Примеры[1])

1. Доказать, что если n — положительное целое число, то

$$P_n(z) = \sum_0^n \frac{(n+p)!\,(-1)^p}{(n-p)!\,p!\,p!\,2^{p+1}} \{(1-z)^p + (-1)^n (1+z)^p\}.$$

(Math. Trip., 1898)

2. Доказать, что

$$\int_{-1}^{1} z(1-z^2) \frac{dP_n}{dz} \frac{dP_m}{dz}\, dz$$

равен нулю, кроме случаев $m-n = \pm 1$, и определить его значение в этих случаях.

(Math. Trip., 1896)

3. Показать (по индукции или каким-либо другим образом), что если n — положительное целое число, то

$$(2n+1)\int_z^1 P_n^2(z)\,dz = 1 - zP_n^2 - 2z\left(P_1^2 + P_2^2 + \ldots + P_{n-1}^2\right) + \\ + 2(P_1P_2 + P_2P_3 + \ldots + P_{n-1}P_n).$$

(Math. Trip., 1899)

4. Показать, что

$$zP_n'(z) = nP_n(z) + (2n-3)P_{n-2}(z) + (2n-7)P_{n-4}(z) + \ldots$$

(Clare, 1906)

5. Показать, что

$$z^2P_n''(z) = n(n-1)P_n(z) + \sum_{r=1}^{p} (2n-4r+1)\{r(2n-2r+1)-2\}P_{n-2r}(z),$$

где $p = \frac{1}{2}n$ или $\frac{1}{2}(n-1)$.

(Math. Trip., 1904)

6. Показать, что полином Лежандра удовлетворяет соотношению

$$(z^2-1)^2 \frac{d^2P_n}{dz^2} = n(n-1)(n+1)(n+2)\int_1^z dz \int_1^z P_n(z)\,dz.$$

(Trin. Coll. Dublin)

7. Показать, что

$$\int_0^1 z^2 P_{n+1}(z) P_{n-1}(z)\,dz = \frac{n(n+1)}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}.$$

(Peterhouse, 1905)

---

[1]) Функции, приводимые в примерах 1—30, являются *полиномами* Лежандра.

8. Показать, что значения интеграла

$$\int_{-1}^{1} (1-z^2)^2 P'''_m(z) P'_n(z)\, dz$$

следующие:

(I) $8n(n+1)$, когда $m-n$ положительное и четное,

(II) $\dfrac{-2n(n^2-1)(n-2)}{2n+1}$; когда $m=n$,

(III) 0 для всех других значений m и n.

(Peterhouse, 1907)

9. Показать, что

$$\sin^n\theta P_n(\sin\theta) = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \frac{n!}{r!(n-r)!} \cos^r\theta P_r(\cos\theta).$$

(Math. Trip., 1907)

10. Вычисляя интеграл $\int_0^{\pi} P_n(\cos\theta)\, d\theta$ (пример 2 § 15.1), а затем интегрируя по частям, показать, что интеграл $\int_{-1}^{1} P_n(\mu) \arcsin\mu\, d\mu$ равен нулю при n четном и равен

$$\pi\left\{\frac{1\cdot 3\ldots(n-2)}{2\cdot 4\ldots(n+1)}\right\}^2$$

при n — нечетном.

(Clare, 1903)

11. Пусть m и n — положительные целые числа и $m \leqslant n$; показать по индукции, что

$$P_m(z)P_n(z) = \sum_{r=0}^{m} \frac{A_{m-r}A_rA_{n-r}}{A_{n+m-r}} \left(\frac{2n+2m-4r+1}{2n+2m-2r+1}\right) P_{n+m-2r}(z),$$

где

$$A_m = \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2m-1)}{m!}.$$

(Adams, Proc. Royal. Soc., XXVII)

12. Разложением по возрастающим степеням переменной u показать, что

$$P_n(z) = \frac{(-1)^n}{n!} \frac{d^n}{dz^n} (u^2+z^2)^{-\frac{1}{2}},$$

где u^2 заменяется на $1-z^2$ после дифференцирования.

13. Показать, что $P_n(z)$ может быть представлен с точностью до постоянного множителя как определитель, в котором элементы, параллельные побочной диагонали (т. е. элементы, для которых сумма индекса строки и

индекса столбца постоянна), равны; определитель имеет n строк, и его элементы суть

$$z, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}z, \quad -\frac{1}{5}, \frac{1}{5}z, \ldots, \frac{1}{2n-1}z.$$

(Heun, Gött. Nach., 1881)

14. Показать, что если путь интегрирования проходит над $t=1$, то

$$P_n(z) = \frac{2}{\pi i}\int_0^\infty \frac{\left\{z(1-t^2)-2t(1-z^2)^{\frac{1}{2}}\right\}^n}{(1-t^2)^{n+1}}\,dt.$$

(Silva)

15. С помощью подстановки $\operatorname{ctg}\theta' = \operatorname{ctg}\theta - h\operatorname{cosec}\theta$ и разложения $\sin\theta'$ в ряд по степеням h по теореме Тейлора доказать, что

$$P_n(\cos\theta) = \frac{(-1)^n}{n!}\operatorname{cosec}^{n+1}\theta\,\frac{d^n(\sin\theta)}{d(\operatorname{ctg}\theta)^n}.$$

(Math. Trip., 1893)

16. Из рассмотрения ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} h^n P_n(z)$ показать, что

$$P_n(z) = \frac{1}{n!\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(1-z^2)t^2}\left(-\frac{d}{dz}\right)^n e^{-z^2t^2}\,dt.$$

(Glaisher, Proc. London Math. Soc., VI)

17. Дано уравнение поверхности вращения, близкой к сферической:

$$r = 1 + \alpha\{P_1(\cos\theta) + P_3(\cos\theta) + \ldots + P_{2n-1}(\cos\theta)\},$$

где α мало; показать, что если пренебречь α^2, то радиус кривизны меридиана будет равен

$$1 + \alpha\sum_{m=0}^{n-1}\{n(4m+3)-(m+1)(8m+3)\}P_{2m+1}(\cos\theta).$$

(Math. Trip., 1894)

18. Дано уравнение поверхности вращения, близкой к сферической:

$$r = a\{1 + \varepsilon P_n(\cos\theta)\},$$

где ε мало.

Показать, что если пренебречь ε^3, то ее площадь равна

$$4\pi a^2\left\{1 + \frac{1}{2}\varepsilon^2\frac{n^2+n+2}{2n+1}\right\}.$$

(Trinity, 1894)

19. Показать, что если k — целое число и

$$(1-2hz+h^2)^{-\frac{1}{2}k} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(z),$$

то

$$a_n = \frac{h^n}{(1-h^2)^{k-2}} \frac{2^{\frac{1}{2}(k-3)}(2n+1)}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(k-2)} \left(h^2 \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)^{\frac{1}{2}(k-3)} x^{-n+\frac{1}{2}k-2} y^{n+\frac{1}{2}k-2},$$

где x и y должны быть заменены единицей после дифференцирования.

(Routh, Proc. London Math. Soc., XXVI)

20. Показать, что

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{z-x} \{P_n(x) P_{n-1}(z) - P_{n-1}(x) P_n(z)\} dx = -\frac{2}{n},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \frac{d}{dz}\left[P_n(z)\left(\frac{1}{n} P_{n-1}(z) + \frac{1}{n+1} P_{n+1}(z)\right)\right] = -1.$$

(Catalan)

21. Пусть $x^2+y^2+z^2=r^2$, $z=\mu r$, причем все числа вещественны, так что $-1<\mu<1$.

Показать, что

$$P_n(\mu) = \frac{(-1)^n r^{n+1}}{n!} \frac{\partial^n}{\partial z^n}\left(\frac{1}{r}\right),$$

где при дифференцировании r рассматривается как функция независимых переменных x, y, z.

22. В обозначениях предыдущего примера (ср. стр. 133, сноска [1])) показать, что

$$Q_n(\mu) = \frac{(-1)^n r^{n+1}}{n!} \frac{\partial^n}{\partial z^n}\left\{\frac{1}{2r} \lg\left(\frac{r-z}{r+z}\right)\right\},$$

$$(n+1) P_n(\mu) + \mu P_n'(\mu) = \frac{(-1)^n r^{n+3}}{n!} \frac{\partial^n}{\partial z^n}\left(\frac{1}{r^3}\right).$$

23. Показать, что если $|h|$ и $|z|$ достаточно малы, то

$$\frac{1-h^2}{(1-2hz+h^2)^{\frac{3}{2}}} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) h^n P_n(z).$$

24. Доказать, что

$$P_{n+1}(z) Q_{n-1}(z) - P_{n-1}(z) Q_{n+1}(z) = \frac{2n+1}{n(n+1)} z.$$

(Math. Trip., 1894)

25. Показать, что если произвольная функция $f(x)$ может быть разложена в ряд

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x),$$

сходящийся равномерно в области, содержащей точку $x=1$, то разложение интеграла от этой функции будет

$$\int_1^x f(x)\,dx = -a_0 - \frac{1}{3}a_1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_{n-1}}{2n-1} - \frac{a_{n+1}}{2n+3}\right)P_n(x).$$

(Bauer)

26. Определить коэффициенты в разложении Неймана функции e^{az} в ряд по полиномам Лежандра.

(Bauer, Journ. für Math., LVI)

27. Вывести из примера 25, что

$$\arcsin z = \frac{\pi}{2}\sum_0^{\infty}\left\{\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}\right\}^2\{P_{2n+1}(z) - P_{2n-1}(z)\}.$$

(Catalan)

28. Показать, что

$$Q_n(z) = \frac{1}{2}\lg\left(\frac{z+1}{z-1}\right)P_n(z) - \left\{P_{n-1}(z)P_0(z) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}P_{n-2}(z)P_1(z) + \frac{1}{3}P_{n-3}(z)P_2(z) + \ldots + \frac{1}{n}P_0(z)P_{n-1}(z)\right\}.$$

(Schläfli; Hermite; Teixera, J. de Sci. Math., VI (1884), 81—84)

29. Показать, что

$$Q_n(z) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dz^n}\left\{(z^2-1)^n\lg\frac{z+1}{z-1}\right\} - \frac{1}{2}P_n(z)\lg\frac{z+1}{z-1}.$$

Доказать также, что

$$Q_n(z) = \frac{1}{2}P_n(z)\lg\frac{z+1}{z-1} - f_{n-1}(z),$$

где [1])

$$f_{n-1}(z) = \frac{2n-1}{1\cdot n}P_{n-1}(z) + \frac{2n-5}{3(n-1)}P_{n-3}(z) + \frac{2n-9}{5(n-2)}P_{n-5}(z) + \ldots =$$
$$= k_n + (k_n-1)\frac{n(n+1)}{1^2}\left(\frac{z-1}{2}\right) +$$
$$+\left(k_n - 1 - \frac{1}{2}\right)\frac{n(n-1)(n+1)(n+2)}{1^2\cdot 2^2}\left(\frac{z-1}{2}\right)^2 +$$
$$+\left(k_n - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)\frac{n(n-1)(n-2)(n+1)(n+2)(n+3)}{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2}\left(\frac{z-1}{2}\right)^3 + \ldots,$$

где $k_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$.

(Math. Trip., 1898)

---

[1]) Первое из этих выражений для $f_{n-1}(z)$ было дано Кристоффелем (Christoffel, Journ. für Math., LV (1858), 68); он также дал (там же, стр. 72) обобщение примера 28. Второе выражение было дано Стилтьесом (Stieltjes, Corresp. d'Hermite et de Stieltjes, II, 59).

30. Показать, что общее решение дифференциального уравнения Лежандра есть

$$y = AP_n(z) + BP_n(z) \int_z^\infty \frac{dt}{(t^2-1)\{P_n(t)\}^2},$$

причем путь интегрирования — луч, который при продолжении проходит через точку $t=0$.

31. Показать, что

$$\left\{z + (z^2-1)^{\frac{1}{2}}\right\}^a = \sum_{m=0}^\infty B_m Q_{2m-a-1}(z),$$

где

$$B_m = -\frac{a\left(a-2m+\frac{1}{2}\right)}{2\pi} \frac{\Gamma\left(m-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(m-a-\frac{1}{2}\right)}{m!\,\Gamma(m-a+1)}.$$

(Schläfli)

32. Показать, что при $\operatorname{Re}(n+1) > 0$

$$Q_n(z) = \int_{z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}}^\infty \frac{h^{-n-1}}{(1-2hz+h^2)^{\frac{1}{2}}}\,dh$$

и

$$Q_n(z) = \int_0^{z-(z^2-1)^{\frac{1}{2}}} \frac{h^n}{(1-2hz+h^2)^{\frac{1}{2}}}\,dh.$$

33. Показать, что

$$Q_n^m(z) = e^{m\pi i}\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-m+1)} \int_0^\infty \frac{\operatorname{ch} mu}{\left\{z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}\operatorname{ch} u\right\}^{n+1}}\,du,$$

где вещественная часть $n+1$ больше m. (Hobson)

34. Получить разложение функции $P_n(z)$ при $|\arg z| < \pi$ в ряд по степеням $\frac{1}{z}$, когда n не целое число, а именно:

$$P_n(z) = \frac{\operatorname{tg} n\pi}{\pi}\{Q_n(z) - Q_{-n-1}(z)\} =$$

$$= \frac{2^n\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} z^n F\left(\frac{1-n}{2}, -\frac{n}{2}; \frac{1}{2}-n; \frac{1}{z^2}\right) +$$

$$+ \frac{2^{-n-1}\Gamma\left(-n-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(-n)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} z^{-n-1} F\left(\frac{n}{2}+1, \frac{n+1}{2}; n+\frac{3}{2}; \frac{1}{z^2}\right).$$

[Легче всего это получается методом § 14.51.]

