(z)\}^2 dz = \\ &= \int_{-1}^1 \left[(1-z^2) \left\{ \frac{dP_n^m(z)}{dz} \right\}^2 + 2mzP_n^m(z) \frac{dP_n^m(z)}{dz} + \frac{m^2 z^2}{1-z^2} \{P_n^m(z)\}^2 \right] dz = \\ &= - \int_{-1}^1 P_n^m(z) \frac{d}{dz} \left\{ (1-z^2) \frac{dP_n^m(z)}{dz} \right\} dz - m \int_{-1}^1 \{P_n^m(z)\}^2 dz + \\ & \quad + \int_{-1}^1 \frac{m^2 z^2}{1-z^2} \{P_n^m(z)\}^2 dz, \end{aligned}$$

причем последняя часть этого равенства получается из предыдущей интегрированием первых двух членов по частям.

Если теперь воспользоваться дифференциальным уравнением для $P_n^m(z)$ для упрощения первого интеграла в последней части равенства, то мы получим

$$\int_{-1}^1 \{P_n^{m+1}(z)\}^2 dz = (n-m)(n+m+1) \int_{-1}^1 \{P_n^m(z)\}^2 dz.$$

Многократно применяя это соотношение, получим

$$\int_{-1}^1 \{P_n^m(z)\}^2 dz = (n-m+1)(n-m+2) \dots n \times \\ \times (n+m)(n+m-1) \dots (n+1) \int_{-1}^1 \{P_n(z)\}^2 dz,$$

и таким образом,

$$\int_{-1}^1 \{P_n^m(z)\}^2 dz = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}.$$

15.6. Определение Гобсона присоединенных функций Лежандра

До сих пор мы считали функцию $(1-z^2)^{\frac{1}{2}-m}$, которая встречается в определении Феррерса присоединенных функций, чисто вещественной, и, поскольку в более элементарных физических приложениях функций Лежандра обычно бывает $-1 < z < 1$, это не создает никаких осложнений. Но если мы хотим рассматривать присоединенные функции как функции комплексной переменной, то нежелательно вводить добавочный разрез в плоскости z , давая $\arg(1-z)$ его главное значение.

Соответственно этому в дальнейшем, когда z не будет вещественным числом из промежутка $-1 < z < 1$, мы, следуя Гобсону, определим присоединенные функции равенствами

$$P_n^m(z) = (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}-m} \frac{d^m P_n(z)}{dz^m}, \quad Q_n^m(z) = (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}-m} \frac{d^m Q_n(z)}{dz^m},$$

где m — целое положительное число, n — любое, а $\arg z$, $\arg(z+1)$, $\arg(z-1)$ имеют свои главные значения.

Для произвольного m Гобсон определил функцию $P_n^m(z)$ как

$$\frac{1}{\Gamma(1-m)} \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{1}{2}-m} F\left(-n, n+1; 1-m; \frac{1}{2} - \frac{1}{2}z\right),$$

а Барнс дал определение для $Q_n^m(z)$, из которого может быть получена формула

$$Q_n^m(z) = \frac{\sin(n+m)\pi}{\sin n\pi} \frac{\Gamma(n+m+1) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2^{n+1} \Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)} \frac{(z^2-1)^{\frac{1}{2}-m}}{z^{n+m+1}} \times \\ \times F\left(\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}m + 1, \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}m + \frac{1}{2}; n + \frac{3}{2}; z^{-2}\right).$$

Во всей этой книге мы будем считать m положительным целым числом.

15.61. Выражение функции $P_n^m(z)$ через интеграл типа Лапласа

Если произвести необходимое изменение в интеграле Шлефли из § 15.5 в соответствии с определением § 15.6, то получим

$$P_n^m(z) = \frac{(n+1)(n+2)\dots(n+m)}{2^n \pi i} (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} {}^m \int_A^{(1+, z+)} (t^2 - 1)^n (t - z)^{-n-m-1} dt.$$

Положим здесь $t = z + (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} e^{i\varphi}$, как в § 15.23; тогда

$$P_n^m(z) = \frac{(n+1)(n+2)\dots(n+m)}{2\pi} (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} {}^m \int_{-\pi}^{2\pi+\alpha} \frac{\left\{ z + (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \cos \varphi \right\}^n}{\left\{ (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} e^{i\varphi} \right\}^m} d\varphi,$$

где α — значение φ , когда t находится в A , так что

$$\left| \arg (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} + \alpha \right| < \pi.$$