35. Показать, что дифференциальное уравнение для присоединенной функции Лежандра $P_n^m(z)$ определяется схемами [1])

$$P\left\{\begin{matrix} 0 & \infty & 1 & \\ -\frac{1}{2}n & m & -\frac{1}{2}n & \dfrac{z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}}{z-(z^2-1)^{\frac{1}{2}}} \\ \frac{1}{2}n+\frac{1}{2} & -m & \frac{1}{2}n+\frac{1}{2} & \end{matrix}\right\},$$

$$P\left\{\begin{matrix} 0 & \infty & 1 & \\ -\frac{1}{2}n & \frac{1}{2}m & 0 & \dfrac{1}{1-z^2} \\ \frac{1}{2}n+\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}m & \frac{1}{2} & \end{matrix}\right\}.$$

(Olbricht)

36. Показать, что дифференциальное уравнение для $C_n^\nu(z)$ определяется схемой

$$P\left\{\begin{matrix} -1 & \infty & 1 & \\ \frac{1}{2}-\nu & n+2\nu & \frac{1}{2}-\nu & z \\ 0 & -n & 0 & \end{matrix}\right\}.$$

37. Доказать, что если

$$y_s = \frac{(2n+1)(2n+3)\ldots(2n+2s-1)}{n(n^2-1)(n^2-4)\ldots\{n^2-(s-1)^2\}(n+s)}(z^2-1)^s\frac{d^sP_n}{dz^s},$$

то

$$y_2 = P_{n+2} - \frac{2(2n+1)}{2n-1}P_n + \frac{2n+3}{2n-1}P_{n-2},$$

$$y_3 = P_{n+3} - \frac{3(2n+3)}{2n-1}P_{n+1} + \frac{3(2n+5)}{2n-3}P_{n-1} - \frac{(2n+3)(2n+5)}{(2n-1)(2n-3)}P_{n-3},$$

и найти общую формулу.

(Math. Trip., 1896)

---

[1]) См. также § 15.5, пример.

38. Показать, что

$$P_n^m(\cos\theta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(n+m+1)}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)} \left[\frac{\cos\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta - \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}m\pi\right\}}{(2\sin\theta)^{\frac{1}{2}}} + \right.$$

$$+ \frac{1^2-4m^2}{2(2n+3)} \frac{\cos\left\{\left(n+\frac{3}{2}\right)\theta - \frac{3}{4}\pi + \frac{1}{2}m\pi\right\}}{(2\sin\theta)^{\frac{3}{2}}} +$$

$$\left. + \frac{(1^2-4m^2)(3^2-4m^2)}{2\cdot 4\cdot(2n+3)(2n+5)} \frac{\cos\left\{\left(n+\frac{5}{2}\right)\theta - \frac{5}{4}\pi + \frac{1}{2}m\pi\right\}}{(2\sin\theta)^{\frac{5}{2}}} + \ldots \right],$$

и найти области значений m, n и θ, для которых это разложение имеет место

(Math. Trip., 1901)

39. Показать, что значения n, для которых функция $P_n^{-m}(\cos\theta)$ равна нулю, уменьшаются при возрастании θ от 0 до π, если m положительно, а также, что число вещественных нулей функции $P_n^{-m}(\cos\theta)$ для значений θ между $-\pi$ и π равно наибольшему целому числу, меньшему $n-m+1$.

(Macdonald, Proc. London Math. Soc., XXXI, XXXIV)

40. Получить формулу

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [1-2h\{\cos\omega\cos\varphi + \sin\omega\sin\varphi\cos(\theta'-\theta)\} + h^2]^{-\frac{1}{2}}\, d\theta =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} h^n P_n(\cos\omega) P_n(\cos\varphi).$$

(Legendre)

41. При $f(x) = x^2$ $(x \geqslant 0)$ и $f(x) = -x^2$ $(x < 0)$ показать, что если $f(x)$ можно разложить в промежутке $(-1, 1)$ в равномерно сходящийся ряд полиномов Лежандра, то разложение будет

$$f(x) = \frac{3}{4}P_1(x) - \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r \frac{1\cdot 3\ldots(2r-3)}{4\cdot 6\cdot 8\ldots 2r} \frac{4r+3}{2r+4} P_{2r+1}(x).$$

(Trinity, 1893)

42. Показать, что если

$$\frac{1}{(1-2hz+h^2)^{\nu}} = \sum_{n=0}^{\infty} h^n C_n^{\nu}(z),$$

то

$$C_n^\nu\left\{xx_1-(x^2-1)^{\frac{1}{2}}(x_1^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi\right\}=$$

$$=\frac{\Gamma(2\nu-1)}{\{\Gamma(\nu)\}^2}\sum_{\lambda=0}^{n}(-1)^\lambda\frac{4^\lambda\Gamma(n-\lambda+1)\{\Gamma(\nu+\lambda)\}^2(2\nu+2\lambda-1)}{\Gamma(n+2\nu+\lambda)}\times$$

$$\times(x^2-1)^{\frac{1}{2}\lambda}(x_1^2-1)^{\frac{1}{2}\lambda}C_{n-\lambda}^{\nu+\lambda}(x)\,C_{n-\lambda}^{\nu+\lambda}(x_1)\,C_\lambda^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos\varphi).$$

(Gegenbauer, Wiener Sitzungsberichte, CII (1893), 942)

43. Показать, что если

$$\sigma_n(z)=\int_0^{e_1}(t^3-3tz+1)^{-\frac{1}{2}}t^n\,dt,$$

где e_1 — наименьший корень уравнения $t^3-3tz+1=0$, то

$$(2n+1)\,\sigma_{n+1}-3(2n-1)\,z\sigma_{n-1}+2(n-1)\,\sigma_{n-2}=0$$

и

$$4(4z^3-1)\,\sigma_n'''+144z^2\sigma_n''-z(12n^2-24n-291)\,\sigma_n'-$$
$$-(n-3)(2n-7)(2n+5)\,\sigma_n=0,$$

где

$$\sigma_n'''=\frac{d^3\sigma_n(z)}{dz^3}\quad\text{и т. д.}$$

(Pincherle, Rendiconti Lincei (4), VII (1891), 74)

44. Показать, что если

$$(h^3-3hz+1)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}R_n(z)\,h^n,$$

то

$$2(n+1)\,R_{n+1}-3(2n+1)\,zR_n+(2n-1)\,R_{n-2}=0,$$
$$nR_n+R_{n-2}'-zR_n'=0$$

и

$$4(4z^3-1)\,R_n'''+96z^2R_n''-z(12n^2+24n-91)\,R_n-n(2n+3)(2n+9)\,R_n=0.$$

где

$$R_n'''=\frac{d^3R_n}{dz^3}\quad\text{и т. д.}$$

(Pincherle, Mem. Ist. Bologna (5), I (1889), 337)

45. Пусть

$$A_n(x)=\frac{1}{2^n n!\,(x-1)}\frac{d^n}{dx^n}\{(x^2-1)^n(x-1)\},$$

получить рекуррентную формулу

$$(n+1)(2n-1)\,A_n(x)-\{(4n^2-1)\,x+1\}\,A_{n-1}(x)+$$
$$+(n-1)(2n+1)\,A_{n-2}(x)=0.$$

(Schendel, Journ. für Math., LXXX)

46. Показать, что если n не отрицательное число, а m — положительное целое, то уравнение

$$(x^2-1)\frac{d^2y}{dx^2}+(2n+2)\,x\frac{dy}{dx}=m\,(m+2n+1)\,y$$

имеет два решения:

$$K_m(x)=(x^2-1)^{-n}\frac{d^m}{dx^m}(x^2-1)^{m+n},$$

$$L_m(x)=(x^2-1)^{-n}\int\limits_{-1}^{1}\frac{(t^2-1)^n}{x-t}K_m(t)\,dt,$$

когда x не есть вещественное число, удовлетворяющее неравенству $-1\leqslant x\leqslant 1$.

47. Доказать, что

$$\left\{1-hx-(1-2hx+h^2)^{\frac{1}{2}}\right\}^m=$$

$$=m(x^2-1)^m\sum_{n=m}^{\infty}\frac{h^{n+m}}{(n+m)!}\,\frac{1}{n}\,\frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}}\left(\frac{x^2-1}{2}\right)^n.$$

(Clare, 1901)

48. Пусть

$$F_{a,n}(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(m+a)^n}{m!}x^m,$$

показать, что

$$F_{a,n}(x)=\left\{\frac{d^n}{dt^n}\left(e^{at+xe^t}\right)\right\}_{t=0}=e^xP_n(x,\,a),$$

где $P_n(x,\,a)$ — полином степени n относительно x, и вывести отсюда, что

$$P_{n+1}(x,\,a)=(x+a)\,P_n(x,\,a)+x\frac{d}{dx}P_n(x,\,a).$$

(Trinity, 1905)

49. Пусть $F_n(x)$ есть коэффициент при z^n в разложении выражения

$$\frac{2hz}{e^{hz}-e^{-hz}}\,e^{xz}$$

по возрастающим степеням z, так что

$$F_0(x)=1,\quad F_1(x)=x,\quad F_2(x)=\frac{3x^2-h^2}{6}\quad \text{и т. д.}$$

Показать, что

(1) $F_n(x)$ — однородный полином степени n относительно x и h;

(2) $\dfrac{dF_n(x)}{dx}=F_{n-1}(x)\qquad (n\geqslant 1)$;

(3) $\displaystyle\int\limits_{-h}^{h}F_n(x)\,dx=0\qquad (n\geqslant 1)$;

(4) если $y = a_0F_0(x) + a_1F_1(x) + a_2F_2(x) + \ldots$, где $a_0, a_1, a_2, \ldots$, — вещественные постоянные, то среднее значение $\frac{d^r y}{dx^r}$ в промежутке от $x = -h$ до $x = +h$ будет a_r.

(Léauté)

50. Пусть $F_n(x)$ определяется, как в предыдущем примере; показать, что при $-h < x < h$

$$F_{2m}(x) = (-1)^m\, 2\, \frac{h^{2m}}{\pi^{2m}} \left(\cos\frac{\pi x}{h} - \frac{1}{2^{2m}} \cos\frac{2\pi x}{h} + \frac{1}{3^{2m}} \cos\frac{3\pi x}{h} + \ldots \right),$$

$$F_{2m+1}(x) = (-1)^m\, 2\, \frac{h^{2m+1}}{\pi^{2m+1}} \left(\sin\frac{\pi x}{h} - \frac{1}{2^{2m+1}} \sin\frac{2\pi x}{h} + \frac{1}{3^{2m+1}} \sin\frac{3\pi x}{h} + \ldots \right).$$

(Appell)

ГЛАВА 16

ВЫРОЖДЕННАЯ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ

16.1. Слияние двух особых точек уравнения Римана

Мы видели (§ 10.8, часть I), что линейное дифференциальное уравнение с двумя правильными особыми точками можно проинтегрировать в элементарных функциях, тогда как решение линейного дифференциального уравнения с тремя правильными особыми точками было, по существу, предметом главы 14.

Мы рассмотрим теперь, как следующий по сложности тип, дифференциальное уравнение, получаемое из уравнения Римана слиянием двух особых точек. Это слияние дает уравнение с одной неправильной особой точкой, получаемой от слияния особых точек уравнения Римана, и с одной правильной особой точкой, соответствующей третьей особой точке уравнения Римана.

Это вырожденное уравнение мы получим, заставляя $c \to \infty$ в уравнении, определяемом схемой

$$P\left\{\begin{matrix} 0 & \infty & c & \\ \frac{1}{2}+m & -c & c-k & z \\ \frac{1}{2}-m & 0 & k & \end{matrix}\right\}.$$

Легко находим, что искомое уравнение имеет вид

$$\frac{d^2u}{dz^2}+\frac{du}{dz}+\left(\frac{k}{z}+\frac{\frac{1}{4}-m^2}{z^2}\right)u=0. \tag{A}$$

Видоизменим это уравнение, положив $u=e^{-\frac{1}{2}z}W_{k,m}(z)$; получим уравнение[1]) для $W_{k,m}(z)$:

$$\frac{d^2W}{dz^2}+\left\{-\frac{1}{4}+\frac{k}{z}+\frac{\frac{1}{4}-m^2}{z^2}\right\}W=0. \tag{B}$$

---

[1]) Это уравнение было дано Уиттекером (Whittaker, Bulletin American Math. Soc., X (1904), 125—134).

Читателю предлагается проверить, что особые точки этого уравнения лежат в 0 и ∞, причем первая правильная, вторая неправильная; если $2m$ *не есть целое число*, то два интеграла уравнения (B), правильные вблизи 0 и годные для всех конечных значений z, представляются рядами

$$M_{k,m}(z)=z^{\frac{1}{2}+m}e^{-\frac{1}{2}z}\left\{1+\frac{\frac{1}{2}+m-k}{1!\,(2m+1)}z+\right.$$
$$\left.+\frac{\left(\frac{1}{2}+m-k\right)\left(\frac{3}{2}+m-k\right)}{2!\,(2m+1)\,(2m+2)}z^2+\ldots\right\},$$
$$M_{k,-m}(z)=z^{\frac{1}{2}-m}e^{-\frac{1}{2}z}\left\{1+\frac{\frac{1}{2}-m-k}{1!\,(1-2m)}z+\right.$$
$$\left.+\frac{\left(\frac{1}{2}-m-k\right)\left(\frac{3}{2}-m-k\right)}{2!\,(1-2m)\,(2-2m)}z^2+\ldots\right\}.$$

Эти ряды, очевидно, образуют фундаментальную систему решений.

[Примечание. Тип рядов, стоящих в фигурных скобках, был рассмотрен Куммером[1]), а позднее Якобсталем[2]) и Барнсом[3]); ряды, в которых $k=0$, были исследованы Лагранжем в 1762—1765 гг. (Oeuvres, I, 480). В обозначении Куммера, видоизмененном Барнсом, они напишутся в виде ${}_1F_1\left\{\frac{1}{2}\pm m-k;\ \pm 2m+1;\ z\right\}$; рассмотрение решений уравнения (B) вместо решений уравнения $z\frac{d^2y}{dz^2}-(z-\rho)\frac{dy}{dz}-\alpha y=0$, одним из которых является ${}_1F_1(\alpha;\ \rho;\ z)$, имеет своим основанием бóльшую симметрию формул, а также простоту выражений различных функций прикладной математики (см. § 16.2) именно через решения уравнения (B).]

16.11. Формулы Куммера

(I) Покажем теперь, что если $2m$ не есть отрицательное целое число, то

$$z^{-\frac{1}{2}-m}M_{k,m}(z)=(-z)^{-\frac{1}{2}-m}M_{-k,m}(-z)$$

или

$$e^{-z}\left\{1+\frac{\frac{1}{2}+m-k}{1!\,(2m+1)}z+\frac{\left(\frac{1}{2}+m-k\right)\left(\frac{3}{2}+m-k\right)}{2!\,(2m+1)\,(2m+2)}z^2+\ldots\right\}=$$
$$=1-\frac{\frac{1}{2}+m+k}{1!\,(2m+1)}z+\frac{\left(\frac{1}{2}+m+k\right)\left(\frac{3}{2}+m+k\right)}{2!\,(2m+1)\,(2m+2)}z^2-\ldots$$

---

[1]) Kummer, Journ. für. Math., XV (1836), 139.
[2]) Jacobstahl, Math. Ann., LVI (1903), 129—154.
[3]) Barnes, Trans. Camb. Phil. Soc., XX (1908), 253—279.

Ибо при замене e^{-z} его разложением по степеням z коэффициент при z^n в произведении абсолютно сходящихся рядов слева будет

$$\frac{(-1)^n}{n!} F\left(\frac{1}{2}+m-k,\ -n;\ 2m+1;\ 1\right)=$$

$$=\frac{(-1)^n}{n!}\,\frac{\Gamma(2m+1)\,\Gamma\left(m+\frac{1}{2}+k+n\right)}{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}+k\right)\Gamma(2m+1+n)}$$

в силу § 14.11, а это и есть коэффициент при z^n справа [1]).

Полученный результат называется *первой формулой Куммера.*

(II) Равенство

$$M_{0,m}(z)=z^{\frac{1}{2}+m}\left\{1+\sum_{p=1}^{\infty}\frac{z^{2p}}{2^{4p}p!\,(m+1)(m+2)\ldots(m+p)}\right\},$$

справедливое при $2m$, не равном отрицательному целому числу, называется *второй формулой Куммера.*

Для ее доказательства отметим, что коэффициент при $z^{n+m+\frac{1}{2}}$ в разложении произведения

$$z^{m+\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}z}\,{}_1F_1\left(m+\frac{1}{2};\ 2m+1;\ z\right),$$

в котором второй и третий множители разлагаются в абсолютно сходящиеся ряды, будет (§ 3.73, часть I)

$$\frac{\left(\frac{1}{2}+m\right)\left(\frac{3}{2}+m\right)\ldots\left(n+m-\frac{1}{2}\right)}{n!\,(2m+1)(2m+2)\ldots(2m+n)}F\left(-n,\ -2m-n;\ -n+\frac{1}{2}-m;\ \frac{1}{2}\right)=$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{2}+m\right)\left(\frac{3}{2}+m\right)\ldots\left(n+m-\frac{1}{2}\right)}{n!\,(2m+1)(2m+2)\ldots(2m+n)}F\left(-\frac{1}{2}n,\ -m-\frac{1}{2}n;\ -n+\frac{1}{2}-m;\ 1\right)$$

в силу соотношения Куммера [2])

$$F\left(2\alpha,\ 2\beta;\ \alpha+\beta+\frac{1}{2};\ x\right)=F\left\{\alpha,\ \beta;\ \alpha+\beta+\frac{1}{2};\ 4x(1-x)\right\},$$

---

[1]) Результат остается верным и когда $m+\frac{1}{2}+k$ — отрицательное целое число, что доказывается небольшим видоизменением рассуждений § 14.11

[2]) См. главу 14, примеры 12 и 13, стр. 103.

справедливого при $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$; таким образом, коэффициент при $z^{n+m+\frac{1}{2}}$ (согласно § 14.11) равен

$$\frac{\left(\frac{1}{2}+m\right)\left(\frac{3}{2}+m\right)\ldots\left(n+m-\frac{1}{2}\right)}{n!\,(2m+1)(2m+2)\ldots(2m+n)}\,\frac{\Gamma\left(+n-\frac{1}{2}-m\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-m-\frac{1}{2}n\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}n\right)}=$$

$$=\frac{(-1)^n\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-m\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{n!\,(2m+1)(2m+2)\ldots(2m+n)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-m-\frac{1}{2}n\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}n\right)};$$

при n нечетном он равен нулю; при n четном $(=2p)$ он равен

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-m\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-p\right)}{(2p)!\,2^{2p}\left(m+\frac{1}{2}\right)\left(m+\frac{3}{2}\right)\ldots\left(m+p-\frac{1}{2}\right)(m+1)(m+2)\ldots(m+p)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-m-p\right)}=$$

$$=\frac{1\cdot 3\ldots(2p-1)}{(2p)!\,2^{3p}(m+1)(m+2)\ldots(m+p)}=\frac{1}{2^{4p}p!\,(m+1)(m+2)\ldots(m+p)}.$$

16.12. Определение[1]) функции $W_{k,m}(z)$

Решения $M_{k,\pm m}(z)$ уравнения (B) § 16.1 не являются, однако, наиболее удобными в качестве основных ввиду того, что одно из них теряет смысл, когда $2m$ — целое число.

Интеграл, получаемый при слиянии особых точек из интеграла § 14.6, после умножения на постоянный множитель и на $e^{\frac{1}{2}z}$ будет[2])

$$W_{k,m}(z)=$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\Gamma\left(k+\frac{1}{2}-m\right)e^{-\frac{1}{2}z}z^k\int\limits_{\infty}^{(0+)}(-t)^{-k-\frac{1}{2}+m}\left(1+\frac{t}{z}\right)^{k-\frac{1}{2}+m}e^{-t}dt.$$

Предполагается, что $\arg z$ имеет свое главное значение и что контур взят так, что точка $t=-z$ лежит вне его.

Подинтегральную функцию мы делаем однозначной, беря $|\arg(-t)|\leqslant\pi$ и выбирая значение $\arg\left(1+\frac{t}{z}\right)$, которое стремится к нулю при $t\to 0$ по пути, лежащему внутри контура.

---

[1]) Функция $W_{k,m}(z)$ была определена при помощи интеграла этого типа Уиттекером (Whittaker, loc. cit., 125).

[2]) Выбран надлежащий контур и переменная t § 14.6 заменена на $-t$

При этих условиях из § 5.32 части I следует, что интеграл будет аналитической функцией от z. Чтобы показать, что он удовлетворяет уравнению (B), положим

$$v=\int_{\infty}^{(0+)}(-t)^{-k-\frac{1}{2}+m}\left(1+\frac{t}{z}\right)^{k-\frac{1}{2}+m}e^{-t}\,dt$$

и получим без затруднений[1])

$$\frac{d^2v}{dz^2}+\left(\frac{2k}{z}-1\right)\frac{dv}{dz}+\frac{\frac{1}{4}-m^2+k(k-1)}{z^2}v=$$

$$=-\frac{\left(k-\frac{1}{2}+m\right)}{z^2}\int_{\infty}^{(0+)}\frac{d}{dt}\left\{t^{-k+\frac{1}{2}+m}\left(1+\frac{t}{z}\right)^{k-\frac{3}{2}+m}e^{-t}\right\}dt=0,$$

так как выражение в фигурных скобках стремится к нулю при $t\to+\infty$, а это и есть условие того, что $e^{-\frac{1}{2}z}z^kv$ удовлетворяет уравнению (B).

Согласно этому функция $W_{k,m}(z)$, определяемая интегралом

$$-\frac{1}{2\pi i}\Gamma\left(k+\frac{1}{2}-m\right)e^{-\frac{1}{2}z}z^k\int_{\infty}^{(0+)}(-t)^{-k-\frac{1}{2}+m}\left(1+\frac{t}{z}\right)^{k-\frac{1}{2}+m}e^{-t}\,dt,$$

будет решением дифференциального уравнения (B).

Формула для $W_{k,m}(z)$ теряет смысл при $k-\frac{1}{2}-m$, равном отрицательному целому числу. Чтобы преодолеть это затруднение, отметим, что, *когда*

$$\operatorname{Re}\left(k-\frac{1}{2}-m\right)\leqslant 0$$

и $k-\frac{1}{2}-m$ *не есть целое число*, мы можем преобразовать контурный интеграл в интеграл с бесконечным пределом по способу § 12.22; таким путем при

$$\operatorname{Re}\left(k-\frac{1}{2}-m\right)\leqslant 0$$

найдем

$$W_{k,m}(z)=\frac{e^{-\frac{1}{2}z}z^k}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-k+m\right)}\int_0^{\infty}t^{-k-\frac{1}{2}+m}\left(1+\frac{t}{z}\right)^{k-\frac{1}{2}+m}e^{-t}\,dt.$$

---

[1]) Дифференцирование под знаком интеграла законно в силу § 4.44 части I.

Этой формулы достаточно для определения $W_{k,m}(z)$ в критических случаях, когда $m+\frac{1}{2}-k$ — положительное целое число, и таким образом, $W_{k,m}(z)$ определена для всех значений k и m и для всех значений z, кроме вещественных отрицательных[1]).

Пример. Выразить решение уравнения

$$\frac{d^2u}{dz^2}+\left(a+\frac{b}{z}+\frac{c}{z^2}\right)u=0$$

через функции типа $W_{k,m}(z)$; a, b, c — любые постоянные.

16.2. Выражение различных функций через функции типа $W_{k,m}(z)$

Доказано[2]), что многие функции, применяемые в прикладной математике, могут быть выражены через функции $W_{k,m}(z)$; приведем несколько примеров.

(1) *Функция ошибок*[3]), встречающаяся в теории вероятностей и погрешностей наблюдений, а также в теории преломления и теплопроводности, определяется равенством

$$\operatorname{Erfc}(x)=\int_x^\infty e^{-t^2}dt,$$

где x вещественно.

Положив $t=x^2(w^2-1)$ и затем $w=\frac{s}{x}$ в интеграле для $W_{-\frac{1}{4},\frac{1}{4}}(x^2)$, получим

$$W_{-\frac{1}{4},\frac{1}{4}}(x^2)=x^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}x^2}\int_0^\infty\left(1+\frac{t}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}e^{-t}\,dt=$$

$$=2x^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{1}{2}x^2}\int_1^\infty e^{x^2(1-w^2)}\,dw=2x^{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2}x^2}\int_x^\infty e^{-s^2}ds,$$

---

[1]) Когда z вещественно и отрицательно, $W_{k,m}(z)$ можно определить как $W_{k,m}(z+0i)$ или $W_{k,m}(z-0i)$, смотря по тому, что удобнее.

[2]) Whittaker, Bulletin American Math. Soc., X; это сочинение содержит более полный обзор, чем приведенный здесь.

[3]) Это название прилагается также к функции

$$\operatorname{Erf}(x)=\int_0^x e^{-t^2}\,dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}-\operatorname{Erfc}(x).$$

и таким образом, функция ошибок выражается формулой

$$\operatorname{Erfc}(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}x^2}W_{-\frac{1}{4},\,\frac{1}{4}}(x^2).$$

Другие интегралы, встречающиеся в связи с теорией теплопроводности, например $\int\limits_a^b e^{-t^2-\frac{x^2}{t^2}}\,dt$, могут быть выражены через функции ошибок, а следовательно, и через функции $W_{k,m}$.

Пример. Показать, что формула для функции ошибок остается справедливой и для комплексных значений x.

(II) *Неполная гамма-функция*, изученная Лежандром и другими[1]), определяется равенством

$$\gamma(n,\ x)=\int\limits_0^x t^{n-1}e^{-t}\,dt.$$

Положив $t=s-x$ в интеграле для $W_{\frac{1}{2}(n-1),\,\frac{1}{2}n}(x)$, убедимся в том, что

$$\gamma(n,\ x)=\Gamma(n)-x^{\frac{1}{2}(n-1)}e^{-\frac{1}{2}x}W_{\frac{1}{2}(n-1),\,\frac{1}{2}n}(x).$$

(III) *Интегральный логарифм*, рассмотренный Эйлером и другими[2]), определяется при $|\arg\{-\lg z\}|<\pi$ равенством

$$\operatorname{li}(z)=\int\limits_0^z\frac{dt}{\lg t}.$$

Положив $s-\lg z=u$ и затем $u=-\lg t$ в интеграле для

$$W_{-\frac{1}{2},\,0}(-\lg z),$$

---

[1]) Legendre, Exercices, I, 339; Hočevar, Zs. für Math. und Phys., XXI (1876), 449; Schlömilch, Zs. für Math. und Phys., XVI (1871), 261; Prym, Journ. für Math., LXXXII (1877), 165.

[2]) Euler, Inst. Calc. Int., I; Soldner, Monatliche Correspondenz, von Zach (1811), 182; Briefwechsel zwischen Gauss und Bessel (1880), 114—120; Bessel, Königsberger Archiv, I (1812), 369—405; Laguerre, Bulletin de la Soc. Math. de France, VII (1879), 72; Stieltjes, Ann. de l'Ecole norm. sup. (3), III (1886). Интегральный логарифм имеет большое значение в высших отделах теории простых чисел. См. Landau, Primzahlen, 11.

можно убедиться в том, что

$$\mathrm{li}(z) = -(-\lg z)^{-\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{2}} W_{-\frac{1}{2},0}(-\lg z).$$

Ниже будет показано, что параболические цилиндрические функции Вебера (§ 16.5) и круговые цилиндрические функции Бесселя (глава 17) являются частными случаями функций $W_{k,m}$. Другие функции подобного характера даны в упражнениях в конце этой главы.

[Примечание. Для функции ошибок составлены таблицы Энке (Encke, Berliner ast. Jahrbuch (1834), 248—304) и Бэрджессом (Burgess, Trans. Roy. Soc. Edin., XXXIX (1900), 257). Для интегрального логарифма таблицы составлены Бесселем и Солднером (Soldner). Следует также отметить: Янке Е. и Эмде Ф., Таблицы функций с формулами и кривыми (Физматгиз, 1959) и Glaisher, Factor Tables (London, 1883).]