Теперь, как в § 15.23, подинтегральная функция является однозначной периодической функцией вещественной переменной φ с периодом 2π и, таким образом,

$$P_n^m(z) = \frac{(n+1)(n+2)\dots(n+m)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ z + (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \cos \varphi \right\}^n e^{-mt\varphi} d\varphi.$$

Так как $\left\{ z + (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \cos \varphi \right\}^n$ — четная функция φ , то, деля промежуток интегрирования на части $(-\pi, 0)$ и $(0, \pi)$, получим

$$P_n^m(z) = \frac{(n+1)(n+2)\dots(n+m)}{\pi} \int_0^\pi \left\{ z + (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \cos \varphi \right\}^n \cos m\varphi d\varphi.$$

Условия, при которых эта формула, принадлежащая Гейне, справедлива, в точности совпадают с условиями для формулы § 15.23.

Пример. Показать, что при $|\arg z| < \frac{1}{2}\pi$

$$P_n^m(z) = (-1)^m \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos m\varphi d\varphi}{\left\{ z + (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \cos \varphi \right\}^{n+1}},$$

где многозначные функции определяются, как в § 15.23.

15.7. Теорема сложения для полиномов Лежандра¹⁾

Пусть $z = xx' - (x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}(x'^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \cos \omega$, где x, x', ω — любые комплексные числа. Тогда мы покажем, что

$$P_n(z) = P_n(x)P_n(x') + 2 \sum_{m=1}^n (-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(x)P_n^m(x') \cos m\omega.$$

Пусть сначала $\operatorname{Re} x' > 0$, так что $\left| \frac{x + (x^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \cos(\omega - \varphi)}{x' + (x'^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \cos \varphi} \right|$ — ограниченная функция от φ в промежутке $0 < \varphi < 2\pi$. Если M — ее верхняя грань и если $|h| < M^{-1}$, то ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} h^n \frac{\left\{ x + (x^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \cos(\omega - \varphi) \right\}^n}{\left\{ x' + (x'^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \cos \varphi \right\}^{n+1}}$$

сходится равномерно относительно φ и, таким образом (§ 4.7, часть I),

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} h^n \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\left\{ x + (x^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \cos(\omega - \varphi) \right\}^n}{\left\{ x' + (x'^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \cos \varphi \right\}^{n+1}} d\varphi &= \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n \left\{ x + (x^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \cos(\omega - \varphi) \right\}^n}{\left\{ x' + (x'^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \cos \varphi \right\}^{n+1}} d\varphi = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{x' + (x'^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \cos \varphi - h \left\{ x + (x^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \cos(\omega - \varphi) \right\}}. \end{aligned}$$

Теперь небольшим видоизменением примера 1 § 6.21 части I получим, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{A + B \cos \varphi + C \sin \varphi} = \frac{2\pi}{(A^2 - B^2 - C^2)^{\frac{1}{2}}},$$

где берется то значение корня, при котором

$$\left| A - (A^2 - B^2 - C^2)^{\frac{1}{2}} \right| < \left| (B^2 + C^2)^{\frac{1}{2}} \right|.$$

¹⁾ Legendre, Calc. Int., II, 262—269. Другое доказательство теоремы, основанное на физических соображениях, будет дано ниже (§ 18.4).

Поэтому

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{x' + (x'^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \cos \varphi - h \left\{ x + (x^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \cos (\omega - \varphi) \right\}} = \\ & = \frac{2\pi}{\left[(x' - hx)^2 - \left\{ (x'^2 - 1)^{\frac{1}{2}} - h(x^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \cos \omega \right\}^2 - \left\{ h(x^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \sin \omega \right\}^2 \right]^{\frac{1}{2}}} = \\ & = \frac{2\pi}{(1 - 2hz + h^2)^{\frac{1}{2}}}, \end{aligned}$$

а это выражение, согласно § 15.23, должно стремиться к $2\pi P_0(x')$ при $h \rightarrow 0$. Разлагая по степеням h и сравнивая коэффициенты, получим, далее,

$$P_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\left\{ x + (x^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \cos (\omega - \varphi) \right\}^n}{\left\{ x' + (x'^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \cos \varphi \right\}^{n+1}} d\varphi.$$