16.3. Асимптотическое разложение функции $W_{k,m}(z)$ при большом $|z|$

Асимптотическое разложение для $W_{k,m}(z)$, годное при $|\arg z| < \pi$, можно получить из контурного интеграла, которым была определена эта функция. Для этой цели мы применим результат, данный в примере 6 главы 5 части I, а именно

$$\left(1+\frac{t}{z}\right)^{\lambda} = 1 + \frac{\lambda}{1}\frac{t}{z} + \ldots + \frac{\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+1)}{n!}\frac{t^n}{z^n} + R_n(t, z),$$

где

$$R_n(t, z) = \frac{\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n)}{n!}\left(1+\frac{t}{z}\right)^{\lambda}\int_0^{\frac{t}{z}} u^n(1+u)^{-\lambda-1}\,du.$$

Подставляя это выражение в формулу § 16.12 и интегрируя почленно, получим с помощью результата § 12.22

$$W_{k,m}(z) = e^{-\frac{1}{2}z} z^k \left\{ 1 + \frac{m^2-\left(k-\frac{1}{2}\right)^2}{1!\,z} + \right.$$

$$+ \frac{\left\{m^2-\left(k-\frac{1}{2}\right)^2\right\}\left\{m^2-\left(k-\frac{3}{2}\right)^2\right\}}{2!\,z^2} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\left\{m^2-\left(k-\frac{1}{2}\right)^2\right\}\left\{m^2-\left(k-\frac{3}{2}\right)^2\right\}\ldots\left\{m^2-\left(k-n+\frac{1}{2}\right)^2\right\}}{n!\,z^n} +$$

$$\left. + \frac{1}{\Gamma\left(-k+\frac{1}{2}+m\right)}\int_0^{\infty} t^{-k-\frac{1}{2}+m} R_n(t, z)\, e^{-t}\,dt \right\}$$

при условии, что n берется настолько большим, что

$$\operatorname{Re}\left(n-k-\frac{1}{2}+m\right)>0.$$

Теперь, если $|\arg z|\leqslant\pi-\alpha$ и $|z|>1$, то

$$\left.\begin{aligned} 1\leqslant\left|1+\frac{t}{z}\right|\leqslant 1+t, \quad \operatorname{Re} z\geqslant 0,\\ \left|1+\frac{t}{z}\right|\geqslant\sin\alpha, \quad \operatorname{Re} z\leqslant 0\end{aligned}\right\}$$

и, следовательно[1]),

$$|R_n(t,z)|\leqslant\left|\frac{\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n)}{n!}\right|(1+t)^{|\lambda|}(\operatorname{cosec}\alpha)^{|\lambda|}\int\limits_0^{\left|\frac{t}{z}\right|}u^n(1+u)^{|\lambda|}\,du.$$

Отсюда

$$|R_n(t,z)|<$$
$$<\left|\frac{\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n)}{n!}\right|(1+t)^{|\lambda|}(\operatorname{cosec}\alpha)^{|\lambda|}\left|\frac{t}{z}\right|^{n+1}(1+t)^{|\lambda|}(n+1)^{-1},$$

так как

$$1+u<1+t.$$

Поэтому, когда $|z|>1$,

$$\left|\frac{1}{\Gamma\left(-k+\frac{1}{2}+m\right)}\int\limits_0^\infty t^{-k-\frac{1}{2}+m}R_n(t,z)\,e^{-t}\,dt\right|=$$
$$=O\left\{\int\limits_0^\infty t^{-k+\frac{1}{2}+m+n}(1+t)^{2|\lambda|}|z|^{-n-1}e^{-t}\,dt\right\}=O(z^{-n-1}),$$

так как интеграл сходится. Постоянная, включенная в символ O, не зависит от $\arg z$, но зависит от α и стремится к бесконечности при $\alpha\to 0$.

Иначе говоря, асимптотическое разложение функции $W_{k,m}(z)$ дается формулой

$$W_{k,m}(z)\sim e^{-\frac{1}{2}z}z^k\times$$
$$\times\left\{1+\sum_{n=1}^\infty\frac{\left\{m^2-\left(k-\frac{1}{2}\right)^2\right\}\left\{m^2-\left(k-\frac{3}{2}\right)^2\right\}\ldots\left\{m^2-\left(k-n+\frac{1}{2}\right)^2\right\}}{n!\,z^n}\right\}$$

для больших значений $|z|$, когда $|\arg z|\leqslant\pi-\alpha<\pi$.

---

[1]) Предполагается, что λ вещественно; неравенство слегка видоизменяется для комплексных значений λ.

16.31. Второе решение дифференциального уравнения для функции $W_{k,m}(z)$

Дифференциальное уравнение (B) § 16.1, которому удовлетворяет функция $W_{k,m}(z)$, остается без изменения, если одновременно изменить знаки z и k. Поэтому, если $|\arg(-z)| < \pi$, то $W_{-k,m}(-z)$ будет решением того же уравнения.

Так как при $|\arg z| < \pi$

$$W_{k,m}(z) = e^{-\frac{1}{2}z} z^k \{1 + O(z^{-1})\},$$

между тем как при $|\arg(-z)| < \pi$

$$W_{-k,m}(-z) = e^{\frac{1}{2}z}(-z)^{-k}\{1 + O(z^{-1})\},$$

то отношение $\dfrac{W_{k,m}(z)}{W_{-k,m}(-z)}$ не может быть постоянным, и таким образом, $W_{k,m}(z)$ и $W_{-k,m}(-z)$ образуют фундаментальную систему решений упомянутого дифференциального уравнения.

16.4. Контурные интегралы типа Меллина — Барнса (Mellin — Barnes) для $W_{k,m}(z)$

Рассмотрим теперь выражение

$$I = \frac{e^{-\frac{1}{2}z} z^k}{2\pi i} \int_{-\infty i}^{\infty i} \frac{\Gamma(s)\,\Gamma\left(-s-k-m+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-s-k+m+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-k-m+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-k+m+\frac{1}{2}\right)} z^s\,ds, \quad \text{(C)}$$

где $|\arg z| < \frac{3}{2}\pi$ и ни одно из чисел $k \pm m + \frac{1}{2}$ не равно целому положительному числу или нулю[1]); контур надлежащим образом изогнут, для того чтобы полюсы функции $\Gamma(s)$ и полюсы функции $\Gamma\left(-s-k-m+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-s-k+m+\frac{1}{2}\right)$ находились по разные стороны от него.

Легко убедиться, пользуясь § 13.6, что когда $s \to \infty$ по контуру,

$$\Gamma(s)\Gamma\left(-s-k-m+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-s-k+m+\frac{1}{2}\right) = \\ = O\left(e^{-\frac{3}{2}\pi|s|}|s|^{-2k-\frac{1}{2}}\right),$$

[1]) В этих случаях ряд § 16.3 обрывается и $W_{k,m}(z)$ является комбинацией элементарных функций.

и таким образом, интеграл представляет функцию от z, аналитическую во всех точках[1]) области $|\arg z| \leqslant \frac{3}{2}\pi - \alpha < \frac{3}{2}\pi$.

Возьмем теперь N так, чтобы полюсы функции

$$\Gamma\left(-s-k-m+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-s-k+m+\frac{1}{2}\right)$$

были справа от прямой $\operatorname{Re} s = -N - \frac{1}{2}$, и рассмотрим интеграл, взятый по периметру прямоугольника, вершины которого $\pm \xi i$, $-N - \frac{1}{2} \pm \xi i$, где ξ положительно[2]) и велико.

Читатель убедится, что при $|\arg z| \leqslant \frac{3}{2}\pi - \alpha$ интегралы

$$\int\limits_{-\xi i}^{-N-\frac{1}{2}-\xi i}, \quad \int\limits_{\xi i}^{-N-\frac{1}{2}+\xi i}$$

стремятся к нулю при $\xi \to \infty$; и таким образом, по теореме Коши

$$\frac{e^{-\frac{1}{2}z} z^k}{2\pi i} \int\limits_{-\infty i}^{\infty i} \frac{\Gamma(s)\Gamma\left(-s-k-m+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-s-k+m+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-k-m+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-k+m+\frac{1}{2}\right)} z^s\, ds =$$

$$= e^{-\frac{1}{2}z} z^k \left\{ \sum_{n=0}^{N} R_n + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-N-\frac{1}{2}-\infty i}^{-N-\frac{1}{2}+\infty i} \frac{\Gamma(s)\Gamma\left(-s-k-m+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-s-k+m+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-k-m+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-k+m+\frac{1}{2}\right)} z^s\, ds \right\},$$

где R_n — вычет подинтегральной функции при $s = -n$.

Положим $s = -N - \frac{1}{2} + it$; тогда модуль последней подинтегральной функции будет

$$|z|^{-N-\frac{1}{2}}\, O\left\{e^{-\alpha|t|}\, |t|^{N-2k}\right\},$$

где постоянная, включенная в символ O, не зависит от z.

Так как

$$\int^{\pm\infty} e^{-\alpha|t|}\, |t|^{N-2k}\, dt$$

---

[1]) Интеграл делаем однозначным при $\operatorname{Re} z < 0$ надлежащим выбором $\arg z$.

[2]) Линия, соединяющая $\pm \xi i$, может иметь изгибы, чтобы обойти полюсы подинтегральной функции, как объяснено выше.

сходится, то находим, что

$$I = e^{-\frac{1}{2}z} z^k \left\{ \sum_{n=0}^{N} R_n + O\left(|z|^{-N-\frac{1}{2}}\right) \right\}.$$

Но вычисляя вычет, получим

$$R_n = \frac{\Gamma\left(n-k-m+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-k+m+\frac{1}{2}\right)}{n!\,\Gamma\left(-k-m+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-k+m+\frac{1}{2}\right)}(-1)^n z^{-n} =$$

$$= \frac{\left\{m^2-\left(k-\frac{1}{2}\right)^2\right\}\left\{m^2-\left(k-\frac{3}{2}\right)^2\right\}\ldots\left\{m^2-\left(k-n+\frac{1}{2}\right)^2\right\}}{n!\,z^n},$$

и таким образом, *I имеет то же самое асимптотическое разложение, что и $W_{k,m}(z)$.*

Далее, I удовлетворяет дифференциальному уравнению для $W_{k,m}(z)$, ибо, подставив

$$\int_{-\infty i}^{\infty i} \Gamma(s)\Gamma\left(-s-k-m+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-s-k+m+\frac{1}{2}\right) z^s\,ds$$

вместо v в выражение (данное в § 16.12)

$$z^2\frac{d^2v}{dz^2} + 2kz\frac{dv}{dz} + \left(k-m-\frac{1}{2}\right)\left(k+m-\frac{1}{2}\right)v - z^2\frac{dv}{dz},$$

получим

$$\int_{-\infty i}^{\infty i} \Gamma(s)\Gamma\left(-s-k-m+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(-s-k+m+\frac{3}{2}\right) z^s\,ds -$$

$$- \int_{-\infty i}^{\infty i} \Gamma(s+1)\Gamma\left(-s-k-m+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-s-k+m+\frac{1}{2}\right) z^{s+1}\,ds =$$

$$= \left(\int_{-\infty i}^{\infty i} - \int_{1-\infty i}^{1+\infty i}\right)\Gamma(s)\Gamma\left(-s-k-m+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(-s-k+m+\frac{3}{2}\right) z^s\,ds.$$

Так как у последней подинтегральной функции полюсов между контурами не имеется и так как она стремится к нулю, когда $|s| \to \infty$, причем s остается между контурами, то рассматриваемое выражение равно нулю по теореме Коши; таким образом, I удовлетворяет дифференциальному уравнению для $W_{k,m}(z)$.

Поэтому

$$I = AW_{k,m}(z) + BW_{-k,m}(-z),$$

где A и B — постоянные; заставляя $|z| \to \infty$ так, что $\operatorname{Re} z > 0$, мы видим по асимптотическим разложениям, полученным для I и $W_{\pm k, m}(\pm z)$, что

$$A = 1, \quad B = 0.$$

По теории аналитического продолжения равенство $I = W_{k, m}(z)$ сохраняет силу для всех значений z таких, что $|\arg z| < \pi$, а для значений[1]) $\arg z$ таких, что $\pi \leqslant |\arg z| < \frac{3}{2}\pi$, $W_{k, m}(z)$ может быть *определена* как выражение I.

Пример 1. Показать, что

$$W_{k, m}(z) = \frac{e^{-\frac{1}{2}z}}{2\pi i} \int\limits_{-\infty i}^{\infty i} \frac{\Gamma(s-k)\,\Gamma\left(-s-m+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-s+m+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-k-m+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-k+m+\frac{1}{2}\right)} z^s\, ds,$$

где интеграл взят по надлежащему пути.

Пример 2. Получить интеграл Барнса для $W_{k, m}(z)$, заменяя $\left(1+\frac{t}{z}\right)^{k-\frac{1}{2}+m}$ через

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\infty i}^{\infty i} \frac{\Gamma(s)\,\Gamma\left(-s-k-m+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-k-m+\frac{1}{2}\right)} z^s t^{-s}\, ds$$

в интеграле § 16.12 и изменяя порядок интегрирования.

16.41. Соотношения между $W_{k, m}(z)$ и $M_{k, \pm m}(z)$

Если выражение

$$F(s) \equiv \Gamma(s)\,\Gamma\left(-s-k-m+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-s-k+m+\frac{1}{2}\right),$$

встречающееся в интеграле Барнса для $W_{k, m}(z)$, перепишем в форме

$$\frac{\pi^2\Gamma(s)}{\Gamma\left(s+k+m+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(s+k-m+\frac{1}{2}\right)\cos(s+k+m)\pi\cos(s+k-m)\pi},$$

---

[1]) Можно было бы показать, что надлежащим изменением пути интегрирования можно заставить интеграл § 16.3 определять аналитическую функцию при $|\arg z| < \frac{3}{2}\pi$. Но это излишне, так как интеграл Барнса дает более простое определение функции.

то увидим, пользуясь § 13.6, что, когда $\operatorname{Re} s \geqslant 0$, мы имеем при $|s| \to \infty$

$$F(s) = O\left[\exp\left\{\left(-s - \frac{1}{2} - 2k\right)\lg s + s\right\}\right] \times$$
$$\times \sec(s+k+m)\pi \sec(s+k-m)\pi.$$

Поэтому, если $|\arg z| < \frac{3}{2}\pi$, то интеграл $\int F(s) z^s ds$, взятый вдоль полуокружности, лежащей справа от мнимой оси, стремится к нулю, когда радиус полуокружности стремится к бесконечности таким образом, что нижняя граница расстояния полуокружности от полюсов подинтегральной функции положительна (не нуль).

Поэтому

$$W_{k,m}(z) = -\frac{e^{-\frac{1}{2}z} z^k \left(\sum R'\right)}{\Gamma\left(-k-m+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-k+m+\frac{1}{2}\right)},$$

где $\sum R'$ — сумма вычетов функции $F(s)$ в ее полюсах справа от контура (ср. § 14.5), примененного в интеграле (C) § 16.4.

Вычисляя эти вычеты, найдем без затруднения, что если

$$|\arg z| < \frac{3}{2}\pi$$

и $2m$ не целое число[1]), то

$$W_{k,m}(z) = \frac{\Gamma(-2m)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-m-k\right)} M_{k,m}(z) + \frac{\Gamma(2m)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+m-k\right)} M_{k,-m}(z).$$

Пример 1. Показать, что при $|\arg(-z)| < \frac{3}{2}\pi$ и $2m$ не целом имеем

$$W_{-k,m}(-z) = \frac{\Gamma(-2m)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-m+k\right)} M_{-k,m}(-z) + \frac{\Gamma(2m)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+m+k\right)} M_{-k,-m}(-z).$$

(Barnes[2]))

Пример 2. Показать, что при

$$-\frac{1}{2}\pi < \arg z < \frac{3}{2}\pi \quad \text{и} \quad -\frac{3}{2}\pi < \arg(-z) < \frac{1}{2}\pi$$

---

[1]) Когда $2m$ — целое число, некоторые из полюсов будут вообще двойными полюсами и их вычеты будут содержать логарифмы от z. Результат не доказан для случая, когда $k - \frac{1}{2} \pm m$ — положительное целое число или нуль; но он может быть получен для таких значений k и m путем сравнения обрывающегося ряда для $W_{k,m}(z)$ с рядом для $M_{k,\pm m}(z)$.

[2]) Результаты Барнса даны в обозначениях § 16.1.

имеем

$$M_{k,m}(z)=\frac{\Gamma(2m+1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+m-k\right)}e^{k\pi i}W_{-k,m}(-z)+$$

$$+\frac{\Gamma(2m+1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+m+k\right)}e^{\left(\frac{1}{2}+m+k\right)\pi i}W_{k,m}(z).$$

Пример 3. Получить первую формулу Куммера (§ 16.11) из формулы

$$z^n e^{-z}=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty i}^{\infty i}\Gamma(n-s)\,z^s\,ds.$$

(Barnes)

16.5. Функции параболического цилиндра. Уравнение Вебера

Рассмотрим дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция $w=z^{-\frac{1}{2}}W_{k,-\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2}z^2\right)$; оно будет

$$\frac{d}{z\,dz}\left\{\frac{d\left(wz^{\frac{1}{2}}\right)}{z\,dz}\right\}+\left\{-\frac{1}{4}+\frac{2k}{z^2}+\frac{3}{4z^4}\right\}wz^{\frac{1}{2}}=0$$

и приводится к виду

$$\frac{d^2w}{dz^2}+\left\{2k-\frac{1}{4}z^2\right\}w=0.$$

Поэтому функция

$$D_n(z)=2^{\frac{1}{2}n+\frac{1}{4}}z^{-\frac{1}{2}}W_{\frac{1}{2}n+\frac{1}{4},-\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2}z^2\right)$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2D_n(z)}{dz^2}+\left(n+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}z^2\right)D_n(z)=0.$$

Функция $D_n(z)$ есть одна из функций, встречающихся в теории потенциала в связи с параболическим цилиндром[1]); дифференциальное уравнение, которому она удовлетворяет, будем называть *уравнением Вебера*.

---

[1]) Weber, Math. Ann., I (1869), 1—36; Whittaker, Proc. London Math. Soc., XXXV (1903), 417—427.

Из § 16.41 следует, что

$$D_n(z)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)2^{\frac{1}{2}n+\frac{1}{4}}z^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}n\right)}M_{\frac{1}{2}n+\frac{1}{4},\,-\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2}z^2\right)+$$

$$+\frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)2^{\frac{1}{2}n+\frac{1}{4}}z^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}n\right)}M_{\frac{1}{2}n+\frac{1}{4},\,\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2}z^2\right),$$

когда $|\arg z|<\frac{3}{4}\pi$.

Но

$$z^{-\frac{1}{2}}M_{\frac{1}{2}n+\frac{1}{4},\,-\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2}z^2\right)=2^{-\frac{1}{4}}e^{-\frac{1}{4}z^2}{}_1F_1\left\{-\frac{1}{2}n;\ -\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}z^2\right\},$$

$$z^{-\frac{1}{2}}M_{\frac{1}{2}n+\frac{1}{4},\,\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2}z^2\right)=2^{-\frac{3}{4}}ze^{-\frac{1}{4}z^2}{}_1F_1\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}n;\ \frac{3}{2};\ \frac{1}{2}z^2\right\},$$

а эти функции являются *однозначными* аналитическими функциями от z во всей плоскости. Следовательно и $D_n(z)$ будет однозначной функцией от z во всей плоскости; в силу результатов § 16.4 ее асимптотическое разложение при $|\arg z|<\frac{3}{4}\pi$ имеет вид

$$e^{-\frac{1}{4}z^2}z^n\left\{1-\frac{n(n-1)}{2z^2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4z^4}-\ldots\right\}.$$

16.51. Второе решение уравнения Вебера

Так как уравнение Вебера остается без изменения, если мы одновременно заменим n и z соответственно через $-n-1$ и $\pm iz$, то получается, что $D_{-n-1}(iz)$ и $D_{-n-1}(-iz)$, а также и $D_n(-z)$ будут решениями уравнения Вебера. Из асимптотических разложений функций $D_n(z)$ и $D_{-n-1}\left(ze^{\frac{1}{2}\pi i}\right)$, годных в области $-\frac{3}{4}\pi<\arg z<\frac{1}{4}\pi$, очевидно, что отношение этих двух решений не будет постоянным.

16.511. Соотношение между функциями $D_n(z)$, $D_{-n-1}(\pm iz)$

Из теории линейных дифференциальных уравнений следует, что должно существовать соотношение вида

$$D_n(z) = aD_{-n-1}(iz) + bD_{-n-1}(-iz),$$

если отношение функций в правой части не равно постоянной.

Чтобы получить это соотношение, заметим, что если эти функции разложить по возрастающим степеням z, то разложения будут

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)2^{\frac{1}{2}n}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}n\right)} + \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)2^{\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}n\right)}z + \ldots$$

и

$$a\left\{\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)2^{-\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(1+\frac{1}{2}n\right)} + \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)2^{-\frac{1}{2}n-1}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}n\right)}iz + \ldots\right\} +$$

$$+ b\left\{\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)2^{-\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(1+\frac{1}{2}n\right)} - \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)2^{-\frac{1}{2}n-1}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}n\right)}iz + \ldots\right\}.$$

Сравнением первых двух членов получим

$$a = (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\Gamma(n+1)\,e^{\frac{1}{2}n\pi i}, \quad b = (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\Gamma(n+1)\,e^{-\frac{1}{2}n\pi i},$$

и таким образом,

$$D_n(z) = \frac{\Gamma(n+1)}{\sqrt{2\pi}}\left[e^{\frac{1}{2}n\pi i}D_{-n-1}(iz) + e^{-\frac{1}{2}n\pi i}D_{-n-1}(-iz)\right].$$

16.52. Общее асимптотическое разложение для функции $D_n(z)$

До сих пор асимптотическое разложение для функции $D_n(z)$ для больших значений z было дано только в секторе $|\arg z| < \frac{3}{4}\pi$ (§ 16.5). Чтобы получить его форму для значений $\arg z$, не содержащихся в этой области, мы заменим z на $-iz$ и n на $-n-1$ в формуле предыдущего параграфа и получим

$$D_n(z) = e^{n\pi i}D_n(-z) + \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-n)}e^{\frac{1}{2}(n+1)\pi i}D_{-n-1}(-iz).$$

Далее, если $\frac{5}{4}\pi > \arg z > \frac{1}{4}\pi$, то мы можем приписать $-z$ и $-iz$ аргументы между $\pm\frac{3}{4}\pi$, и тогда $\arg(-z) = \arg z - \pi$, $\arg(-iz) = \arg z - \frac{1}{2}\pi$; применяя после этого асимптотическое разложение § 16.5 к $D_n(-z)$ и $D_{-n-1}(-iz)$, видим, что если $\frac{5}{4}\pi > \arg z > \frac{1}{4}\pi$, то

$$D_n(z) \sim e^{-\frac{1}{4}z^2} z^n \left\{1 - \frac{n(n-1)}{2z^2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4z^4} - \ldots\right\} - \\ - \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-n)} e^{n\pi i} e^{\frac{1}{4}z^2} z^{-n-1} \left\{1 + \frac{(n+1)(n+2)}{2z^2} + \right. \\ \left. + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2\cdot 4z^4} + \ldots\right\}.$$

Эта формула не противоречит формуле § 16.5, так как в общей для них области, т. е. в области $\frac{1}{4}\pi < \arg z < \frac{3}{4}\pi$, $e^{\frac{1}{2}z^2} z^{-2n-1} = o(z^{-m})$ для всех положительных значений m.

Для того чтобы получить формулу, пригодную в области $-\frac{1}{4}\pi > \arg z > -\frac{5}{4}\pi$, мы воспользуемся формулой

$$D_n(z) = e^{-n\pi i} D_n(-z) + \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-n)} e^{-\frac{1}{2}(n+1)\pi i} D_{-n-1}(iz)$$

и получим асимптотическое разложение, которое отличается от предыдущего только заменой $e^{n\pi i}$ на $e^{-n\pi i}$.

Так как $D_n(z)$ — однозначная функция и так как то или другое из полученных разложений пригодно для всех значений $\arg z$ в области $-\pi \leqslant \arg z \leqslant \pi$, то мы получили полное асимптотическое разложение функции $D_n(z)$.

16.6. Контурный интеграл для функции $D_n(z)$

Рассмотрим интеграл $\int\limits_{\infty}^{(0+)} e^{-zt-\frac{1}{2}t^2}(-t)^{-n-1}\,dt$, где $|\arg(-t)| \leqslant \pi$; он представляет однозначную аналитическую функцию от z во всей плоскости (§ 5.32, часть I), и, кроме того,

$$\left\{\frac{d^2}{dz^2} - z\frac{d}{dz} + n\right\} \int\limits_{\infty}^{(0+)} e^{-zt-\frac{1}{2}t^2}(-t)^{-n-1}\,dt = \\ = \int\limits_{\infty}^{(0+)} \frac{d}{dt}\left\{e^{-zt-\frac{1}{2}t^2}(-t)^{-n}\right\} dt = 0;$$

допустимость дифференцирования под знаком интеграла легко проверить. Интеграл удовлетворяет, следовательно, дифференциальному уравнению, которому удовлетворяет функция $e^{\frac{1}{4}z^2}D_n(z)$; поэтому

$$e^{-\frac{1}{4}z^2}\int\limits_{\infty}^{(0+)} e^{-zt-\frac{1}{2}t^2}(-t)^{-n-1}\,dt = aD_n(z) + bD_{-n-1}(iz),$$

где a и b — постоянные.

Далее, если выражение справа обозначим $E_n(z)$, то получим

$$E_n(0) = \int\limits_{\infty}^{(0+)} e^{-\frac{1}{2}t^2}(-t)^{-n-1}\,dt, \quad E_n'(0) = \int\limits_{\infty}^{(0+)} e^{-\frac{1}{2}t^2}(-t)^{-n}\,dt.$$

Для вычисления этих интегралов, являющихся аналитическими функциями от n, предположим сначала, что $\operatorname{Re} n < 0$; тогда, деформируя пути интегрирования, получим

$$E_n(0) = -2i\sin(n+1)\pi\int\limits_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2}t^{-n-1}\,dt =$$

$$= 2^{-\frac{1}{2}n}\,i\sin n\pi\int\limits_0^{\infty} e^{-n}u^{-\frac{1}{2}u-1}\,du = 2^{-\frac{1}{2}n}\,i\sin(n\pi)\,\Gamma\left(-\frac{1}{2}n\right).$$

Подобным же образом

$$E_n'(0) = -2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}n}\,i\sin(n\pi)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}n\right).$$

Но обе части этих равенств являются аналитическими функциями от n; поэтому равенства будут справедливы для всех значений n; отсюда получаем

$$b = 0, \quad a = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}n\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)2^{\frac{1}{2}n}}\,2^{-\frac{1}{2}n}\,i\sin(n\pi)\,\Gamma\left(-\frac{1}{2}n\right) = 2i\Gamma(-n)\sin n\pi;$$

следовательно,

$$D_n(z) = -\frac{\Gamma(n+1)}{2\pi i}\,e^{-\frac{1}{4}z^2}\int\limits_{\infty}^{(0+)} e^{-zt-\frac{1}{2}t^2}(-t)^{-n-1}\,dt.$$

16.61. Рекуррентные формулы для функции $D_n(z)$

Из равенства

$$0=\int_{\infty}^{(0+)}\frac{d}{dt}\left\{e^{-zt-\frac{1}{2}t^2}(-t)^{-n-1}\right\}dt=$$

$$=\int_{\infty}^{(0+)}\left\{-z(-t)^{-n-1}+(-t)^{-n}+(n+1)(-t)^{-n-2}\right\}e^{-zt-\frac{1}{2}t^2}dt,$$

пользуясь § 16.6, видим, что

$$D_{n+1}(z)-zD_n(z)+nD_{n-1}(z)=0.$$

Далее, дифференцированием интеграла § 16.6 получаем

$$D_n'(z)+\frac{1}{2}zD_n(z)-nD_{n-1}(z)=0.$$

Пример. Получить эти формулы из степенных рядов по возрастающим степеням z § 16.5.

16.7. Свойства функции $D_n(z)$, когда n — целое число

Если n — целое число, то мы можем написать интеграл § 16.6 в форме

$$D_n(z)=-\frac{n!\,e^{-\frac{1}{4}z^2}}{2\pi i}\int^{(0+)}\frac{e^{-zt-\frac{1}{2}t^2}}{(-t)^{n+1}}dt.$$

Если теперь положим $t=v-z$, то получим

$$D_n(z)=(-1)^n\frac{n!\,e^{\frac{1}{4}z^2}}{2\pi i}\int^{(z+)}\frac{e^{-\frac{1}{2}v^2}}{(v-z)^{n+1}}dv=(-1)^n e^{\frac{1}{4}z^2}\frac{d^n}{dz^n}\left(e^{-\frac{1}{2}z^2}\right)$$

— результат, принадлежащий Эрмиту [1]).

Далее, если m и n — неравные целые числа, то мы видим из дифференциальных уравнений, что

$$D_n(z)D_m''(z)-D_m(z)D_n''(z)+(m-n)D_m(z)D_n(z)=0,$$

откуда

$$(m-n)\int_{-\infty}^{\infty}D_m(z)D_n(z)\,dz=\left[D_n(z)D_m'(z)-D_m(z)D_n'(z)\right]_{-\infty}^{\infty}=0$$

---

[1]) Hermite, Comptes Rendus, LVIII (1864), 266—273.

в силу разложения § 16.5 по нисходящим степеням z (которое обрывается и годно для всех значений $\arg z$, когда n — положительное целое число).

Поэтому если m и n — неравные положительные целые числа, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} D_m(z)\, D_n(z)\, dz = 0.$$

С другой стороны, когда $m = n$, имеем

$$(n+1)\int_{-\infty}^{\infty} \{D_n(z)\}^2\, dz = \int_{-\infty}^{\infty} D_n(z)\left\{D'_{n+1}(z) + \frac{1}{2} z D_{n+1}(z)\right\} dz =$$

$$= [D_n(z)\, D_{n+1}(z)]_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \left\{\frac{1}{2} z D_n(z)\, D_{n+1}(z) - D_{n+1}(z)\, D'_n(z)\right\} dz =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \{D_{n+1}(z)\}^2\, dz,$$

если воспользуемся рекуррентной формулой, проинтегрируем по частям и снова воспользуемся рекуррентной формулой.

По индукции заключаем, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{D_n(z)\}^2\, dz = n! \int_{-\infty}^{\infty} \{D_0(z)\}^2\, dz = n! \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} z^2}\, dz = (2\pi)^{\frac{1}{2}}\, n!$$

по следствию 1 § 12.14 и § 12.2.