Далее, $P_n(z)$ является полиномом степени n относительно $\cos \omega$ и, следовательно, может быть представлен в форме $\frac{1}{2} A_0 + \sum_{m=1}^n A_m \cos m\omega$, где коэффициенты A_0, A_1, \dots, A_n не зависят от ω ; для их определения применим правило Фурье (§ 9.12, часть I), получим

$$\begin{aligned} A_m &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_n(z) \cos m\omega d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\left\{ x + (x^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \cos (\omega - \varphi) \right\}^n \cos m\omega}{\left\{ x' + (x'^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \cos \varphi \right\}^{n+1}} d\varphi \right] d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\left\{ x + (x^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \cos (\omega - \varphi) \right\}^n \cos m\omega}{\left\{ (x' + (x'^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \cos \varphi) \right\}^{n+1}} d\omega \right] d\varphi = \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\left\{ x + (x^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \cos \psi \right\}^n \cos m(\varphi + \psi)}{\left\{ x' + (x'^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \cos \varphi \right\}^{n+1}} d\psi \right] d\varphi, \end{aligned}$$

где, изменив порядок интегрирования, мы положили $\omega = \varphi + \psi$ и заменили затем пределы интегрирования $\pm \pi - \varphi$ на $\pm \pi$. Но

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left\{ x + (x^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \cos \psi \right\}^n \sin m\psi d\psi = 0,$$

так как под интегралом стоит нечетная функция от ψ ; имея это в виду и пользуясь формулой § 15.61, находим

$$A_m = \frac{n!}{\pi(n+m)!} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos m\varphi P_n^m(x)}{\left\{ x' + (x'^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \cos \varphi \right\}^{n+1}} d\varphi = \\ = 2(-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(x) P_n^m(x').$$

Итак, при $|\arg x'| < \frac{1}{2}\pi$

$$P_n(z) = P_n(x) P_n(x') + 2 \sum_{m=1}^n (-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(x) P_n^m(x') \cos m\omega.$$

Но это не более как алгебраическое тождество относительно x , x' и $\cos \omega$ (так как n — положительное целое число); оно верно, следовательно, независимо от знака $\operatorname{Re} x'$.

Сформулированный результат, таким образом, доказан.

Соответствующей теоремой при определении Феррерса будет

$$P_n \left\{ xx' + (1-x^2)^{\frac{1}{2}} (1-x'^2)^{\frac{1}{2}} \cos \omega \right\} = \\ = P_n(x) P_n(x') + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(x) P_n^m(x') \cos m\omega.$$

15.71. Теорема сложения для функций Лежандра

Пусть x , x' — две постоянные, вещественные или комплексные, аргументы которых численно меньше $\frac{1}{2}\pi$; далее, пусть за $(x \pm 1)^{\frac{1}{2}}$, $(x' \pm 1)^{\frac{1}{2}}$ взяты их главные значения; пусть, наконец, ω вещественно и

$$z = xx' - (x^2 - 1)^{\frac{1}{2}} (x'^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \cos \omega.$$

Покажем, что если $|\arg z| < \frac{1}{2}\pi$ для всех значений вещественной переменной ω и n не есть положительное целое число, то

$$P_n(z) = P_n(x) P_n(x') + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{\Gamma(n-m+1)}{\Gamma(n+m+1)} P_n^m(x) P_n^m(x') \cos m\omega.$$

Пусть $\operatorname{ch} \alpha, \operatorname{ch} \alpha'$ — большие полуоси эллипсов с фокусами ± 1 , проходящих соответственно через x, x' . Пусть β, β' — эксцентрические углы для x, x' на этих эллипсах, так что

$$-\frac{1}{2}\pi < \beta < \frac{1}{2}\pi, \quad -\frac{1}{2}\pi < \beta' < \frac{1}{2}\pi.$$

Положим $\alpha + i\beta = \xi, \alpha' + i\beta' = \xi'$, так что $x = \operatorname{ch} \xi, x' = \operatorname{ch} \xi'$.

Когда ω пробегает все вещественные значения, $\operatorname{Re} z$ колебляется между

$$\operatorname{Re}(xx') \pm \operatorname{Re}(x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}(x'^2 - 1)^{\frac{1}{2}} = \operatorname{ch}(\alpha \pm \alpha') \cos(\beta \pm \beta')$$

и, следовательно, необходимо, чтобы $\beta \pm \beta'$ были острыми углами, положительными или отрицательными.