Отсюда непосредственно следует, что если для функции $f(z)$ существует разложение вида

$$f(z) = a_0 D_0(z) + a_1 D_1(z) + \ldots + a_n D_n(z) + \ldots,$$

и если почленное интегрирование между пределами $-\infty$ и ∞ законно, то

$$a_n = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}\, n!} \int_{-\infty}^{\infty} D_n(t)\, f(t)\, dt.$$

ЛИТЕРАТУРА

W. Jacobstahl, Math. Ann., LVI (1903), 129—154.
E. W. Barnes, Trans. Camb. Phil. Soc., XX (1908), 253—279.
E. T. Whittaker, Bulletin American Math. Soc., X (1904), 125—134.
H. Weber, Math. Ann., I (1869), 1—36.
А. Адамов, Вестник Петр. полит. ин-та, V (1906); 127—143.

E. T. Whittaker, Proc. London Math. Soc., XXXV (1903), 417—427.
G. N. Watson, Proc. London Math. Soc. (2), VIII (1910), 393—421; XVII (1919), 116—148.
H. E. J. Curzon, Proc. London Math. Soc. (2), XII (1913), 236—259.
A. Milne, Proc. Edinburgh Math. Soc., XXXII (1914), 2—14; XXXIII (1915), 48—64.
N. Nielsen, Meddelelser K. Danske Videnskabernes Selskab, I (1918), no. 6.
Н. Н. Лебедев, Специальные функции и их приложения, Гостехиздат, 1953.

Примеры

1. Показать, что если интеграл сходится, то

$$M_{k,m}(z) = \frac{\Gamma(2m+1)\, z^{m+\frac{1}{2}} 2^{-2m}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+m+k\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+m-k\right)} \int_{-1}^{1} (1+u)^{-\frac{1}{2}+m-k} (1-u)^{-\frac{1}{2}+m+k} e^{\frac{1}{2}zu}\, du.$$

2. Показать, что

$$M_{k,m}(z) = z^{\frac{1}{2}+m} e^{-\frac{1}{2}z} \lim_{\rho\to\infty} F\left(\frac{1}{2}+m-k, \frac{1}{2}+m-k+\rho; 2m+1; \frac{z}{\rho}\right).$$

3. Получить рекуррентные формулы

$$W_{k,m}(z) = z^{\frac{1}{2}} W_{k-\frac{1}{2},\, m-\frac{1}{2}}(z) + \left(\frac{1}{2}-k+m\right) W_{k-1,m}(z),$$

$$W_{k,m}(z) = z^{\frac{1}{2}} W_{k-\frac{1}{2},\, m+\frac{1}{2}}(z) + \left(\frac{1}{2}-k-m\right) W_{k-1,m}(z),$$

$$zW'_{k,m}(z) = \left(k-\frac{1}{2}z\right) W_{k,m}(z) - \left\{m^2 - \left(k-\frac{1}{2}\right)^2\right\} W_{k-1,m}(z).$$

4. Доказать, что $W_{k,m}(z)$ есть интеграл от элементарной функции, когда одно из чисел $k-\frac{1}{2}\pm m$ есть отрицательное целое число.

5. Показать, что надлежащей заменой переменных уравнение

$$(a_2+b_2x)\frac{d^2y}{dx^2} + (a_1+b_1x)\frac{dy}{dx} + (a_0+b_0x)\,y = 0$$

может быть приведено к виду

$$\xi\frac{d^2\eta}{d\xi^2} + (c-\xi)\frac{d\eta}{d\xi} - a\eta = 0;$$

вывести это уравнение из уравнения для $F(a, b; c; x)$, положив $x = \frac{\xi}{b}$ и заставляя $b\to\infty$.

6. Показать, что интегральный косинус Шлёмильха и Бессо (Besso, Giornale di Matematiche, VI), определяемый равенством

$$\mathrm{Ci}(z) = \int_z^\infty \frac{\cos t}{t}\, dt,$$

равен

$$\frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2} iz + \frac{1}{4}\pi i} W_{-\frac{1}{2}, 0}(-iz) + \frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2} iz - \frac{1}{4}\pi i} W_{-\frac{1}{2}, 0}(iz).$$

Показать также, что функция Шлёмильха, определяемая (Zeitschrift für Math. und Phys., IV (1859), 390) равенствами

$$S(\nu, z) = \int_0^\infty (1+t)^{-\nu} e^{-zt}\, dt = z^{\nu-1} e^z \int_z^\infty \frac{e^{-u}}{u^\nu}\, du,$$

равна

$$z^{\frac{1}{2}\nu - 1} e^{\frac{1}{2} z} W_{-\frac{1}{2}\nu, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\nu}(z).$$

7. Выразить функции

$$\mathrm{Si}(z) \equiv \int_0^z \frac{\sin t}{t}\, dt, \quad \mathrm{Ei}(z) \equiv \int_z^\infty \frac{e^{-t}}{t}\, dt$$

через функции $W_{k, m}$.

8. Показать, что полином Сонина, определяемый (Math. Ann., XVI, 41) равенством

$$T_m^n(z) = \frac{z^n}{n!\,(m+n)!\,0!} - \frac{z^{n-1}}{(n-1)!\,(m+n-1)!\,1!} + \\ + \frac{z^{n-2}}{(n-2)!\,(m+n-2)!\,2!} - \ldots,$$

равен

$$\frac{1}{n!\,(m+n)!} z^{-\frac{1}{2}(m+1)} e^{\frac{1}{2} z} W_{n+\frac{1}{2} m + \frac{1}{2}, \frac{1}{2} m}(z).$$

9. Показать, что функция $\varphi_m(z)$, определенная Лагранжем в 1762—1765 гг. (Oeuvres, I, 520) и Абелем (Oeuvres (1881), 284) как коэффициент при h^m в разложении функции $(1-h)^{-1} e^{-hz/(1-h)}$, равна

$$(-1)^m \frac{z^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2} z}}{m!} W_{m+\frac{1}{2}, 0}(z).$$

10[1]). Показать, что функция Пирсона — Кэннингхэма (Pearson, Cunningham, Proc. Royal Soc., LXXXI, 310) $\omega_{n,m}(z)$, определяемая как

$$\frac{e^{-z}(-z)^{n-\frac{1}{2}m}}{\Gamma\left(n-\frac{1}{2}m+1\right)}\left\{1-\frac{\left(n+\frac{1}{2}m\right)\left(n-\frac{1}{2}m\right)}{z}+\right.$$

$$\left.+\frac{\left(n+\frac{1}{2}m\right)\left(n+\frac{1}{2}m-1\right)\left(n-\frac{1}{2}m\right)\left(n-\frac{1}{2}m-1\right)}{2!\,z^2}-\ldots\right\},$$

равна

$$\frac{(-1)^{n-\frac{1}{2}m}}{\Gamma\left(n-\frac{1}{2}m+1\right)}z^{-\frac{1}{2}(m+1)}e^{-\frac{1}{2}z}W_{n+\frac{1}{2},\,\frac{1}{2}m}(z).$$

11. Показать, что если $|\arg z|<\frac{1}{4}\pi$ и $|\arg(1+t)|\leqslant\pi$, то

$$D_n(z)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}n+1\right)}{2^{-\frac{1}{2}(n-1)}\pi i}\int\limits_{-\infty}^{(-1+)}e^{\frac{1}{4}z^2t}(1+t)^{-\frac{1}{2}n-1}(1-t)^{\frac{1}{2}(n-1)}\,dt.$$

(Whittaker)

12. Показать, что если n не есть положительное целое число и $|\arg z|<\frac{3}{4}\pi$, то

$$D_n(z)=\frac{1}{2\pi i}e^{-\frac{1}{4}z^2}\int\limits_{-\infty i}^{\infty i}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}n\right)\Gamma(-t)}{\Gamma(-n)}(\sqrt{2})^{t-n-2}z^t\,dt,$$

и что этот результат имеет силу для всех значений $\arg z$, если интеграл будет вида $\int\limits_{\infty}^{(0-)}$, причем контур окружает полюсы функции $\Gamma(-t)$, но не окружает полюсов функции $\Gamma\left(\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}n\right)$.

13. Показать, что если $|\arg\alpha|<\frac{1}{2}\pi$, то

$$\int\limits_{\infty}^{(0+)}e^{\left(\frac{1}{4}-\alpha\right)z^2}z^mD_n(z)\,dz=\frac{\pi^{\frac{3}{2}}2^{\frac{1}{2}n-m}e^{\pi i\left(m-\frac{1}{2}\right)}}{\Gamma(-m)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}m-\frac{1}{2}n+1\right)\alpha^{\frac{1}{2}(m+1)}}\times$$

$$\times F\left(-\frac{1}{2}n,\ \frac{1}{2}m+\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}m-\frac{1}{2}n+1;\ 1-\frac{1}{2}\alpha^{-1}\right).$$

---

[1]) Результаты примеров 8, 9, 10 были сообщены нам Бэйтменом (Bateman).

14. Показать, исходя из примера 13, что если интеграл сходится, то

$$\int_0^\infty e^{-\frac{3}{4}z^2} z^m D_{m+1}(z)\,dz = (\sqrt{2})^{-1-m}\,\Gamma(m+1)\sin\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}m\right)\pi.$$

(Watson)

15. Показать, что если n — положительное целое число и

$$E_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{4}z^2}(z-x)^{-1} D_n(z)\,dz,$$

то

$$E_n(x) = \pm\, i e^{\mp n\pi i}\sqrt{2\pi}\,\Gamma(n+1)\,e^{-\frac{1}{4}x^2} D_{-n-1}(\mp ix);$$

верхний или нижний знаки берутся соответственно тому, будет ли мнимая часть x положительна или отрицательна.

(Watson)

16. Показать, что если n — положительное целое число, то

$$D_n(x) = (-1)^\mu\, 2^{n+2}(2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{4}x^2}\int_0^\infty u^n e^{-2u^2}\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(2xu)\,du,$$

где μ равно тому из чисел $\frac{1}{2}n$ или $\frac{1}{2}(n-1)$, которое целое, а косинус или синус берутся, смотря по тому, будет ли n четное или нечетное.

(Адамов)

17. Показать, что если n целое положительное, то

$$D_n(x) = (-1)^\mu\left(\frac{1}{2}\pi\right)^{-\frac{1}{2}}(\sqrt{n})^{n+1} e^{\frac{1}{4}x^2} e^{-\frac{1}{2}n}(J_1+J_2-J_3),$$

где

$$J_1 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-n(v-1)^2}\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(xv\sqrt{n})\,dv,$$

$$J_2 = \int_0^\infty \sigma(v)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(xv\sqrt{n})\,dv,$$

$$J_3 = \int_{-\infty}^{0} e^{-n(v-1)^2}\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(xv\sqrt{n})\,dv$$

и

$$\sigma(v) = e^{\frac{1}{2}n(1-v^2)} v^n - e^{-n(v-1)^2}.$$

(Адамов)

18. При обозначениях, введенных в предыдущих примерах, показать, что при x вещественном

$$J_1 = \pi^{\frac{1}{2}} n^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{4}x^2} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (x\sqrt{n}),$$

в то время как J_3 удовлетворяет неравенствам

$$|J_3| < \frac{2e^{-n}}{|x|\sqrt{n}}, \quad |J_3| < \left(\frac{\pi}{2n}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-n}.$$

Показать также, что когда v возрастает от 0 до 1, $\sigma(v)$ уменьшается от 0 до минимума при $v = 1 - h_1$, а затем возрастает до 0 при $v = 1$; а когда v возрастает от 1 до ∞, $\sigma(v)$ возрастает до максимума при $1 + h_2$, а затем уменьшается и стремится к нулю; при этом

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2n}} < h_1 < \sqrt{\frac{3}{2n}}, \quad \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2n}} < h_2 < \sqrt{\frac{3}{2n}}$$

и

$$|\sigma(1 - h_1)| < An^{-\frac{1}{2}}, \quad \sigma(1 + h_2) < An^{-\frac{1}{2}}, \quad \text{где} \quad A = 0{,}0742\ldots$$

(Адамов)

19. Применяя надлежащим образом вторую теорему о среднем значении, показать, что

$$D_n(x) = \sqrt{2}\,(\sqrt{n})^n e^{-\frac{1}{2}n}\left[\cos\left(xn^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}n\pi\right) + \frac{\omega_n(x)}{\sqrt{n}}\right],$$

где $\omega_n(x)$ удовлетворяет двум неравенствам:

$$|\omega_n(x)| < \frac{3{,}35\ldots}{|x|\sqrt{\pi}} e^{\frac{1}{4}x^2}, \quad |\omega_n(0)| < \frac{1}{6} n^{-\frac{1}{2}},$$

когда x вещественно и n — целое число, большее 2.

(Адамов)

20. Показать, что если n — произвольное положительное число и если m — положительное *целое* число (или нуль), то уравнение относительно z

$$D_n(z) = 0$$

имеет m положительных корней, если $2m - 1 < n < 2m + 1$.

(Milne)

ГЛАВА 17

ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ

17.1. Коэффициенты Бесселя

В этой главе мы рассмотрим класс функций, известных под названием *функций Бесселя* или *цилиндрических функций*, которые имеют много аналогий с функциями Лежандра главы 15. Точно так же, как функции Лежандра являются частными случаями гипергеометрической функции с тремя правильными особыми точками, так и функции Бесселя являются частными случаями вырожденной гипергеометрической функции с одной правильной и одной неправильной особыми точками.

Мы введем [1]) сначала, как в случае функций Лежандра, некоторую совокупность функций Бесселя как коэффициенты некоторого разложения.

Функция

$$e^{\frac{1}{2}z\left(t-\frac{1}{t}\right)}$$

для всех значений z и t (за исключением $t=0$) может быть разложена по теореме Лорана в ряд положительных и отрицательных степеней t. Если коэффициент при t^n, где n — какое-нибудь целое число, положительное или отрицательное, обозначить через $J_n(z)$, то найдем, в силу § 5.6 части I, что

$$J_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int^{(0+)} u^{-n-1}e^{\frac{1}{2}z\left(u-\frac{1}{u}\right)}du.$$

Чтобы представить $J_n(z)$ как степенной ряд от z, положим $u=\frac{2t}{z}$; тогда

$$J_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{2}z\right)^n\int^{(0+)} t^{-n-1}\exp\left\{t-\frac{z^2}{4t}\right\}dt;$$

---

[1]) Этот порядок изложения принадлежит Шлёмильху (Schlömilch, Zs. für Math. und Phys., II (1857), 137—165).

так как контур может быть любым, лишь бы он обходил начало один раз против часовой стрелки, то мы можем принять за таковой окружность $|t| = 1$; поскольку подинтегральная функция может быть разложена в ряд по степеням z, равномерно сходящийся на этом контуре, то, по § 4.7 части I, находим

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!} \left(\frac{1}{2} z\right)^{n+2r} \int^{(0+)} t^{-n-r-1} e^t \, dt.$$

Далее, вычет подинтегральной функции при $t = 0$, по § 6.1 части I, равен $\{(n+r)!\}^{-1}$, когда $n+r$ — положительное целое число или нуль; когда же $n+r$ — отрицательное целое число, вычет равен нулю.

Поэтому, если n — положительное целое число или нуль, то

$$J_n(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{1}{2} z\right)^{n+2r}}{r!\,(n+r)!} =$$

$$= \frac{z^n}{2^n n!} \left\{ 1 - \frac{z^2}{2^2 \cdot 1\,(n+1)} + \frac{z^4}{2^4 \cdot 1 \cdot 2\,(n+1)(n+2)} - \ldots \right\};$$

если же n — отрицательное целое число, равное $-m$, то

$$J_n(z) = \sum_{r=m}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{1}{2} z\right)^{2r-m}}{r!\,(r-m)!} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+s} \left(\frac{1}{2} z\right)^{m+2s}}{(m+s)!\,s!};$$

таким образом,

$$J_n(z) = (-1)^m J_m(z).$$

Функция $J_n(z)$, которая теперь определена для всех целых значений n, положительных или отрицательных, называется *коэффициентом Бесселя порядка* n; ряд, определяющий ее, сходится для всех значений z.

Мы увидим ниже (§ 17.2), что эти коэффициенты Бесселя являются частным случаем более широкого класса функций, известных под названием *функций Бесселя*.

Ряд, которым определяется $J_n(z)$, встречается в мемуаре Эйлера о колебаниях растянутой круговой мембраны, Novi Comm. Acad. Petrop., X (1764) (опубликовано в 1766 г.), 243—260, — исследование, которым займемся ниже, в § 18.51; этот ряд встречается также в мемуаре Лагранжа по эллиптическому движению, Hist. de l'Academie R. des Sci. de Berlin XXV (1769) (опубликовано в 1771 г.), 223.

Наиболее раннее систематическое изучение этих функций было произведено в 1824 г. Бесселем в его «Untersuchung des Theils der planetarischen Störungen welcher aus der Bewegung der Sonne entsteht» (Berliner Abh., 1824);

частные случаи коэффициентов Бесселя, однако, появились в исследованиях, опубликованных ранее 1769 г.; наиболее раннее из них содержится в письме Якова Бернулли к Лейбницу [1]), датированном 3 октября 1703 г., в котором встречается ряд, называемый теперь функцией Бесселя порядка $\frac{1}{3}$; коэффициент Бесселя нулевого порядка встречается в 1732 г. в мемуаре Даниила Бернулли о колебаниях тяжелых цепей, Comm. Acad. Sci. Imp. Petrop., VI (1732—1733) (опубликовано в 1738 г.), 108—122.

При чтении некоторых из более ранних сочинений по рассматриваемому вопросу следует помнить, что обозначение теперь изменилось: то, что раньше обозначалось через $J_n(z)$, теперь обозначается через $J_n(2z)$.

Пример 1. Доказать, что если

$$\frac{2b(1+\theta^2)}{(1-2a\theta-\theta^2)^2+4b^2\theta^2}=A_1+A_2\theta+A_3\theta^2+\ldots,$$

то

$$e^{az}\sin bz=A_1J_1(z)+A_2J_2(z)+A_3J_3(z)+\ldots$$

(Math. Trip., 1896)

[Действительно, если контур D — окружность в плоскости u с центром $u=0$ и радиусом настолько большим, что она охватывает все нули знаменателя, то разложение

$$e^{\frac{1}{2}z\left(u-\frac{1}{u}\right)}\frac{2b\left(\frac{1}{u^2}+\frac{1}{u^4}\right)}{\left(1-\frac{2a}{u}-\frac{1}{u^2}\right)^2+\frac{4b^2}{u^2}}=\sum_{n=1}^{\infty}e^{\frac{1}{2}z\left(u-\frac{1}{u}\right)}A_nu^{-n-1}$$

будет равномерно сходиться на окружности D; интегрируя его по D (§ 4.7, часть I) и заменяя интегралы коэффициентами Бесселя, получим

$$\frac{1}{2\pi i}\int_D e^{\frac{1}{2}z\left(u-\frac{1}{u}\right)}\frac{2b\left(\frac{1}{u^2}+\frac{1}{u^4}\right)}{\left(1-\frac{2a}{u}-\frac{1}{u^2}\right)^2+\frac{4b^2}{u^2}}\,du=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_D e^{\frac{1}{2}z\left(u-\frac{1}{u}\right)}\left(\frac{A_1}{u^2}+\frac{A_2}{u^3}+\frac{A_3}{u^4}+\ldots\right)du=$$

$$=A_1J_1(z)+A_2J_2(z)+A_3J_3(z)+\ldots$$

В интеграле слева положим $\frac{1}{2}(u-u^{-1})-a=t$, так что когда u описывает окружность радиуса e^{β}, точка t описывает эллипс с полуосями $\operatorname{ch}\beta$ и $\operatorname{sh}\beta$ и с фокусами в $-a\pm i$; получим

$$\sum_{n=1}^{\infty}A_nJ_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{e^{z(t+a)}\,b\,dt}{t^2+b^2},$$

[1]) Опубликовано в «Leibnizens Ges. Werke», издание 3, III (Halle, 1855), 75.

причем контуром интегрирования будет только что определенный эллипс, который охватывает нули выражения t^2+b^2. Вычисляя интеграл согласно § 6.1 части I, получим требуемый результат.]

Пример 2. Показать, что если n — целое число, то

$$J_n(y+z)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(y)\,J_{n-m}(z).$$

(K. Neumann, Schläfli)

[Рассмотреть разложения обеих частей равенства

$$\exp\left\{\frac{1}{2}(y+z)\left(t-\frac{1}{t}\right)\right\}=\exp\left\{\frac{1}{2}y\left(t-\frac{1}{t}\right)\right\}\exp\left\{\frac{1}{2}z\left(t-\frac{1}{t}\right)\right\}.]$$

Пример 3. Показать, что

$$e^{iz\cos\varphi}=J_0(z)+2i\cos\varphi J_1(z)+2i^2\cos 2\varphi J_2(z)+\ldots$$

Пример 4. Показать, что при $r^2=x^2+y^2$

$$J_0(r)=J_0(x)\,J_0(y)-2J_2(x)\,J_2(y)+2J_4(x)\,J_4(y)-\ldots$$

(K. Neumann, Lommel)

17.11. Дифференциальное уравнение Бесселя

Мы видели при n целом, что функция (коэффициент) Бесселя порядка n может быть задана формулой

$$J_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{2}z\right)^n\int^{(0+)} t^{-n-1}\exp\left(t-\frac{z^2}{4t}\right)dt.$$

Исходя из этой формулы, покажем теперь, что $J_n(z)$ является решением линейного дифференциального уравнения

$$\frac{d^2y}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{dy}{dz}+\left(1-\frac{n^2}{z^2}\right)y=0,$$

которое называется *уравнением Бесселя* для функций n-го порядка.

В самом деле, дифференцируя, найдем (§ 4.2, часть I), что

$$\frac{d^2J_n(z)}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{dJ_n(z)}{dz}+\left(1-\frac{n^2}{z^2}\right)J_n(z)=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{2}z\right)^n\int^{(0+)} t^{-n-1}\left\{1-\frac{n+1}{t}+\frac{z^2}{4t^2}\right\}\exp\left(t-\frac{z^2}{4t}\right)dt=$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{2}z\right)^n\int^{(0+)}\frac{d}{dt}\left\{t^{-n-1}\exp\left(t-\frac{z^2}{4t}\right)\right\}dt=0,$$

так как $t^{-n-1}\exp\left(t-\frac{z^2}{4t}\right)$ — однозначная функция.

Таким образом, мы доказали, что

$$\frac{d^2J_n(z)}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{dJ_n(z)}{dz}+\left(1-\frac{n^2}{z^2}\right)J_n(z)=0.$$

Отметим, что $z=0$ — правильная точка, а $z=\infty$ — неправильная; все остальные точки являются обыкновенными точками уравнения.

Пример 1. Дифференцированием разложения

$$e^{\frac{1}{2}z\left(t-\frac{1}{t}\right)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}t^nJ_n(z)$$

по z и по t показать, что коэффициенты Бесселя удовлетворяют уравнению Бесселя.

(St. John's, 1899)

Пример 2. Функция $P_n^m\left(1-\frac{z^2}{2n^2}\right)$ удовлетворяет уравнению, определяемому схемой

$$P\left\{\begin{matrix} 4n^2 & \infty & 0 & \\ \frac{1}{2}m & n+1 & \frac{1}{2}m & z^2 \\ -\frac{1}{2}m & -n & -\frac{1}{2}m & \end{matrix}\right\};$$

показать, что $J_m(z)$ удовлетворяет предельной форме этого уравнения при слиянии особых точек, получаемой при $n\to\infty$.

17.2. Решение уравнения Бесселя при любом комплексном n

Приступим теперь, по образцу § 15.2, к расширению определения $J_n(z)$ на тот случай, когда n — какое угодно число, вещественное или комплексное. По методу, подобному методу § 17.11, убедимся, что для всех значений n уравнению

$$\frac{d^2y}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{dy}{dz}+\left(1-\frac{n^2}{z^2}\right)y=0$$

удовлетворяет интеграл вида

$$y=z^n\int_C t^{-n-1}\exp\left(t-\frac{z^2}{4t}\right)dt$$

при условии, что функция

$$t^{-n-1}\exp\left(t-\frac{z^2}{4t}\right)$$

принимает свое начальное значение после обхода контура C и что дифференцирования под знаком интеграла допустимы.

Соответственно этому мы определим $J_n(z)$ равенством

$$J_n(z) = \frac{z^n}{2^{n+1}\pi i} \int\limits_{-\infty}^{(0+)} t^{-n-1} \exp\left(t - \frac{z^2}{4t}\right) dt,$$

где правая часть вполне определяется, если возьмем за $\arg z$ его главное значение и примем на контуре $|\arg t| \leqslant \pi$.

Чтобы разложить этот интеграл в степенной ряд, отметим, что он будет аналитической функцией от z и что мы можем получить коэффициенты в ряде Тейлора, расположенном по степеням z, дифференцированием под знаком интеграла (§§ 5.32 и 4.44 части I). Отсюда выводим, что

$$J_n(z) = \frac{z^n}{2^{n+1}\pi i} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r z^{2r}}{2^{2r} r!} \int\limits_{-\infty}^{(0+)} e^t t^{-n-r-1} dt = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r z^{n+2r}}{2^{n+2r} r! \Gamma(n+r+1)}$$

согласно формуле § 12.22. Это и есть требуемое разложение.

Соответственно этому для любых значений n мы определяем функцию Бесселя $J_n(z)$ равенствами

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{2}z\right)^n \int\limits_{-\infty}^{(0+)} t^{-n-1} \exp\left(t - \frac{z^2}{4t}\right) dt = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r z^{n+2r}}{2^{n+2r} r! \Gamma(n+r+1)}.$$

Эта функция сводится к коэффициенту Бесселя, когда n — целое число; ее называют *функцией Бесселя первого рода.*

Так как уравнение Бесселя остается без изменения, если заменить n на $-n$, то за основные решения можно принять $J_n(z)$, $J_{-n}(z)$, за исключением случая, когда n — целое число; в этом последнем случае эти решения не будут независимыми. За этим исключением, *общее решение уравнения Бесселя имеет вид*

$$\alpha J_n(z) + \beta J_{-n}(z),$$

где α и β — произвольные постоянные.

Второе решение уравнения Бесселя, когда n — целое число, будет дано позже (§ 17.6).

17.21. Рекуррентные формулы для функций Бесселя

Так как функция Бесселя удовлетворяет предельной форме гипергеометрического уравнения при слиянии особых точек, то следует ожидать, что существуют рекуррентные формулы, соответствующие соотношениям между смежными гипергеометрическими функциями, указанным в § 14.7.

Чтобы установить эти соотношения для любых значений n, вещественных или комплексных, обратимся к результату § 17.2. Написав равенство

$$0 = \int_{-\infty}^{(0+)} \frac{d}{dt}\left\{t^{-n}\exp\left(t - \frac{z^2}{4t}\right)\right\} dt$$

в развернутом виде, получим

$$0 = \int_{-\infty}^{(0+)} \left(t^{-n} + \frac{1}{4}z^2 t^{-n-2} - nt^{-n-1}\right)\exp\left(t - \frac{z^2}{4t}\right) dt =$$

$$= 2\pi i\left\{(2z^{-1})^{n-1} J_{n-1}(z) + \frac{1}{4}z^2(2z^{-1})^{n+1} J_{n+1}(z) - n(2z^{-1})^n J_n(z)\right\},$$

и таким образом,

$$J_{n-1}(z) + J_{n+1}(z) = \frac{2n}{z} J_n(z). \tag{A}$$

Затем, пользуясь § 4.44 части I, имеем

$$\frac{d}{dz}\{z^{-n}J_n(z)\} = \frac{1}{2^{n+1}\pi i}\frac{d}{dz}\int_{-\infty}^{(0+)} t^{-n-1}\exp\left(t - \frac{z^2}{4t}\right) dt =$$

$$= -\frac{z}{2^{n+2}\pi i}\int_{-\infty}^{(0+)} t^{-n-2}\exp\left(t - \frac{z^2}{4t}\right) dt = -z^{-n}J_{n+1}(z),$$

и следовательно, обозначая штрихом дифференцирование по z, имеем

$$J_n'(z) = \frac{n}{z} J_n(z) - J_{n+1}(z). \tag{B}$$

Из (A) и (B) легко вывести другие рекуррентные формулы:

$$J_n'(z) = \frac{1}{2}\{J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z)\} \tag{C}$$

и

$$J_n'(z) = J_{n-1}(z) - \frac{n}{z} J_n(z). \tag{D}$$

Пример 1. Получить эти формулы из степенного ряда для $J_n(z)$.
Пример 2. Показать, что

$$\frac{d}{dz}\{z^n J_n(z)\} = z^n J_{n-1}(z).$$

Пример 3. Показать, что

$$J_0'(z) = -J_1(z).$$

Пример 4. Показать, что

$$16J_n^{(IV)}(z) = J_{n-4}(z) - 4J_{n-2}(z) + 6J_n(z) - 4J_{n+2}(z) + J_{n+4}(z).$$

Пример 5. Показать, что

$$J_2(z) - J_0(z) = 2J_0''(z).$$

Пример 6. Показать, что

$$J_2(z) = J_0''(z) - z^{-1}J_0'(z).$$

17.211. Соотношение между двумя функциями Бесселя, порядки которых отличаются на целое число

Из последнего параграфа можно вывести равенство, связывающее любые две функции Бесселя, порядки которых отличаются на целое число, а именно:

$$z^{-n-r}J_{n+r}(z) = (-1)^r \frac{d^r}{(z\,dz)^r}\{z^{-n}J_n(z)\},$$

где n — любое, а r — положительное целое число. Эта формула выводится непосредственно по индукции из формулы (B), если написать последнюю в виде

$$z^{-n-1}J_{n+1}(z) = -\frac{d}{z\,dz}\{z^{-n}J_n(z)\}.$$

17.212. Связь между функциями $J_n(z)$ и $W_{k,m}$

Читатель легко убедится в том, что если мы в уравнении Бесселя положим $y = z^{-\frac{1}{2}}v$ и затем $z = \frac{x}{2i}$, то получим уравнение

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{\frac{1}{4} - n^2}{x^2}\right)v = 0,$$

которому удовлетворяет функция $W_{0,n}(x)$; отсюда следует, что

$$J_n(z) = Az^{-\frac{1}{2}}M_{0,n}(2iz) + Bz^{-\frac{1}{2}}M_{0,-n}(2iz).$$

Сравнивая коэффициенты при $z^{\pm n}$ в обеих частях, найдем, что

$$J_n(z) = \frac{z^{-\frac{1}{2}}}{2^{2n+\frac{1}{2}}\,i^{n+\frac{1}{2}}\,\Gamma(n+1)}M_{0,n}(2iz),$$

за исключением критических случаев, когда $2n$ — отрицательное целое число; если n равно половине отрицательного нечетного числа, то результат получается из второй формулы Куммера (§ 16.11).