Возьмем теперь интеграл Шлефли

$$P_n(z) = \frac{1}{2^{n+1}\pi i} \int_A^{(1+, z+)} \frac{(t^2 - 1)^n}{(t - z)^{n+1}} dt$$

и положим

$$t = \frac{e^{i\varphi} \left\{ e^{-i\omega} \operatorname{sh} \xi \operatorname{ch} \frac{1}{2} \xi' - \operatorname{ch} \xi \operatorname{sh} \frac{1}{2} \xi' \right\} + \operatorname{ch} \xi \operatorname{ch} \frac{1}{2} \xi' - e^{i\omega} \operatorname{sh} \xi \operatorname{sh} \frac{1}{2} \xi'}{\operatorname{ch} \frac{1}{2} \xi' + e^{i\varphi} \operatorname{sh} \frac{1}{2} \xi'}.$$

Можно показать, что путь, описываемый переменной t , когда φ возрастает от $-\pi$ до π , есть окружность; читатель легко проверит, что

$$t - 1 = \frac{2 \left\{ e^{i(\varphi - \omega)} \operatorname{ch} \frac{1}{2} \xi + \operatorname{sh} \frac{1}{2} \xi \right\} \left\{ \operatorname{sh} \frac{1}{2} \xi \operatorname{ch} \xi' - e^{i\omega} \operatorname{ch} \frac{1}{2} \xi \operatorname{sh} \frac{1}{2} \xi' \right\}}{\operatorname{ch} \frac{1}{2} \xi' + e^{i\varphi} \operatorname{sh} \frac{1}{2} \xi},$$

$$t + 1 = \frac{2 \left\{ e^{i(\varphi - \omega)} \operatorname{sh} \frac{1}{2} \xi + \operatorname{ch} \frac{1}{2} \xi \right\} \left\{ \operatorname{ch} \frac{1}{2} \xi \operatorname{ch} \frac{1}{2} \xi' - e^{i\omega} \operatorname{sh} \frac{1}{2} \xi \operatorname{sh} \frac{1}{2} \xi' \right\}}{\operatorname{ch} \frac{1}{2} \xi' + e^{i\varphi} \operatorname{sh} \frac{1}{2} \xi},$$

$$t - z = \frac{\left\{ e^{i\varphi} \operatorname{ch} \frac{1}{2} \xi' + \operatorname{sh} \frac{1}{2} \xi' \right\} \left\{ e^{i\omega} \operatorname{sh} \xi \operatorname{sh}^2 \frac{1}{2} \xi' + e^{-i\omega} \operatorname{sh} \xi \operatorname{ch}^2 \frac{1}{2} \xi' - \operatorname{ch} \xi \operatorname{sh} \xi' \right\}}{\operatorname{ch} \frac{1}{2} \xi' + e^{i\varphi} \operatorname{sh} \frac{1}{2} \xi'}$$

Так как $\left| \operatorname{ch} \frac{1}{2} \xi' \right| > \left| \operatorname{sh} \frac{1}{2} \xi' \right|$, то аргумент знаменателей не изменяется, когда φ возрастает на 2π ¹⁾; по сходным причинам аргументы первого и третьего из числителей возрастают на 2π , а аргумент второго не изменяется; поэтому точки $t = 1, t = z$ лежат внутри окружности, а точка $t = -1$ вне ее, и окружность может служить контуром интегрирования по φ .

¹⁾ Это вытекает из того, что $\cos \beta' > 0$.

Подставляя выражения $t - 1$, $t + 1$, $t - z$ в интеграл Шлефли, тотчас найдем, что

$$P_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\left\{ x + (x^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \cos(\omega - \varphi) \right\}^n}{\left\{ x' + (x'^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \cos \varphi \right\}^{n+1}} d\varphi,$$

остальная часть выкладки протекает, как в § 15.7, за исключением того, что теперь надо пользоваться общим случаем теоремы Фурье.

Пример. Показать, что если n — положительное целое число, то

$$\begin{aligned} Q_n \left\{ xx' + (x^2 - 1)^{\frac{1}{2}} (x'^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \cos \omega \right\} &= \\ &= Q_n(x) P_n(x') + 2 \sum_{m=1}^{\infty} Q_n^m(x) P_n^{-m}(x') \cos m\omega, \end{aligned}$$

когда ω вещественно, $\operatorname{Re} x' \geq 0$ и $|(x' - 1)(x + 1)| < |(x - 1)(x' + 1)|^1$.

(Heine, Kugelfunktionen, K. Neumann,
Leipziger Abh. (1886))

15.8. Функция $C_n^v(z)^2$

Функцией, близко стоящей к присоединенной функции Лежандра $P_n^m(z)$, является функция $C_n^v(z)$, которая для целых значений n определяется как коэффициент при h^n в разложении $(1 - 2hz + h^2)^{-v}$ по возрастающим степеням h .