17.22. Нули функций Бесселя, порядок которых n вещественный

Соотношения § 17.21 дают возможность вывести интересную теорему, а именно: *между любыми двумя последовательными вещественными нулями функции $z^{-n}J_n(z)$ лежит один и только один нуль*[1]) *функции $z^{-n}J_{n+1}(z)$*, так как из соотношения (B), написанного в виде

$$z^{-n}J_{n+1}(z) = -\frac{d}{dz}\{z^{-n}J_n(z)\},$$

вытекает по теореме Ролля[2]), что между каждой парой последовательных нулей функции $z^{-n}J_n(z)$ имеется по крайней мере один нуль функции $z^{-n}J_{n+1}(z)$.

Подобным же образом из соотношения (D), написанного в виде

$$z^{n+1}J_n(z) = \frac{d}{dz}\{z^{n+1}J_{n+1}(z)\},$$

вытекает, что между каждой парой последовательных нулей функции $z^{n+1}J_{n+1}(z)$ имеется по крайней мере один нуль функции $z^{n+1}J_n(z)$.

Далее, функции $z^{-n}J_n(z)$ и $\frac{d}{dz}\{z^{-n}J_n(z)\}$ не имеют общих нулей, ибо первая функция удовлетворяет уравнению

$$z\frac{d^2y}{dz^2} + (2n+1)\frac{dy}{dz} + zy = 0,$$

и легко убедиться по индукции дифференцированием этого уравнения, что если y и $\frac{dy}{dz}$ равняются нулю для какого-нибудь значения z, то и все производные от y равняются нулю, и y будет нулем согласно § 5.4 части I.

Доказываемая теорема теперь очевидна, кроме случая наименьших по абсолютной величине нулей $\pm\xi$ функции $z^{-n}J_n(z)$, так как $z^{-n}J_n(z)$ и $z^{n+1}J_n(z)$ имеют одни и те же нули, за исключением $z=0$. Однако $z=0$ есть нуль функции $z^{-n}J_{n+1}(z)$, и если бы имелся какой-нибудь другой положительный нуль ξ_1 функции $z^{-n}J_{n+1}(z)$, меньший, чем ξ, то функция $z^{n+1}J_n(z)$ имела бы нуль между 0 и ξ, что противоречит предположению, что между 0 и ξ нет нулей функции $z^{n+1}J_n(z)$.

Теорема поэтому доказана.

[См. также § 17.3, примеры 3 и 4 и пример 19 в конце главы.]

---

[1]) Доказательства этой теоремы даны Бохером (Bôcher, Bull. American Math. Soc., IV (1897), 206), Гегенбауэром (Gegenbauer, Monatshefte für Math., VIII (1897), 383) и Портером (Porter, Bull. American Math. Soc., IV (1898), 274).

[2]) Эта теорема доказана для полиномов в «Theory of Equations» (I, 157) Бернсайда и Пэнтона (Burnside and Panton). Ее можно получить для любых функций с непрерывными производными, пользуясь первой теоремой о среднем значении (§ 4.14, часть I).

17.23. Интеграл Бесселя для коэффициентов Бесселя

Выведем теперь интеграл, данный впервые Бесселем для частного случая функций Бесселя, когда n — положительное целое число; в некоторых отношениях этот результат имеет сходство с интегралами Лапласа, данными в §§ 15.23 и 15.33 для функций Лежандра.

В интеграле § 17.1, т. е. в

$$J_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int^{(0+)} u^{-n-1}e^{\frac{1}{2}z\left(u-\frac{1}{u}\right)}\,du,$$

возьмем в качестве контура окружность $|u|=1$ и положим $u=e^{i\theta}$, так что

$$J_n(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ni\theta+iz\sin\theta}\,d\theta.$$

Разделим интервал интегрирования пополам и в первой части заменим θ на $-\theta$; получим

$$J_n(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} e^{ni\theta-iz\sin\theta}\,d\theta+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} e^{-ni\theta+iz\sin\theta}\,d\theta,$$

и таким образом,

$$J_n(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\theta-z\sin\theta)\,d\theta;$$

это и есть искомая формула.

Пример 1. Показать, что если z вещественно, а n — целое число, то

$$|J_n(z)|\leqslant 1.$$

Пример 2. Показать, что для всех значений n (вещественных или комплексных) интеграл

$$y=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\theta-z\sin\theta)\,d\theta$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2y}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{dy}{dz}+\left(1-\frac{n^2}{z^2}\right)y=\frac{\sin n\pi}{\pi}\left(\frac{1}{z}-\frac{n}{z^2}\right),$$

которое приводится к уравнению Бесселя, когда n — целое число.

[Легко показать дифференцированием под знаком интеграла, что выражение в левой части равно

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{d}{d\theta}\left\{\left(\frac{n}{z^2}+\frac{\cos\theta}{z}\right)\sin(n\theta-z\sin\theta)\right\}d\theta.\Big]$$

17.231. Видоизменение интеграла Бесселя, когда n не целое число

Покажем теперь, что[1]) для любых значений n

$$J_n(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\theta-z\sin\theta)\,d\theta-\frac{\sin n\pi}{\pi}\int_0^{\infty}e^{-n\theta-z\operatorname{sh}\theta}\,d\theta, \qquad \text{(A)}$$

когда $\operatorname{Re} z>0$. Эта формула, очевидно, приводится к формуле § 17.23, когда n — целое число. Если в интеграле § 17.2, т. е. в

$$J_n(z)=\frac{z^n}{2^{n+1}\pi i}\int_{-\infty}^{(0+)}t^{-n-1}\exp\left(t-\frac{z^2}{4t}\right)dt,$$

предполагая, что z положительное, положим $t=\frac{1}{2}uz$, то получим

$$J_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{(0+)}u^{-n-1}\exp\left\{\frac{1}{2}z\left(u-\frac{1}{u}\right)\right\}du.$$

Но если контур представляет собою фигуру, состоящую из вещественной оси от -1 до $-\infty$, взятой дважды, и окружности $|u|=1$,

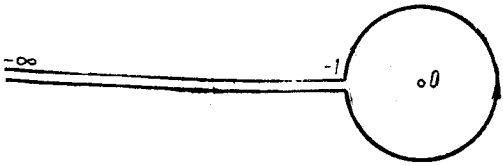

Рис. 4.

то этот интеграл представляет аналитическую функцию от z, когда $\operatorname{Re}(zu)$ становится отрицательной при $|u|\to\infty$ на выбранном контуре, т. е. когда $|\arg z|<\frac{1}{2}\pi$; таким образом, по теории аналитического продолжения формула (которая доказана прямым преобразованием для *положительных* значений z) имеет место уже при условии $\operatorname{Re} z>0$. Отсюда

$$J_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{-\infty}^{-1}+\int_C+\int_{-1}^{-\infty}\right\}u^{-n-1}\exp\left\{\frac{1}{2}z\left(u-\frac{1}{u}\right)\right\}du,$$

где C обозначает окружность $|u|=1$, $\arg u=-\pi$ на первом участке пути интегрирования и $\arg u=+\pi$ на третьем участке.

---

[1]) Этот результат принадлежит Шлефли (Schläfli, Math. Ann., III (1871), 148).

Положив $u = te^{\mp \pi i}$ в первом и третьем интегралах соответственно (так что в каждом случае $\arg t = 0$) и $u = e^{i\theta}$ во втором, получим

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ni\theta + iz \sin\theta} d\theta +$$

$$+ \left\{ \frac{e^{(n+1)\pi i}}{2\pi i} - \frac{e^{-(n+1)\pi i}}{2\pi i} \right\} \int_1^{\infty} t^{-n-1} e^{\frac{1}{2} z \left(-t + \frac{1}{t}\right)} dt.$$

Преобразуя первый из этих интегралов, как в § 17.23, и полагая $t = e^{\theta}$ во втором, получим окончательно

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(n\theta - z \sin\theta)\, d\theta + \frac{\sin(n+1)\pi}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-n\theta - z \operatorname{sh}\theta} d\theta,$$

что и представляет собою искомый результат, когда $|\arg z| < \frac{1}{2}\pi$.

Если $|\arg z|$ лежит между $\frac{1}{2}\pi$ и π, то в силу соотношения

$$J_n(z) = e^{\pm n\pi i} J_n(-z)$$

имеем

$$J_n(z) = \frac{e^{\pm n\pi i}}{\pi} \left\{ \int_0^{\pi} \cos(n\theta + z \sin\theta)\, d\theta - \sin n\pi \int_0^{\infty} e^{-n\theta + z \operatorname{sh}\theta} d\theta \right\}, \qquad \text{(B)}$$

где верхний или нижний знак берется в зависимости от того, будет ли $\arg z > \frac{1}{2}\pi$ или $< -\frac{1}{2}\pi$.

Если n — целое число, то (A) сразу приводится к интегралу Бесселя, (B) также приводится к этому интегралу, если воспользоваться равенством. $J_n(z) = (-1)^n J_{-n}(z)$, имеющим место для целых значений n.

Равенство (A), как уже указано, принадлежит Шлефли (Schläfli, Math. Ann., III (1871), 148), а равенство (B) было дано Сониным (Math. Ann., XV (1880), 14). Эти тригонометрические интегралы для функций Бесселя можно рассматривать как аналоги интегралов Лапласа для функций Лежандра, ибо (§ 17.11, пример 2) $J_m(z)$ удовлетворяет предельной форме (получаемой, когда $n \to \infty$) уравнения для $P_n^m\left(1 - \frac{z^2}{2n^2}\right)$.

Но интеграл Лапласа для этой функции отличается лишь постоянным множителем от выражения

$$\int_0^{\pi} \left[1 - \frac{z^2}{2n^2} + \left\{ \left(1 - \frac{z^2}{2n^2}\right)^2 - 1 \right\}^{\frac{1}{2}} \cos\varphi \right]^n \cos m\varphi\, d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi} \left\{ 1 + \frac{iz}{n} \cos\varphi + O(n^{-2}) \right\}^n \cos m\varphi\, d\varphi.$$

Предел подинтегральной функции при $n \to \infty$ равен $e^{iz\cos\varphi}\cos m\varphi$, что и показывает сходство интеграла Лапласа для функции $P_n^m(z)$ с интегралами Бесселя — Шлефли для функции $J_m(z)$.

Пример 1. Вывести из формулы $J_0(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-ix\cos\varphi}\,d\varphi$, изменяя порядок интегрирования, что при n положительном целом и $\cos\theta > 0$

$$P_n(\cos\theta) = \frac{1}{\Gamma(n+1)}\int\limits_0^\infty e^{-x\cos\theta} J_0(x\sin\theta)\,x^n\,dx.$$

(Callandreau, Bull. des Sci. Math. (2), XV 1891, 121).

Пример 2. Показать, что при определении Ферररса функции $P_n^m(\cos\theta)$

$$P_n^m(\cos\theta) = \frac{1}{\Gamma(n-m+1)}\int\limits_0^\infty e^{-x\cos\theta} J_m(x\sin\theta)\,x^n\,dx,$$

когда n и m — положительные целые числа и $\cos\theta > 0$.

(Hobson, Proc. London Math. Soc., XXV (1894), 49)

17.24. Функции Бесселя, порядок которых равен половине нечетного целого числа

Мы видели (§ 17.2), что если порядок n функции Бесселя $J_n(z)$ равен половине нечетного целого числа, то разность корней определяющего уравнения при $z = 0$ равна $2n$ и, следовательно, будет целым числом [1]). Мы покажем теперь, что в таких случаях $J_n(z)$ выражается через элементарные функции; в самом деле,

$$J_{\frac{1}{2}}(z) = \frac{2^{\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{2}}}{\pi^{\frac{1}{2}}}\left\{1 - \frac{z^2}{2\cdot 3} + \frac{z^4}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \ldots\right\} = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}}\sin z,$$

и следовательно, (§ 17.211), если k — положительное целое число,

$$J_{k+\frac{1}{2}}(z) = \frac{(-1)^k (2z)^{k+\frac{1}{2}}}{\pi^{\frac{1}{2}}}\,\frac{d^k}{d(z^2)^k}\left(\frac{\sin z}{z}\right).$$

---

[1]) В § 17.2 определяющее уравнение (см. § 10.3 части I) не упоминается. Авторы приводят там общий вид решения уравнения Бесселя $\alpha J_n(z) + \beta J_{-n}(z)$ при нецелых n. Начальные степени z в решениях $J_n(z)$ и $J_{-n}(z)$ суть z^n и z^{-n}, а их показатели n и $-n$ как раз и служат корнями определяющего уравнения в точке $z = 0$. Неясно, однако, какова связь этого факта с выражением функций Бесселя с полуцелым индексом через элементарные. — *Прим. ред.*