Легко видеть, что $C_n^v(z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{(2v + 1)z}{z^2 - 1} \frac{dy}{dz} - \frac{n(n + 2v)}{z^2 - 1} y = 0.$$

Можно показать, что функцию, удовлетворяющую этому уравнению, при произвольных значениях n и v можно задать в виде контурного интеграла

$$(1 - z^2)^{\frac{1}{2} - v} \int_C \frac{(1 - t^2)^{\frac{n+v-1}{2}}}{(t - z)^{n+1}} dt,$$

где C — контур из § 15.2; такой интеграл соответствует интегралу Шлефли.

¹⁾ Авторы отступают здесь от своего соглашения рассматривать только целые положительные m у присоединенных функций $P_n^m(z)$. По поводу этой теоремы сложения см. книгу Э. У. Гобсона «Теория сферических и эллипсоидальных функций», гл. VIII (ИЛ, 1952). — Прим. ред.

²⁾ Эту функцию изучал Гегенбауэр (Gegenbauer, Wiener Sitzungsberichte, LXX (1874), 434—443; LXXV (1877), 891—896; XCIVII (1888), 259—316; CII (1893), 942).

Легко доказать следующие результаты:

(I) Если n — целое число, то

$$C_n^v(z) =$$

$$= \frac{(-2)^n \cdot (v+1) \dots (v+n-1)}{n! (2n+2v-1)(2n+2v-2)\dots(n+2v)} (1-z^2)^{\frac{1}{2}-v} \frac{d^n}{dz^n} \left\{ (1-z^2)^{n+v-\frac{1}{2}} \right\};$$

так как $P_n(z) = C_n^{\frac{1}{2}}(z)$, то формула Родрига является частным случаем этой формулы.

(II) Если r — целое число, то

$$C_{n-r}^{r+\frac{1}{2}}(z) = \frac{1}{(2r-1)(2r-3)\dots 3 \cdot 1} \frac{d^r}{dz^r} P_n(z),$$

откуда

$$C_{n-r}^{r+\frac{1}{2}}(z) = \frac{(z^2-1)^{-\frac{1}{2}-r}}{(2r-1)(2r-3)\dots 3 \cdot 1} P_n^r(z).$$

Последнее равенство дает связь между функциями $C_n^v(z)$ и $P_n^r(z)$.

(III) Рекуррентным формулам для $P_n(z)$ соответствуют следующие:

$$z C_{n-1}^{v+1}(z) - C_{n-2}^{v+1}(z) - \frac{n}{2v} C_n^v(z) = 0,$$

$$C_n^{v+1}(z) - z C_{n-1}^{v+1}(z) = \frac{n+2v}{2v} C_n^v(z), \quad \frac{d C_n^v(z)}{dz} = 2v C_{n-1}^{v+1}(z),$$

$$n C_n^v(z) = (n-1+2v) z C_{n-1}^v(z) - 2v (1-z^2) C_{n-2}^{v-1}(z).$$

ЛИТЕРАТУРА

- A. M. Legendre, Calcul Intégral, II (Paris, 1817).
- H. E. Heine¹⁾, Handbuch der Kugelfunktionen (Berlin, 1878).
- N. M. Ferrers, Spherical Harmonics (1887).
- I. Todhunter, Functions of Laplace, Lamé and Bessel (1875).
- L. Schlafli, Ueber die zwei Heine'schen Kugelfunktionen (Bern, 1881).
- E. W. Hobson, Phil. Trans. of the Royal Society, 187A (1896), 443—531.
- E. W. Barnes, Quarterly Journ., XXXIX (1908), 97—204.
- R. Olbricht, Studien über die Kugel- und Cylinder-Funktionen (Halle, 1887) [Nova Acta Acad. Leop., LII (1888), 1—48].
- N. Nielsen, Théorie des fonctions métasphériques (Paris, 1911).
- В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. III, ч. 2 (Гостехиздат, 1956).
- Е. В. Гобсон, Теория сферических и эллипсоидальных функций (ИЛ, 1952).
- Н. Н. Лебедев, Специальные функции и их приложения (Гостехиздат, 1953).

¹⁾ Прежде чем изучать функции Лежандра по этому сочинению, следует познакомиться с мемуаром Гобсона, так как некоторые положения работы Гейне неправильны.